ISSN 1815-6355

第三十四期
二〇一三年 十月
No. 34
October 2013

台灣數學教師(電子)期刊

Taiwan Journal of Mathematics Teachers

國立臺灣師範大學數學系
Department of Mathematics,
National Taiwan Normal University

台灣數學教育學會
Taiwan Association
for Mathematics Education

台灣數學教師(電子)期刊

第 34 期　2013 年 10 月

發行單位　國立臺灣師範大學數學系
台灣數學教育學會

地址　台北市汀州路四段 88 號國立臺灣師範大學數學系
《台灣數學教師(電子)期刊》
電話　886-2-7734-6576
傳真　886-2-2933-2342
電子郵件　tjmeassistant@gmail.com
網址　http://tame.tw/forum.php?mod=forumdisplay&fid=74

主編的話

《台灣數學教師(電子)期刊》自 2005 年創刊，從第一期至今 34 期已歷九年，它提供臺灣數學教育研究與實務經驗的交流與分享之溝通平台。台灣數學教育學會原擬擴充期刊的品質與量數，新創《臺灣數學教育期刊》，並將《台灣數學教師(電子)期刊》併入新創期刊之教學實務部分。因考量新創之《臺灣數學教育期刊》能擠列 TSSCI 名單為近期目標，而將教學實務部分再回歸至《台灣數學教師(電子)期刊》。

本期共刊登兩篇文章：(1)靳衛軍與王西茜共同著作的「由反三角函數教學引發的哲學思考」及(2)吳如皓與董增萊共同發表的「從教學面看數學素養」。兩篇文章中，前者為高中數學內涵，後者為國中數學題材，作者都是透過教學實例，從問題出發解析問題的數學本質意義，藉由教學反思，進行教室教學的評論與建議。在第一篇文章中，從一道反三角函數的高考試題進行深層反思，並對只為應試的解題教學，可能造成學生對數學膚淺理解作出教學評論，進而提出「真正的教育不僅傳授真理，而且向學生傳授對待真理的態度」。第二篇文章以計算器處理近似值的問題為題材，說明數學素養教學的意涵。作者從實際教學經驗，展現數學素養教學的可能模式以及他們的心得：「在數學素養的學習歷程中，我們看到了數學教學更多的可能性」。

本期刊自本期(第 34 期)改由台灣數學教育學會與國立臺灣師範大學數學系共同發行，主要刊登數學教學實務經驗之文稿。敬請各界繼續支持，不吝賜稿。

《台灣數學教師(電子)期刊》主編

左台益

台灣數學教師(電子)期刊

第 34 期

2005 年 3 月創刊　　2013 年 10 月出刊

目錄

Taiwan Journal of Mathematics Teachers

Issue 34

First Issue: March 2005 Current Issue: October 2013

CONTENTS

靳衛軍、王西茜（2013）。
由反三角函數教學引發的哲學思考。
台灣數學教師(電子)期刊，**34**，1-12。

由反三角函數教學引發的哲學思考

靳衛軍[1]　王西茜[2]
[1]山西省長治市華北機電學校圖書館
[2]山西太原師範學院計算機系 2008 級學生

反三角函數概念一直是教學難點，本文通過典型問題的深入反思，尤其例 3 反思中兩種不同方法引發出現的問題，不僅暴露出對問題理解的膚淺，更加凸顯出傳統解題教學方法的弊端，深入反思不僅促進了學生對問題的深刻理解，同時也更進一步體驗到數學本質上是一種理性探索精神。

關鍵詞：反三角函數概念、數學反思、數學理解

通訊作者：靳衛軍，e-mail：1596357695@qq.com
收稿：2013 年 5 月 3 日；
接受刊登：2013 年 9 月 27 日。

例子總是比說教來的強，讓我們靜心來研究幾個例子吧——我總認為例子比泛談更重要。[1]

只有理解人類如何獲得某些事實或概念的知識，我們才能對人類的孩子如何獲得這樣的知識作出更好的判斷。[2]

—— 喬治．波利亞（George Pólya）

壹、實踐暴露出的問題　反思中突破

反三角函數概念一直是教學難點，從課堂表面教學效果上看學生能完成教材的習題，對概念是有一定的認識，但涉及深層次理解的問題就暴露出了理解上的不足。下面是筆者在教學中遇到的問題。

一、一道令人迷惑的高考選擇題

例 1．函數 $f(x)=\sin x$， $x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$的反函數 $f^{-1}(x)=$（　　）

（A）$-\arcsin x$， $x\in[-1,1]$　　（B）$-\pi-\arcsin x$， $x\in[-1,1]$

（C）$\pi+\arcsin x$， $x\in[-1,1]$　　（D）$\pi-\arcsin x$， $x\in[-1,1]$

題目出處：2003普通高等學校招生全國統一考試（全國卷）：數學（理工農醫類）（2013）

筆者一時無法給出一個正面、直接的解答，決定嘗試看看可能是哪一個答案，然後再作嚴格證明。筆者嘗試做了解答。我們知道原函數的定義域即為反函數的值域。 $f^{-1}(x)=\arcsin x$ 顯然不合題意。因為$-\frac{\pi}{2}\le\arcsin x\le\frac{\pi}{2}$ ，而$\frac{\pi}{2}\le\pi+\arcsin x\le\frac{3\pi}{2}$ ，我覺得選（C）比較合理，可參考答案為（D）。參考答案也給出了一個相似的理由，選（D）似乎也是合理的，因為$-\frac{\pi}{2}\le-\arcsin x\le\frac{\pi}{2}$ ，而$\frac{\pi}{2}\le\pi-\arcsin x\le\frac{3\pi}{2}$，所以 $f^{-1}(x)=\pi-\arcsin x$也在情理中。兩個答案究竟應該選擇哪一個？一個函數的反函數形式應該是唯一的。我們在求反函數時一定錯了，但錯在哪確實需要澄清。一時沒有頭緒找個學生談談，或許交流中能有什麼新的想法。

二、學生的解答

根據反函數的值域和單調性學生很快就給出了正確答案。

首先，由 $x\in[-1,1]$ 得 $-\frac{\pi}{2}\le\pm\arcsin x\le\frac{\pi}{2}$ ，則 $-\frac{3\pi}{2}\le-\pi-\arcsin x\le-\frac{\pi}{2}$ ，

[1] Pólya，1962／劉景麟、曹之江、鄒清蓮譯，2007，頁 288

[2] Pólya，1962／劉景麟、曹之江、鄒清蓮譯，2007，頁 316

$-\frac{\pi}{2} \le \pi \pm \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$。而 $f(x)$ 的定義域為 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$，所以只有（C）、（D）符合。

其次，易知 $y=\arcsin x$ 在 $[-1,1]$ 上嚴格單調遞增，$y=-\arcsin x$ 在 $[-1,1]$ 上嚴格單調遞減，因為原函數與反函數的單調性是一致的，而 $f(x)=\sin x$ 在其定義域 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 內嚴格單調遞減，所以選（D）。

三、理性探索精神的培養

學生能得到正確答案至此一般的課堂教學就達到目的了，就此結束就有點遺憾。反思過程獲得的副產品要比單純的正確答案重要，我們在解題過程中是為培養學生的理性探索精神。僅滿足淺嘗輒止的教學缺失了更多的教育內涵。

整個數學思考是個複雜的過程，在無法正面、直接地給出答案的情況下，我們可盡可能的排除縮小範圍，確定出問題的可能性。這只是數學思考的一個環節，我們需要嚴格的證明，進一步確認結果。筆者進一步追問：我們通過排除法只能說明（D）是有可能正確的，如果沒有給出選項我們又如何求出函數的反函數呢？我們通過排除法只能說明（D）是有可能正確的，能確切證明這一結論嗎？下面是學生的解答。

設 $y=\sin x$。$x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$，則 $x-\pi$（或 $\pi-x$）$\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $y=\sin x=-\sin(x-\pi)$。這一步是在畫已知函數的草圖時想到的，$\sin x$ 中的 x 不在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 內，但可以改變函數式，使角的範圍理想化且得到的函數與已知函數的圖像相同，如此他們的反函數自然相同。

$x-\pi=\arcsin(-y)$，$x=\pi-\arcsin y$，即 $f^{-1}(x)=\pi-\arcsin x$。所以答案為（D）。

當然，由 $y=\sin x=\sin(\pi-x)$ 也可以得到答案，比上面的解答要簡單一點。

四、筆者對反三角函數概念教學的反思

函數 $y=\sin x$，$x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 的反函數究竟是哪一個呢？我們通過學習教材已經知道了函數 $y=\sin x$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 的反函數，怎麼會對這一類似問題感到似無從回答呢？其實只要搞清求反函數的方法實質，及如何求三角函數 $y=\sin x$ 的反函數，問題就迎刃而解。求函數 $y=f(x)$ 的方法實質是：把 $y=f(x)$ 看作 x 的方程，y 看作已知數，不妨設其解為 $x=f^{-1}(y)$。如果方程 $f(x)=y$ 有唯一解，則稱存在反函數：$x=f^{-1}(y)$，記為 $y=f^{-1}(x)$。如由 $y=f(x)=2x-1$，得：$x=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}$ 所得反函數 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$。又如 $y=f(x)=x^2$，解之得：$x=\pm y$，知其不存在反函數。

我們知道對函數 $y=\sin x$ ， $x\in R$ 來說是不存在反函數的，若把函數定義域限制在某一嚴格單調區間才存在反函數。為了方便，我們把函數定義域限制在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 來研究原函數的反函數。求反函數的方法實質是解關於 x 的方程 $y=\sin x$ 。

要解關於 x 的方程 $y=\sin x$ 是一難事，我們假定 x 已解出並引進符號來表示其解： $x=\arcsin y$ 。由此便得到了反三角函數的概念。我們在引進根號符號、對數符號都是採用了類似的方法。比如 $x^2=7$ ，則 $x=\pm\sqrt{7}$ ，若 $5^x=3$ 則 $x=\log_5 3$ 。反三角函數概念、性質的證明歷來是教學的難點，突破的關鍵在於對符號 $\arcsin y$ 的深刻理解。由定義可以挖掘出 $\arcsin y$ 有三層含義：（1） $\arcsin y$ 表示一角 x ，（2）並且角 x 的正弦值為 y ，（3）而且 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 。這樣便可以對反三角函數的概念、性質有比較深刻的理解。關於反三角函數性質的證明我們將在下面予以說明。

現在問題化歸為：已知函數 $y=\sin x$ ， $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 的反函數 $y=f^{-1}(x)=\arcsin x$ ，求函數 $y=\sin x$ ， $x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 的反函數。我們知 $\arcsin y$ 表示一正弦值為 y 的角且該角在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 。解答問題的實質是如何用 $\arcsin y$ 表示正弦值為 y 且在 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 的角。在單位圓中易知滿足該條件的角為： $\pi-\arcsin y$ 。故選（D）。

我們只是概括地談論了反三角函數概念的本質，與其在歷史上的呈現方式、現代教材的不盡相同，而且隨著時代的不同人們對反三角函數概念在數學中的地位、作用認識亦不盡相同，這些會在課綱改革中反映出來。探討這一歷史的變遷不僅是件有趣的事情而且對課綱的制定、改革有著重要的理論、現實意義，值得深入反思。

五、對學生解題過程的瞭解　恰如其分的指導

單純從一個答案是看不出學生的思維，也無法給學生恰如其分的指導。我們只能通過學生對解題過程的敍述來瞭解判斷學生理解的深淺程度。學生感到用文字表達思考過程及答案比較難，總覺心裏明白文字表達上有些不清，費了番周折才寫出了幾行自己不滿意的解答。根據學生的理解情況筆者引導學生反思了反三角函數概念的形成過程，學生對反三角函數概念有了更為清晰深刻的認識，同時學會了鑒賞什麼樣的證明才是清晰簡明的。

如果僅滿足能給出正確答案，教學似缺失了什麼。莫里斯．克萊因（Morris Kline）在《西方文化中的數學》一書中談到：

> 數學的另一個重要特徵是它的符號語言。如同音樂利用符號來代表和傳播聲音一樣，數學也用符號表示數量關係和空間形式。憑藉數學語言的嚴密性和簡潔性，數學家們就可以表達和研究數學思想，這些思想如果用普通語言表達出來，就會顯得冗長不堪。這種簡潔性有助於思維的效率。（Kline，1953／張祖貴譯，2005，頁 5）

當然，我們不能過高地期望學生能用準確簡練的數學語言表達思想，學會欣賞數學語言闡述問題簡單明瞭深刻的風格是一種文化修養。

六、教學啟示

我們回過頭來回顧一下學生看到這一題目時的最初反應，有的學生感到茫然不知如何求它的反函數，卻不會、不知反思一下學了反三角函數卻又為什麼不會做該題。有的同學根據選項通過排除法作了合理的選擇，至此就算完事大吉了卻不會更多地思考。

中國大陸大多數教師都在教解答選擇題的方法、技巧，這種學習方式對知識的理解只能停留在表面淺層，通過反思才能對問題有本質的理解。學生學會自主反思是學習的一個重要環節，教學生反思的教學和單純講解解題技巧的教學有著本質的不同。

貳、簡單的證明　漫長艱辛的過程

繼反三角函數概念後研究其性質是一種邏輯必然，因為研究反三角函數必然要涉及函數的奇偶性的判斷，這一性質證明是必要的。大陸高級中學課本代數（甲種本）（人民教育出版社數學編輯室，1983）給出了反三角函數的兩個性質：

$\arcsin(-x) = -\arcsin x$ ， $x \in [-1,1]$ （1）

$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$ ， $x \in [-1,1]$ （2）

其中性質（1）是通過觀察反正弦函數圖像而得出，性質（2）給出了一個較複雜的代數證明。我們不妨引述一下這一證明（人民教育出版社數學編輯室，1983，頁 10）：

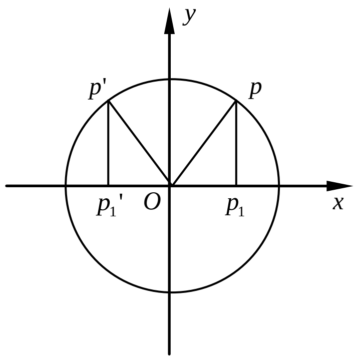
> 由 $-1 \le x \le 1$，得 $1 \ge -x \ge -1$，即 $-x$ 屬於反餘弦函數的定義域 $[-1,1]$。
> 根據誘導公式[3]與反餘弦函數的定義，得 $\cos(\pi - \arccos x) = -\cos(\arccos x) = -x$，因此，$\pi - \arccos x$ 是餘弦函數等於 $-x$ 的一個值，又因 $0 \le \arccos x \le \pi$，所以 $0 \ge -\arccos x \ge -\pi$，由此可得 $\pi \ge \pi - \arccos x \ge 0$，即 $\pi - \arccos x \in [0,\pi]$。

[3] 此處使用的誘導公式為 $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$

因此，$\pi-\arccos x$ 是屬於 $[0,\pi]$ 且它的餘弦等於 $-x$ 的一個值。於是 $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$。

學生感到這一證明生澀難懂。通過觀察反正弦函數圖像而得出性質（1），從嚴格的角度說並不能作為嚴謹的證明，而且同一問題給出了兩種截然不同的證明方法，也不太令人滿意。反三角函數的性質歷來是教學的難點，刊物上多有文章論及。筆者找到一直觀、簡捷、統一的證明方法。下面以（2）為例作一說明。

設 $\alpha=\arccos x$，$\alpha'=\arccos(-x)$，在單位圓中可把角 α、α' 作出來。如右圖，若 α 的終邊為 op，易知 α' 的終邊 op' 與 α 的終邊關於 y 軸對稱。即 $\alpha=\angle p_1op$，$\alpha'=\angle p_1op'$



在 Rt△ pop_1 與 Rt△ $p'op_1'$ 中

$\because |op|=|op'|=1$，$|op_1|=|op_1'|=x$

$\therefore \triangle pop_1 \cong \triangle p'op_1'$

$\therefore \angle p_1op'=\pi-\angle p'op_1'=\pi-\angle p_1op$

即：$\arccos(-x)=\pi-\arccos x$

反三角函數性質證明難點的突破歸根結底在於對反三角函數概念的本質及對於數學符號 $\arccos x$ 本質的深刻理解。

本文中的例 2 作為一道高考題從嚴格的意義上說可以反映出學生對反三角函數性質及定義是否有深刻理解，有一定的難度、不失為一道好題。大多數學生都是按照教師介紹的流行方法解答，特值否定法、排除法確能幫助學生得到分數。令 $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 代入 4 個選項立刻得到答案，教學既輕鬆又簡單，師生皆大歡喜。何樂而不為？但這裏既沒對反三角函數概念、性質的理解，又沒有嚴格的數學證明。這就是數學嗎？恐怕無人會認同這種對數學的膚淺理解。毋庸諱言，我們的教育（大陸而言）是緊緊圍繞升學應試服務的。多年來這種解題思想方法在教學中是流行的。教學中反復強化這種方法技巧有失數學教育的價值、存在著弊端。

例 2．當 $x\in[-1,0]$ 時，在下面關係式中正確的是（　）

（A）$\pi-\arccos(-x)=\arcsin\sqrt{1-x^2}$　（B）$\pi-\arcsin(-x)=\arccos\sqrt{1-x^2}$

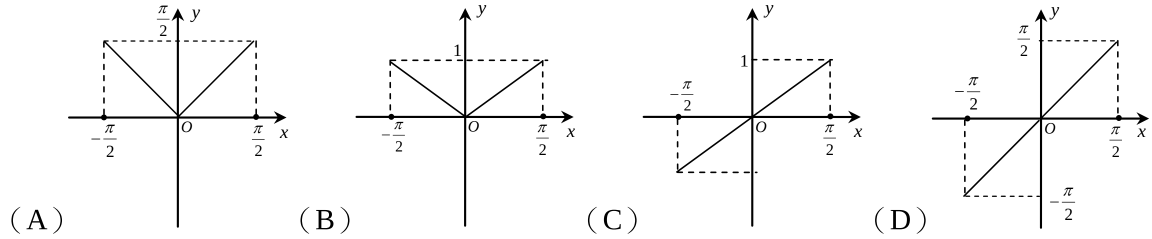
（C）$\pi-\arccos x=\arcsin\sqrt{1-x^2}$　（D）$\pi-\arcsin x=\arccos\sqrt{1-x^2}$

題目出處：1986 年普通高等學校招生全國統一考試理科數學卷（2011）

叁、簡單的性質　意外的問題

一、一道高考題　學生的解答

例 3．函數 $y=\arccos(\cos x)$ 　$x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$)的圖像是（　）



題目出處：1987 年普通高等學校招生全國統一考試理科數學卷（2011）

筆者對學生用特值法給出的正確答案（A）不滿意。通過一些數學例子學生已培養起什麼是真正的數學證明的意識，知道朝哪個方向努力。所以學生又給出了下面的解答。在學生沒養成自覺深入反思習慣的前提下，教師的提問是有必要的。

若 $t=\cos\theta$ （ $\theta\in[0,\pi]$ ），則 $\theta=\arccos t$ ，所以 $\arccos(\cos x)=\arccos t=\theta$ 。由此，當 $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$ 時， $y=\arccos(\cos x)=x$ ；當 $-\dfrac{\pi}{2}\le x<0$ 時， $y=\arccos[\cos(-x)]=-x$ 。

二、筆者對教材的反思 傳統解題教學方法的深層弊端

大陸高級中學課本代數（甲種本）（人民教育出版社數學編輯室，1983）先說明了為什麼 $\sin(\arcsin\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{2}$，然後上升為一般結論「一般地，根據函數的定義，可以得到 $\sin(\arcsin x)=x$，其中 $x\in[-1,1]$， $\arcsin x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 」。說明方法比較複雜，我們在此引述一下（人民教育出版社數學編輯室，1983，頁 1-3）：

> 由正弦函數的圖像（圖略）可以看到，在正弦函數的單調區間 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上，對於 x 的每一個值， $y=\sin x$ 在 $[-1,1]$ 上有唯一的值和 x 對應；反過來，對於 y 在 $[-1,1]$ 的一個值， x 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上也有唯一的值和 y 對應。所以函數 $y=\sin x$（ $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ ）有反函數。
>
> 函數 $y=\sin x$（ $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ ）的反函數叫做反正弦函數，記作 $x=\arcsin y$ 。

習慣上用字母 x 表示自變量，用 y 表示函數，所以反正弦函數可以寫成 $y=\arcsin x$，它的定義域是 $[-1,1]$。

這樣，對於屬於 $[-1,1]$ 的每一個 x 值，$\arcsin x$ 就表示屬於 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 的唯一確定的一個值，它的正弦正好等於已知的 x。也可以說，$\arcsin x$ 表示屬於 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 的唯一確定的一角（弧度數），這個角的正弦恰好等於 x。例如，對於 $x=\frac{1}{2}$，$y=\arcsin\frac{1}{2}$ 就表示 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上使 $\sin y=\frac{1}{2}$ 是唯一確定的一個角，這個角是 $\frac{\pi}{6}$，因為根據正弦函數 $y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的單調性可以知道，在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上，除了 $\frac{\pi}{6}$ 以外，其他任何角的正弦都不等於 $\frac{1}{2}$。由此可以得到 $\sin(\arcsin\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$。

一般的，根據反正弦函數的定義，可以得到 $\sin(\arcsin x)=x$，其中 $x\in[-1,1]$，$\arcsin x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$。

筆者作學生時稀裏糊塗地學過這些內容，當了教師也認為沒什麼可講的，照本宣科地講給了學生。講評例 3 時也是按照流行的方法講解。

後來才意識到教材的例題和我們的考題是類似的，為什麼不按教材的方法給出一直接解答？……不知師生是否還記得教材上這段講述，但在此問題上突出表明教材對師生的影響並不是很大。以前對課本中的數學證明膚淺而輕慢的態度不僅害己更重要的是誤學生。

當然，我們可以按教材的方法給出一直接解答，只是在此框架、背景下的表述比較麻煩，解答過程略。我們對教材作深入反思是有益的。經反思其實我們可給出 $\sin(\arcsin x)=x$ 的一更簡單的說明。注意到 $y=\sin(\arcsin x)$ 為一複合函數，令 $y=f(x)=\sin x$，$y=f^{-1}(x)=\arcsin x$，則 $\sin(\arcsin x)=f[f^{-1}(x)]$，而 $f[f^{-1}(x)]=x$ 是一簡單性質。這一高考題從本質上是相同的，令 $y=f(x)=\arccos x$，$y=f^{-1}(x)=\cos x$，則 $\arccos(\cos x)=f[f^{-1}(x)]$。

到此對問題的進展是一非常良好的開端，由 $f[f^{-1}(x)]=x$，得出選擇答案（B）是合情合理的。然而我們的答案與標準答案不一致。若這不是一道高考題，我們很可能到此就結束了。我們極有可能認為是印刷錯誤而放棄。是我們的錯了還是提供的標準答案有誤？難道我們的證明有錯誤？我們如何確保證明的可靠性？我們是如何檢驗給出的數學證明？問題的根源究竟在

哪里？這是一無法回避的好問題。一道小題目引發這麼多問題，恐怕連高考命題者也是始料未及的。本文不討論這一具體問題，只是通過這一例子進一步說明數學教育不只是得出正確答案，其過程有著豐富的內涵。筆者認為：和給出答案相比啟迪培養學生的思維方法更為重要。題目千姿百態，但解決問題的思維方法卻是核心的。只要學生思維能力培養出來了，教師能否解出題目已不重要。喬治·波利亞（Pólya，1962／劉景麟、曹之江、鄒清蓮譯，2007，頁 327）告誡到「不要企圖靠給別人講很多東西來滿足你的虛榮。喚起他們的好奇心，就足以使他們開竅了。不要讓他們負擔過重，只須投一顆火種，假如有易燃材料，就定會燃起熊熊大火」。教學是一種開啟心靈的藝術──被人輕視、不易掌握的藝術。喬治·波利亞談到「一個沒有親身體驗過某種創造性工作的教師，決不能期望他去啟發、引導、幫助甚至或者鑒別他的學生的創造性活動（Pólya，1962／劉景麟、曹之江、鄒清蓮譯，2007，頁 438）」、「問題是有這種經驗的數學教師如此之少（Pólya，1945／李心燦、王日爽、李志堯譯，2001，頁 179）」。

不同的思考方法表面結果確是令人尷尬的。功利的評判標準是很難看到思維本質上的差異。每年高考結束刊物都要對高考題作點評、賞析，作為下屆參加高考者也要做歷屆高考熱點題目。我不知教學中講評試題時是否有學生從複合函數性質角度 $f[f^{-1}(x)]=x$ 思考問題而陷入暫時的僵局。由於筆者個人的涉獵面極其有限未見到刊物上介紹這一問題的探討。流行的解法只是特值代入法、排除法。當然，無論是否有人做過同樣類似的探討，這卻是一無法回避、值得反思的好問題。如果按流行的方法技巧去講，表面上學生得到了正確的答案、課堂效果良好。但這樣缺乏的東西就較多了。

三、從對學生解答過程的剖析看啟發契機的把握

筆者在反思例 3 時，由 $f[f^{-1}(x)]=x$，得出選擇答案（B）一時曾陷入困境。學生是如何思考例 3 的呢？認真地分析一下學生的解題思維過程對我們因材施教是有幫助的。

雖然中國大陸教材沒有列舉 $f[f^{-1}(x)]=x$ 這一性質，一般流行的教學輔導資料作為數學中的常識大都列舉了這一性質只是沒給出證明及應用。學生曾問過我如何證明。在中學數學教學裏必然要涉及對數學證明的理解，學生需要進一步理解的心理需求在教學中是不容忽視的。這一性質不僅需要給出證明而且證明是簡單的，若函數 $y=f(x)$ 存在反函數，則有 $x=f^{-1}(y)$，故 $f[f^{-1}(y)]=f(x)=y$，所以 $f[f^{-1}(x)]=x$。同理可證 $f^{-1}[f(x)]=x$。這一性質及證明未進入教材卻令人不解，許多學生都問過這一性質的證明。有此性質教材就不必繞彎費力先說明為什麼 $\sin(\arcsin\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$，然後上升為一般結論「一般地，根據反正弦函數的定義，可以得到 $\sin(\arcsin x)=x$，其中 $x\in[-1,1]$，$\arcsin x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$」了。在反思例 3 時，由 $f[f^{-1}(x)]=x$，得出選擇答案（B）一時曾陷入的困境也迫切需要對該性質及證明作深層思考。數學為什麼要堅

持演繹證明？通過這一案例學生可能會進一步加深對數學需要證明的理解。如果沒有感受到演繹證明的需求，孤立地給出命題的證明是毫無意義的，反思例 3 出現的始料未及的問題使得我們無法回避……。

通過談話可以知道學生在解題時用到了 $f[f^{-1}(x)]=x$ 這一結論，只是文字表述上不明顯，題目證明也是不嚴格的。用數學語言完整清晰表達思想是不易的，我們回顧一下教材對反三角函數性質的證明及教師為改進反三角函數性質的證明所做的漫長、艱難努力會有更深感受。學生首先是通過特值法得到了答案（A），從學生解答過程看學生利用性質 $f[f^{-1}(x)]=x$ 解題時是意識到了直接選（B）是錯誤的，並做了進一步說明。究竟對問題意識到多麼深入不得而知。我們可更進一步地詢問學生：如果先不用特值法而直接利用性質解題是否會發現錯誤呢？這對培養學生思維是重要的。數學課不僅僅應該向學生灌輸各種事實而且應該去教會他們怎樣提出問題和解決問題。假如學生們在問題的提出過程中自己起過作用，則在學習中就必然會顯得更加主動。喬治．波利亞（Pólya，1945／閻育蘇譯，1982，頁 67）談到：

> 如果一個學生從來就沒有機會去解決一個他自己所發明創造的問題，那麼他的經驗是不完整的。教師可以向學生示範如何從一個剛剛解決的問題引出新問題，這樣做可以引起學生的好奇心。教師也可以留一部分創造發明給學生。

教學中是否能把握好這種契機不僅取決於教師對問題的洞察也取決於學生對問題的認識、理解。喬治．波利亞（Pólya, 1945／閻育蘇譯，1982，頁 205）談到：

> 未來的數學家，正像其他每個人一樣，是通過模仿和實踐來學習的。他應當尋求要模仿的正確模型。他應該觀察一個激勵人心的教師。他應該和一個有能力的朋友競賽。然後，可能是最重要的，他所閱讀的東西應當不僅僅限於流行的教科書而應當閱讀優秀作者的著作，直到他找到一個他天然傾向於模仿其方法的作者為止。他應當享受並探求什麼對他看來是簡單的，或者是有啟發性的，或者是漂亮的。他應當解題，選擇符合他思路的問題，冥思苦想其解答並發明新問題。用上述方法以及所有其他方法，他應該力爭做出他的第一個重要發現；他應當發現他自己的愛好與厭惡、他的情趣和他自己的擅長。

我們也可從喬治．波利亞的這段論述來理解阿達瑪在《數學領域中的發明心理學》（Hadamard, 1945／陳植蔭、肖奚安譯，1989，頁 92）中提出的觀點「天才乃是大自然的造化，並獨立於任何教育」。

這篇案例形成文字後學生也看了，筆者只是引導學生這裏有一個問題需要探討。只是通過具體問題培養學生的問題意識。只有學生願意去解決它，下決心去解決它，它才能真正變成學生的問題。當時解決或過一段時間遇到相關問題時都可以。學生有了獨立的思考意識及對數學證明的鑒賞能力，教師的教學就是成功的，沒有必要再過多地追問。但真正培養出這種素養的學生是比較難的。

肆、師也者，教之以事而喻諸德也

一個小的選擇題，人們可以漫不經心地選擇一答案也可經過思考做出比較合理選擇，也可能由於思維深一時無法給出一準確、合理的選擇一一僅僅向合理的方向邁出一步。單純從一選擇答案是很難判斷衡定一個學生的素養。以狹隘的分數衡量學生不僅失之偏頗而且會漸漸走向極端、嚴重背離教育的根本宗旨、目的。

真正的教育不僅傳授真理，而且向學生傳授對待真理的態度，激發他們對於善良事物受到鼓舞和欽佩的情感，對於邪惡事物的不可容忍的態度。遺憾、可悲的是，比起真實的教育來，當今中國人更在乎一紙文憑。文憑值錢，而教育不值錢。我們的教育是緊緊圍繞升學應試服務的。大多數教師都在按流行的方法教學，很少關心對問題的深層思考，教育已經愈來愈嚴重地淪為功利主義的工具。這種方法從表面上看是有成效的、但卻有失數學教育的價值、存在著嚴重弊端。尤其對分數的盲目崇拜、斤斤計較折射出教育內涵之貧乏。

現在的教育走入了誤區、網路上言辭激烈的批判甚至認為現在的教育是南轅北轍—民國教育培養了一批大師級人物、當今呢？……許多家長在子女教育投資上是在所不惜，教育巨大的投入究竟培養出了什麼樣的人才、結果又如何？……中國著名科學家錢學森曾經發出「為什麼我們的學校總是培養不出傑出人才？（葛劍平，2012）」這樣的疑問。錢學森之間看似簡單，卻成為中國教育界的一個刻骨銘心的待解難題，需要整個教育界乃至社會各界共同破解已成共識。通過具體案例剖析多年來高考應試教育的模式人們可以對教育暴露出的淺層問題窺見一斑。

筆者詢問過高分學生解答問題的思路，學生受流行解題方法、技巧的影響是明顯的，課下也和個別學生對問題作過深入交流、探討，在解題技巧基礎上再促使學生進行深入反思的教學培養出來的學生思維是有深度的，但在應試中並不佔優勢或不盡人意。

我們的教育（大陸而言）是緊緊圍繞升學應試服務的，急功近利的應試教育有悖於教育的根本目的。中國儒家經典《論語・學而篇》強調到「君子務本，本立而道生」，素有「文以載道」的優良文化傳統。教育不僅要傳授知識，而且更要長期堅持不懈、潤物無聲地從點點滴滴中培養學生對待真理的態度、理性探索精神。在某種程度上對待真理的態度比發現更為重要。

誌謝

感謝臺灣學術界對文章提出具有建設性修改建議的辛勤付出和對「文章立意甚佳」、「從與學生的訪談中可瞭解其學習歷程，進而反思教學與思考流程並修正，是很好的研究方向」的肯定，感謝臺灣學術界提供的交流平台。

參考文獻

1986年普通高等學校招生全國統一考試理科數學試題及答案（2011年7月15日）。百度文庫。查詢日期：2013年9月5日，取自：http://wenku.baidu.com/view/7cf80aea551810a6f52486f3.html

1987年普通高等學校招生全國統一考試理科數學試題及答案（2011年7月15日）。百度文庫。查詢日期：2013年9月5日，取自：http://wenku.baidu.com/view/0d3f062ee2bd960590c677d3.html

2003年普通高等學校招生全國統一考試（全國卷）：數學（理工農醫類）（2013年2月21日）。百度文庫。查詢日期：2013年9月5日，取自：http://wenku.baidu.com/view/c2be29f0aef8941ea76e05c4.html

人民教育出版社數學編輯室（1983）。**高級中學課本代數：甲種本（第二冊）**。北京：人民教育出版社。

葛劍平（2012年3月5日）。為什麼我們的學校總是培養不出傑出人才？**人民網**。查詢日期：2013年9月17日，檢自：http://edu.people.com.cn/GB/8216/239691/17291750.html

Hadamard, J. (1989)。**數學領域中的發明心理學**（*An essay on the psychology of invention in the mathematical field*；陳植蔭、肖奚安譯）。南京：江蘇教育出版社。（原作出版於1945年）

Kline, M. (2005)。**西方文化中的數學**（*Mathematics in western culture*；張祖貴譯）。上海：復旦大學出版社。（原作出版於1953年）

Pólya, G. (1982)。**怎樣解題**（*How to solve it*；閻育蘇譯）。北京：科學出版社。（原作出版於1945年）

Pólya, G. (2001)。**數學與猜想：合情推理模式**（*Mathematics and plausible reasoning: Patterns of Plausible Inference*；李心燦、王日爽、李志堯譯）。北京：科學出版社。（原作出版於1954年）

Pólya, G. (2007)。**數學的發現：對解題的理解、研究和講授**（*Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving*；劉景麟、曹之江、鄒清蓮譯）。北京：科學出版社。（原作出版於1962年）

吳如皓、董增萊（2013）。
從教學面看數學素養。
台灣數學教師(電子)期刊，**34**，13-21。

從教學面看數學素養

吳如皓　董增萊
臺北市立興雅國民中學

經濟合作暨發展組織（OECD）所主持的國際學生評量計畫（PISA）中，將數學素養定義（OECD, 2010）為：「在不同情境脈絡中，個人能辨識、演算及運用數學的能力，以及藉由描述、建模、解釋與預測不同現象，來瞭解數學在世界上所扮演的角色之能力。數學素養是連續的，即數學素養愈高的人，愈能善用數學工具做出有根據的判斷，這也正是具建設性、投入性及反思能力的公民所需具備的。」針對這樣的目標，筆者使用各類的生活情境題進行教學，在教學過程中也得到許多新的收穫與體會。在本文裡，盡量不再重述理論中的數學素養，而是從 PISA 帶給筆者的新刺激中仔細看看多了哪些看問題的角度與發展知識的可能。

關鍵詞：生活情境題、教學與評量、數學素養

通訊作者：吳如皓，e-mail：ahp204j@yahoo.com.tw
收稿：2013 年 6 月 18 日；接受刊登：2013 年 9 月 27 日。

在生活中，人們愈來愈常使用計算器，尤其是習慣精打細算的人，在買東西時，總是要貨比三家，看哪一家最划算。此時，計算器在手，馬上可算出貨品單價、每公克或每公撮的價錢，但是卻常常遇到小數點後好幾位。到底小數點後最後一位後面還有沒有位數，有人分辨得出，有人無法分辨。若是後面還有位數，那螢幕上小數點的最後一位是用無條件進入、無條件捨去或是四捨五入法得到的，還是有其它的處理方式？這個問題可能在腦海一閃，又直覺很困難而放棄，從此這個問題在心中永遠是個謎。

計算器

常見的簡易型計算器，通常具有以下的結構和功能。

- 電源，電池與太陽能板。
- 顯示螢幕，以 LCD 製成，可顯示八位的數字。
- 電子迴路。
- 電源開關鍵（ON，OFF）
- 十個數字鍵（0，1，2，3，4，5，6，7，8，9）。
- 正負號鍵，決定數值為正數或負數（+/-）。
- 小數點鍵（‧）。
- 加減乘除四個運算函式鍵（＋，－，×，÷）。
- 等於符號鍵，用於顯示運算解（＝）。
- 取消鍵，用於清空目前顯示的數字（C）。
- 求平方根鍵、百分比鍵（√，%）。
- 獨立記憶的資料為正的或負的（M+，M-）。
- 獨立記憶資料總和與清除（MR，MC）。
- 清除所有資料鍵（AC）。
- 清除最後一筆資料鍵（C）。

我們即以臺北市北投國中林柏嘉老師所設計的計算器問題作為題材，來探討如何透過好題目來培養學生的數學素養(而非只是評量學生有沒有素養)。

計算器問題：

簡易型計算器只能顯示八位的數字，這表示運算結果為八位以上的小數時，螢幕顯現的數字是一個近似值，**如何利用幾個計算的結果，來測試簡易型計算器取近似值的方式，是四捨五入法、無條件進位法、或者無條件捨去法。**

先來想想，這一題有數學素養的味道嗎？它可以讓學生看到真實情境中數學所扮演的角色嗎？它可以讓學生想辦法透過數學做出有根據的判斷嗎？在談題目的解答之前，不妨先跳出來看看數學素養與數學題目之間的關聯，並隨時找機會思考當老師在引導或學生在思考這一題的題目時，在什麼地方有機會出現數學素養，在什麼地方數學素養可能會被抹煞或迅速帶過。

以數學素養的精神來看，題目的情境越真實越好、問題越開放越好。情境要真實有一個很重要的面向是：我們遇到的真實情境問題通常都會有過多的資訊或不足的資訊，而不太會只出現剛剛好的條件。當資訊太多時，必須有意識地詮釋各個資訊的意義來選取有用的資訊進行操作；當資訊不足時，則必須思考如何取得近似值、如何靠近答案、如何減少誤差、如何列出不同的前提以進行分門別類的討論。然而，在真實的情境底下，要問封閉的問題好呢、抑或是開放的問題好呢？筆者的經驗是，問題的答案封閉或開放都好，而得到答案的過程越開放越好。當筆者剛開始接觸 PISA 樣本試題時，有一類型的題目會在情境中描述出一種觀點(例如：根據圖表，筆者可以看到犯罪率巨幅上升)，然後問你是否認同，並請你說出理由。筆者最喜歡的就是這一類型的「封閉式問答題」，雖然問題的答案是封閉的(認同或不認同)，但是得到答案的過程卻是開放的(可以有各種不同的方式來描述理由)。這一類的問題，很適合一開始學數學素養的學生，有明確的思考對象，但又可以自由選擇多元的思考途徑。筆者認為，可以從這樣的方向去解讀「情境越真實越好、問題越開放越好」。

由此看來，上述那一題「計算器」十分有數學素養的味道。因為它的情境很真實，題目中提供了 26 個按鍵與其功能，但實際上不需要按那麼多按鍵來解決問題，所以要在「過多資訊」中選取有用的資訊來使用。然而在解決這一題的過程中又不可能按遍全世界的計算器，所以在這樣「資訊不足」的條件下便需要進行一些假設與討論。再來就提問的模式來說，雖然最後的答案是封閉的(無條件進位法、四捨五入法或無條件捨去法)，但學生可以用各種不同的算式得到各種不同的計算結果，來觀察那些計算結果與計算器的互動情形，使最後在為解答所佈置特殊的數字與運算時會有多樣化的可能，而有許多不同的過程都可以同樣地得到有效的結果。從這裡幾乎能預想學生可以從中得到很好的新體驗。

接下來，筆者想從實際的教學經驗，來談談如何用上述這一道數學素養題目來進行教學，讓這一個好題材不只侷限於評量與評量後的答案核對，而是讓數學素養的學習有更清晰的歷程。

教學過程如下：

步驟 1：情境的鋪陳

在教學的一開始，筆者並沒有直接把學習單發給學生，因為筆者想讓學生從「形成問題」為起點來開展接下來的數學知識。所以，筆者拿出幾台計算器，問學生看到這些計算器，可能

會想處理什麼問題？緊接著請同學想想看,「這幾台計算器有什麼不一樣的地方會讓我們想要拿來討論？」與「或者我們想要討論的是這幾台計算器會共同需要面對的問題是什麼？」

這兩個問題哪一個比較根本呢？筆者在這裡想強調的是，看事情的時候有沒有辦法自己發現問題、又有沒有辦法知道什麼問題是重要的問題。

步驟 2：形成問題

可以從學生的對話進入這一個題目，也就是我們開始談論所有的計算器螢幕大小都是有限的，這樣的限制會碰上哪些麻煩，然後，計算器要進行取捨時,「如何檢測出某一台計算器是無條件捨去、四捨五入、或是無條件進位法呢？」筆者認為在先後順序上，學生操作如何取近似值的問題之前，應該意識到更根本的問題是有限的螢幕會造成什麼樣的麻煩，這樣才不會不知從何想起而去東拼西湊些盲目的計算。

步驟 3：操作前的臆測

在某些計算器會顯示：**1÷3=0.3333334**

學生會**因為 1÷3=0.333333……，**

由此臆測它是無條件進位法。

這樣的臆測也可以適時拿出來給學生們討論。因為這樣臆測該台計算器上是合理的，但卻不保證每一台計算器都是這樣的。在此情形下，可以讓學生討論在什麼樣的前提下它是對的，若想更完整地處理問題的話還需要什麼？在教學時，建議一開始請學生先不要按計算器，僅用紙筆論述；接著觀摩同學的寫法互相討論，並推斷哪些寫法是可行的策略。最後，再開始按計算器檢核這些想法是否正確。(這樣，學生較不會只在計算器鍵盤上進行一連串漫無目的的操作而失去分析思考的能力)。

步驟 4：操作與論證

其實這個問題是沒辦法靠一個算式處理完問題的。需要進行更多的討論如下：

先計算 1÷3，已知 1÷3=0.333333333……

若計算器顯示 1÷3=0.3333334，則可推論為無條件進位法。

若計算器顯示 1÷3=0.3333333，則它有可能是無條件捨去法或四捨五入法。

當出現 0.3333333 時無法判定是無條件捨去法或四捨五入法，

此時再計算 2÷3，已知 2÷3=0.666666666……

若計算器顯示 2÷3=0.6666667，則它判定為四捨五入法(已刪除無條件進位法)。

若計算器顯示 2÷3=0.6666666，則它是無條件捨去法。

上述討論，可以統整為下表：

運算與結果	推論
1÷3=0.3333334	無條件進位法
1÷3=0.3333333 **2÷3=0.6666667**	四捨五入法
2÷3=0.6666666	無條件捨去法

通常老師在給定答案之後，學生的思考空間會被大幅地限縮，所以要給學生足夠的時間討論與對話，有助於他們思考啟思。在讓學生停止討論後，可以再用一些提問觸發學生重新看一次問題。例如是：「你覺得這一題所需要的運算，是加法、減法、乘法抑或除法？」、「你覺得加法可行的舉手；你覺得減法可行的舉手；你覺得乘法可行的舉手；你覺得除法可行的舉手。(可複選)」以筆者的經驗，加法選項的舉手人數很少，減法選項的舉手人數幾乎沒有，乘法除法選項的舉手人數較多。這時老師便能適時提醒學生再重新看一次問題、再重新想一次問題。再從頭想一次剛剛被直覺帶領的思維中所忽略的種種可能，便很有機會看到每一種運算都是解決問題的利器。

以下分別整理各種不同運算的策略模式。

（一）加法

運算與結果	推論
10000000+0.4=10000001	無條件進位法
10000000+0.4=10000000 **10000000+0.5=10000001**	四捨五入法
10000000+0.5=10000000	無條件捨去法

（二）減法

運算與結果	推論
99999999-0.6=99999999	無條件進位法
99999999-0.6=99999998 **99999999-0.5=99999999**	四捨五入法
99999999-0.5=99999998	無條件捨去法

（三）乘法

運算與結果	推論
7777777.7×2=15555556	無條件進位法
7777777.7×2=15555555 **9999999.9×2=20000000**	四捨五入法
9999999.9×2=19999999	無條件捨去法

運算與結果	推論
0.4444444×0.1=0.0444445	無條件進位法
0.4444444×0.1=0.0444444 **0.5555555×0.1=0.0555556**	四捨五入法
0.5555555×0.1=0.0555555	無條件捨去法

（四）除法

運算與結果	推論
88888881÷4=22222221	無條件進位法
88888881÷4=22222220 **88888881÷2=44444441**	四捨五入法
88888881÷2=44444440	無條件捨去法

運算與結果	推論
1÷7=0.1428572	無條件進位法
1÷7=0.1428571 **2÷7=0.2857143**	四捨五入法
2÷7=0.2857142	無條件捨去法

（五）其他運算

已知$\sqrt{2}$=1.41421356……

$\sqrt{3}$=1.73205080……

運算與結果	推論
$\sqrt{3}$=1.7320509	無條件進位法
$\sqrt{3}$=1.7320508 **$\sqrt{2}$=1.4142136**	四捨五入法
$\sqrt{2}$=1.4142135	無條件捨去法

在一題多解的討論之後，學生看到很多解法，但多數學生不會對這麼多的解法互相比較或作進一步的反思。所以老師宜在此時提問讓學生有機會給不同的解法作出回饋。例如可以問「這些解法中你最喜歡哪一種解法？理由是什麼？」、「你認為在數學的觀點下哪一種方法最好？」

在筆者幾次的教學經驗中，都有學生提出，有些方法不管螢幕多大都適用，有些方法只能適用於八位數字的螢幕。這些對不同解答的比較實在是精彩，因為學生能對不同的解法展開不一樣的詮釋，而這些詮釋讓數學能更自在地與現實世界做互動。其中一個特殊例子是利用 **1÷7** 與 **2÷7** 來進行實驗時，在八位螢幕的計算器能做近似值取法的判別，但是遇到七位螢幕的計算器與十位螢幕的計算器就會失敗。

1÷7=0.142857142857……

2÷7=0.285714285714……

例如在十位螢幕的計算器中，**1÷7 若顯示 0.142857143，則 2÷7 就會顯示 0.285714286**。依然無法判斷是四捨五入或是無條件進位。關鍵在於：被捨掉的那一位數字若在 4 以下而進位，才能判別是否是無條件進位法；而被捨掉的那一位數字若在 5 以上而未進位，才能判別是否是無條件捨去法。因此，輸入的兩個運算，必得使結果中被捨去的那一位數字一個在 4 以下，一個在 5 以上，才能明確判定進位方法。在上例十位螢幕的計算器中，**1÷7** 被捨掉的數字是 8，**2÷7** 被捨掉的數字是 7，所以會造成無法判定的可能。

從此又衍伸出另一個問題，若 **1÷7** 與 **2÷7** 是較不好的搭配，那有什麼是 **1÷7** 適合搭配的算式呢？這又是一個新的好問題！如此做法所要強調的，並非介紹出更厲害的作法與招式，而是在解完題目後如何重新思考問題，然後在省思的過程中看到更多有價值的問題。

以下提供可行的解法作為教學參考。

其實方法很多，其中一種是先列出一些計算結果來觀察，下面列出 1 到 6 的數字除以 7 的結果：

1÷7=0.142857142857……

2÷7=0.285714285714……

3÷7=0.428571428571……

4÷7=0.571428571428……

5÷7=0.714285714285……

6÷7=0.857142857142……

從上述結果可能有機會觀察出當 **1÷7** 與 **6÷7** 這兩個算式搭配時，不管計算器的螢幕能容納幾位數，都能夠判斷出該計算器近似值的取法。進而發現 **2÷7** 與 **5÷7** 也是很好的搭配、發現 **3÷7** 與 **4÷7** 也是很好的搭配。

從這幾個成功的例子可以臆測：當 m÷n 的結果是無限循環小數時(m、n 都是整數且 m＜n)，那麼 m÷n 與(n-m)÷n 會是一個很好的配對。例如：

2÷13=0.153846153846...

11÷13=0.846153846153...

原來(2÷13)+(11÷13)=1=0.99999999...，小數點後相同位數數字和必為 9，2÷13 與 11÷13 兩個算式在小數點後相同位數的數字必定其中一個在 4 以下，另一個在 5 以上。

(m÷n)+[(n-m)÷n]=1=0.99999999...，小數點後相同位數數字和必為 9，m÷n 與(n-m)÷n 兩個算式在小數點後相同位數的數字必定其中一個在 4 以下，另一個在 5 以上。

依據上述分析，當我們在這些討論之後回頭檢視這個問題，或許可以發現我們只要算(1÷3)+(2÷3)，就可以知道計算器是如何取近似值的了。

(1÷3)+(2÷3)顯示出 0.9999999，就是無條件捨去法。

(1÷3)+(2÷3)顯示出 1，就是四捨五入法。

(1÷3)+(2÷3)顯示出 1.0000001，就是無條件進位法。

又簡潔有力地重新統整了一次這個問題。並在這種表達中，呈現出四捨五入法的作用。理論上，(1÷3)+(2÷3)應該要等於 1，四捨五入法讓兩個近似值加起來後得到完全正確的結果。無條件捨去法的結果太小、無條件進位法的結果太大。學生在這些操作中，對這三種取近似值的方法的內涵會產生特別的感受，對於近似值的概念不再只是死板的規則而已。

最後，想用學生的新發現作為文章的結尾。談其中一位學生特別的想法前，先回顧一下之前的一種推論方法：

運算與結果	推論
10000000+0.4=10000001	無條件進位法
10000000+0.4=10000000 **10000000+0.5=10000001**	四捨五入法
10000000+0.5=10000000	無條件捨去法

有一個學生從他自己的計算器從發現上述這樣的論述有問題。各位讀者先試著猜看看，這學學生是做了什麼操作、而在操作後又看出了什麼問題。在原先思維中，上述推論出的結果，很難看出有任何問題，而幾乎可以終結問題的句點時，學生做了以下的操作（他使用的計算器是 SAMSUNG 手機裡的計算器程式）：

10000000+0.1=10000000

10000000+0.2=10000000

10000000+0.3=10000000

10000000+0.4=10000000

10000000+0.5=10000000

（我們應該會停在這裡，並宣判此機算器是無條件捨去法。但這學生繼續做下去。）

10000000+0.6=10000001

10000000+0.7=10000001

10000000+0.8=10000001

10000000+0.9=10000001

然後學生得結論是：「透過這 9 個算式，我發現這台計算器不是無條件進位法、也不是四捨五入法、也不是無條件捨去法，而可能是『四捨六入五成雙法』。」雖然這樣推論結果，尚待進一步的驗証，但筆者覺得，在教學中碰到學生能如此認真探索，則更應鼓勵他們做更多的猜測與嘗試。通常計算器內的算術運算為二進位的浮點運算，呈現出來十進位數值以何種方式捨去或進位更待進一步理論分析，本身就是有趣的課題。真實世界裡的問題本來就包含許多變數，數學的素養是在我們下結論之前需要和真實世界做足夠的互動與充分的討論，讓我們能有很寬廣的心去省思在各種不同的前提下對問題可做出的不同回應，在各種回應中釐清問題的本質，並對既定的知識與規則抱有批判與質疑的勇氣。在數學素養的學習歷程中，我們看到了數學教學更多的可能性，並可以用更多元的角度來反省數學學習到底帶給學生什麼樣的收穫。

參考文獻

Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD] (2010). *PISA 2012 mathematics framework*. Paris, France: Author. Retrieved from: http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/46961598.pdf.

《台灣數學教師(電子)期刊》稿約

2013.09.27 編審委員會會議通過

壹、《台灣數學教師(電子)期刊》（Taiwan Journal of Mathematics Teachers）（以下簡稱本刊）是國立臺灣師範大學數學系及台灣數學教育學會共同發行之期刊，內容以出版數學教育領域相關議題的原創性論文為宗旨。本刊徵求符合宗旨之教學實務文稿，內容包含探討數學教學策略、學生迷思概念之教學引導、數學教育課程、教材與教法等實務經驗分享、研究問題評析、數學教育之構想、書評、論文批判、數學教學與應用性研究、數學教育研究趨勢介紹、專題演講講稿、數學學習評量、電子媒材設計、數學教師專業發展及其他數學教育相關議題等內容。

貳、本刊每年發行兩期，分別於四月、十月出刊，並採電子方式發行。全年徵稿，隨收隨審。

參、本刊所刊之文稿須為原創性的教學實務文章，即未曾投遞或以全論文形式刊登於其他期刊、研討會彙編或書籍。未經本刊同意，已獲本刊接受之文章不得再於他處發表。投遞本刊之文稿須經編審委員會送請專家學者審查通過後予以刊登，被刊登文章之著作財產權歸國立臺灣師範大學數學系及台灣數學教育學會共同擁有，文責由作者自負。

肆、文稿請以中文撰寫，以8,000字為上限（包含摘要、文章全文、圖表、附註、參考文獻、附錄等）。文稿的呈現請使用單行間距之12級字新細明體或Times New Roman字體，以橫書方式於A4規格紙張上，文稿上下左右各留2.5公分空白，並以Microsoft Word 98以上之繁體中文文書軟體處理。

伍、文稿格式請參考《臺灣數學教育期刊》論文撰寫體例的說明或已發行之文稿，若有需要引用英文文獻以及數學符號、公式等請參考APA第六版出版手冊。交遞稿件時需注意下列事項：

一、提交投稿基本資料表

(一) 文稿基本資料。

(二) 通訊作者之姓名、服務單位、職稱、通訊地址、聯絡電話和電子郵件地址。一位以上作者時，非通訊作者只需填寫姓名、服務單位和職稱。

(三) 任職機構及單位：請寫正式名稱，分別就每位作者寫明所屬系所或單位。

(四) 頁首短題（running head）：以不超過15個字為原則。

(五) 作者註（author note）：說明與本篇研究相關的資訊。

二、提交已簽署的《台灣數學教師(電子)期刊》著作財產權讓與同意書。

三、文稿除正文外，還需包含中文摘要，摘要請獨立一頁呈現，並置於正文之前。摘要頁內容包括論文題目（粗體20級字、置中）、摘要（不分段，限500字以內）、與關鍵詞（以五個為上限，並依筆畫順序由少到多排列）。

四、若為修正稿，遞交修正的文稿上請以色字標示修改處，並需提交「審查意見回覆表」，依審查意見逐項說明修改內容或提出答辯。作者應於發出文稿修正通知的三週內回傳修正稿及答辯書，若有特殊情況請先與本刊聯絡。

陸、文稿以電子郵件方式投遞，包括作者基本資料表、著作財產權讓與同意書與全文共三個檔案。作者應負論文排版完成後的校對之責，編輯委員僅負責格式上之校對。

柒、投稿電子郵箱：tjmeassistant@gmail.com

Taiwan Journal of Mathematics Teachers NO. 34 October, 2013

Publisher	Department of Mathematics, National Taiwan Normal University Taiwan Association for Mathematics Education

Address	No.88 Sec. 4, Ting-Chou Rd., Taipei City, Taiwan, R.O.C. Department of Mathematics, National Taiwan Normal University " *Taiwan Journal of Mathematics Teachers*"
TEL	886-2-7734-6576
FAX	886-2-2933-2342
E-mail	tjmeassistant@gmail.com
Website	http://tame.tw/forum.php?mod=forumdisplay&fid=74