吳如皓、董增萊（2013）。
從教學面看數學素養。
台灣數學教師(電子)期刊，**34**，13-21。

從教學面看數學素養

吳如皓　董增萊
臺北市立興雅國民中學

經濟合作暨發展組織（OECD）所主持的國際學生評量計畫（PISA）中，將數學素養定義（OECD, 2010）為：「在不同情境脈絡中，個人能辨識、演算及運用數學的能力，以及藉由描述、建模、解釋與預測不同現象，來瞭解數學在世界上所扮演的角色之能力。數學素養是連續的，即數學素養愈高的人，愈能善用數學工具做出有根據的判斷，這也正是具建設性、投入性及反思能力的公民所需具備的。」針對這樣的目標，筆者使用各類的生活情境題進行教學，在教學過程中也得到許多新的收穫與體會。在本文裡，盡量不再重述理論中的數學素養，而是從 PISA 帶給筆者的新刺激中仔細看看多了哪些看問題的角度與發展知識的可能。

關鍵詞：生活情境題、教學與評量、數學素養

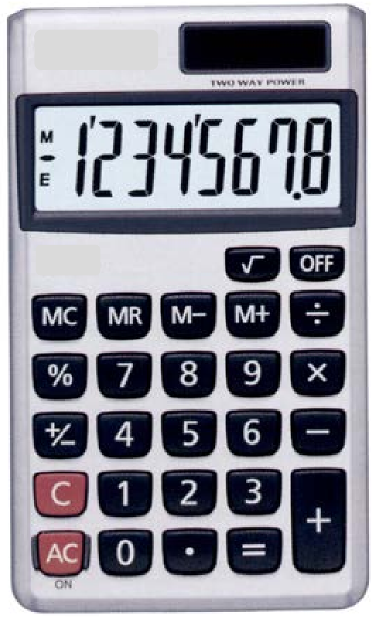
通訊作者：吳如皓，e-mail：ahp204j@yahoo.com.tw
收稿：2013 年 6 月 18 日；接受刊登：2013 年 9 月 27 日。

在生活中，人們愈來愈常使用計算器，尤其是習慣精打細算的人，在買東西時，總是要貨比三家，看哪一家最划算。此時，計算器在手，馬上可算出貨品單價、每公克或每公撮的價錢，但是卻常常遇到小數點後好幾位。到底小數點後最後一位後面還有沒有位數，有人分辨得出，有人無法分辨。若是後面還有位數，那螢幕上小數點的最後一位是用無條件進入、無條件捨去或是四捨五入法得到的，還是有其它的處理方式？這個問題可能在腦海一閃，又直覺很困難而放棄，從此這個問題在心中永遠是個謎。

計算器

常見的簡易型計算器，通常具有以下的結構和功能。

- 電源，電池與太陽能板。
- 顯示螢幕，以 LCD 製成，可顯示八位的數字。
- 電子迴路。
- 電源開關鍵（ON，OFF）
- 十個數字鍵（0，1，2，3，4，5，6，7，8，9）。
- 正負號鍵，決定數值為正數或負數（+/-）。
- 小數點鍵（‧）。
- 加減乘除四個運算函式鍵（＋，－，×，÷）。
- 等於符號鍵，用於顯示運算解（＝）。
- 取消鍵，用於清空目前顯示的數字（C）。
- 求平方根鍵、百分比鍵（√，％）。
- 獨立記憶的資料為正的或負的（M+，M-）。
- 獨立記憶資料總和與清除（MR，MC）。
- 清除所有資料鍵（AC）。
- 清除最後一筆資料鍵（C）。



我們即以臺北市北投國中林柏嘉老師所設計的計算器問題作為題材，來探討如何透過好題目來培養學生的數學素養(而非只是評量學生有沒有素養)。

計算器問題：

簡易型計算器只能顯示八位的數字，這表示運算結果為八位以上的小數時，螢幕顯現的數字是一個近似值，**如何利用幾個計算的結果，來測試簡易型計算器取近似值的方式，是四捨五入法、無條件進位法、或者無條件捨去法。**

先來想想，這一題有數學素養的味道嗎？它可以讓學生看到真實情境中數學所扮演的角色嗎？它可以讓學生想辦法透過數學做出有根據的判斷嗎？在談題目的解答之前，不妨先跳出來看看數學素養與數學題目之間的關聯，並隨時找機會思考當老師在引導或學生在思考這一題的題目時，在什麼地方有機會出現數學素養，在什麼地方數學素養可能會被抹煞或迅速帶過。

以數學素養的精神來看，題目的情境越真實越好、問題越開放越好。情境要真實有一個很重要的面向是：我們遇到的真實情境問題通常都會有過多的資訊或不足的資訊，而不太會只出現剛剛好的條件。當資訊太多時，必須有意識地詮釋各個資訊的意義來選取有用的資訊進行操作；當資訊不足時，則必須思考如何取得近似值、如何靠近答案、如何減少誤差、如何列出不同的前提以進行分門別類的討論。然而，在真實的情境底下，要問封閉的問題好呢、抑或是開放的問題好呢？筆者的經驗是，問題的答案封閉或開放都好，而得到答案的過程越開放越好。當筆者剛開始接觸 PISA 樣本試題時，有一類型的題目會在情境中描述出一種觀點(例如：根據圖表，筆者可以看到犯罪率巨幅上升)，然後問你是否認同，並請你說出理由。筆者最喜歡的就是這一類型的「封閉式問答題」，雖然問題的答案是封閉的(認同或不認同)，但是得到答案的過程卻是開放的(可以有各種不同的方式來描述理由)。這一類的問題，很適合一開始學數學素養的學生，有明確的思考對象，但又可以自由選擇多元的思考途徑。筆者認為，可以從這樣的方向去解讀「情境越真實越好、問題越開放越好」。

由此看來，上述那一題「計算器」十分有數學素養的味道。因為它的情境很真實，題目中提供了 26 個按鍵與其功能，但實際上不需要按那麼多按鍵來解決問題，所以要在「過多資訊」中選取有用的資訊來使用。然而在解決這一題的過程中又不可能按遍全世界的計算器，所以在這樣「資訊不足」的條件下便需要進行一些假設與討論。再來就提問的模式來說，雖然最後的答案是封閉的(無條件進位法、四捨五入法或無條件捨去法)，但學生可以用各種不同的算式得到各種不同的計算結果，來觀察那些計算結果與計算器的互動情形，使最後在為解答所佈置特殊的數字與運算時會有多樣化的可能，而有許多不同的過程都可以同樣地得到有效的結果。從這裡幾乎能預想學生可以從中得到很好的新體驗。

接下來，筆者想從實際的教學經驗，來談談如何用上述這一道數學素養題目來進行教學，讓這一個好題材不只侷限於評量與評量後的答案核對，而是讓數學素養的學習有更清晰的歷程。

教學過程如下：

步驟 1：情境的鋪陳

在教學的一開始，筆者並沒有直接把學習單發給學生，因為筆者想讓學生從「形成問題」為起點來開展接下來的數學知識。所以，筆者拿出幾台計算器，問學生看到這些計算器，可能

會想處理什麼問題？緊接著請同學想想看,「這幾台計算器有什麼不一樣的地方會讓我們想要拿來討論？」與「或者我們想要討論的是這幾台計算器會共同需要面對的問題是什麼？」

這兩個問題哪一個比較根本呢？筆者在這裡想強調的是，看事情的時候有沒有辦法自己發現問題、又有沒有辦法知道什麼問題是重要的問題。

步驟 2：形成問題

可以從學生的對話進入這一個題目，也就是我們開始談論所有的計算器螢幕大小都是有限的，這樣的限制會碰上哪些麻煩，然後，計算器要進行取捨時,「如何檢測出某一台計算器是無條件捨去、四捨五入、或是無條件進位法呢？」筆者認為在先後順序上，學生操作如何取近似值的問題之前，應該意識到更根本的問題是有限的螢幕會造成什麼樣的麻煩，這樣才不會不知從何想起而去東拼西湊些盲目的計算。

步驟 3：操作前的臆測

在某些計算器會顯示：**1÷3=0.3333334**

學生會**因為 1÷3=0.333333……，**

由此臆測它是無條件進位法。

這樣的臆測也可以適時拿出來給學生們討論。因為這樣臆測該台計算器上是合理的，但卻不保證每一台計算器都是這樣的。在此情形下，可以讓學生討論在什麼樣的前提下它是對的，若想更完整地處理問題的話還需要什麼？在教學時，建議一開始請學生先不要按計算器，僅用紙筆論述；接著觀摩同學的寫法互相討論，並推斷哪些寫法是可行的策略。最後，再開始按計算器檢核這些想法是否正確。(這樣，學生較不會只在計算器鍵盤上進行一連串漫無目的的操作而失去分析思考的能力)。

步驟 4：操作與論證

其實這個問題是沒辦法靠一個算式處理完問題的。需要進行更多的討論如下：

先計算 1÷3，已知 1÷3=0.333333333……

若計算器顯示 1÷3=0.3333334，則可推論為無條件進位法。

若計算器顯示 1÷3=0.3333333，則它有可能是無條件捨去法或四捨五入法。

當出現 0.3333333 時無法判定是無條件捨去法或四捨五入法，

此時再計算 2÷3，已知 2÷3=0.666666666……

若計算器顯示 2÷3=0.6666667，則它判定為四捨五入法(已刪除無條件進位法)。

若計算器顯示 2÷3=0.6666666，則它是無條件捨去法。

上述討論，可以統整為下表：

運算與結果	推論
1÷3=0.3333334	無條件進位法
1÷3=0.3333333 **2÷3=0.6666667**	四捨五入法
2÷3=0.6666666	無條件捨去法

通常老師在給定答案之後，學生的思考空間會被大幅地限縮，所以要給學生足夠的時間討論與對話，有助於他們思考啟思。在讓學生停止討論後，可以再用一些提問觸發學生重新看一次問題。例如是：「你覺得這一題所需要的運算，是加法、減法、乘法抑或除法？」、「你覺得加法可行的舉手；你覺得減法可行的舉手；你覺得乘法可行的舉手；你覺得除法可行的舉手。(可複選)」以筆者的經驗，加法選項的舉手人數很少，減法選項的舉手人數幾乎沒有，乘法除法選項的舉手人數較多。這時老師便能適時提醒學生再重新看一次問題、再重新想一次問題。再從頭想一次剛剛被直覺帶領的思維中所忽略的種種可能，便很有機會看到每一種運算都是解決問題的利器。

以下分別整理各種不同運算的策略模式。

（一）加法

運算與結果	推論
10000000+0.4=10000001	無條件進位法
10000000+0.4=10000000 **10000000+0.5=10000001**	四捨五入法
10000000+0.5=10000000	無條件捨去法

（二）減法

運算與結果	推論
99999999-0.6=99999999	無條件進位法
99999999-0.6=99999998 **99999999-0.5=99999999**	四捨五入法
99999999-0.5=99999998	無條件捨去法

（三）乘法

運算與結果	推論
7777777.7×2=15555556	無條件進位法
7777777.7×2=15555555 **9999999.9×2=20000000**	四捨五入法
9999999.9×2=19999999	無條件捨去法

運算與結果	推論
0.4444444×0.1=0.0444445	無條件進位法
0.4444444×0.1=0.0444444 **0.5555555×0.1=0.0555556**	四捨五入法
0.5555555×0.1=0.0555555	無條件捨去法

（四）除法

運算與結果	推論
88888881÷4=22222221	無條件進位法
88888881÷4=22222220 **88888881÷2=44444441**	四捨五入法
88888881÷2=44444440	無條件捨去法

運算與結果	推論
1÷7=0.1428572	無條件進位法
1÷7=0.1428571 **2÷7=0.2857143**	四捨五入法
2÷7=0.2857142	無條件捨去法

（五）其他運算

已知$\sqrt{2}$=1.41421356……

$\sqrt{3}$=1.73205080……

運算與結果	推論
$\sqrt{3}$=1.7320509	無條件進位法
$\sqrt{3}$=1.7320508 **$\sqrt{2}$=1.4142136**	四捨五入法
$\sqrt{2}$=1.4142135	無條件捨去法

在一題多解的討論之後，學生看到很多解法，但多數學生不會對這麼多的解法互相比較或作進一步的反思。所以老師宜在此時提問讓學生有機會給不同的解法作出回饋。例如可以問「這些解法中你最喜歡哪一種解法？理由是什麼？」、「你認為在數學的觀點下哪一種方法最好？」

在筆者幾次的教學經驗中，都有學生提出，有些方法不管螢幕多大都適用，有些方法只能適用於八位數字的螢幕。這些對不同解答的比較實在是精彩，因為學生能對不同的解法展開不一樣的詮釋，而這些詮釋讓數學能更自在地與現實世界做互動。其中一個特殊例子是利用 **1÷7** 與 **2÷7** 來進行實驗時，在八位螢幕的計算器能做近似值取法的判別，但是遇到七位螢幕的計算器與十位螢幕的計算器就會失敗。

1÷7=0.142857142857……

2÷7=0.285714285714……

例如在十位螢幕的計算器中，**1÷7 若顯示 0.142857143，則 2÷7 就會顯示 0.285714286**。依然無法判斷是四捨五入或是無條件進位。關鍵在於：被捨掉的那一位數字若在 4 以下而進位，才能判別是否是無條件進位法；而被捨掉的那一位數字若在 5 以上而未進位，才能判別是否是無條件捨去法。因此，輸入的兩個運算，必得使結果中被捨去的那一位數字一個在 4 以下，一個在 5 以上，才能明確判定進位方法。在上例十位螢幕的計算器中，**1÷7** 被捨掉的數字是 8，**2÷7** 被捨掉的數字是 7，所以會造成無法判定的可能。

從此又衍伸出另一個問題，若 **1÷7** 與 **2÷7** 是較不好的搭配，那有什麼是 **1÷7** 適合搭配的算式呢？這又是一個新的好問題！如此做法所要強調的，並非介紹出更厲害的作法與招式，而是在解完題目後如何重新思考問題，然後在省思的過程中看到更多有價值的問題。

以下提供可行的解法作為教學參考。

其實方法很多，其中一種是先列出一些計算結果來觀察，下面列出 1 到 6 的數字除以 7 的結果：

1÷7=0.142857142857……

2÷7=0.285714285714……

3÷7=0.428571428571……

4÷7=0.571428571428……

5÷7=0.714285714285……

6÷7=0.857142857142……

從上述結果可能有機會觀察出當 **1÷7** 與 **6÷7** 這兩個算式搭配時，不管計算器的螢幕能容納幾位數，都能夠判斷出該計算器近似值的取法。進而發現 **2÷7** 與 **5÷7** 也是很好的搭配、發現 **3÷7** 與 **4÷7** 也是很好的搭配。

從這幾個成功的例子可以臆測：當 m÷n 的結果是無限循環小數時(m、n 都是整數且 m＜n)，那麼 m÷n 與(n-m)÷n 會是一個很好的配對。例如：

2÷13=0.153846153846...

11÷13=0.846153846153...

原來(2÷13)+(11÷13)=1=0.99999999...，小數點後相同位數數字和必為 9，2÷13 與 11÷13 兩個算式在小數點後相同位數的數字必定其中一個在 4 以下，另一個在 5 以上。

(m÷n)+[(n-m)÷n]=1=0.99999999...，小數點後相同位數數字和必為 9，m÷n 與(n-m)÷n 兩個算式在小數點後相同位數的數字必定其中一個在 4 以下，另一個在 5 以上。

依據上述分析，當我們在這些討論之後回頭檢視這個問題，或許可以發現我們只要算(1÷3)+(2÷3)，就可以知道計算器是如何取近似值的了。

(1÷3)+(2÷3)顯示出 0.9999999，就是無條件捨去法。

(1÷3)+(2÷3)顯示出 1，就是四捨五入法。

(1÷3)+(2÷3)顯示出 1.0000001，就是無條件進位法。

又簡潔有力地重新統整了一次這個問題。並在這種表達中，呈現出四捨五入法的作用。理論上，(1÷3)+(2÷3)應該要等於 1，四捨五入法讓兩個近似值加起來後得到完全正確的結果。無條件捨去法的結果太小、無條件進位法的結果太大。學生在這些操作中，對這三種取近似值的方法的內涵會產生特別的感受，對於近似值的概念不再只是死板的規則而已。

最後，想用學生的新發現作為文章的結尾。談其中一位學生特別的想法前，先回顧一下之前的一種推論方法：

運算與結果	推論
10000000+0.4=10000001	無條件進位法
10000000+0.4=10000000 **10000000+0.5=10000001**	四捨五入法
10000000+0.5=10000000	無條件捨去法

有一個學生從他自己的計算器從發現上述這樣的論述有問題。各位讀者先試著猜看看，這學學生是做了什麼操作、而在操作後又看出了什麼問題。在原先思維中，上述推論出的結果，很難看出有任何問題，而幾乎可以終結問題的句點時，學生做了以下的操作（他使用的計算器是 SAMSUNG 手機裡的計算器程式）：

10000000+0.1=10000000

10000000+0.2=10000000

10000000+0.3=10000000

10000000+0.4=10000000

10000000+0.5=10000000

（我們應該會停在這裡，並宣判此機算器是無條件捨去法。但這學生繼續做下去。）

10000000+0.6=10000001

10000000+0.7=10000001

10000000+0.8=10000001

10000000+0.9=10000001

然後學生得結論是:「透過這 9 個算式，我發現這台計算器不是無條件進位法、也不是四捨五入法、也不是無條件捨去法，而可能是『四捨六入五成雙法』。」雖然這樣推論結果，尚待進一步的驗証，但筆者覺得，在教學中碰到學生能如此認真探索，則更應鼓勵他們做更多的猜測與嘗試。通常計算器內的算術運算為二進位的浮點運算，呈現出來十進位數值以何種方式捨去或進位更待進一步理論分析，本身就是有趣的課題。真實世界裡的問題本來就包含許多變數，數學的素養是在我們下結論之前需要和真實世界做足夠的互動與充分的討論，讓我們能有很寬廣的心去省思在各種不同的前提下對問題可做出的不同回應，在各種回應中釐清問題的本質，並對既定的知識與規則抱有批判與質疑的勇氣。在數學素養的學習歷程中，我們看到了數學教學更多的可能性，並可以用更多元的角度來反省數學學習到底帶給學生什麼樣的收穫。

參考文獻

Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD] (2010). *PISA 2012 mathematics framework*. Paris, France: Author. Retrieved from: http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/46961598.pdf.