

論壇

論壇 1：臺灣國民中學階段學生尺規作圖表現的省思

作者 | 譚克平 (國立臺灣師範大學科學教育研究所副教授)

本期的台灣數學教師(電子)期刊刊登了陳梅仙老師撰寫的「從操作實驗談幾何教學」一文,編輯委員期望期刊能藉此文建立一個論壇,因此希望本人提供一些與該文相關的思考方向,提供讀者對平面幾何與尺規作圖教學的多元思考方向。「從操作實驗談幾何教學」一文立意良善,嘗試一改傳統上幾何教學過度著重演繹推理的方式,透過實驗操作帶領學生進行觀察及操弄,主動探索幾何圖形的性質,這樣的教學方式非常值得鼓勵。其實,平面幾何中的尺規作圖是一個數學教育工作者需要特別留意的教學主題,以下筆者從另一個角度思考國中幾何教學,首先從個人過去與尺規作圖研究相關的經驗開始分享,接著報導一些筆者所知關於國中學生在尺規作圖表現現況的資料,從中提出在課堂中幫助國中生學習尺規作圖以及幾何的一些淺見,以供參考,並盼能起拋磚引玉之效。

若干年前,我有一位碩士班研究生陳宥良同學,他原是在職的國中數學教師,特別留職停薪來我服務的單位進修兩年,並希望我能及早建議一些數學教育論文的主題,作為他選擇畢業論文題目時的選項,我詢問他過去是否曾有涉獵摺紙的活動,他表示有,而且先前即拜讀過日本學者銀林浩所編「用摺紙來學數學」一書的中文翻譯本。於是我詢問他是否有興趣以透過摺紙學習幾何作為他論文的大方向,但我補充說暫時未能給他一個比較聚焦的方向。他當下即表達十分有意願,而且還主動表示他曾思考是否可以透過摺紙來解決幾何尺規作圖的問題,我覺得這個想法非常好,因此建議他可從數學教育的角度,嘗試發展一套適合國中生透過摺紙學習尺規作圖的課程,並指出作為一個碩士論文的主題而言,其挑戰性相當高。宥良同學卻表示他願意試試看,因為根據他過去教學經驗所知,國中生面對尺規作圖題經常感到解題十分困難,所以他想嘗試發展別的途徑,幫助國中生在解尺規作圖題的時候,除了不斷應用尺規嘗試之外,還能夠有其它工具協助他們尋找解題的線索,從摺紙探索解決尺規作圖題的靈感,然後再將摺紙的動作轉換成尺規作圖的動作。筆者認為此見解很有機會可以落實,關鍵在於要善加利用學生對摺紙的直觀性來安排教學活動,並盡可能透過摺紙鞏固學生的對稱觀念。

雖然我沒有很多機會直接觀察國中生解尺規作圖題目時的表現,但由於過去有不少參與國中基測的經驗,因此有機會分析歷屆考生應付數學科試題的表現,尤其會留意他們在尺規作圖試題的作答情況。國中基測歷屆的尺規作圖試題,皆以選擇題的形式出現,而且部分題目設計是用甲、乙兩位學生分別就題目所要求的提出自己的作圖步驟,接著要求考生判斷兩人作法誰對誰錯。綜合而言,一般考生在尺規作圖試題的表現並不理想,個人估計它們的平均答對率約為3成5至4成左右,反映出一般國中生對尺規作圖推理的層面掌握不足,此現象亦部分支持宥良關於國中生解尺規作圖題會感到困難的觀察,因此建議國中數學教師宜正視學生學習該單

元時可能遇到的障礙。

當時，為了協助宥良同學能更瞭解國中生解尺規作圖題時真正困難之所在，好讓他在後續設計摺紙課程的過程中，能夠更清楚瞭解如何安排摺紙活動以協助學生習得尺規作圖的知識技能，於是我建議宥良同學先進行一個規模不大也不小的問卷調查，藉以初步瞭解大台北地區國中生尺規作圖的具體表現。該問卷調查有不少發現，主要報導於陳宥良（2009）的畢業論文內，部分結果亦發表於 Tam 與 Chen（2012）的論文中。在此僅扼要報導兩則發現，其一是很多參與研究的學生，他們對於尺規工具使用的限制似乎知之不詳，因此建議數學教師宜時常提醒學生該等工具在使用上的限制。另一則發現是根據學生作圖痕跡進行推測，有部分學生是藉由反覆運用圓規畫弧以逼近所欲作出的點，這似乎反映出有些學生缺乏作圖時需要運用的策略思維，即思考所欲作出的目標物為何？目前已知為何？該如何進行才可以達成目的？解尺規作圖題時，策略思維甚為重要，建議教師在解尺規作圖題時，與學生一起分析討論，共同制定一些作圖策略，然後才開始作圖，以減少在教室中唸完作圖題目後，就直接進入示範作圖動作的教學形式。

再從另一個角度瞭解國中生對於掌握尺規作圖知識的現況。國中基測自九十年實施以降，與尺規作圖相關的題目並不少，至一零二年基測共 37 題，另有兩題只簡略提及作圖步驟故可忽略不算，但連同 90 年的練習題本則達 38 題，其分布可參以下表 1 的歷年試題整理表。

表 1

歷屆國中基測與尺規作圖相關試題的題號整理表

年度	90 練習本	90	91	92	94	95	96	97	98	99	100	101	102
基測一		17	23	27	16	15					24		
		24	29		30	32	19	33	33	28	30	33	31
		31									33		
基測二		23						10					
	29	27	18	26	9		31	30	32	26	28		
		31	28					34		34	34		
北北基											23		
聯測											29		

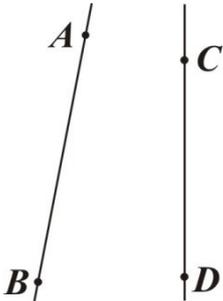
註：參考及修正自彭良楨（2011）及陳聖別（2012）。

由於歷屆國中基測共出現 37 道尺規作圖題，可知它是重要的題型之一。但由於考試實務上的考量，基測只以選擇題的形式出題，因此並不能直接要求學生完整完成一道作圖題的所有步驟，而改以陳述四種不同的作圖法，請考生選出其中正確的作圖法，或者是陳述甲、乙兩人解一道作圖題，各自提出自己的作圖步驟，並要求考生判斷甲、乙兩人的方法屬於正確與否。此外，國中基測題本的指導語中即已明白指出，試題的附圖並不一定代表實際大小，所以對於上述第二種尺規作圖試題的類型，考生並不一定能在作圖題的附圖上直接執行甲、乙兩人的作圖步驟，藉以輕易檢查誰的步驟可以達到題目的要求，而需要運用數學推理來判斷。因此要應付

這一類題型，考生除了需要掌握作圖步驟之外，還要能驗證結果及判斷對錯，從而考驗考生是否具備數學論證的能力。此類題型已成為基測難度稍高的題型之一，整理歷屆考生在此類題目的答對率約介於 2 成 5 至 5 成左右，可見一般國中生並不擅長應付此一形式的尺規作圖題。以下表 2 所報導的即為其中一個例子，它是 98 年國中基本學力測驗數學科第一試的第 33 題，以及考生在該題的作答表現，該題答對率僅為 27% 左右，表現不甚理想。

表 2

第 98 學年度基本學力測驗數學科第一試第 33 題考生作答表現

		第 33 題				
題目		<p>如圖(十三)，直線 AB、直線 CD 為不平行之二直線，今欲作一圓 O 同時與直線 AB、直線 CD 相切，以下是甲、乙兩人的作法：</p> <p>(甲)1.過 D，作一直線 L 與直線 AB 垂直，且交直線 AB 於 E</p> <p>2.取 \overline{DE} 中點 O</p> <p>3.以 O 為圓心，\overline{OE} 長為半徑畫圓，則圓 O 即為所求</p>				
		<p>(乙)1.設直線 AB 與直線 CD 相交於 P</p> <p>2.作 $\angle BPD$ 之角平分線 L</p> <p>3.過 C，作一直線 M 與直線 CD 垂直，且交直線 L 於 O</p> <p>4.以 O 為圓心，\overline{OC} 長為半徑畫圓，則圓 O 即為所求</p> <p>對於兩人的作法，下列敘述何者正確？</p> <p>(A)兩人皆正確 (B)兩人皆錯誤</p> <p>(C)甲正確，乙錯誤 (D)甲錯誤，乙正確</p>	圖(十三)			
評量目標：評量學生是否能利用圓和三角形的性質解題						
試題分析結果：						
選 項 分 析	答案	題型	難度(P)	鑑別度(r)	Rasch 難度	命題依據
	D	2	0.2734	0.15	1.344	9-s-11
			反應人次	百分比	有效百分比	累積百分比
		未作答	1157	0.37	0.37	0.37
		複選	31	0.01	0.01	0.38
		A	88962	28.75	28.75	29.13
		B	44275	14.17	14.17	43.30
	C	91761	29.36	29.36	72.66	
	D	85459	27.34	27.34	100.00	
	全體	312545	100.00	100.00	100.00	

此題的正確答案是 D 選項，甲、乙兩人的作圖方法中，只有乙的方法正確而甲的方法錯誤。從應試者的表現來看，卻有超過半數選擇 A 及 C 選項，換句話說，有超過半數的應試者認為甲的方法是對的。從此題的答對率來看，平均每四位應試者當中，約略只有一位答對此題，在三十一萬位考生當中，約有二十二萬位考生未能選出正確答案。若從各選項的選答率來看，它們都頗為接近 25%，加上鑑別度點二系列係數（point-biserial coefficient）的值偏低，因此部分應試者可能有猜答案的情況，而部分能力較佳的應試者，亦可能誤判甲的方法是對的。分析該題，甲的作圖法問題出在如果以 O 為圓心且 \overline{OE} 長為半徑畫圓的話，該圓與直線 CD 將有兩個交點，其中一個即為 D 點，但倘若考生不會運用數學推理來判斷，僅憑按照甲的作圖步驟作圖檢驗結果的話，該題的附圖中，兩直線距離頗為接近，即使直接在附圖上作圖，並不容易判斷該圓與直線 CD 會有幾個交點。這一題測驗學生是否瞭解圓與切線的性質，以及作圖動作相對應的幾何意義，雖則本題題幹的閱讀量比較高，而且是測驗考生判斷對錯的能力而非直接運用尺規作圖的能力，但國中畢業生對尺規作圖題感覺到的困難，由此題仍可管窺一二（譚克平、陳宥良，2009）。

這類尺規作圖題一題可以測驗考生是否掌握到兩種作圖步驟的正確性，涉及數學證明等高階思考能力，是一種綜合性的題型。當然，我們並不樂見考試領導教學的情況，但考生要應付國中基測的作圖題型，需要訓練也是一個事實，畢竟此類考題不失為可以接受的題型，學生接受這方面的訓練，基本上仍是可習得適當的數學思維訓練。

回到本期陳梅仙老師的文章，筆者認為在幾何課中，多一些帶領學生進行觀察及作圖操作的活動，讓學生主動探索幾何圖形的性質，而不是只有被動的吸收幾何知識，是值得鼓勵的教學方向。此外，幾何中的尺規作圖對國中生是頗為困難的單元，教師教學時宜嘗試多方配合，除了參考陳老師的教學方式之外，還建議指引學生在作圖前先擬定作圖的策略與步驟，並實際執行，接著還需要進行作圖正確性的驗證。在整個過程中，引導學生領悟數學有嚴謹性的要求。由於如 GSP 之類的電腦幾何軟體日漸普遍，目前有不少國中數學教師在課堂中亦會使用該等軟體作為教具，但個人想提醒的是，電腦幾何軟體的作圖方式與數學課程要求的尺規作圖略有不同，因此建議教師在課堂中，即使使用電腦幾何軟體教學，仍宜適當安排足夠活動讓學生使用尺規作圖。再者，為了因應國中基測或日後國中會考的尺規作圖題，建議教師讓學生在某些題目能有個別嘗試作圖的機會，然後安排兩、三位學生在同學面前分享其作圖步驟，接著分組讓同學們討論這兩、三位學生的作圖步驟誰對誰錯，並說明所持的理由。除此之外，還可以考慮採用陳宥良（2009）與陳聖別（2012）的透過摺紙學習尺規作圖的教學方式，他們的研究發現，這樣的教學方式對於數學科比較屬於後段的學生來說，可能會有一定程度的效果。著名學者 Schoenfeld（1985）的經典著作中，有不少討論尺規作圖的篇幅，有興趣的讀者亦可另作參考。本文希望藉由上述的討論和教學上的建議，對數學教師準備尺規作圖的教學時，能夠產生一些實際的幫助。

參考文獻

- 陳宥良 (2009)。探討國中三年級學生透過摺紙活動進行尺規作圖補救教學之成效 (未出版之碩士論文)。國立臺灣師範大學，臺北市。
- 陳聖別 (2012)。摺紙活動對尺規作圖學習之效益研究—以八年級學生補救教學為例 (未出版之碩士論文)。國立臺灣師範大學，臺北市。
- 彭良楨 (2011)。國中基測摺紙與尺規試題彙編。洪萬生主編，**摺摺稱奇：初登大雅之堂的摺紙教學** (頁 72-97)。臺北：三民。
- 譚克平、陳宥良 (2009)。運用摺紙提升學生尺規作圖技巧。**科學教育月刊**，323，15-24。
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. San Diego, CA: Academic Press.
- Tam, H. P., & Chen, Y. L. (2012). A regional survey of Taiwan students' performance in geometric construction. In Tso, T. Y. (Ed.). *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 131-138). Taipei, Taiwan: PME.



論壇 2：對「從操作實驗談幾何教學」一文之我見

作者 | 劉曼麗（國立屏東教育大學數理教育研究所教授）

「從操作實驗談幾何教學」的作者，擺脫傳統的教學方式，嘗試透過教具與情境式的引導，提供學生操作與探索的機會，並以提問方式激發學生進行數學思考。而探索角平分線的教學藉由情境引出問題也很生活化，頗有創意。整體而言，作者意圖帶給學生的，是有感覺的數學，希望學生從中能體會出數學的性質，值得讚許。但就細部來看，則個人有一些不同的想法和建議，希望藉此平台交流：

1. 在教學設計與活動的標題下，可先明確列出其具體的教學目標和欲達成此目標的先備知識（從已知的→核心的），以助讀者能快速對焦。
2. 用字遣詞宜力求精準與清楚，如「在數學上，我們稱使用 3 個相同邊長所組成的三角形具有 SSS 全等的關係。」之敘述並不清楚，也不完整。何謂 3 個相同邊長？而全等的關係應是針對兩個三角形才有意義。又如「作圖時的第二條邊...和第一條邊...」文中用第一條邊和第二條邊指稱，意義不大，因為以 $\angle A$ 為準，我們已有其對邊和鄰邊的名稱，直接稱呼即可，簡單易懂。還有，「3 個班級到黃金的距離」、「802 班到黃金的距離」與「直線到黃金位置的最短距離」等敘述也似乎不妥，因為我們的說法都是點到直線的距離而非直線到點的距離。另外，作者還特別給出「這種作圖的順序稱為 ASS 作圖」；作者是先畫出角，再取鄰邊 \overline{AB} 與對邊（線段 a ）。事實上，我們也可先畫出 \overline{AB} ，再作 $\angle A$ 。因此，ASS 作圖的順序並非唯一。無論是 ASS 作圖或 SSA 作圖，其名稱意涵皆應是指邊角位置關係而非作圖順序。
3. 提問是作者教學的一大特色，有時在重要關卡的一句關鍵問話又被忽略了，甚為可惜。如「當線段 $a = \overline{BC_1}$ 時，以 ASS 作圖...剛好就只能畫出一個直角三角形」，此處應再提問學生思考為何是一「直角」三角形？如何得知？又如由圖 13 和 14，...，應提問學生畫出的直線為何是角平分線（涉及角平分線逆性質）？以及圖 15 和圖 16，...，應提問學生畫三角形中的任意兩條角平分線所得的交點 P 相同嗎？即 P 點是否唯一（涉及角平分線性質與角平分線逆性質）？
4. 探索角平分線的教學目標究是要學生學習角平分線性質？還是要學生應用角平分線性質？易使讀者混淆。如為學習，似乎欠缺角平分線性質與逆性質的教學（探索與論證）？如為應用，為何文中多處有發現之說（讓學生體會並發現到角平分線的性質）？

此外，個人對於教學設計也有一些另類想法：

1. 基於學生之前已學過等腰三角形和正三角形，故以問話先喚起學生的舊經驗，再幫學生藉由舊經驗逐步攀升。如，什麼是等腰三角形？什麼是正三角形？你可以畫出一個三角形，是等腰三角形而不是正三角形嗎？...引導學生依據其舊經驗（用摺紙將等腰三角形對摺可得）以回答提問 3。再以對摺後的痕跡為起點，引進提問 4，是否較平順？因為提問 3 到提問 4 跳得太快。

2. 在探索三角形 SSS 全等活動時，可請學生用 2 支教具棒先圍成一夾角，讓其感受此夾角因移動而可大可小。若再將第 3 支教具棒加進來，則三角形就被固定了，以此為 SSS 全等性質鋪路。同樣地，在之後學習 SAS 全等性質時，此種方式還可再被用來做為鋪路，只是改成先將夾角固定而已。
3. ASS 作圖的探討到 $\angle A$ 是直角的情形時，可再順勢引進 RHS 性質，以求事半功倍之效。
4. 有關 ASS 作圖的教學只需引導學生探討 $\angle A$ 分別為銳角、直角與鈍角的三角形情形即可。至於是否還要再延伸到三角形邊角關係的教學，則有待斟酌。如再加料，易使整體教學顯得太雜而失焦。還有，透過 ASS 作圖引導學生探討三角形邊角關係時，恐使學生誤解只有固定 $\angle A$ 的特殊情形，有失一般性。況且三角形邊角關係通常都是透過等腰三角形性質得出，學生並不難理解。

基於教學多樣化，期盼這些想法能激盪更多的想法，為數學教育努力。



論壇 3：『從操作實驗談幾何教學』之評述

作者 | 李昕儀（基隆市碇內國民中學教師）

總是在新單元的開始，不斷找尋合適的情境，希望將數學知識自然而然的鋪陳在課堂教學中。閱讀本文的兩則教學活動，聯想起《摺摺稱奇》一書，在謝豐瑞（2011）教授的文章中提到「探索實驗與推理證明的連結，為幾何直觀與抽象的延續與連續提供了可能性，於是，探索實驗有時候並不是終點，而是後續推理證明中內容結構與邏輯步驟之藍圖。」以下就本文的兩則教學活動，從教學現場的可能性做探討。

一、從三角形 ASS 全等條件探索三角形的邊角關係

1. 由實際的動手操作及仔細的觀察，輔助幾何性質的論證，以幫助中後段的學生理解。
例：藉由扣條操作認識三角形三邊邊長的關係，並由扣條拼組而成的兩全等三角形，引導學生認識並試寫幾何論證。
2. 在提問 3「如何檢查或說明等腰三角形兩底角相等？」，學生可能以摺紙方式摺出對稱軸，或許教師能請學生觀察摺痕做為思考的參照，引導學生思考如何繪製輔助線，繼續完成幾何論證。
3. 探討 ASS 全等性質的過程，具體且明確的引導學生依序探討 $\angle A$ 為銳角、直角及鈍角的情形，讓學生從尺規作圖操作觀察現象，進而歸納統整。惟對於學習成就低的學生，或許可以讓過程再簡化，例：透過摺紙觀察 ASS 可能不全等的情形。

二、從搶黃金探索角平分線的數學意涵

1. 班級排成一行搶黃金競賽情境，讓人想躍躍欲試。尤其以提問 3「什麼是公平的感覺？要用什麼方式來表示是否公平呢？」正吻合了左台益教授提出的數學科差異化教學策略之一——「開放性問題」，除了激勵學生的最大參與外，同時也可引導學生思考各種策略。
2. 圖 13 中，對 801 班與 802 班公平的黃金可能放置位置圖示，提供學生有跡可循的思考，細膩的教學設計，展現了教學者能站在學生的角度思考問題。

「如果我們願意試著以不同的角度思考數學的教學，我們就會有機會找到可以和學生一起享受數學思考的樂趣，而且，學生將會帶給老師不同角度的啟發，豐富著一次又一次的教學活動。」對於作者這一段話深有同感，當教師願意放慢教學的腳步，關注學生的思考，教學將會是另一種不同的風貌。

參考文獻

謝豐瑞（2011）。使幾何教學活潑化——摺紙及剪紙篇。洪萬生主編，摺摺稱奇：初登大雅之堂的摺紙數學（頁 26-45）。臺北：三民。

