

黃淑華、鄭鈺華、王又禾、吳昭容 (2014)。
一元一次方程式應用題的補救教學。
台灣數學教師(電子)期刊, 35 (1), 1-16。

一元一次方程式應用問題的補救教學

黃淑華¹ 鄭鈺華² 王又禾² 吳昭容^{2,3}

¹新北市立中和高級中學

²國立臺灣師範大學教育研究與評鑑中心

³國立臺灣師範大學教育心理與輔導學系

本文針對補救教學學生運算技能不足、閱讀能力低落的特性，提出一元一次方程式的補救教學宜從數量特性、情境變化，和語句的順逆敘述選擇適當的教材，同時以「數到式的類化」、「題意的理解與記錄」、「分句閱讀、簡易圖示」三個教學策略，貫穿地說明加減、乘除、四則混合的應用問題解題的引導方式。文中以具體範例與實際教學的學生反應為例，說明策略的應用方式。

關鍵詞：一元一次方程式、應用問題、補救教學策略

壹、緒論

數學應用題解題是學生備感困擾的學習內容。從讀懂題目的意思、釐清數量之間的關係、聯想到相關的數學概念，以及判斷運算方式等，都有一定的難度。國中數學更因為需要使用代數方程式來列式、解題，對一般學生而言已是挑戰，補救教學的學生就更見完全放棄的狀態。

解決一元一次方程式應用題時，代數運算能力不足是學生常見的困難(Booth, 1988; Radford, 2000)，例如認為 $2a+5$ 等於 $7a$ (Thomas & Tall, 2001)；此外，與列式相關的障礙包括：無法了解文字符號的意義(陳彥廷、柳賢，2009；Maharaj, 2008)、無法了解等號兩邊的等同關係(張景媛、余采玲、鄭章華、范德鑫，2012)、無法轉譯代數文字題(林清山、張景媛，1994；謝和秀、謝哲仁，2002；Stafylidou & Vosniadou, 2004)等問題。本文針對上述問題，尤其因應國中數學補救教學的學生基本技能不足、閱讀能力低落的特性，提出「數到式的類化」、「題意的理解與記錄」、「分句閱讀、簡易圖示」三個教學策略，並依據題目的語意結構分為加與減、乘與除、四則混合三個部分進行概念分析與實例說明。

由於應用題難易度是影響學習效果的重要因素，在討論三種教學策略之前，本文也提醒教師在選擇補救教材的題目時，宜考量影響應用題難易度變化的三個因素。(1) **數量的特性**。題目中的數字若以整數出現，會較小數或分數容易，例如：「1 本筆記簿的價錢是一枝原子筆價錢的 $\frac{4}{3}$ 倍，已知買 2 枝原子筆和 1 本筆記簿共須 60 元，則 1 本筆記簿多少元？」，當題目中的「 $\frac{4}{3}$ 」倍改成「2」倍時，語意關係與計算上都會變得較簡單。國中補救教學的學生，其小學階段的分數、小數概念與計算基礎就已不穩固，到了國中分數、小數的代數課程時，常有極大的困難。(2) **情境的變化**。文字敘述若以可點數的離散量(如：人數、蘋果個數、奶茶杯數、……)呈現，會較以連續量(如：時間、長度、面積、容積、……)來得簡單，例如「有 4 包糖，每包 10 個，平分給 5 人，每人可得幾個？」與「坐火車時只買到 4 個座位，車程 10 小時，5 人搭乘，希望每人有位置坐的時間相同，每人坐幾小時？」，雖然兩個情境的計算式都同為 $10 \times 4 \div 5$ ，但難度差距卻不小。(3) **語句的順逆敘述**。所謂順敘述意指題目語意和運算一致，例如給定基準量的比較題即為順敘述：「父親的體重比兒子體重的 2 倍少 3 公斤，若兒子的體重是 x 公斤，那麼父親的體重是____公斤。」相反地，給定比較量求基準量的題目(如：上題後段改為「若父親的體重是 y 公斤，那麼兒子的體重是____公斤。」)，則為逆敘述。學生面對順敘述情境較容易掌握語意，也較能轉換成正確的算式，因此補救教學選擇題目時，宜考量順逆敘述。

貳、列代數式的概念分析與教學策略

一、加與減的概念分析及教學策略

加與減的應用問題基模大致可分為「合併」、「改變」、「比較」三類，這三種基模都可以命出加或減的題型。其中改變和比較的某些題型因涉及逆推，對學生而言特別困難，例如「妹妹有一些錢，媽媽給妹妹 80 元後，妹妹就有 500 元，問妹妹原來有多少錢？」這類起始量未知的改變題，或者「甲班人數 32 人，甲班比乙班多 3 人，問乙班是多少人？」這類基準量未知的比較題，學生常有無法判斷該用加法還是減法的困擾。

在較困難的題型上，教師可選用學生熟悉的情境做為教學的鷹架，例如使用「孫子今年 x 歲，爺爺今年 70 歲，那麼孫子比爺爺小____歲？」，可能有助於理解「誰比誰多多少」或「誰比誰少多少」，因為爺爺與孫子年齡的長幼關係是學生熟悉的，且年齡數值都屬正數，就容易成功列式。若還有困難，也可以先從數值實例出發，例如「你今年 13 歲，爺爺 70 歲，你比爺爺小幾歲？」來引導學生掌握誰減誰未必是依照句子中出現的順序，而是要用「大數減小數」計算。

(一)「數到式的類化」應用在加與減的問題

「王小美的媽媽今年 x 歲，5 年前是____歲；5 年後是____歲」……①

面對題①，有些學生的答案會出現第一格寫「 $5x$ 」、第二格寫「 $x5$ 」，因為這些學生認為 5 年「前」和「後」就代表 5 在 x 的前面或後面的意思。但是，這未必意味著學生不懂得此題要用加、減法，因為在有實際數值的類似題，如下題②，他們可以答對。

「王小美今年 13 歲，5 年前是____歲；5 年後是____歲」……②

究其原因，可能是學生心理上還無法將 x 視為數，而且部分圖像表徵較強的學生，甚至會以「左一減去、右一加上」的空間關係來表徵加與減，在還無法掌握代數式的形式下，就寫出了以 $5x$ 表示 $x-5$ 、 $x5$ 表示 $x+5$ 的答案。

教學時，首先必須強調「 x 是代表一個數，我們不知道它是多少，但我們可以把它想成任何一個數」，讓學生接受 x 是數，是可以運算的。其次，在概念建立時，可採用從數類化到式的方法，先讓學生列出題②的算式「 $13-5$ 」，再類比列出題①的代數式「 $x-5$ 」。

(二) 加與減問題的「題意理解與圖示記錄」

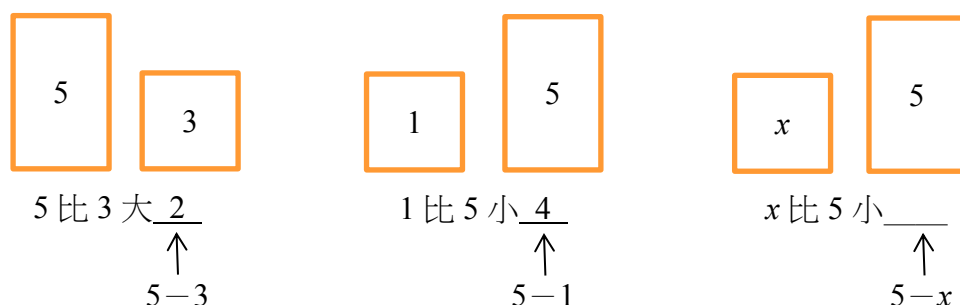
「甲比乙少」這個敘述，因為語句上和「少」連在一起的是「乙」，不少學生以為是乙比較少。教師可以強調「雖然乙少，但是甲比乙更少」，來讓學生理解兩者的大小關係。只是，學生常常一下子又忘了是誰比較少。因此討論後的結論有必要加以記錄，如下的圖示用兩個大小不

一的方塊來代表，能有助於學生從視覺上快速判斷出誰多誰少。



兩數差異量的表示方式，會隨著敘述方式而難度不同。「 x 比 5 大，則 x 比 5 大多少？」學生較能寫出正確的答案「 $x-5$ 」，但面對「 x 比 5 小，則 x 比 5 小多少？」常會錯寫成「 $x-5$ 」。因為大多少與小多少均蘊含「相減」的意義，而學生傾向依照句子的敘述順序相減，就會在前一問題答對，而後一題答錯。教師可利用數到式的類化，並整合圖像記錄的策略來指導學生。

由於上述的困難在無法從語意轉換到列式，所以可利用正數領域的數值為例，建立「誰比誰大多少」或「誰比誰小多少」的列式方式。例如「5 比 3 大多少？2」、「1 比 5 小多少？4」，讓學生了解計算 5 比 3 大多少是用「 $5-3$ 」、1 比 5 小多少是用「 $5-1$ 」，並強調計算「誰比誰大多少」或「誰比誰小多少」，可用「大數減小數」來算，如果是用「小數減大數」，得出來的結果會是負的。再類化到計算 x 比 5 小多少是要用「 $5-x$ 」而不是「 $x-5$ 」。此時，若能加上圖像表徵，更能判斷出該由誰減誰。



記錄題意的圖示沒有特定的方式，只要能讓學生明顯看出大小之間的差異，且簡單、好畫就好，因此教師示範時的圖示，也盡量依循簡單好畫的原則。

(三) 加與減問題的「分句閱讀、簡易圖示」

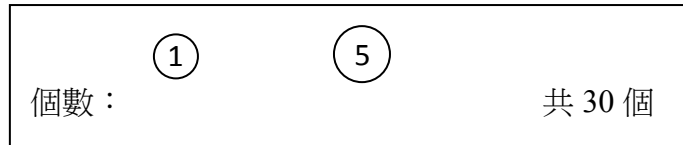
應用題語意所指的數量關係是困難之所在。教學時，整題念過一遍，使心中有個約略印象後，宜指導學生分句閱讀，簡易圖示一句一句的題意，以建構出整體的數量關係。例如：

1. 1 元錢幣和 5 元錢幣共有 30 個，把 1 元錢幣都給弟弟，5 元錢幣都給妹妹，如果 1 元錢幣有 x 個，那麼
- (1) 弟弟得到_____個錢幣，有_____元，
- (2) 妹妹得到_____個錢幣，有_____元，
- (3) 兩人共有_____元。

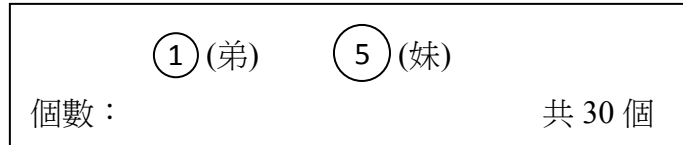
1. 整題念一遍，建立約略印象：1 元、5 元錢幣，30 個，弟弟、妹妹等。

2. 分句閱讀、理解題意與簡易圖示：

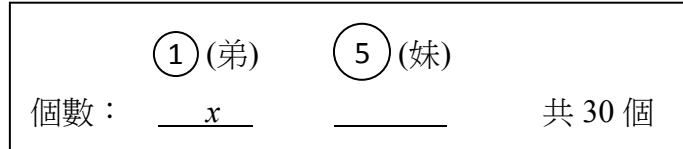
「1 元錢幣和 5 元錢幣共有 30 個」，



「把 1 元錢幣都給弟弟，5 元錢幣都給妹妹」，

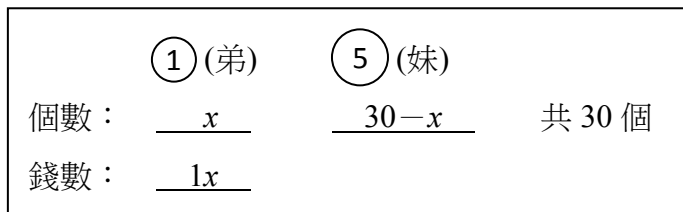


「如果 1 元錢幣有 x 個」，



從上面圖示，比較容易看出題目的意思，也會感覺到需要知道妹妹有幾個 5 元硬幣。

「(1) 弟弟得到_____個錢幣，有_____元，」



「(2) 妹妹得到_____個錢幣，有_____元，」

| | | | |
|-----|---------------|--------------------|--------|
| | ① (弟) | ⑤ (妹) | |
| 個數： | $\frac{x}{}$ | $\frac{30-x}{}$ | 共 30 個 |
| 錢數： | $\frac{1x}{}$ | $\frac{5(30-x)}{}$ | |

「(3) 兩人共有_____元。」

| | | | |
|-----|---------------|--------------------|---------|
| | ① (弟) | ⑤ (妹) | |
| 個數： | $\frac{x}{}$ | $\frac{30-x}{}$ | 共 30 個 |
| 錢數： | $\frac{1x}{}$ | $\frac{5(30-x)}{}$ | 共_____元 |

原本題目有許多文字，如上述逐步把文字轉換成圖像，有助於補救教學的學生掌握題意。

下列為一比較型的應用問題，學生經常掌握不到其中的基準量，但若藉由圖示，從視覺效果，更能輕易理解其間的關係。

2. 紀廷比坤郁高 10 公分，

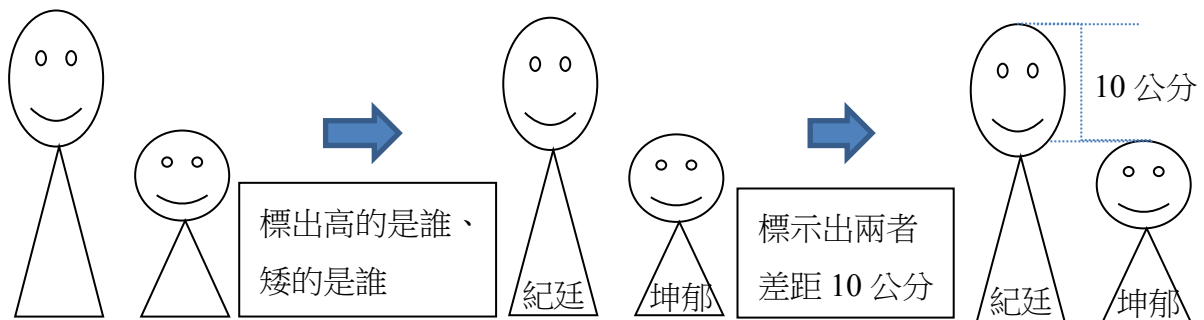
(1) 如果坤郁的身高是 x 公分，那麼紀廷的身高是_____公分。

(2) 如果紀廷的身高是 y 公分，那麼坤郁的身高是_____公分。

1. 整題念一遍，建立大略印象：紀廷、坤郁、比高、10 公分等。

2. 分句閱讀、理解題意與簡易圖示：

「紀廷比坤郁高 10 公分」，表示成下圖：

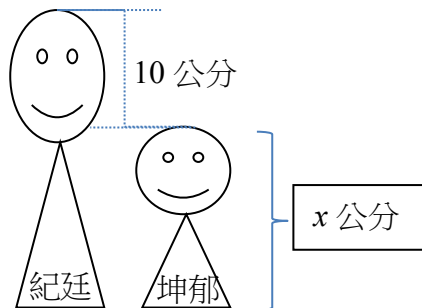


兩人的身高以一高一矮的圖來表示，比起數線或線段圖更接近生活經驗，學生比較不會感覺憂慮。題幹的敘述牽涉到基準量，而且「紀廷比坤郁高 10 公分」這句話含有兩個資訊，圖示必須能表現這兩點：紀廷高，以及高 10 公分。老師帶領學生讀題時，同樣可以用「坤郁高，但是紀廷比

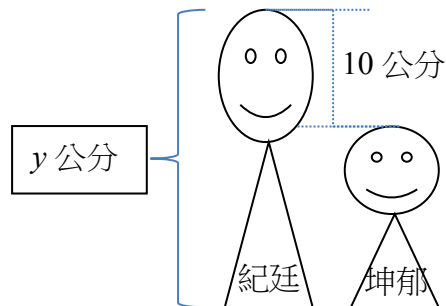
他還要更高」的說法來引導學生知道，高的是紀廷，矮的是坤郁，並隨即在圖中標示。

接著依各小題題意在圖上標示訊息，並解題。

「(1) 如果坤郁的身高是 x 公分，那麼紀廷的身高是_____公分。」



「(2) 如果紀廷的身高是 y 公分，那麼坤郁的身高是_____公分。」



因為(1)、(2)題沒有關聯，解(2)時，應提醒學生用未標示 x 公分的原圖，以避免混淆。

至於文獻常見之 $2a+5=7a$ 的錯誤 (Thomas & Tall, 2001)，本文的第一作者通常提前在教導「式子的簡記」時即以情境協助學生掌握代數運算的原理。例如：「鉛筆 1 枝 a 元，橡皮擦 1 個 5 元，買 2 枝鉛筆和 1 個橡皮擦共要多少元？」此時列式為 $a \times 2 + 5$ ，讓學生透過情境的意義，理解 $2a$ 的 2 不能和 5 相加。並在做同類項合併時，會再次強調 $2a$ 與 5 並非同類項，不必再做合併，寫成 $2a+5$ 即可。

二、乘與除的概念分析及教學策略

「乘」最原始的想法就是「自己累加」，例如「原子筆 1 枝 5 元，3 枝是多少元？」5 累加三次，記成「 $5+5+5$ 」，簡記成「 5×3 」。

「乘」更進一步的用語與觀念是「倍」，「鉛筆 1 枝 5 元，1 枝原子筆的價錢是 1 枝鉛筆價錢的 3 倍」，學生必須理解「1 枝原子筆的價錢是 1 枝鉛筆價錢的 3 倍」等同於「1 枝原子筆的價錢是 3 枝鉛筆的價錢」，才能以「 5×3 」計算 1 枝原子筆的價錢。

具備整數倍的想法，才有辦法推到分數倍、小數倍。加上有些情境雖然涉及「倍」的概念，但語句中看不到「倍」的用語，使得學生無法連結到乘除運算，例如分數倍常省略「倍」的用語，而打折也屬於「隱藏的倍」的問題。因此補救教學的學生面對這類問題就會有極大的困難。

「除」是乘的逆運算，基於未知的是單位量或者單位數，而對應到等分除或包含除。「用 15 元買了 3 枝筆，每枝筆是多少元？」就是把 15 元平分給 3 枝筆，是等分除；而「15 個橘子，每 3 個裝 1 袋，可裝成幾袋？」是包含除。至於「15 是 3 的幾倍？」，則直接評量「倍」的用語的理解。在整數範圍時，雖然乘法或除法的語句敘述幾乎相同，學生尚能利用情境的線索推估「答案變小就選用除，答案變大就採用乘」來解題，但進到分數倍、小數倍、隱藏的倍、代數等內容，學生常常分辨不清乘或除的使用時機，例如：

「甲的錢是乙的 $\frac{2}{3}$ ，若甲有 600 元，則乙有_____元。」

「甲的錢是乙的 $\frac{2}{3}$ ，若乙有 600 元，則甲有_____元。」

「甲的錢是乙的 3 倍，若甲有 x 元，則乙有_____元。」③

「甲的錢是乙的 3 倍，若乙有 x 元，則甲有_____元。」④

「甲的錢是乙的 $\frac{2}{3}$ ，若甲有 x 元，則乙有_____元。」

「甲的錢是乙的 $\frac{2}{3}$ ，若乙有 x 元，則甲有_____元。」⑤

「一件衣服 x 元，打 8 折後是_____元。」⑥

「一件衣服打 8 折後是 x 元，則原價是_____元。」

...等等。

針對補救教學的學生，以上題目建議只保留一些較簡易者或者對未來學習具關鍵影響的題型，例如「整數倍」的③④，「分數倍」的順敘述⑤，「隱藏的倍」的順敘述⑥。

乘除法應用問題同樣可以利用「數到式的類化」、「題意的理解與記錄」、「分句閱讀、簡易圖示」等方式進行教學，只是因應乘除的特性，圖示上需做些修改。底下以實例簡要說明：

3. 佳芬的錢數是佳儀的 2 倍，

(1) 若佳儀有 100 元，則佳芬有_____元；

(2) 若佳儀有 m 元，則佳芬有_____元；

(3) 若佳芬有 100 元，則佳儀有_____元；

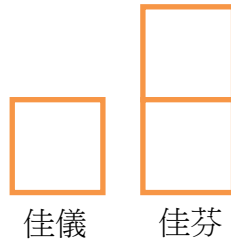
(4) 若佳芬有 n 元，則佳儀有_____元。

1. 整題念一遍，建立約略印象：佳芬、佳儀、2 倍、100 元等。

2. 分句閱讀、理解題意與簡易圖示：

「佳芬的錢數是佳儀的 2 倍」，

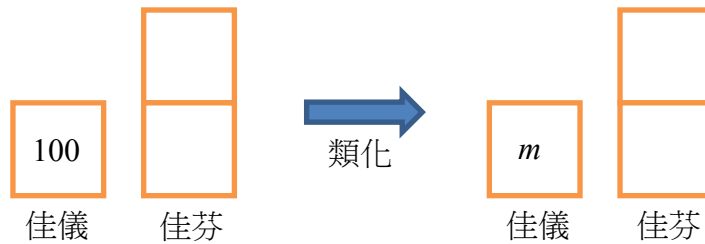
教師必須引導學生明白不是佳儀要 2 倍，而是佳芬要 2 倍，而且是佳儀的 2 倍，並以圖示記錄，免得一直在文字上打轉。如以方塊表示：



本題在設計上已含從「數」類化到「式」，先從

「(1) 若佳儀有 100 元，則佳芬有___元；」，再到

「(2) 若佳儀有 m 元，則佳芬有___元；」，配上圖示。



若有學生用 $100 + 100 = 200$ 的方式計算佳芬的錢數，並無不可，但教師必須進一步要求學生以 100×2 來連結到 2 倍；尤其當學生用 $m + m$ 表示時，宜指導學生察覺隱藏的 1 倍，

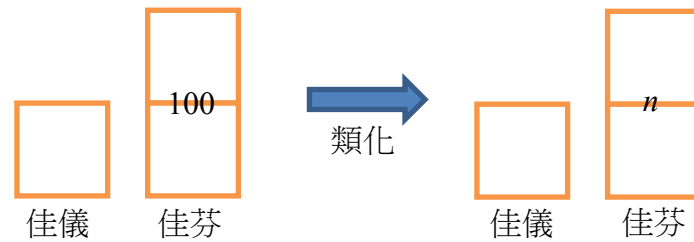
$$\begin{aligned} & m + m \\ &= 1 \cdot m + 1 \cdot m \\ &= 2m \end{aligned}$$

務必與 2 倍的意義密切聯繫，如此會有助於分數倍時的列式。

逆運算的學習也可從「數」類化到「式」，並配上圖示。

先從「(3) 若佳芬有 100 元，則佳儀有___元；」，

再到「(4) 若佳芬有 n 元，則佳儀有___元。」



三、四則混合的教學重點

(一) 以順敘述的情境為主

四則混合的應用問題，教學方法仍可以用數到式類化、分句閱讀與簡易圖示的搭配。但建議只以順敘述的情境為主。

舉一分數倍的例子概略說明要點：

4. 1 香瓜的價錢是 1 斤香蕉價錢的 $2\frac{1}{2}$ 倍，如果香蕉 1 斤 x 元，那麼

(1) 香瓜 1 斤_____元；

(2) 各買 1 斤共要_____元。

(3) 3 斤香蕉的價錢比 1 斤香瓜的價錢貴_____元。

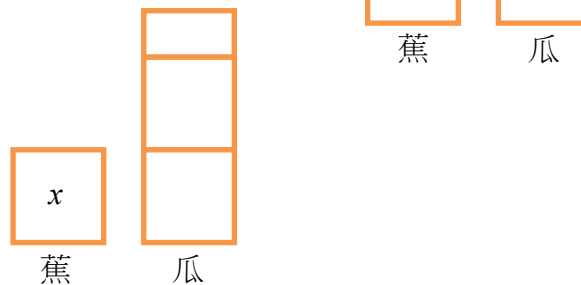
1. 整題念一遍，建立約略印象：香瓜、香蕉、 $2\frac{1}{2}$ 倍、 x 元等。

2. 分句閱讀、理解題意與簡易圖示：

「1 斤香瓜的價錢是 1 斤香蕉價錢的 $2\frac{1}{2}$ 倍，」

師生共同討論，並將討論結果簡單圖示出來。

「如果香蕉 1 斤 x 元，」



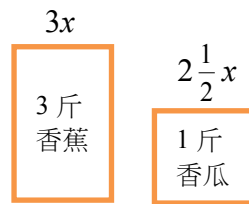
若有學生仍以 $x+x+\frac{1}{2}x$ 表示香瓜，可透過代數運算連結到 $2\frac{1}{2}$ 倍，知道可用 $x \cdot 2\frac{1}{2}$ 來算。

「(3) 3 斤香蕉的價錢比 1 斤香瓜的價錢貴_____元。」

此題的數量關係較為複雜，建議能加進記錄問題的簡易圖示，如下：

| | | | |
|------|------|-----------------|----------|
| | 香蕉 | 香瓜 | |
| 1 斤： | x | $2\frac{1}{2}x$ | …共_____元 |
| 3 斤： | $3x$ | | |

需注意學生是否掌握「3 斤香蕉的價錢比 1 斤香瓜的價錢貴」中表達的大小關係，否則還得透過討論，並圖示討論的結果，例如：



(二) 所列的一元一次式以一個括號為原則

代數運算時若有括號必須去括號，多個括號常造成能力不足的學生混淆。所以《補救教學基本學習內容》(教育部，2012) 規範，補救教學的一元一次式以一個括號為原則，例如「香蕉 1 斤 x 元，蘋果 1 斤比香蕉 1 斤貴 10 元，買了 3 斤蘋果，共需 $3(x+10)$ 元。」

上式 $3(x+10)$ 的括號，需要特別的指導。例如佐以圖示說明，當我們知道有兩項都必須乘以相同的一個數時，如 x 和 10 都要乘以 3，就可以用括號表示；反過來，去括號時，括號內的兩項都必須乘以 3。

5. 買 1 個漢堡和 1 杯玉米濃湯共要 70 元，
 如果 1 個漢堡要 a 元，那麼 1 杯玉米濃湯要_____元；
 (1) 3 個漢堡要_____元；2 杯玉米濃湯要_____元。
 (2) 子婕買了 3 個漢堡和 2 杯玉米濃湯共要_____元。
 (3) 如果知道 3 個漢堡比 2 杯玉米濃湯貴，那麼 3 個漢堡比 2 杯玉米濃湯貴
 _____元。

引導過程同前：整題念一遍，建立大略印象後，再分句閱讀、理解題意並簡易圖示。以下為可能採用的圖示，其間，2 杯玉米濃湯的價錢需用到括號表示，必須特別提醒。

| | | | |
|----------|--------------------|-------------------------|--------|
| | 漢堡 | 濃湯 | |
| 1 個/1 杯： | a 元 | $\underline{70-a}$ 元 | 共 70 元 |
| 3 個： | $\underline{3a}$ 元 | | |
| 2 杯： | | $\underline{2(70-a)}$ 元 | |

參、應用題解題的教學策略

應用問題是列一元一次式與解一元一次方程式的綜合應用，其中包含找出題目中的相等關係以列出方程式，並且涉及括號的運用和運算，而此二者也是學習應用問題的困難之處，因此，以下應用問題解題的範例，特別著重尋找相等關係的步驟，以及括號的教學提示。

6. 已知父子兩人今年的年齡分別為 36 歲與 8 歲，
請問幾年後，父親的年齡是兒子年齡的 2 倍？

1. 整題念一遍，建立約略印象：父 36、子 8、2 倍等。

2. 分句閱讀、理解題意與簡易圖示：

「父子兩人今年的年齡分別為 36 歲與 8 歲」，

學生的圖示通常只記了「父」、「36」、「子」、「8」，但題幹中的「請問幾年後，」指出問題牽涉到年紀的改變，所以將「36」跟「8」標明為今年，才不會混淆。又因為題目問的是幾年後，因此可以假設 x 年後。

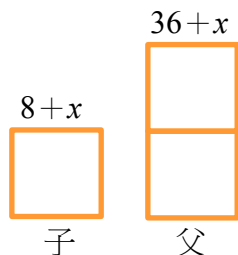
| | | |
|---------|----|---|
| | 父 | 子 |
| 今年： | 36 | 8 |
| x 年後： | | |

「請問幾年後，父親的年齡是兒子年齡的 2 倍？」

| | | | |
|---------|--------------------|-------------------|--------|
| | 父 | 子 | |
| 今年： | 36 | 8 | |
| x 年後： | $\underline{36+x}$ | $\underline{8+x}$ | ...2 倍 |

因為「2 倍」的關係會因給定的是基準量或比較量而需判斷是乘以 2 或除以 2，且題目並未言明何處「等於」，因此學生常無法列出方程式。建議可採以下兩種方式教學。

一是，沿用前文的圖示方式，先畫出一組表達 1 與 2 倍的箱子，並經由師生討論，從「父親的年齡是兒子年齡的 2 倍」，引導出兒子是 1 倍，父親是 2 倍，如下圖。



經由圖示的幫助，從視覺上就可看出兒子的年紀要乘以 2 才會和父親的年紀相等，得以列出方程式 $2 \cdot (8+x) = 36+x$ ，並藉此機會說明括號的使用時機，因為 $8+x$ 是兒子的年紀，兒子的年紀要乘以 2，所以整個 $8+x$ 都要乘以 2，因此必須加括號。

二是，分別把題目中「父親的年齡」圈起來對照成「 $36+x$ 」，「兒子年齡」圈起來對照「 $8+x$ 」，如下圖所示，變成「 $36+x$ 」是「 $8+x$ 」的 2 倍。此種方法對程度稍好一些的學生效果不錯。

| |
|--|
| $36+x$ 是 $8+x$ 的 2 倍 $36+x$ 是 $8+x$ 的 2 倍 $36+x = 8+x$ 的 2 倍 $36+x = (8+x) \cdot 2$ |
|--|

7. 爸爸用 360 元買了 1 本書和 1 張 CD，只知書比 CD 貴 120 元，問 1 本書、1 張 CD 各是多少元？

當記錄完題目後，

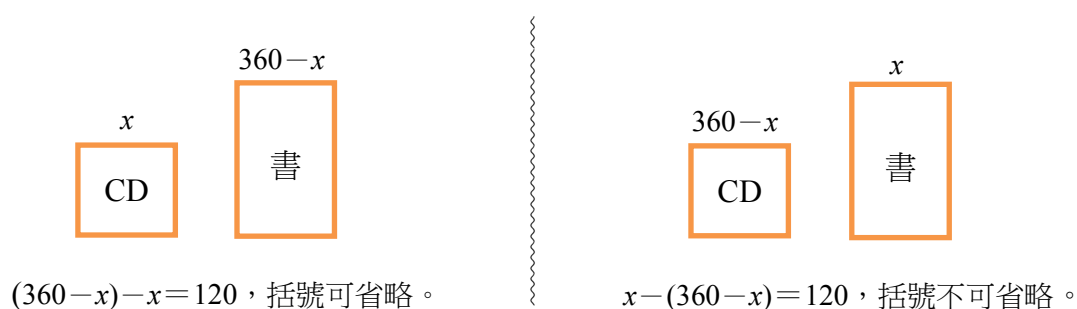
| | |
|---|-----------|
| 書 | CD |
| | … 共 360 元 |
| | … 貴 120 元 |

學生會發現設誰為 x 都可以，一個是「 x 」，另一個就是「 $360-x$ 」。

| | | |
|---------|-----|-----------|
| 書 | CD | |
| $360-x$ | x | … 共 360 元 |
| | | … 貴 120 元 |

| | | |
|-----|---------|-----------|
| 書 | CD | |
| x | $360-x$ | … 共 360 元 |
| | | … 貴 120 元 |

另一條件「貴 120 元」是列方程式的關鍵。學生可將兩量的「差」等於 120 作為列方程式的依據，若無法判斷出誰要減誰才會是 120，可經由討論，知道大小關係後加以圖示記錄。



8. 清心咖啡館提供濃縮和美式兩種咖啡，某日一共賣了 85 杯，又知道美式的數量是濃縮咖啡的 4 倍，問濃縮咖啡賣了幾杯？

由於題目問濃縮咖啡，有些學生就設濃縮咖啡賣了 x 杯；接著因為和美式咖啡一共賣了 85 杯，所以美式咖啡就是賣了 $85-x$ 杯；又美式咖啡是濃縮咖啡的四倍，濃縮咖啡是 x 杯，美式咖啡就是 $4x$ 杯，圖示記錄如下圖。

| | | |
|-----|--------------------------|----------|
| 濃縮 | 美式 | |
| x | <u>$85-x$</u> | … 共 85 杯 |
| x | <u>$4x$</u> | … 4 倍 |

但有些學生就卡在此處，認為已經沒有條件可用來列方程式了。此時可跟學生說明，因為設濃縮咖啡賣了 x 杯後，美式咖啡就賣了 $85-x$ 杯或是 $4x$ 杯，因此 $85-x$ 應該和 $4x$ 相等，可列出方程式 $85-x=4x$ 。這種從兩個不同方向得同一數學物件因而相等的方式，也是後續數學學習常用的解題策略。

肆、結語

本文作者根據緒論所言數量的特性、情境的變化、語句的順逆敘述等原則，編寫補救教學教材，並以「數到式的類化」、「題意的理解與記錄」、「分句閱讀、簡易圖示」三個教學策略實地進行低成就學生的補救教學。從教學實務與推廣過程中發現以下成效：

在改善動機上，學生不再一看到應用問題就放棄，而會主動嘗試分句閱讀、分析關係，並用圖示幫助記錄題意。用圖示記錄問題後，因為通常只有兩個量，學生會較敢於大膽設 x 。

在師生互動上，由於學生會讀題、畫圖、設 x ，教師就有機會瞭解學生的想法或障礙，師生間較容易產生問答與互動。

在促進學生理解上，從數類化或圖示能協助學生掌握題意中的數量關係，增進正確列式，甚至降低計算正確卻答錯的可能性。例如「甲乙兩人今年的歲數和為 45 歲，且甲比乙多 5 歲，請問甲、乙兩人今年各幾歲？」常有學生即使算出 20 歲和 25 歲，卻誤將答案寫成甲 20 歲、乙 25 歲，因為一直受到「乙多 5 歲」的影響。但若用圖示記錄了甲多乙少，則學生犯此錯誤的情況就會減少。

不過，涉及比較關係的一元一次方程式應用題，一向是學生較難釐清的，需要比較多從數類化到式的經驗，方能建立概念。此外，用簡易圖示學習列一元一次式與解應用問題，其間的變化不少，教師不宜限制學生圖示的方式，宜在教學前後觀察與省思，學生到底能不能看懂圖示？改用不同的圖示呈現，何者學生較易理解？搭配何種解釋，解說才更為有效？期望本文提供的選題與教學策略，有助於一元一次方程式的補救教學。

參考文獻

- 林清山、張景媛（1994）。國中生代數應用題教學策略效果之評估。**教育心理學報**，27，35-62。
- 張景媛、余采玲、鄭章華、范德鑫（2012）。以對話式形成性評量進行數學補救教學的方法。**教育研究月刊**，221，50-64。
- 教育部（2012）。**補救教學基本學習內容【國民中學數學學習領域】（試行版）**。臺北：作者。
- 陳彥廷、柳賢（2009）。中學生對代數式中文字符號之語意理解研究：不同管道探討。**科學教育學刊**，17（1），1-25。
- 謝和秀、謝哲仁（2002）。國一學生文字符號概念及代數文字題之解題研究。載於國立嘉義大學（主編），**九十一年度師範院校教育學術論文發表會論文集**（第 3 卷，1491-1521 頁）。嘉義：國立嘉義大學。
- Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford & A. P. Shulte (Eds.), *The Ideals of Algebra, K-12* (pp. 20-32). Reston, VA: NCTM.
- Maharaj, A. (2008). Some insights from research literature for teaching and learning mathematics. *South African Journal of Education*, 28(3), 401-414.

- Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics*, 42(3), 237-268.
- Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction*, 14(5), 503-518.
- Thomas, M., & Tall, D. (2001). The long-term cognitive development of symbolic algebra. In H. Chick, K., Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The future of the teaching and learning of algebra* (Vol. 2, pp. 590-597). Melbourne: The University of Melbourne.