陳梅仙（2014）。
從操作實驗談幾何教學。
**台灣數學教師(電子)期刊**，**35**（1），17-29。

# 從操作實驗談幾何教學

陳梅仙
屏東縣立琉球國民中學

本文目的在展示從實驗操作方式引進學生對幾何性質的探索與論證的教學嘗試。尤其是幾何課程，幾何推理是國中生學習數學的困難單元。傳統課室教學是以演繹推理的方式教導學生幾何性質的證明，然學習成效仍待考驗。筆者在進行三角形全等性與角平分課堂教學中，以實驗操作的方式，透過教具與情境的引導，作了兩則實驗教學。這兩則的數學教學課堂是一個全新的嘗試，筆者從不同的觀點與切入的角度帶領學生觀察、操作和實驗幾何圖像，學生從被動的吸收數學知識，轉變成為可以參與其中並發現幾何數學性質的角色，這一個動態的雙向互動的數學課堂的營造讓我們看到數學課堂的可能性與發展性。

**關鍵詞**：全等三角形、角平分線、實驗操作

通訊作者：陳梅仙，e-mail：mayee222@gmail.com
收稿：2013 年 4 月 19 日；接受刊登：2014 年 3 月 7 日。

## 壹、引言

幾何圖形是生活圖像的抽象化，要從抽象化的圖像中探索數學性質，對於多數學生而言是困難的。如何讓學生能感受幾何抽象圖像的數學內涵，以利用實際操作實驗的方式來探索幾何圖像是一個可以讓學生親近幾何圖像的新的嚐試。筆者在進行三角形全等性質與角平分線教學的課堂中，以融入實驗操作的精神，透過教具與情境式的引導，作了以下兩則數學課堂教學的嘗試。

其中一則為「從三角形 ASS 全等條件探索三角形的邊角關係」，老師在教學中發現三角形全等的教學無法與學生思考作連結，三角形全等看似簡單的數學概念，卻因故被隔絕於學生思考的連結之外。因應這個困難，老師在教學中從教具的使用讓學生具體看到三角形 SSS 全等性質，進而從與學生討論 ASS 是否為三角形全等條件時，老師擺脫既有的演繹論證方法，帶領學生一起以尺規作圖實驗的方式，以討論 ASS 是否可以唯一畫出三角形的方式。老師和學生一起從實驗的角度清楚的看到並觀察到三角形全等和不全等所代表的意思，最後更利用等腰三角形底角相等的特性一樣的從實驗的角度，發展出大角對大邊的三角形邊角性質。

另外一則為「從搶黃金探索角平分線的數學意涵」，當教學單元進入角平分線時，因為不想直接教學生角平分線的性質，想要換個方式讓學生感受到角平分線的性質，而在課堂中發展出這一堂課的教學設計，從一進教室就開始講故事的方式帶出搶黃金的情境，再以公平性為討論核心，學生在最自然的情況下體會到角平分線的重要性質。

## 貳、從三角形 ASS 全等條件探索三角形的邊角關係

三角形全等概念的講授看似容易，實際進行教學超過 16 年之後，今年在慢下教學的腳步之後，才實際察覺到學生要真實領會三角形全等的數學意涵，實在並不容易。如何讓學生有感覺的學習三角形的全等，進而能掌握三角形全等的運用與論述說理的方式，這是一個看似容易卻不容易達成的教學。今年在實際進行的教學中，無意間在根據三角形 ASS 條件繪製圖形時，發現根據三角形 ASS 條件所繪製的圖形在不是直角的時候，仍會有全等關係，而引發以下這一連串的教學內容。除了帶領學生以實驗的角度分析根據三角形 ASS 條件所繪製的圖形會在什麼情況之下全等，更進一步的發現並看到三角形的邊角關係。

實際的教學活動設計正好吻合 van Hiele 模式的教學活動設計（左台益，2002），茲說明如下：

層面 1：諮詢（inquiry / information）：透過教具棒的實際操作，讓學生以最自然的實驗方式，認識三角形 SSS 的全等性質。

層面 2：導向（guided orientation）：使用尺規作圖讓學生從嚐試畫出等腰三角形的過程中體驗等腰三角形等角性質，為後面三角形邊角關係和全等關係的討論留下伏筆。

層面 3：解說（explication）：運用三角形 SSS 的全等性質完成等腰三角形底角相等的證明。

層面 4：探索（free orientation）：以尺規作圖實驗的方法，在 ASS 的三角形條件下探索全等和不全等存在的條件。

層面 5：統整（integration）：引導學生將實驗的結果，從角度和邊長的大小如何相互影響 ASS 的三角形條件下全等和不全等存在的條件，並完整的討論並記錄下來，同時發展出三角形大角對大邊的邊角關係。

實際的教學內容說明如下：

## 一、教學設計與活動

### （一）符合三角形 SSS 全等條件的論述

#### 1.三角形的邊長關係

準備：老師準備兩組不同長度且可拼組的教具棒。

提問 1：老師取出其中一組的教具棒 3 支（可以組成三角形的教具棒），詢問學生這 3 支教具棒是否可以組成一個三角形？

提問 2：老師取出其中一組的教具棒 3 支（無法組成三角形的教具棒），詢問學生這 3 支教具棒是否可以組成一個三角形？

提問 3：是不是任意 3 支教具棒都可以組成一個三角形？我們要組成一個三角形的 3 支教具棒必須符合什麼樣的條件？

教學：透過教具棒的組合實驗，我們可以發現，並不是任意 3 支教具棒就可以組成一個三角形。要能讓教具棒組成三角形，最短的 2 支教具棒的長度和必須超過最長的那支教具棒的長度才有機會組成一個三角形。

#### 2.三角形 SSS 全等的討論

準備：老師準備長度不同且可拼組成三角形的教具棒兩組，這兩組中分別有相同長度的紅色、黃色和綠色的教具棒。老師取出其中一組紅色、黃色和綠色的教具棒拼成一個三角形，同時將另外一組教具棒交給學生拼組。

提問 1：同學所拼組起來的三角形和老師使用相同長度的 3 支教具棒所拼成的三角形會不會不一樣呢？

提問 2：我們使用相同長度的 3 支教具棒能不能拼組出形狀或大小不一樣的三角形呢？

教學：3 支可以拼組成三角形的教具棒，受限於已經確定的長度，我們在進行組合的時候，依據已經確定的長度，只有辦法找到一個交會組合的位置。因此，任何一組可以拼組成三角形的教具棒都只能拼組出一種形狀和大小的三角形，在數學上，我們稱使用 3 個相同邊長所組成的三角形具有 SSS 全等的關係。

### 3.三角形 SSS 全等的論述

教學與提問 1：我們可以看得出來，老師所組成的三角形和同學所組起來的三角形（如圖 1），因為具有三個完全一樣長度的邊長而拼組出一模一樣的三角形。在數學上，我們稱這兩個三角形具有全等的關係，我們怎麼把這種關係透過數學式子寫下來呢？（如圖 2）

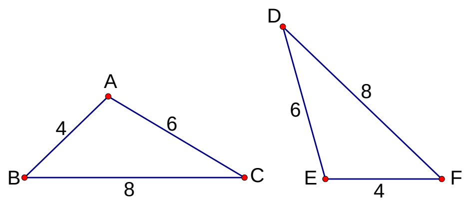
<table>
<tr>
<td>題目：分別使用相同長度的紅色、黃色、和綠色的教具棒所拼組的三角形是否會全等？<br><br>∵(因為)<br>
<table>
<tr><td rowspan="3">老師<br>拼組的<br>三角形<br>教具棒</td><td>紅</td><td>=</td><td>紅</td><td rowspan="3">學生<br>拼組的<br>三角形<br>教具棒</td></tr>
<tr><td>黃</td><td>=</td><td>黃</td></tr>
<tr><td>綠</td><td>=</td><td>綠</td></tr>
</table>
∴(所以)<br>老師∆紅黃綠 ≌ 學生 ∆ 紅黃綠 (SSS 全等)</td>
<td>題目：如圖，$\overline{AB}=4, \overline{BC}=8, \overline{CA}=6$，$\overline{DE}=6, \overline{EF}=4, \overline{FD}=8$，則$\triangle$ ABC和$\triangle$ DEF是否會全等？<br><br><br>$\because \overline{AB}=4=\overline{EF}$<br>$\overline{BC}=8=\overline{DF}$<br>$\overline{CA}=6=\overline{DE}$<br>$\therefore \triangle ABC \cong \triangle EFD$ (SSS 全等)</td>
</tr>
</table>

**圖 1　教具棒的數學全等論述方式**　　**圖 2　數學題目的數學全等論述方式**

教學：老師示範教具棒的數學全等論述方式之後，請學生學習這種論述方式撰寫上述右側數學題目，務必讓學生自行撰寫，然後再指導學生。

## （二）等腰三角形

### 1.繪製等腰三角形

提問 1：什麼是等腰三角形？你可以畫出一個不是正三角形的等腰三角形嗎？請試著利用手邊的工具（尺規或其它）畫出一個不是正三角形的等腰三角形。（如圖 3）

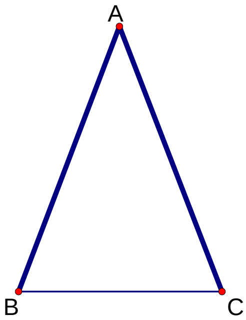
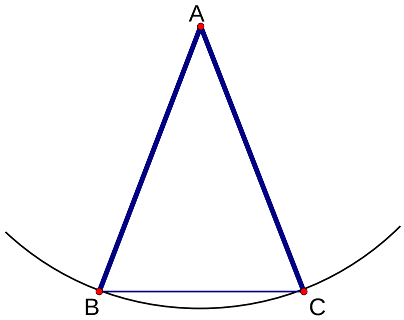
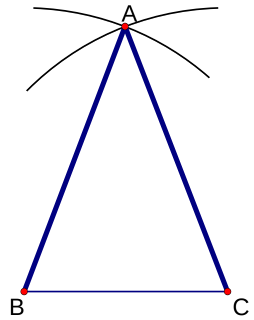
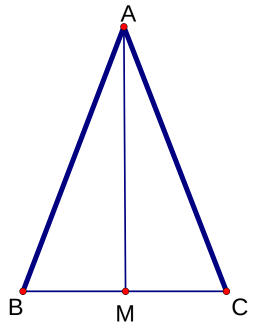
<table>
<tr><td>學生畫法 1</td><td>學生畫法 2</td><td>學生畫法 3</td></tr>
<tr><td>利用工具先畫出$\overline{AB}=\overline{AC}$再連接$\overline{BC}$。</td><td>以 A 為圓心畫出$\widehat{BC}$，在$\widehat{BC}$任取 B、C 兩點，再連接$\overline{AB},\overline{BC},\overline{CA}$。</td><td>先畫出$\overline{BC}$，在分別以 B、C 為圓心取適當長當半徑畫弧相交於 A 點，再連接$\overline{AB},\overline{BC},\overline{CA}$。</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

**圖 3　等腰三角形學生作圖方法**

教學與提問 2：我們稱等腰三角形的兩個相等的邊為兩個腰，兩個腰的夾角為頂角，而另外兩個角為底角，等腰三角形的兩個底角會相等嗎？

提問 3：你可以利用什麼樣的方式來檢查或說明等腰三角形的兩個底角的角度會相等呢？

提問 4：如圖，如果我們取$\overline{BC}$的中點 M，並連接$\overline{AM}$，你是否能夠說明$\triangle ABM$ 和 $\triangle ACM$具有全等關係呢？（如圖 4）




$\because \overline{AB}=\overline{AC}$

$\overline{BM}=\overline{CM}$

$\overline{AM}=\overline{AM}$

$\therefore \triangle ABM \cong \triangle ACM$ (SSS 全等)

$\because \triangle ABM \cong \triangle ACM$

$\therefore \angle B=\angle C$ (對應角角度相等)

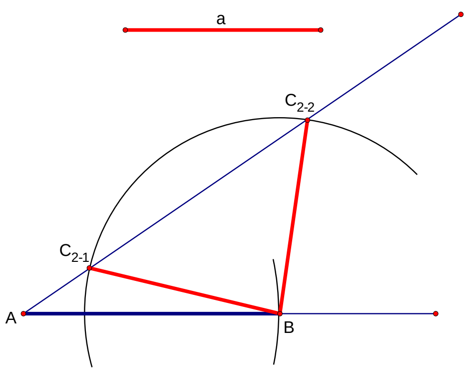
∴等腰三角形的兩個底角的角度會相等

**圖 4　說明等腰三角形的兩個底角的角度會相等**

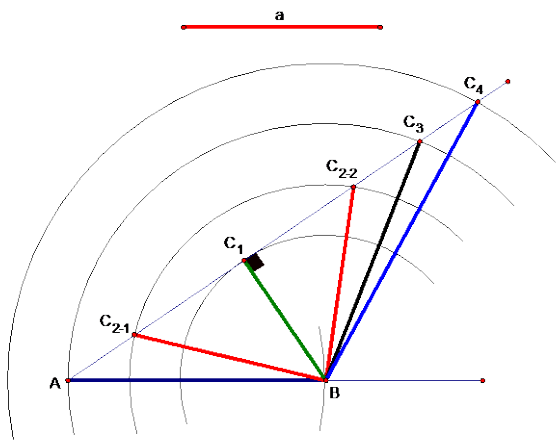
## （三）探討 ASS 全等的條件

教學：如圖 5(a)，老師在黑板上畫出一個銳角$\angle A$，並在$\angle A$的一邊利用圓規畫出$\overline{AB}$長，再以 B 點為圓心，a 線段長為半徑畫弧，與銳角$\angle A$的另外一邊相交於$C_{2-1}$和$C_{2-2}$兩點，連接$\overline{BC_{2-1}}$和$\overline{BC_{2-2}}$，這種作圖的順序稱為 ASS 作圖。我們發現透過 ASS 作圖的順序，在相同的條件（$\angle A$、$\overline{AB}$和線段 a）之下，我們會做出兩個不同的三角形（$\triangle ABC_{2-1}$和$\triangle ABC_{2-2}$），也就是說，符合這種作圖條件的三角形不一定會全等。

提問 1：線段 a 的長度在什麼樣的長度時會和∠A的另外一邊只有一個交點呢？這種時候，我們只能畫出一種三角形，也就是說，根據這樣的條件所畫出來的三角形會具有全等關係。請同學自己畫圖實驗，檢查線段長度a在什麼情況之下會和∠A的另外一邊有兩個交點，又是會在什麼情況之下只會有一個交點？




**(a) 介紹 ASS 作圖**




**(b) ASS 作圖實驗**

**圖 5　ASS 作圖實驗：∠A是銳角**

教學（如圖 5(b)）：1.當線段 a $<\overline{BC_1}$時，以 ASS 作圖（∠A、$\overline{AB}$和線段 a）無法畫出三角形。

2.當線段 a $=\overline{BC_1}$時，以 ASS 作圖（∠A、$\overline{AB}$和線段 a）剛好就只能畫出一個直角三角形（$\triangle ABC_1$）。

3.當$\overline{BC_1}<$ 線段 a $<\overline{BC_3}$時，以 ASS 作圖（∠A、$\overline{AB}$和線段 a）可以畫出兩個三角形($\triangle ABC_{2-1}$和$\triangle ABC_{2-2}$)。

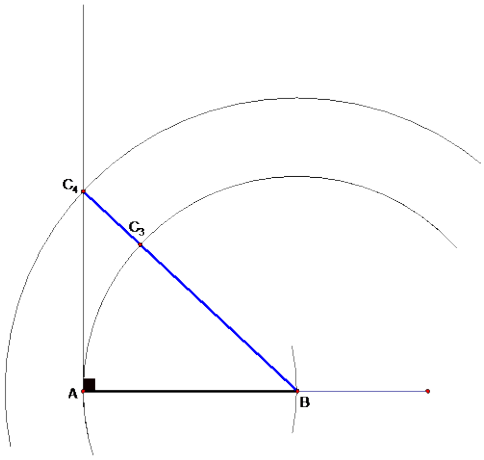
4.當線段 a $\geq\overline{BC_3}$時，以 ASS 作圖（∠A、$\overline{AB}$和線段 a）剛好就只能畫出一個三角形（$\triangle ABC_4$）。

因此，ASS 作圖（∠A、$\overline{AB}$和線段 a）的作圖，除了可以剛好畫出直角三角形的圖形以外，當第二條邊的長度比第一條邊的長度還要長或是剛好相等時，這個時候只能畫出一種三角形，因此具有這種相同 ASS 條件的三角形會具有全等關係。

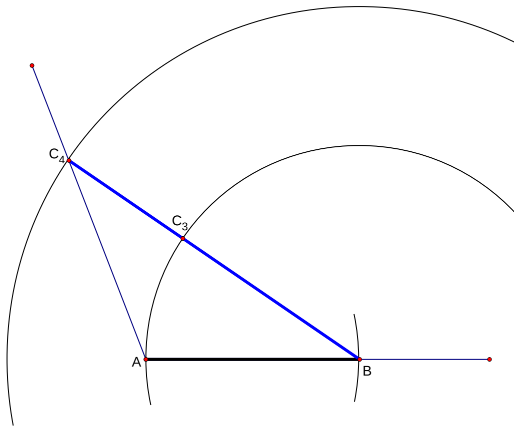
提問 2：我們剛剛是以∠A是銳角進行 ASS 的作圖討論，那當∠A是直角的時候的 ASS 作圖會是什麼樣子呢(如圖 6(a))？作圖時的第二條邊的長度(線段 a)和第一條邊的長度($\overline{AB}$)之間要有什麼樣的關係才能畫出三角形呢？有辦法畫出兩個符合 ASS 作圖條件的三角形嗎？

提問 3：我們剛剛是以∠A是銳角進行 ASS 的作圖討論，那當∠A是鈍角的時候的 ASS 作圖會是什麼樣子呢（如圖 6(b)）？作圖時的第二條邊的長度（線段 a）和第一條邊的長度（$\overline{AB}$）之間要有什麼樣的關係才能畫出三角形呢？有辦法畫出兩個符合 ASS 作圖條件的三角形嗎？

教學：不論∠A是直角或是鈍角，以 ASS 作圖（∠A、$\overline{AB}$和$\overline{BC_4}$）要能夠畫出三角形，唯一的可能就是$\overline{BC_4} > \overline{AB}$，而且這個時候也只能畫出一個三角形，因此，綜上所述，不論∠A是銳角、直角或是鈍角，只要是符合 ASS 作圖條件，第二條邊的長度只要大於第一條邊，就一定可以畫出三角形，而且也只能畫出一個三角形，也就是說，符合這種 ASS 作圖條件的三角形會具有全等關係。




**(a) ∠A是直角**




**(b) ∠A是鈍角**

**圖 6　ASS 作圖實驗：∠A不是銳角**

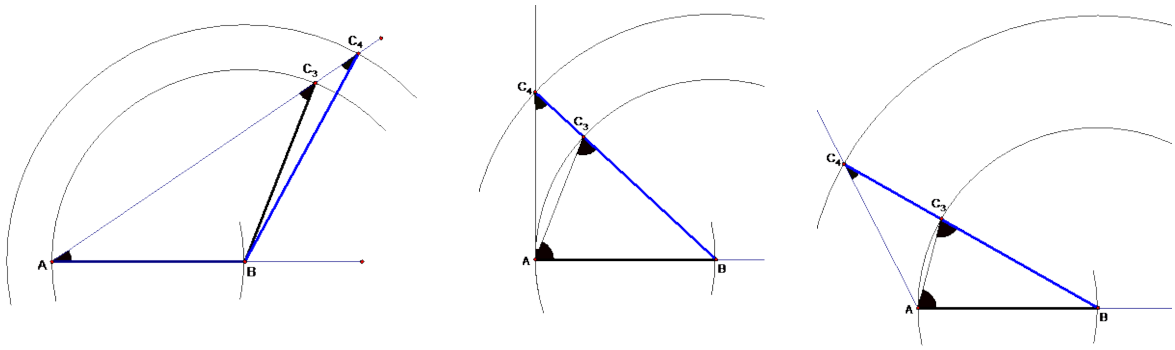
## （四）從 ASS 的作圖探討三角形的邊角關係

提問 1：當我們進行 ASS 作圖（∠A、$\overline{AB}$和$\overline{BC_4}$）畫出三角形時，$\overline{AB} < \overline{BC_4}$時，我們所畫出來的$\angle C_4$的角度大小在$\overline{BC_4}$越來越長時會有什麼樣的變化？

教學：1.當∠A是銳角（如圖 7(a)），我們進行 ASS 作圖（∠A、$\overline{AB}$和$\overline{BC_4}$）畫出三角形時，當$\overline{BC_3} = \overline{AB}$時，$\angle A = \angle C_3$，當$\overline{BC_4} > \overline{AB}$時，因為∠B角度的變大，在三角形內角和 180 度的限制下，$\angle C_4$的角度變小了，也就是說，當$\overline{BC_4} > \overline{AB}$時，將同時發生$\angle A > \angle C_4$，而$\overline{AB}$和$\overline{BC_4}$恰分別為∠A和$\angle C_4$的對邊，因此，我們發現了三角形在數學上很重要的邊角關係，在同一個三角形當中，比較大的邊長會對應到相對比較大的內角角度，同樣的，比較大的內角角度也會對應到相對比較大的對邊邊長，這也就是在數學上我們常說的三角形邊角關係：大邊對大角、大角對大邊。

（除了從三角形內角和 180 度，我們也可以從外角定理來看到$\angle C_4 < \angle C_3 < \angle A$。）

2.當∠A是直角或鈍角(如圖 7(b)和圖 7(c)),我們更可以清楚的看到,只有當$\overline{BC_4} > \overline{AB}$時,我們才能夠以 ASS 的作圖方式畫出三角形,而在這同時也會產生$\angle A > \angle C_4$的關係,陳述的理由與前面是相同的。




**(a) ∠A是銳角　(b) ∠A是直角　(c) ∠A是鈍角**

**圖 7　從 ASS 作圖看到三角形的邊角關係**

## 二、反思與結論

根據三角形 ASS 作圖條件所畫出來的三角形是否全等一直存在著不確定性,在往年的教學中總是直接將 ASS 陳述為非三角形全等的性質,而且總是將其排除在三角形的全等性質之外。經過這次的教學,想不到竟可以這麼簡單的透過作圖的實驗與討論就可以讓學生感受到究竟什麼是三角形的全等,而 ASS 的作圖,原來只要依據依序給定的 ASS 作圖條件下的第二條邊長比第一條邊長還要長,就一定可以做出三角形,而且也只能唯一的做出三角形。同時在教學的過程中,透過等腰三角形底角相等的性質,讓學生同時觀察到當 ASS 是全等作圖時,也就是兩邊的長度有長短關係時,其所對應的角度也會因為在三角形內角和 180 度的限制之下,也會有相對應的大小關係,而討論出了三角形在數學上很重要的邊角關係:大角對大邊、大邊對大角。而這一切的發生主要是源自於老師發現學生對於三角形全等概念的無法掌握和沒有感覺,在老師遇到教學困難的情況之下,放慢速度嘗試著以學生的速度思考問題所斬獲的。

# 參、從搶黃金探索角平分線的數學意涵

十二年國民基本教育即將於 103 年正式啟動,升學管道中有 75% 是屬於免試入學,超額比序將是免試入學學生比序的依據,而超額比序中其中有一個項目是體適能,學校的學務處老師發現學生的體適能很需要加強,因此,為了增強學生超額比序的競爭力,學務處老師每天利用早上集合時間和下課時間透過跑步、拉筋等方式增強學生體適能的能力,在訓練了二個月之後,為了鼓勵學生同時檢驗學生體適能的訓練成效,學務處決定舉辦一個班際搶黃金的比賽活動,

以琉球國中八年級學生為例，八年級學生總共有 3 個班級，分別是 801、802 和 803 班，我們在 400 公尺的操場上拉出了三條直線分別將 801、802 和 803 班圍在直線的外側，我們打算在三條直線所圍起來的區域中間放上黃金（如圖 8），讓八年級這 3 個班級去搶黃金，我們想要找出對 3 個班級而言黃金擺放位置最公平的地方。

## 一、教學活動設計

提問 1：如圖 8，請問黃金應該放在哪裡才會讓這 3 個班級的同學都會覺得公平呢？

教師觀察：學生直接回答將黃金放在中間。

提問 2：放在中間是什麼意思呢？你可以再說得清楚些嗎？可以更明確的說明所謂的中間是指哪裡呢？

提問 3：什麼是公平的感覺呢？要用什麼方式來表示是否公平呢？

提問 4：你覺得如果我們將黃金放在 P 點的位置（如圖 9），這樣對這 3 個班級的同學公平嗎？為什麼你會覺得不公平呢？

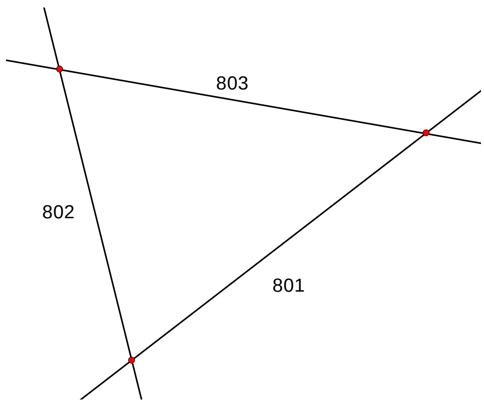



**圖 8　利用三條直線將班級分隔於直線外側**

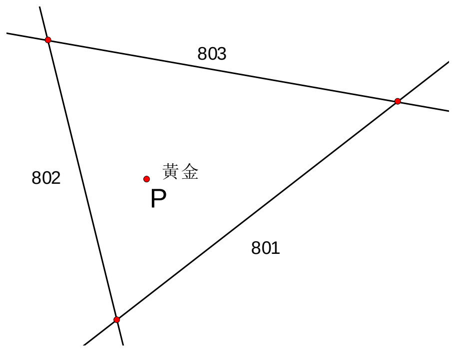



**圖 9　黃金放置於三條直線內側 P 點**

教學：我們知道，所謂的公不公平是從班級到黃金的距離來觀察的，所謂的公平必須是 3 個班級到黃金的距離是一樣的才有公平的感覺，問題是，什麼叫做距離呢？

提問 5：舉例來說，你會怎麼畫出 802 班到黃金的距離呢？也就是說，如果你是 802 班的學生，你會選擇在哪個位置起跑對你而言最有利呢？你會選擇從$D_1$、$D_2$、$D_3$、$D_4$、$D_5$或$D_6$起跑嗎？或是哪一個位置起跑對你而言會最有利呢？

教學：從圖 10，我們可以發現最有利的起跑點，也就是到黃金最短距離的位置必須是和直線垂直的地點是搶黃金最好的起跑位置，請同學畫出依照圖 11 中黃金所擺放的位置，找出各班最佳的起跑位置（也就是圖 12 中的垂足位置）。

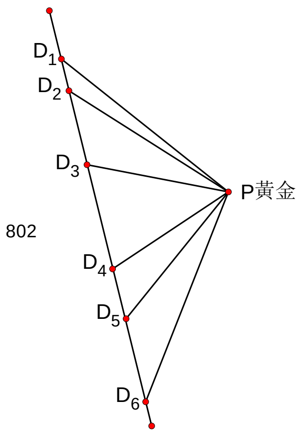



圖 10 找出 802 班搶黃金最佳起跑位置

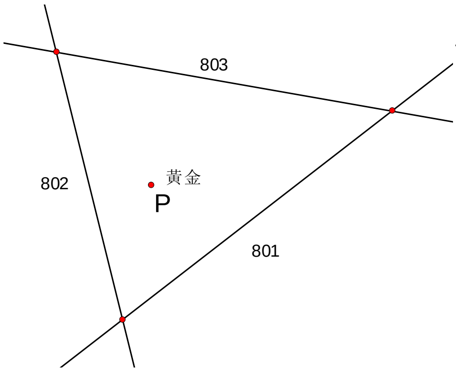



圖 11 找出各班搶黃金最佳起跑位置

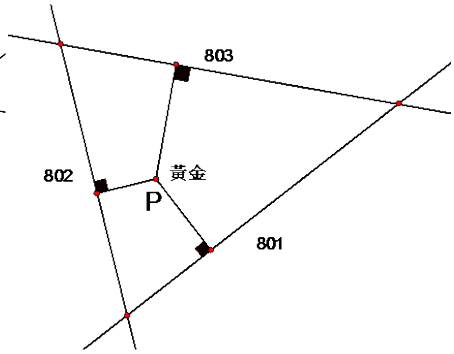



圖 12 各班搶黃金最佳起跑位置為直線到黃金位置的最短距離

教學：我們可以發現，剛剛黃金所擺放的位置對 3 個班級而言是不公平的，因為黃金到 3 個班級的距離大小不一，很明顯對於 802 班距離最近，而對於 803 班卻距離最遠，也就是說，如果我們想找出最公平的黃金擺放位置，我們必須做到讓黃金擺放位置到 3 個班級的最短距離是相等的，而我們一次討論 3 個班級似乎有些困難，我們先從 2 個班級來討論看看，請同學想辦法畫出所有可以讓 802 和 801 班覺得公平的黃金擺放位置，請同學想辦法將所有可能的位置全部都畫出來（如圖 13）。

提問 6：全部喔，要全部畫出來喔，你要怎麼畫才可以把所有的可能位置全部畫出來呢？（如圖 14）。

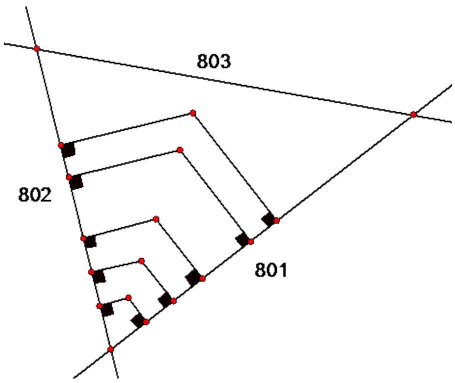



圖 13 找出對於 801 班和 802 班公平的黃金可能的放置位置

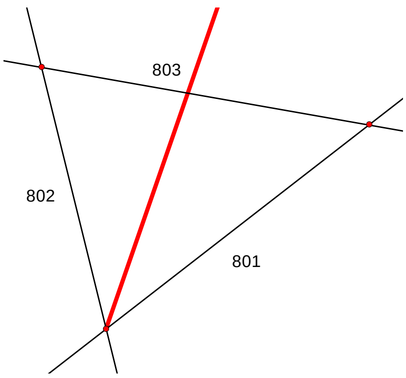



圖 14 找出對於 801 班和 802 班公平的黃金所有可能的放置位置

教師觀察：學生剛開始試著會找出並畫出 1 個、2 個、3 個…黃金擺放的位置，經由這個提問與要求，學生畫出了所有代表到 801 和 802 距離相等的直線就是角平分線，甚至有學生將直接利用尺規作圖畫出角平分線。

教學：我們可以看得出來，如果我們打算將所有可能的位置全部畫出來，最好的辦法，就是我們已經發現，原來這些位置都會在角平分線上，因此，我們只要畫出角平分線，就可以將所有黃金的擺放位置全部畫出來！有就是說，只要黃金放在角平分線上，將會讓 801 和 802 這兩個班級的學生覺得這是公平的擺放位置。

提問 7：既然如此，我們已經知道讓兩個班級學生覺得公平的黃金擺放位置是在角平分線上，那 3 個班級呢？請同學試著畫出可以讓 3 個班級的學生都會覺得公平的位置，你會怎麼畫呢？

提問 8：我們先畫出讓 801 和 802 覺得公平的角平分線（紅色射線），同樣的，我們也可以畫出讓 801 和 803 覺得公平的角平分線（藍色射線），你覺得這兩條角平分線的交點代表什麼意思呢？（如圖 15）

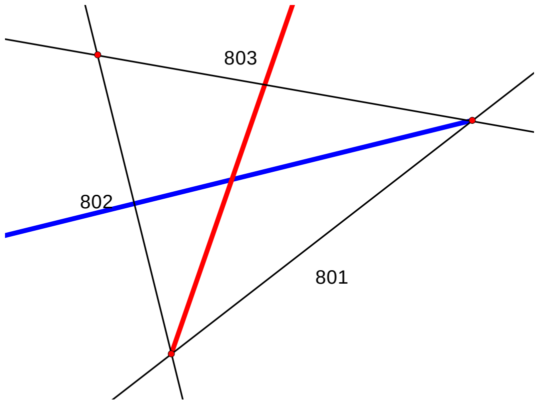



**圖 15　利用角平分線找出公平的黃金放置位置**

教學：這兩條角平分線的交點所代表的意思就是讓 3 個班級都會覺得公平的黃金擺放位置。

提問 9：這兩條角平分線的交點和 802、803 班直線的交點連線會是什麼樣的直線呢？這會不會是一條讓 802 和 803 覺得公平的直線呢？為什麼呢？你會怎麼說明呢？我們會怎麼稱呼這條直線？

教學：因為$\overline{PF}=\overline{PD}$，$\overline{PD}=\overline{PE}$，所以$\overline{PF}=\overline{PD}=\overline{PE}$。既然這兩條角平分線的交點就是讓 3 個班級都會覺得公平的黃金擺放位置，請同學畫出這 3 個班級的學生在搶黃金之前會選擇在那個位置起跑，請把那個起跑位置畫出來！（如圖 16）

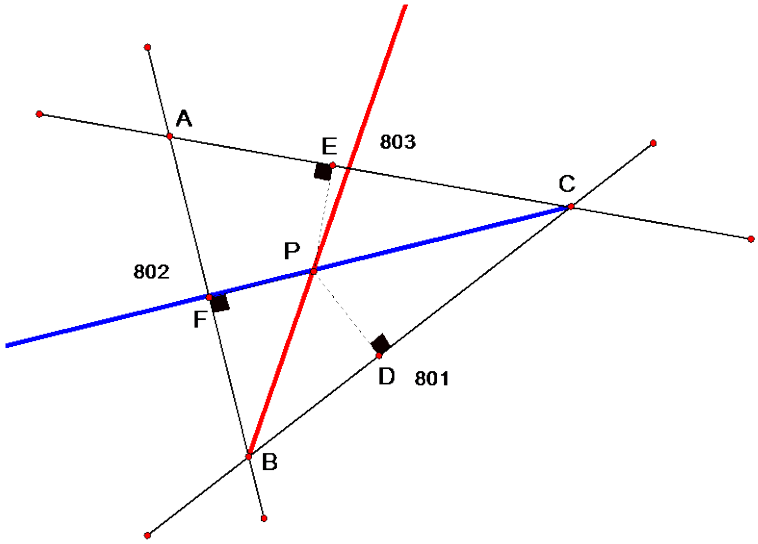



**圖 16　畫出各班搶黃金的最佳起跑位置**

教學：我們可以看到 P 點是紅色角平分線和藍色角平分線的交點，紅色角平分線會讓 801 和 802 覺得黃金擺放位置是公平的，也就是說，只要黃金擺在紅色角平分線上，801 和 802 可以找到的到黃金的最短距離會是一樣的；同樣的，藍色角平分線會讓 801 和 803 覺得黃金擺放位置是公平的，也就是說，只要黃金擺在藍色角平分線上，801 和 803 可以找到的到黃金的最短距離也會是一樣的。既然如此，紅色角平分線和藍色角平分線的交點 P 就可以同時讓這 3 個班級的學生都會覺得公平，也就是說，這 3 個班級的學生所找到的到黃金的最短距離$\overline{PD}$、$\overline{PE}$、$\overline{PF}$會是相等的，那因為$\overline{PE}=\overline{PF}$，這代表著 P 點是可以讓 803 和 802 覺得黃金擺放位置是公平的位置，因此，$\overrightarrow{AP}$就是可以讓 803 和 802 覺得黃金擺放位置是公平的角平分線，而 801、802 和 803 班將會很聰明的分別選擇從 D、E 和 F 點的位置起跑。

## 二、反思與結論

在實際的教學活動進行之中，因為故事性的情境引導，加上情境故事就是與學生自己相關，學生明顯積極主動的參與課堂活動的進行，平常低成就的學生在這一堂課也能有所發揮並參與討論，感覺上，學生是在解決一個生活中的問題，而在這同時，老師則是讓學生體會並發現到角平分線的性質，學生和老師的目標不同，最終卻可以匯合在一起，學生解決了問題的同時，老師也達成了教學的目標。

整堂課開放性的提問與討論，誘發學生願意思考的動機，在這堂課結束之後，有位平常學習低常就的學生在下課時間，提供了老師另外一個解決放置黃金位置問題的方法，「先找個位置

將黃金放好，決定好三個班級與黃金的距離，再拉出與黃金位置相同距離的三條直線來圍出三個不同班級」，這個方法比老師的方法更有效率的解決擺放黃金位置的問題。

這整堂課的教學，老師從一個簡單的教學設計為核心，從學生的生活經驗出發，以公平的感覺為核心討論出黃金的擺放位置必須是在角平分線上，這個過程因為佈題簡單易懂又迎合學生解題需求，每位學生都有機會可以思考這樣的問題，也相信自己有機會可以找出解決方法的動機之下，老師在學生的解題需求之下，慢慢的配合著學生思考的節奏中，在課堂中完成這堂課的教學設計。

如果我們願意試著不同的角度思考數學的教學，我們就會有機會找到可以和學生一起享受數學思考的樂趣，而且，學生將會帶給老師不同角度的啟發，豐富著一次又一次的教學活動。

## 參考文獻

左台益（2002）。Van Hiele 模式之國中幾何教材設計。**中等教育**。**53**（3），44-53。