

ISSN 1815-6355

第 35 卷第 1 期
二〇一四年四月
VOL. 35 NO. 1
April 2014

台灣數學教師 (電子) 期刊

Taiwan Journal of Mathematics Teachers



國立臺灣師範大學數學系
Department of Mathematics,
National Taiwan Normal University



台灣數學教育學會
Taiwan Association
for Mathematics Education

發行單位 | 國立臺灣師範大學數學系
台灣數學教育學會

編輯委員會

主編	左台益	國立臺灣師範大學數學系
副主編	吳昭容	國立臺灣師範大學教育心理與輔導學系
	楊凱琳	國立臺灣師範大學數學系
編輯委員	洪儷瑜	國立臺灣師範大學特殊教育學系
(依姓氏筆劃排序)	袁媛	中原大學教育研究所
	黃幸美	臺北市立大學學習與媒材設計學系
	楊志堅	國立臺中教育大學教育測驗統計研究所
	楊德清	國立嘉義大學數理教育研究所
	劉柏宏	國立勤益科技大學通識教育學院
	劉曼麗	國立屏東教育大學數理教育研究所
	劉遠楨	國立臺北教育大學教育傳播與科技研究所
	蔡文煥	國立新竹教育大學數理教育研究所
	謝豐瑞	國立臺灣師範大學數學系
	譚克平	國立臺灣師範大學科學教育研究所

地址	臺北市汀州路四段 88 號國立臺灣師範大學數學系 《台灣數學教師(電子)期刊》
電話	886-2-7734-6576
傳真	886-2-2933-2342
電子郵件	tjmeassistant@gmail.com
網址	http://tame.tw/forum.php?mod=forumdisplay&fid=74

版權所有，轉載刊登本刊文章需先獲得本刊同意，翻印必究

主編的話

《台灣數學教師(電子)期刊》發行至今已九年共 34 期，從 2013 年起一年發行兩期，本期編號為第 35 卷第 1 期。本期刊由國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會共同發行，以刊登數學教學實務與研究為主，期能推升臺灣數學教學效能。本期刊全年徵稿，隨到隨審，詳細辦法請參閱《台灣數學教師(電子)期刊》內文附錄，或進入網站 <http://tame.tw/forum.php?mod=forumdisplay&fid=74> 查詢。

本期經嚴謹匿名審查結果共刊載二篇論文均為國中數學教學案例展示，一為代數的補救教學，另一為幾何實驗教學。其中包括由新北市立中和高級中學教師黃淑華、國立臺灣師範大學教育研究與評鑑中心鄭鈺華、王又禾與國立臺灣師範大學教育心理與輔導學系吳昭容教授共同發表之「一元一次方程式應用題的補救教學」；屏東縣立琉球國民中學教師陳梅仙發表之「從操作實驗談幾何教學」。另由「從操作實驗談幾何教學」文章所衍生之論壇文章，這是由國立臺灣師範大學科學教育研究所譚克平教授，國立屏東教育大學數理教育研究所劉曼麗教授，以及基隆市碇內國民中學李昕儀老師共同以個人研究與教學心得對「從操作實驗談幾何教學」文章進行省思與評述。

本期刊之得以順利編輯發行，特別感謝論文作者熱心投稿、審查委員撥冗審稿、責任編委精心審定以及編輯助理辛勞編輯。同時要感謝全體編輯委員的無私貢獻，尤其是兩位副主編的鼎力協助，方能使本期刊論文品質得以蒸蒸日上。最後尚期待各界繼續給予支持，踴躍賜稿。

《台灣數學教師(電子)期刊》主編

左台益 謹誌

台灣數學教師(電子)期刊

第 35 卷 第 1 期

2005 年 3 月創刊

2014 年 4 月出刊

目錄

- | | |
|--------------------------------------|----|
| 一元一次方程式應用問題的補救教學
／黃淑華、鄭鈺華、王又禾、吳昭容 | 1 |
| 從操作實驗談幾何教學
／陳梅仙 | 17 |
| 論壇
／譚克平、劉曼麗、李昕儀 | 30 |

Taiwan Journal of Mathematics Teachers

Vol. 35 No. 1

First Issue: March 2005

Current Issue: April 2014

CONTENTS

- | | |
|--|----|
| Remedial Teaching Strategies for Linear Equation Word Problems | 1 |
| / Shwu-Hwa Hwong, Chien-Hua Cheng, Iou-Ho Wang, Chao-Jung Wu | |
| Teaching Geometry by Experimental Approaches | 17 |
| / Mei-Hsien Chen | |
| Forum | 30 |
| / Hak-Ping Tam, Man-Li Liu, Hsin-Yi Li | |

黃淑華、鄭鈺華、王又禾、吳昭容 (2014)。
一元一次方程式應用題的補救教學。
台灣數學教師(電子)期刊, 35 (1), 1-16。

一元一次方程式應用問題的補救教學

黃淑華¹ 鄭鈺華² 王又禾² 吳昭容^{2,3}

¹新北市立中和高級中學

²國立臺灣師範大學教育研究與評鑑中心

³國立臺灣師範大學教育心理與輔導學系

本文針對補救教學學生運算技能不足、閱讀能力低落的特性，提出一元一次方程式的補救教學宜從數量特性、情境變化，和語句的順逆敘述選擇適當的教材，同時以「數到式的類化」、「題意的理解與記錄」、「分句閱讀、簡易圖示」三個教學策略，貫穿地說明加減、乘除、四則混合的應用問題解題的引導方式。文中以具體範例與實際教學的學生反應為例，說明策略的應用方式。

關鍵詞：一元一次方程式、應用問題、補救教學策略

壹、緒論

數學應用題解題是學生備感困擾的學習內容。從讀懂題目的意思、釐清數量之間的關係、聯想到相關的數學概念，以及判斷運算方式等，都有一定的難度。國中數學更因為需要使用代數方程式來列式、解題，對一般學生而言已是挑戰，補救教學的學生就更見完全放棄的狀態。

解決一元一次方程式應用題時，代數運算能力不足是學生常見的困難(Booth, 1988; Radford, 2000)，例如認為 $2a+5$ 等於 $7a$ (Thomas & Tall, 2001)；此外，與列式相關的障礙包括：無法了解文字符號的意義(陳彥廷、柳賢，2009；Maharaj, 2008)、無法了解等號兩邊的等同關係(張景媛、余采玲、鄭章華、范德鑫，2012)、無法轉譯代數文字題(林清山、張景媛，1994；謝和秀、謝哲仁，2002；Stafylidou & Vosniadou, 2004)等問題。本文針對上述問題，尤其因應國中數學補救教學的學生基本技能不足、閱讀能力低落的特性，提出「**數到式的類化**」、「**題意的理解與記錄**」、「**分句閱讀、簡易圖示**」三個教學策略，並依據題目的語意結構分為加與減、乘與除、四則混合三個部分進行概念分析與實例說明。

由於應用題難易度是影響學習效果的重要因素，在討論三種教學策略之前，本文也提醒教師在選擇補救教材的題目時，宜考量影響應用題難易度變化的三個因素。(1) **數量的特性**。題目中的數字若以整數出現，會較小數或分數容易，例如：「1 本筆記簿的價錢是一枝原子筆價錢的 $\frac{4}{3}$ 倍，已知買 2 枝原子筆和 1 本筆記簿共須 60 元，則 1 本筆記簿多少元？」，當題目中的「 $\frac{4}{3}$ 」倍改成「2」倍時，語意關係與計算上都會變得較簡單。國中補救教學的學生，其小學階段的分數、小數概念與計算基礎就已不穩固，到了國中分數、小數的代數課程時，常有極大的困難。(2) **情境的變化**。文字敘述若以可點數的離散量(如：人數、蘋果個數、奶茶杯數、……)呈現，會較以連續量(如：時間、長度、面積、容積、……)來得簡單，例如「有 4 包糖，每包 10 個，平分給 5 人，每人可得幾個？」與「坐火車時只買到 4 個座位，車程 10 小時，5 人搭乘，希望每人有位置坐的時間相同，每人坐幾小時？」，雖然兩個情境的計算式都同為 $10 \times 4 \div 5$ ，但難度差距卻不小。(3) **語句的順逆敘述**。所謂順敘述意指題目語意和運算一致，例如給定基準量的比較題即為順敘述：「父親的體重比兒子體重的 2 倍少 3 公斤，若兒子的體重是 x 公斤，那麼父親的體重是____公斤。」相反地，給定比較量求基準量的題目(如：上題後段改為「若父親的體重是 y 公斤，那麼兒子的體重是____公斤。」)，則為逆敘述。學生面對順敘述情境較容易掌握語意，也較能轉換成正確的算式，因此補救教學選擇題目時，宜考量順逆敘述。

貳、列代數式的概念分析與教學策略

一、加與減的概念分析及教學策略

加與減的應用問題基模大致可分為「合併」、「改變」、「比較」三類，這三種基模都可以命出加或減的題型。其中改變和比較的某些題型因涉及逆推，對學生而言特別困難，例如「妹妹有一些錢，媽媽給妹妹 80 元後，妹妹就有 500 元，問妹妹原來有多少錢？」這類起始量未知的改變題，或者「甲班人數 32 人，甲班比乙班多 3 人，問乙班是多少人？」這類基準量未知的比較題，學生常有無法判斷該用加法還是減法的困擾。

在較困難的題型上，教師可選用學生熟悉的情境做為教學的鷹架，例如使用「孫子今年 x 歲，爺爺今年 70 歲，那麼孫子比爺爺小____歲？」，可能有助於理解「誰比誰多多少」或「誰比誰少多少」，因為爺爺與孫子年齡的長幼關係是學生熟悉的，且年齡數值都屬正數，就容易成功列式。若還有困難，也可以先從數值實例出發，例如「你今年 13 歲，爺爺 70 歲，你比爺爺小幾歲？」來引導學生掌握誰減誰未必是依照句子中出現的順序，而是要用「大數減小數」計算。

(一)「數到式的類化」應用在加與減的問題

「王小美的媽媽今年 x 歲，5 年前是____歲；5 年後是____歲」……①

面對題①，有些學生的答案會出現第一格寫「 $5x$ 」、第二格寫「 $x5$ 」，因為這些學生認為 5 年「前」和「後」就代表 5 在 x 的前面或後面的意思。但是，這未必意味著學生不懂得此題要用加、減法，因為在有實際數值的類似題，如下題②，他們可以答對。

「王小美今年 13 歲，5 年前是____歲；5 年後是____歲」……②

究其原因，可能是學生心理上還無法將 x 視為數，而且部分圖像表徵較強的學生，甚至會以「左一減去、右一加上」的空間關係來表徵加與減，在還無法掌握代數式的形式下，就寫出了以 $5x$ 表示 $x-5$ 、 $x5$ 表示 $x+5$ 的答案。

教學時，首先必須強調「 x 是代表一個數，我們不知道它是多少，但我們可以把它想成任何一個數」，讓學生接受 x 是數，是可以運算的。其次，在概念建立時，可採用從數類化到式的方法，先讓學生列出題②的算式「 $13-5$ 」，再類比列出題①的代數式「 $x-5$ 」。

(二) 加與減問題的「題意理解與圖示記錄」

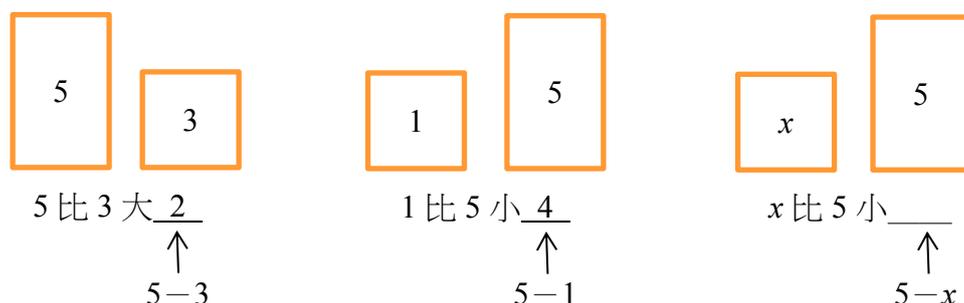
「甲比乙少」這個敘述，因為語句上和「少」連在一起的是「乙」，不少學生以為是乙比較少。教師可以強調「雖然乙少，但是甲比乙更少」，來讓學生理解兩者的大小關係。只是，學生常常一下子又忘了是誰比較少。因此討論後的結論有必要加以記錄，如下的圖示用兩個大小不

一的方塊來代表，能有助於學生從視覺上快速判斷出誰多誰少。



兩數差異量的表示方式，會隨著敘述方式而難度不同。「 x 比 5 大，則 x 比 5 大多少？」學生較能寫出正確的答案「 $x-5$ 」，但面對「 x 比 5 小，則 x 比 5 小多少？」常會錯寫成「 $x-5$ 」。因為大多少與小多少均蘊含「相減」的意義，而學生傾向依照句子的敘述順序相減，就會在前一問題答對，而後一題答錯。教師可利用數到式的類化，並整合圖像記錄的策略來指導學生。

由於上述的困難在無法從語意轉換到列式，所以可利用正數領域的數值為例，建立「誰比誰大多少」或「誰比誰小多少」的列式方式。例如「5 比 3 大多少？2」、「1 比 5 小多少？4」，讓學生了解計算 5 比 3 大多少是用「 $5-3$ 」、1 比 5 小多少是用「 $5-1$ 」，並強調計算「誰比誰大多少」或「誰比誰小多少」，可用「大數減小數」來算，如果是用「小數減大數」，得出來的結果會是負的。再類化到計算 x 比 5 小多少是要用「 $5-x$ 」而不是「 $x-5$ 」。此時，若能加上圖像表徵，更能判斷出該由誰減誰。



記錄題意的圖示沒有特定的方式，只要能讓學生明顯看出大小之間的差異，且簡單、好畫就好，因此教師示範時的圖示，也盡量依循簡單好畫的原則。

(三) 加與減問題的「分句閱讀、簡易圖示」

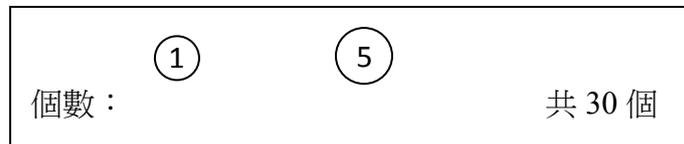
應用題語意所指的數量關係是困難之所在。教學時，整題念過一遍，使心中有個約略印象後，宜指導學生分句閱讀，簡易圖示一句一句的題意，以建構出整體的數量關係。例如：

1. 1 元錢幣和 5 元錢幣共有 30 個，把 1 元錢幣都給弟弟，5 元錢幣都給妹妹，如果 1 元錢幣有 x 個，那麼
- (1) 弟弟得到_____個錢幣，有_____元，
- (2) 妹妹得到_____個錢幣，有_____元，
- (3) 兩人共有_____元。

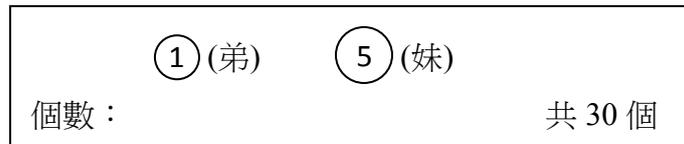
1. 整題念一遍，建立約略印象：1 元、5 元錢幣，30 個，弟弟、妹妹等。

2. 分句閱讀、理解題意與簡易圖示：

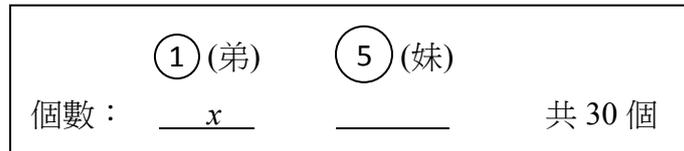
「1 元錢幣和 5 元錢幣共有 30 個」，



「把 1 元錢幣都給弟弟，5 元錢幣都給妹妹」，

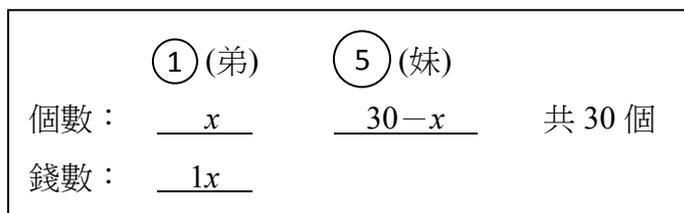


「如果 1 元錢幣有 x 個」，



從上面圖示，比較容易看出題目的意思，也會感覺到需要知道妹妹有幾個 5 元硬幣。

「(1) 弟弟得到_____個錢幣，有_____元，」



「(2) 妹妹得到_____個錢幣，有_____元，」

	① (弟)	⑤ (妹)	
個數：	$\frac{x}{}$	$\frac{30-x}{}$	共 30 個
錢數：	$\frac{1x}{}$	$\frac{5(30-x)}{}$	

「(3) 兩人共有_____元。」

	① (弟)	⑤ (妹)	
個數：	$\frac{x}{}$	$\frac{30-x}{}$	共 30 個
錢數：	$\frac{1x}{}$	$\frac{5(30-x)}{}$	共_____元

原本題目有許多文字，如上述逐步把文字轉換成圖像，有助於補救教學的學生掌握題意。

下列為一比較型的應用問題，學生經常掌握不到其中的基準量，但若藉由圖示，從視覺效果，更能輕易理解其間的關係。

2. 紀廷比坤郁高 10 公分，

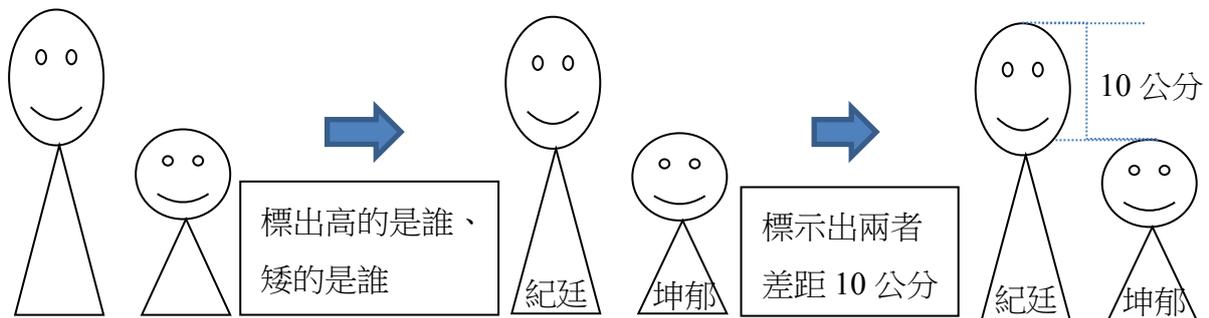
(1) 如果坤郁的身高是 x 公分，那麼紀廷的身高是_____公分。

(2) 如果紀廷的身高是 y 公分，那麼坤郁的身高是_____公分。

1. 整題念一遍，建立大略印象：紀廷、坤郁、比高、10 公分等。

2. 分句閱讀、理解題意與簡易圖示：

「紀廷比坤郁高 10 公分」，表示成下圖：

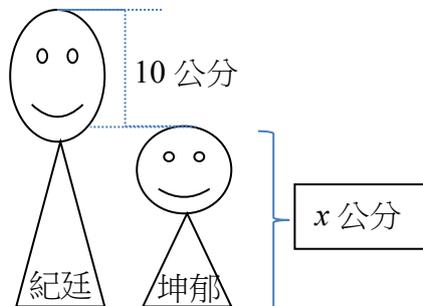


兩人的身高以一高一矮的圖來表示，比起數線或線段圖更接近生活經驗，學生比較不會感覺憂慮。題幹的敘述牽涉到基準量，而且「紀廷比坤郁高 10 公分」這句話含有兩個資訊，圖示必須能表現這兩點：紀廷高，以及高 10 公分。老師帶領學生讀題時，同樣可以用「坤郁高，但是紀廷比

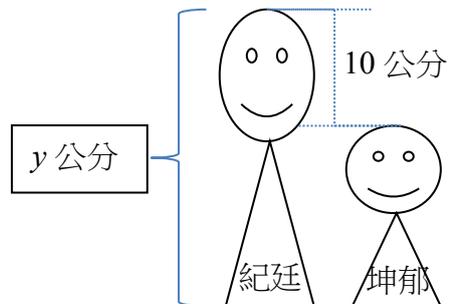
他還要更高」的說法來引導學生知道，高的是紀廷，矮的是坤郁，並隨即在圖中標示。

接著依各小題題意在圖上標示訊息，並解題。

「(1) 如果坤郁的身高是 x 公分，那麼紀廷的身高是_____公分。」



「(2) 如果紀廷的身高是 y 公分，那麼坤郁的身高是_____公分。」



因為(1)、(2)題沒有關聯，解(2)時，應提醒學生用未標示 x 公分的原圖，以避免混淆。

至於文獻常見之 $2a+5=7a$ 的錯誤 (Thomas & Tall, 2001)，本文的第一作者通常提前在教導「式子的簡記」時即以情境協助學生掌握代數運算的原理。例如：「鉛筆 1 枝 a 元，橡皮擦 1 個 5 元，買 2 枝鉛筆和 1 個橡皮擦共要多少元？」此時列式為 $a \times 2 + 5$ ，讓學生透過情境的意義，理解 $2a$ 的 2 不能和 5 相加。並在做同類項合併時，會再次強調 $2a$ 與 5 並非同類項，不必再做合併，寫成 $2a+5$ 即可。

二、乘與除的概念分析及教學策略

「乘」最原始的想法就是「自己累加」，例如「原子筆 1 枝 5 元，3 枝是多少元？」5 累加三次，記成「 $5+5+5$ 」，簡記成「 5×3 」。

「乘」更進一步的用語與觀念是「倍」，「鉛筆 1 枝 5 元，1 枝原子筆的價錢是 1 枝鉛筆價錢的 3 倍」，學生必須理解「1 枝原子筆的價錢是 1 枝鉛筆價錢的 3 倍」等同於「1 枝原子筆的價錢是 3 枝鉛筆的價錢」，才能以「 5×3 」計算 1 枝原子筆的價錢。

具備整數倍的想法，才有辦法推到分數倍、小數倍。加上有些情境雖然涉及「倍」的概念，但語句中看不到「倍」的用語，使得學生無法連結到乘除運算，例如分數倍常省略「倍」的用語，而打折也屬於「隱藏的倍」的問題。因此補救教學的學生面對這類問題就會有極大的困難。

「除」是乘的逆運算，基於未知的是單位量或者單位數，而對應到等分除或包含除。「用 15 元買了 3 枝筆，每枝筆是多少元？」就是把 15 元平分給 3 枝筆，是等分除；而「15 個橘子，每 3 個裝 1 袋，可裝成幾袋？」是包含除。至於「15 是 3 的幾倍？」，則直接評量「倍」的用語的理解。在整數範圍時，雖然乘法或除法的語句敘述幾乎相同，學生尚能利用情境的線索推估「答案變小就選用除，答案變大就採用乘」來解題，但進到分數倍、小數倍、隱藏的倍、代數等內容，學生常常分辨不清乘或除的使用時機，例如：

「甲的錢是乙的 $\frac{2}{3}$ ，若甲有 600 元，則乙有_____元。」

「甲的錢是乙的 $\frac{2}{3}$ ，若乙有 600 元，則甲有_____元。」

「甲的錢是乙的 3 倍，若甲有 x 元，則乙有_____元。」③

「甲的錢是乙的 3 倍，若乙有 x 元，則甲有_____元。」④

「甲的錢是乙的 $\frac{2}{3}$ ，若甲有 x 元，則乙有_____元。」

「甲的錢是乙的 $\frac{2}{3}$ ，若乙有 x 元，則甲有_____元。」⑤

「一件衣服 x 元，打 8 折後是_____元。」⑥

「一件衣服打 8 折後是 x 元，則原價是_____元。」

...等等。

針對補救教學的學生，以上題目建議只保留一些較簡易者或者對未來學習具關鍵影響的題型，例如「整數倍」的③④，「分數倍」的順敘述⑤，「隱藏的倍」的順敘述⑥。

乘除法應用問題同樣可以利用「數到式的類化」、「題意的理解與記錄」、「分句閱讀、簡易圖示」等方式進行教學，只是因應乘除的特性，圖示上需做些修改。底下以實例簡要說明：

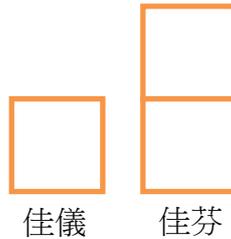
3. 佳芬的錢數是佳儀的 2 倍，
- (1) 若佳儀有 100 元，則佳芬有_____元；
 - (2) 若佳儀有 m 元，則佳芬有_____元；
 - (3) 若佳芬有 100 元，則佳儀有_____元；
 - (4) 若佳芬有 n 元，則佳儀有_____元。

1. 整題念一遍，建立約略印象：佳芬、佳儀、2 倍、100 元等。

2. 分句閱讀、理解題意與簡易圖示：

「佳芬的錢數是佳儀的 2 倍」，

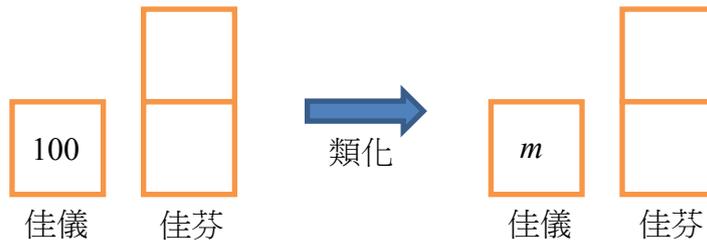
教師必須引導學生明白不是佳儀要 2 倍，而是佳芬要 2 倍，而且是佳儀的 2 倍，並以圖示記錄，免得一直在文字上打轉。如以方塊表示：



本題在設計上已含從「數」類化到「式」，先從

「(1) 若佳儀有 100 元，則佳芬有___元；」，再到

「(2) 若佳儀有 m 元，則佳芬有___元；」，配上圖示。



若有學生用 $100 + 100 = 200$ 的方式計算佳芬的錢數，並無不可，但教師必須進一步要求學生以 100×2 來連結到 2 倍；尤其當學生用 $m + m$ 表示時，宜指導學生察覺隱藏的 1 倍，

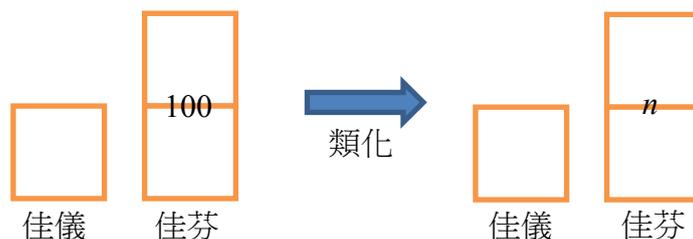
$$\begin{aligned} & m + m \\ &= 1 \cdot m + 1 \cdot m \\ &= 2m \end{aligned}$$

務必與 2 倍的意義密切聯繫，如此會有助於分數倍時的列式。

逆運算的學習也可從「數」類化到「式」，並配上圖示。

先從「(3) 若佳芬有 100 元，則佳儀有___元；」，

再到「(4) 若佳芬有 n 元，則佳儀有___元。」



三、四則混合的教學重點

(一) 以順敘述的情境為主

四則混合的應用問題，教學方法仍可以用數到式類化、分句閱讀與簡易圖示的搭配。但建議只以順敘述的情境為主。

舉一分數倍的例子概略說明要點：

4. 1 香瓜的價錢是 1 斤香蕉價錢的 $2\frac{1}{2}$ 倍，如果香蕉 1 斤 x 元，那麼

(1) 香瓜 1 斤_____元；

(2) 各買 1 斤共要_____元。

(3) 3 斤香蕉的價錢比 1 斤香瓜的價錢貴_____元。

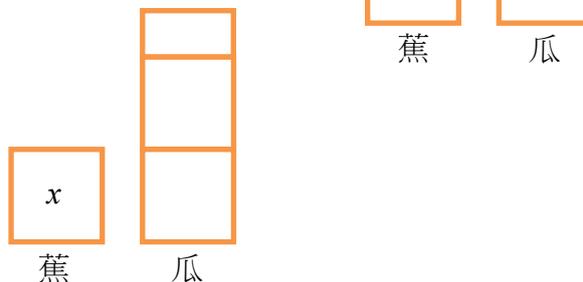
1. 整題念一遍，建立約略印象：香瓜、香蕉、 $2\frac{1}{2}$ 倍、 x 元等。

2. 分句閱讀、理解題意與簡易圖示：

「1 斤香瓜的價錢是 1 斤香蕉價錢的 $2\frac{1}{2}$ 倍，」

師生共同討論，並將討論結果簡單圖示出來。

「如果香蕉 1 斤 x 元，」



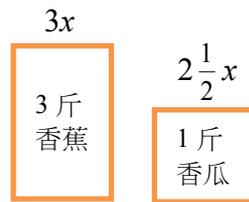
若有學生仍以 $x+x+\frac{1}{2}x$ 表示香瓜，可透過代數運算連結到 $2\frac{1}{2}$ 倍，知道可用 $x \cdot 2\frac{1}{2}$ 來算。

「(3) 3 斤香蕉的價錢比 1 斤香瓜的價錢貴_____元。」

此題的數量關係較為複雜，建議能加進記錄問題的簡易圖示，如下：

	香蕉	香瓜	
1 斤：	x	$2\frac{1}{2}x$	…共_____元
3 斤：	$3x$		

需注意學生是否掌握「3 斤香蕉的價錢比 1 斤香瓜的價錢貴」中表達的大小關係，否則還得透過討論，並圖示討論的結果，例如：



(二) 所列的一元一次式以一個括號為原則

代數運算時若有括號必須去括號，多個括號常造成能力不足的學生混淆。所以《補救教學基本學習內容》(教育部，2012) 規範，補救教學的一元一次式以一個括號為原則，例如「香蕉 1 斤 x 元，蘋果 1 斤比香蕉 1 斤貴 10 元，買了 3 斤蘋果，共需 $3(x+10)$ 元。」

上式 $3(x+10)$ 的括號，需要特別的指導。例如佐以圖示說明，當我們知道有兩項都必須乘以相同的一個數時，如 x 和 10 都要乘以 3，就可以用括號表示；反過來，去括號時，括號內的兩項都必須乘以 3。

5. 買 1 個漢堡和 1 杯玉米濃湯共要 70 元，
 如果 1 個漢堡要 a 元，那麼 1 杯玉米濃湯要_____元；
 (1) 3 個漢堡要_____元；2 杯玉米濃湯要_____元。
 (2) 子婕買了 3 個漢堡和 2 杯玉米濃湯共要_____元。
 (3) 如果知道 3 個漢堡比 2 杯玉米濃湯貴，那麼 3 個漢堡比 2 杯玉米濃湯貴
 _____元。

引導過程同前：整題念一遍，建立大略印象後，再分句閱讀、理解題意並簡易圖示。以下為可能採用的圖示，其間，2 杯玉米濃湯的價錢需用到括號表示，必須特別提醒。

	漢堡	濃湯	
1 個/1 杯：	a 元	$\underline{70-a}$ 元	共 70 元
3 個：	$\underline{3a}$ 元		
2 杯：		$\underline{2(70-a)}$ 元	

參、應用題解題的教學策略

應用問題是列一元一次式與解一元一次方程式的綜合應用，其中包含找出題目中的相等關係以列出方程式，並且涉及括號的運用和運算，而此二者也是學習應用問題的困難之處，因此，以下應用問題解題的範例，特別著重尋找相等關係的步驟，以及括號的教學提示。

6. 已知父子兩人今年的年齡分別為 36 歲與 8 歲，
請問幾年後，父親的年齡是兒子年齡的 2 倍？

1. 整題念一遍，建立約略印象：父 36、子 8、2 倍等。

2. 分句閱讀、理解題意與簡易圖示：

「父子兩人今年的年齡分別為 36 歲與 8 歲」，

學生的圖示通常只記了「父」、「36」、「子」、「8」，但題幹中的「請問幾年後，」指出問題牽涉到年紀的改變，所以將「36」跟「8」標明為今年，才不會混淆。又因為題目問的是幾年後，因此可以假設 x 年後。

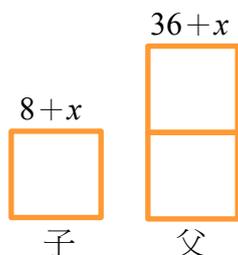
	父	子
今年：	36	8
x 年後：		

「請問幾年後，父親的年齡是兒子年齡的 2 倍？」

	父	子	
今年：	36	8	
x 年後：	$\underline{36+x}$	$\underline{8+x}$...2 倍

因為「2 倍」的關係會因給定的是基準量或比較量而需判斷是乘以 2 或除以 2，且題目並未言明何處「等於」，因此學生常無法列出方程式。建議可採以下兩種方式教學。

一是，沿用前文的圖示方式，先畫出一組表達 1 與 2 倍的箱子，並經由師生討論，從「父親的年齡是兒子年齡的 2 倍」，引導出兒子是 1 倍，父親是 2 倍，如下圖。



經由圖示的幫助，從視覺上就可看出兒子的年紀要乘以 2 才會和父親的年紀相等，得以列出方程式 $2 \cdot (8+x) = 36+x$ ，並藉此機會說明括號的使用時機，因為 $8+x$ 是兒子的年紀，兒子的年紀要乘以 2，所以整個 $8+x$ 都要乘以 2，因此必須加括號。

二是，分別把題目中「父親的年齡」圈起來對照成「 $36+x$ 」，「兒子年齡」圈起來對照「 $8+x$ 」，如下圖所示，變成「 $36+x$ 」是「 $8+x$ 」的 2 倍。此種方法對程度稍好一些的學生效果不錯。

<p>父親的年齡 是 兒子年齡 的 2 倍</p> <p>$36+x$ 是 $8+x$ 的 2 倍</p> <p>$36+x = 8+x$ 的 2 倍</p> <p>$36+x = (8+x) \cdot 2$</p>

7. 爸爸用 360 元買了 1 本書和 1 張 CD，只知書比 CD 貴 120 元，問 1 本書、1 張 CD 各是多少元？

當記錄完題目後，

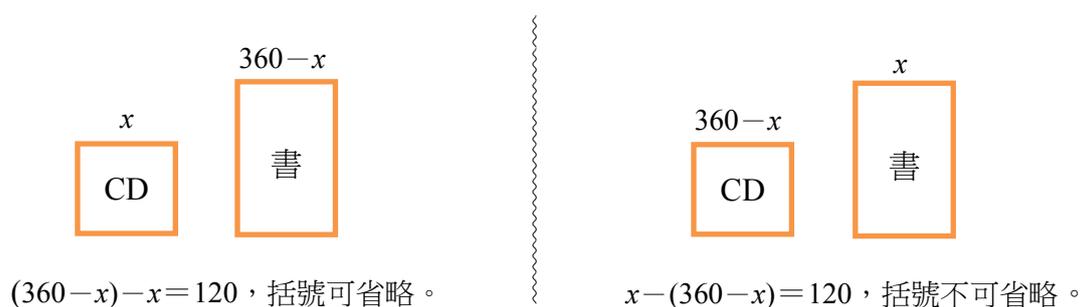
書	CD
	… 共 360 元
	… 貴 120 元

學生會發現設誰為 x 都可以，一個是「 x 」，另一個就是「 $360-x$ 」。

書	CD	
$360-x$	x	… 共 360 元
		… 貴 120 元

書	CD	
x	$360-x$	… 共 360 元
		… 貴 120 元

另一條件「貴 120 元」是列方程式的關鍵。學生可將兩量的「差」等於 120 作為列方程式的依據，若無法判斷出誰要減誰才會是 120，可經由討論，知道大小關係後加以圖示記錄。



8. 清心咖啡館提供濃縮和美式兩種咖啡，某日一共賣了 85 杯，又知道美式的數量是濃縮咖啡的 4 倍，問濃縮咖啡賣了幾杯？

由於題目問濃縮咖啡，有些學生就設濃縮咖啡賣了 x 杯；接著因為和美式咖啡一共賣了 85 杯，所以美式咖啡就是賣了 $85-x$ 杯；又美式咖啡是濃縮咖啡的四倍，濃縮咖啡是 x 杯，美式咖啡就是 $4x$ 杯，圖示記錄如下圖。

濃縮	美式	
x	<u>$85-x$</u>	… 共 85 杯
x	<u>$4x$</u>	… 4 倍

但有些學生就卡在此處，認為已經沒有條件可用來列方程式了。此時可跟學生說明，因為設濃縮咖啡賣了 x 杯後，美式咖啡就賣了 $85-x$ 杯或是 $4x$ 杯，因此 $85-x$ 應該和 $4x$ 相等，可列出方程式 $85-x=4x$ 。這種從兩個不同方向得同一數學物件因而相等的方式，也是後續數學學習常用的解題策略。

肆、結語

本文作者根據緒論所言數量的特性、情境的變化、語句的順逆敘述等原則，編寫補救教學教材，並以「數到式的類化」、「題意的理解與記錄」、「分句閱讀、簡易圖示」三個教學策略實地進行低成就學生的補救教學。從教學實務與推廣過程中發現以下成效：

在改善動機上，學生不再一看到應用問題就放棄，而會主動嘗試分句閱讀、分析關係，並用圖示幫助記錄題意。用圖示記錄問題後，因為通常只有兩個量，學生會較敢於大膽設 x 。

在師生互動上，由於學生會讀題、畫圖、設 x ，教師就有機會瞭解學生的想法或障礙，師生間較容易產生問答與互動。

在促進學生理解上，從數類化或圖示能協助學生掌握題意中的數量關係，增進正確列式，甚至降低計算正確卻答錯的可能性。例如「甲乙兩人今年的歲數和為 45 歲，且甲比乙多 5 歲，請問甲、乙兩人今年各幾歲？」常有學生即使算出 20 歲和 25 歲，卻誤將答案寫成甲 20 歲、乙 25 歲，因為一直受到「乙多 5 歲」的影響。但若用圖示記錄了甲多乙少，則學生犯此錯誤的情況就會減少。

不過，涉及比較關係的一元一次方程式應用題，一向是學生較難釐清的，需要比較多從數類化到式的經驗，方能建立概念。此外，用簡易圖示學習列一元一次式與解應用問題，其間的變化不少，教師不宜限制學生圖示的方式，宜在教學前後觀察與省思，學生到底能不能看懂圖示？改用不同的圖示呈現，何者學生較易理解？搭配何種解釋，解說才更為有效？期望本文提供的選題與教學策略，有助於一元一次方程式的補救教學。

參考文獻

- 林清山、張景媛（1994）。國中生代數應用題教學策略效果之評估。*教育心理學報*，27，35-62。
- 張景媛、余采玲、鄭章華、范德鑫（2012）。以對話式形成性評量進行數學補救教學的方法。*教育研究月刊*，221，50-64。
- 教育部（2012）。*補救教學基本學習內容【國民中學數學學習領域】（試行版）*。臺北：作者。
- 陳彥廷、柳賢（2009）。中學生對代數式中文字符號之語意理解研究：不同管道探討。*科學教育學刊*，17（1），1-25。
- 謝和秀、謝哲仁（2002）。國一學生文字符號概念及代數文字題之解題研究。載於國立嘉義大學（主編），*九十一年度師範院校教育學術論文發表會論文集*（第 3 卷，1491-1521 頁）。嘉義：國立嘉義大學。
- Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford & A. P. Shulte (Eds.), *The Ideals of Algebra, K-12* (pp. 20-32). Reston, VA: NCTM.
- Maharaj, A. (2008). Some insights from research literature for teaching and learning mathematics. *South African Journal of Education*, 28(3), 401-414.

- Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics*, 42(3), 237-268.
- Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction*, 14(5), 503-518.
- Thomas, M., & Tall, D. (2001). The long-term cognitive development of symbolic algebra. In H. Chick, K., Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The future of the teaching and learning of algebra* (Vol. 2, pp. 590-597). Melbourne: The University of Melbourne.

陳梅仙 (2014)。
從操作實驗談幾何教學。
台灣數學教師(電子)期刊, 35 (1), 17-29。

從操作實驗談幾何教學

陳梅仙

屏東縣立琉球國民中學

本文目的在展示從實驗操作方式引進學生對幾何性質的探索與論證的教學嘗試。尤其是幾何課程，幾何推理是國中生學習數學的困難單元。傳統課室教學是以演繹推理的方式教導學生幾何性質的證明，然學習成效仍待考驗。筆者在進行三角形全等性與角平分課堂教學中，以實驗操作的方式，透過教具與情境的引導，作了兩則實驗教學。這兩則的數學教學課堂是一個全新的嘗試，筆者從不同的觀點與切入的角度帶領學生觀察、操作和實驗幾何圖像，學生從被動的吸收數學知識，轉變成為可以參與其中並發現幾何數學性質的角色，這一個動態的雙向互動的數學課堂的營造讓我們看到數學課堂的可能性與發展性。

關鍵詞：全等三角形、角平分線、實驗操作

壹、引言

幾何圖形是生活圖像的抽象化，要從抽象化的圖像中探索數學性質，對於多數學生而言是困難的。如何讓學生能感受幾何抽象圖像的數學內涵，以利用實際操作實驗的方式來探索幾何圖像是一個可以讓學生親近幾何圖像的新的嚐試。筆者在進行三角形全等性質與角平分線教學的課堂中，以融入實驗操作的精神，透過教具與情境式的引導，作了以下兩則數學課堂教學的嘗試。

其中一則為「從三角形 ASS 全等條件探索三角形的邊角關係」，老師在教學中發現三角形全等的教學無法與學生思考作連結，三角形全等看似簡單的數學概念，卻因故被隔絕於學生思考的連結之外。因應這個困難，老師在教學中從教具的使用讓學生具體看到三角形 SSS 全等性質，進而從與學生討論 ASS 是否為三角形全等條件時，老師擺脫既有的演繹論證方法，帶領學生一起以尺規作圖實驗的方式，以討論 ASS 是否可以唯一畫出三角形的方式。老師和學生一起從實驗的角度清楚的看到並觀察到三角形全等和不全等所代表的意思，最後更利用等腰三角形底角相等的特性一樣的從實驗的角度，發展出大角對大邊的三角形邊角性質。

另外一則為「從搶黃金探索角平分線的數學意涵」，當教學單元進入角平分線時，因為不想直接教學生角平分線的性質，想要換個方式讓學生感受到角平分線的性質，而在課堂中發展出這一堂課的教學設計，從一進教室就開始講故事的方式帶出搶黃金的情境，再以公平性為討論核心，學生在最自然的情況下體會到角平分線的重要性質。

貳、從三角形 ASS 全等條件探索三角形的邊角關係

三角形全等概念的講授看似容易，實際進行教學超過 16 年之後，今年在慢下教學的腳步之後，才實際察覺到學生要真實領會三角形全等的數學意涵，實在並不容易。如何讓學生有感覺的學習三角形的全等，進而能掌握三角形全等的運用與論述說理的方式，這是一個看似容易卻不容易達成的教學。今年在實際進行的教學中，無意間在根據三角形 ASS 條件繪製圖形時，發現根據三角形 ASS 條件所繪製的圖形在不是直角的時候，仍會有全等關係，而引發以下這一連串的教學內容。除了帶領學生以實驗的角度分析根據三角形 ASS 條件所繪製的圖形會在什麼情況之下全等，更進一步的發現並看到三角形的邊角關係。

實際的教學活動設計正好吻合 van Hiele 模式的教學活動設計（左台益，2002），茲說明如下：

層面 1：諮詢（inquiry / information）：透過教具棒的實際操作，讓學生以最自然的實驗方式，認識三角形 SSS 的全等性質。

層面 2：導向 (guided orientation)：使用尺規作圖讓學生從嚐試畫出等腰三角形的過程中體驗等腰三角形等角性質，為後面三角形邊角關係和全等關係的討論留下伏筆。

層面 3：解說 (explication)：運用三角形 SSS 的全等性質完成等腰三角形底角相等的證明。

層面 4：探索 (free orientation)：以尺規作圖實驗的方法，在 ASS 的三角形條件下探索全等和不全等存在的條件。

層面 5：統整 (integration)：引導學生將實驗的結果，從角度和邊長的大小如何相互影響 ASS 的三角形條件下全等和不全等存在的條件，並完整的討論並記錄下來，同時發展出三角形大角對大邊的邊角關係。

實際的教學內容說明如下：

一、教學設計與活動

(一) 符合三角形 SSS 全等條件的論述

1. 三角形的邊長關係

準備：老師準備兩組不同長度且可拼組的教具棒。

提問 1：老師取出其中一組的教具棒 3 支（可以組成三角形的教具棒），詢問學生這 3 支教具棒是否可以組成一個三角形？

提問 2：老師取出其中一組的教具棒 3 支（無法組成三角形的教具棒），詢問學生這 3 支教具棒是否可以組成一個三角形？

提問 3：是不是任意 3 支教具棒都可以組成一個三角形？我們要組成一個三角形的 3 支教具棒必須符合什麼樣的條件？

教學：透過教具棒的組合實驗，我們可以發現，並不是任意 3 支教具棒就可以組成一個三角形。要能讓教具棒組成三角形，最短的 2 支教具棒的長度和必須超過最長的那支教具棒的長度才有機會組成一個三角形。

2. 三角形 SSS 全等的討論

準備：老師準備長度不同且可拼組成三角形的教具棒兩組，這兩組中分別有相同長度的紅色、黃色和綠色的教具棒。老師取出其中一組紅色、黃色和綠色的教具棒拼成一個三角形，同時將另外一組教具棒交給學生拼組。

提問 1：同學所拼組起來的三角形和老師使用相同長度的 3 支教具棒所拼成的三角形會不會不一樣呢？

提問 2：我們使用相同長度的 3 支教具棒能不能拼組出形狀或大小不一樣的三角形呢？

教學：3 支可以拼組成三角形的教具棒，受限於已經確定的長度，我們在進行組合的時候，依據已經確定的長度，只有辦法找到一個交會組合的位置。因此，任何一組可以拼組成三角形的教具棒都只能拼組出一種形狀和大小的三角形，在數學上，我們稱使用 3 個相同邊長所組成的三角形具有 SSS 全等的關係。

3. 三角形 SSS 全等的論述

教學與提問 1：我們可以看得出來，老師所組成的三角形和同學所組起來的三角形（如圖 1），因為具有三個完全一樣長度的邊長而拼組出一模一樣的三角形。在數學上，我們稱這兩個三角形具有全等的關係，我們怎麼把這種關係透過數學式子寫下來呢？（如圖 2）

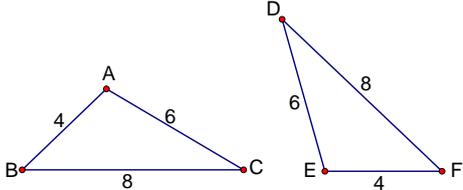
<p>題目：分別使用相同長度的紅色、黃色、和綠色的教具棒所拼組的三角形是否會全等？</p>	<p>題目：如圖，$\overline{AB} = 4, \overline{BC} = 8, \overline{CA} = 6$，$\overline{DE} = 6, \overline{EF} = 4, \overline{FD} = 8$，則$\triangle ABC$和$\triangle DEF$是否會全等？</p>																				
<p>∴(因為)</p> <table style="width: 100%; border: none;"> <tr> <td style="width: 15%;">老師</td> <td style="width: 15%;">紅</td> <td style="width: 10%;">=</td> <td style="width: 15%;">紅</td> <td style="width: 15%;">學生</td> </tr> <tr> <td>拼組的</td> <td>黃</td> <td>=</td> <td>黃</td> <td>拼組的</td> </tr> <tr> <td>三角形</td> <td>綠</td> <td>=</td> <td>綠</td> <td>三角形</td> </tr> <tr> <td>教具棒</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td>教具棒</td> </tr> </table>	老師	紅	=	紅	學生	拼組的	黃	=	黃	拼組的	三角形	綠	=	綠	三角形	教具棒				教具棒	
老師	紅	=	紅	學生																	
拼組的	黃	=	黃	拼組的																	
三角形	綠	=	綠	三角形																	
教具棒				教具棒																	
<p>∴(所以)</p> <p>老師\triangle紅黃綠 \cong 學生 \triangle紅黃綠 (SSS 全等)</p>	<p>∴ $\overline{AB} = 4 = \overline{EF}$ $\overline{BC} = 8 = \overline{DF}$ $\overline{CA} = 6 = \overline{DE}$ ∴$\triangle ABC \cong \triangle EFD$ (SSS 全等)</p>																				

圖 1 教具棒的數學全等論述方式

圖 2 數學題目的數學全等論述方式

教學：老師示範教具棒的數學全等論述方式之後，請學生學習這種論述方式撰寫上述右側數學題目，務必讓學生自行撰寫，然後再指導學生。

(二) 等腰三角形

1. 繪製等腰三角形

提問 1：什麼是等腰三角形？你可以畫出一個不是正三角形的等腰三角形嗎？請試著利用手邊的工具（尺規或其它）畫出一個不是正三角形的等腰三角形。（如圖 3）

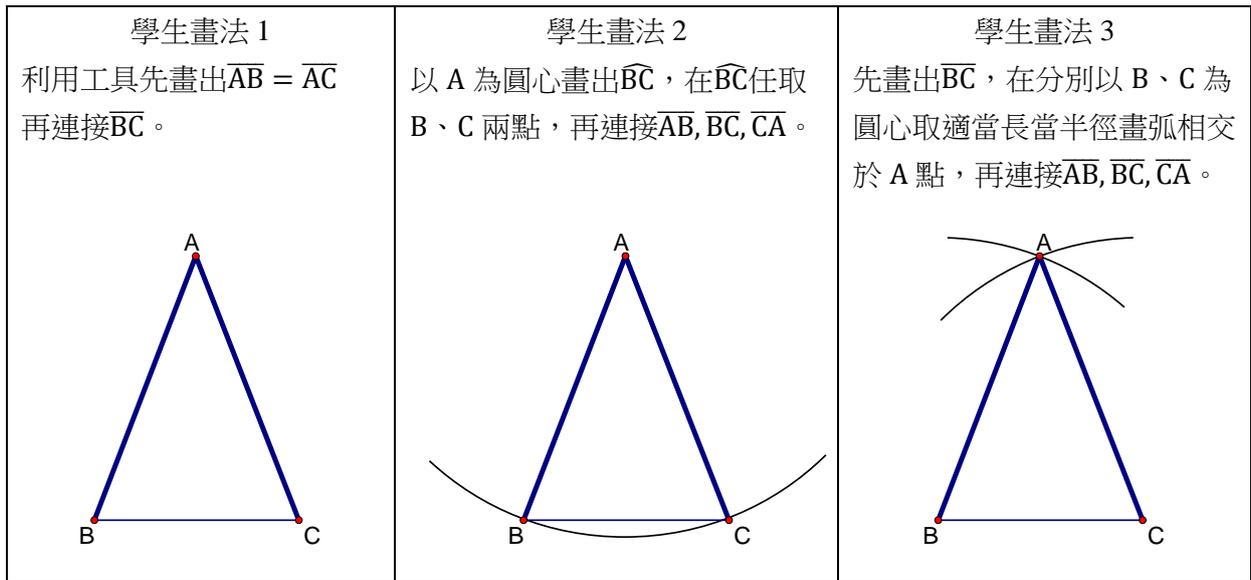


圖 3 等腰三角形學生作圖方法

教學與提問 2：我們稱等腰三角形的兩個相等的邊為兩個腰，兩個腰的夾角為頂角，而另外兩個角為底角，等腰三角形的兩個底角會相等嗎？

提問 3：你可以利用什麼樣的方式來檢查或說明等腰三角形的兩個底角的角度會相等呢？

提問 4：如圖，如果我們取 \overline{BC} 的中點 M，並連接 \overline{AM} ，你是否能夠說明 $\triangle ABM$ 和 $\triangle ACM$ 具有全等關係呢？（如圖 4）

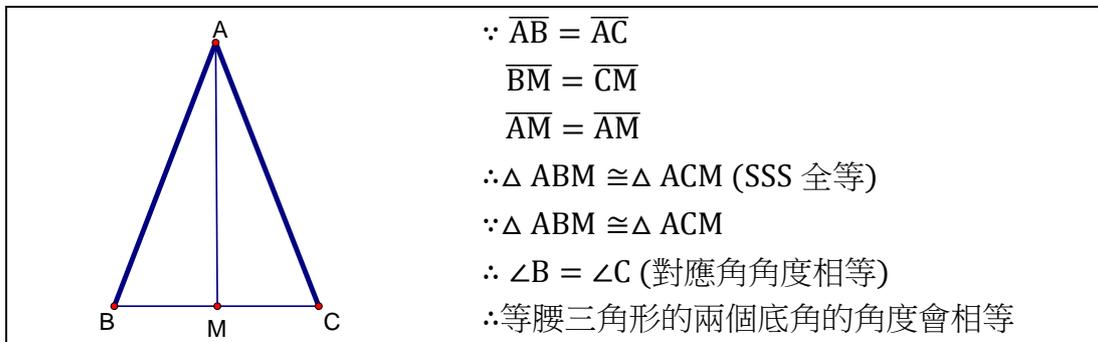
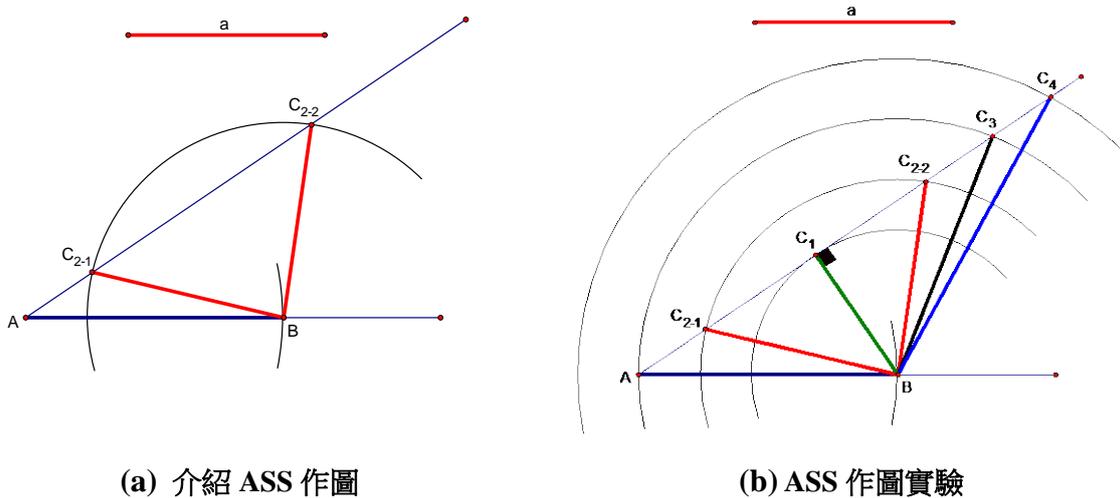


圖 4 說明等腰三角形的兩個底角的角度會相等

（三）探討 ASS 全等的條件

教學：如圖 5(a)，老師在黑板上畫出一個銳角 $\angle A$ ，並在 $\angle A$ 的一邊利用圓規畫出 \overline{AB} 長，再以 B 點為圓心，a 線段長為半徑畫弧，與銳角 $\angle A$ 的另外一邊相交於 C_{2-1} 和 C_{2-2} 兩點，連接 $\overline{BC_{2-1}}$ 和 $\overline{BC_{2-2}}$ ，這種作圖的順序稱為 ASS 作圖。我們發現透過 ASS 作圖的順序，在相同的條件（ $\angle A$ 、 \overline{AB} 和線段 a）之下，我們會做出兩個不同的三角形（ $\triangle ABC_{2-1}$ 和 $\triangle ABC_{2-2}$ ），也就是說，符合這種作圖條件的三角形不一定會全等。

提問 1：線段 a 的長度在什麼樣的長度時會和 $\angle A$ 的另外一邊只有一個交點呢？這種時候，我們只能畫出一種三角形，也就是說，根據這樣的條件所畫出來的三角形會具有全等關係。請同學自己畫圖實驗，檢查線段長度 a 在什麼情況之下會和 $\angle A$ 的另外一邊有兩個交點，又是會在什麼情況之下只會有一個交點？



(a) 介紹 ASS 作圖

(b) ASS 作圖實驗

圖 5 ASS 作圖實驗： $\angle A$ 是銳角

教學（如圖 5(b)）：1. 當線段 $a < \overline{BC_1}$ 時，以 ASS 作圖（ $\angle A$ 、 \overline{AB} 和線段 a ）無法畫出三角形。

2. 當線段 $a = \overline{BC_1}$ 時，以 ASS 作圖（ $\angle A$ 、 \overline{AB} 和線段 a ）剛好就只能畫出一個直角三角形（ $\triangle ABC_1$ ）。

3. 當 $\overline{BC_1} < \text{線段 } a < \overline{BC_3}$ 時，以 ASS 作圖（ $\angle A$ 、 \overline{AB} 和線段 a ）可以畫出兩個三角形（ $\triangle ABC_{2-1}$ 和 $\triangle ABC_{2-2}$ ）。

4. 當線段 $a \geq \overline{BC_3}$ 時，以 ASS 作圖（ $\angle A$ 、 \overline{AB} 和線段 a ）剛好就只能畫出一個三角形（ $\triangle ABC_4$ ）。

因此，ASS 作圖（ $\angle A$ 、 \overline{AB} 和線段 a ）的作圖，除了可以剛好畫出直角三角形的圖形以外，當第二條邊的長度比第一條邊的長度還要長或是剛好相等時，這個時候只能畫出一種三角形，因此具有這種相同 ASS 條件的三角形會具有全等關係。

提問 2：我們剛剛是以 $\angle A$ 是銳角進行 ASS 的作圖討論，那當 $\angle A$ 是直角的時候的 ASS 作圖會是什麼樣子呢（如圖 6(a)）？作圖時的第二條邊的長度（線段 a ）和第一條邊的長度（ \overline{AB} ）之間要有什麼樣的關係才能畫出三角形呢？有辦法畫出兩個符合 ASS 作圖條件的三角形嗎？

提問 3：我們剛剛是以 $\angle A$ 是銳角進行 ASS 的作圖討論，那當 $\angle A$ 是鈍角的時候的 ASS 作圖會是什麼樣子呢(如圖 6(b))？作圖時的第二條邊的長度(線段 a)和第一條邊的長度(\overline{AB})之間要有什麼樣的關係才能畫出三角形呢？有辦法畫出兩個符合 ASS 作圖條件的三角形嗎？

教學：不論 $\angle A$ 是直角或是鈍角，以 ASS 作圖($\angle A$ 、 \overline{AB} 和 $\overline{BC_4}$)要能夠畫出三角形，唯一的可能就是 $\overline{BC_4} > \overline{AB}$ ，而且這個時候也只能畫出一個三角形，因此，綜上所述，不論 $\angle A$ 是銳角、直角或是鈍角，只要是符合 ASS 作圖條件，第二條邊的長度只要大於第一條邊，就一定可以畫出三角形，而且也只能畫出一個三角形，也就是說，符合這種 ASS 作圖條件的三角形會具有全等關係。

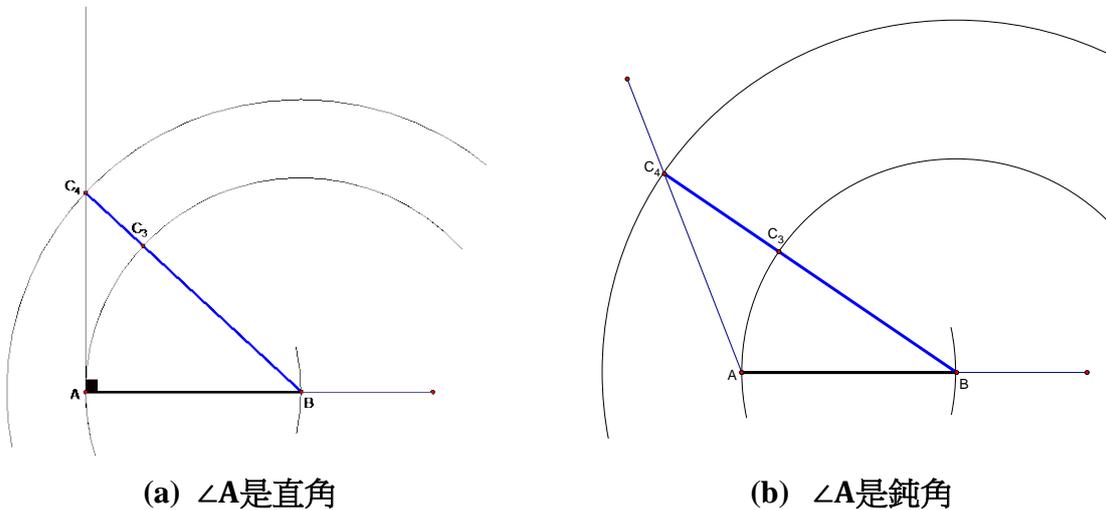


圖 6 ASS 作圖實驗： $\angle A$ 不是銳角

(四) 從 ASS 的作圖探討三角形的邊角關係

提問 1：當我們進行 ASS 作圖($\angle A$ 、 \overline{AB} 和 $\overline{BC_4}$)畫出三角形時， $\overline{AB} < \overline{BC_4}$ 時，我們所畫出來的 $\angle C_4$ 的角度大小在 $\overline{BC_4}$ 越來越長時會有什麼樣的變化？

教學：1.當 $\angle A$ 是銳角(如圖 7(a))，我們進行 ASS 作圖($\angle A$ 、 \overline{AB} 和 $\overline{BC_4}$)畫出三角形時，當 $\overline{BC_3} = \overline{AB}$ 時， $\angle A = \angle C_3$ ，當 $\overline{BC_4} > \overline{AB}$ 時，因為 $\angle B$ 角度的變大，在三角形內角和 180 度的限制下， $\angle C_4$ 的角度變小了，也就是說，當 $\overline{BC_4} > \overline{AB}$ 時，將同時發生 $\angle A > \angle C_4$ ，而 \overline{AB} 和 $\overline{BC_4}$ 恰分別為 $\angle A$ 和 $\angle C_4$ 的對邊，因此，我們發現了三角形在數學上很重要的邊角關係，在同一個三角形當中，比較大的邊長會對應到相對比較大的內角角度，同樣的，比較大的內角角度也會對應到相對比較大的對邊邊長，這也就是在數學上我們常說的三角形邊角關係：大邊對大角、大角對大邊。

(除了從三角形內角和 180 度，我們也可以從外角定理來看到 $\angle C_4 < \angle C_3 < \angle A$ 。)

2.當 $\angle A$ 是直角或鈍角(如圖 7(b)和圖 7(c)),我們更可以清楚的看到,只有當 $\overline{BC_4} > \overline{AB}$ 時,我們才能夠以 ASS 的作圖方式畫出三角形,而在這同時也會產生 $\angle A > \angle C_4$ 的關係,陳述的理由與前面是相同的。

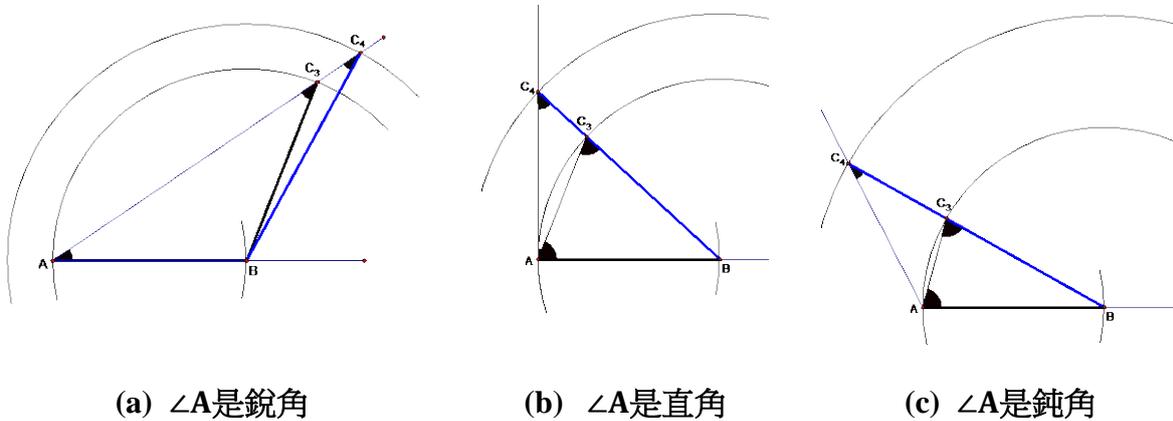


圖 7 從 ASS 作圖看到三角形的邊角關係

二、反思與結論

根據三角形 ASS 作圖條件所畫出來的三角形是否全等一直存在著不確定性,在往年的教學中總是直接將 ASS 陳述為非三角形全等的性質,而且總是將其排除在三角形的全等性質之外。經過這次的教學,想不到竟可以這麼簡單的透過作圖的實驗與討論就可以讓學生感受到究竟什麼是三角形的全等,而 ASS 的作圖,原來只要依據依序給定的 ASS 作圖條件下的第二條邊長比第一條邊長還要長,就一定可以做出三角形,而且也只能唯一的做出三角形。同時在教學的過程中,透過等腰三角形底角相等的性質,讓學生同時觀察到當 ASS 是全等作圖時,也就是兩邊的長度有長短關係時,其所對應的角度也會因為在三角形內角和 180 度的限制之下,也會有相對應的大小關係,而討論出了三角形在數學上很重要的邊角關係:大角對大邊、大邊對大角。而這一切的發生主要是源自於老師發現學生對於三角形全等概念的無法掌握和沒有感覺,在老師遇到教學困難的情況之下,放慢速度嘗試著以學生的速度思考問題所斬獲的。

參、從搶黃金探索角平分線的數學意涵

十二年國民基本教育即將於 103 年正式啟動,升學管道中有 75% 是屬於免試入學,超額比序將是免試入學學生比序的依據,而超額比序中其中有一個項目是體適能,學校的學務處老師發現學生的體適能很需要加強,因此,為了增強學生超額比序的競爭力,學務處老師每天利用早上集合時間和下課時間透過跑步、拉筋等方式增強學生體適能的能力,在訓練了二個月之後,為了鼓勵學生同時檢驗學生體適能的訓練成效,學務處決定舉辦一個班際搶黃金的比賽活動,

以琉球國中八年級學生為例，八年級學生總共有 3 個班級，分別是 801、802 和 803 班，我們在 400 公尺的操場上拉出了三條直線分別將 801、802 和 803 班圍在直線的外側，我們打算在三條直線所圍起來的區域中間放上黃金（如圖 8），讓八年級這 3 個班級去搶黃金，我們想要找出對 3 個班級而言黃金擺放位置最公平的地方。

一、教學活動設計

提問 1：如圖 8，請問黃金應該放在哪裡才會讓這 3 個班級同學都會覺得公平呢？

教師觀察：學生直接回答將黃金放在中間。

提問 2：放在中間是什麼意思呢？你可以再說得清楚些嗎？可以更明確的說明所謂的中間是指哪裡呢？

提問 3：什麼是公平的感覺呢？要用什麼方式來表示是否公平呢？

提問 4：你覺得如果我們將黃金放在 P 點的位置（如圖 9），這樣對這 3 個班級的同學公平嗎？為什麼你會覺得不公平呢？

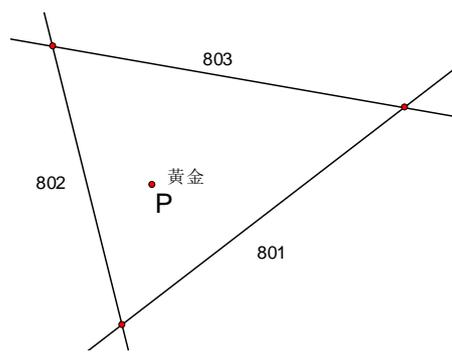
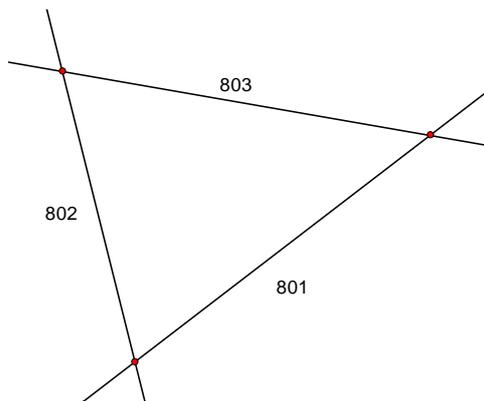


圖 8 利用三條直線將班級分隔於直線外側 圖 9 黃金放置於三條直線內側 P 點

教學：我們知道，所謂的公不公平是從班級到黃金的距離來觀察的，所謂的公平必須是 3 個班級到黃金的距離是一樣的才有公平的感覺，問題是，什麼叫做距離呢？

提問 5：舉例來說，你會怎麼畫出 802 班到黃金的距離呢？也就是說，如果你是 802 班的學生，你會選擇在哪個位置起跑對你而言最有利呢？你會選擇從 D_1 、 D_2 、 D_3 、 D_4 、 D_5 或 D_6 起跑嗎？或是哪一個位置起跑對你而言會最有利呢？

教學：從圖 10，我們可以發現最有利的起跑點，也就是到黃金最短距離的位置必須是和直線垂直的地點是搶黃金最好的起跑位置，請同學畫出依照圖 11 中黃金所擺放的位置，找出各班最佳的起跑位置（也就是圖 12 中的垂足位置）。

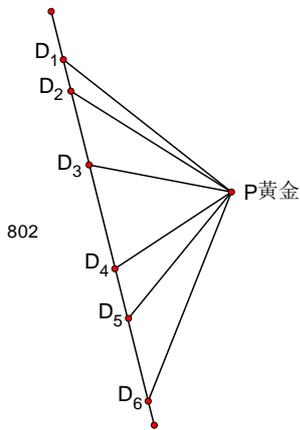


圖 10 找出 802 班搶黃金最佳起跑位置

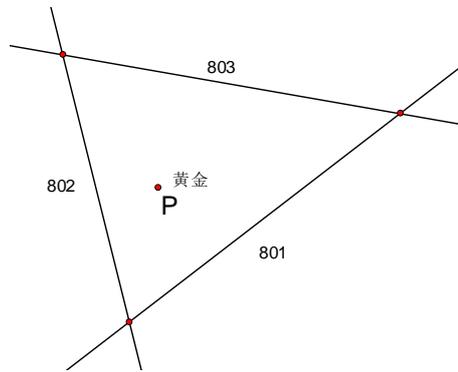


圖 11 找出各班搶黃金最佳起跑位置

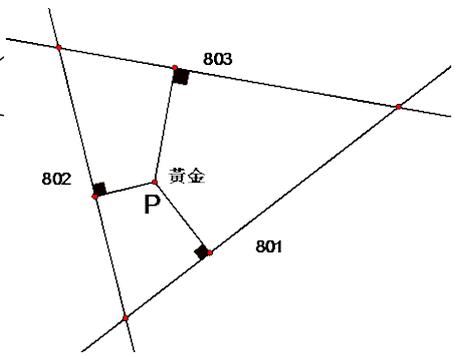


圖 12 各班搶黃金最佳起跑位置為直線到黃金位置的最短距離

教學：我們可以發現，剛剛黃金所擺放的位置對 3 個班級而言是不公平的，因為黃金到 3 個班級的距離大小不一，很明顯對於 802 班距離最近，而對於 803 班卻距離最遠，也就是說，如果我們想找出最公平的黃金擺放位置，我們必須做到讓黃金擺放位置到 3 個班級的最短距離是相等的，而我們一次討論 3 個班級似乎有些困難，我們先從 2 個班級來討論看看，請同學想辦法畫出所有可以讓 802 和 801 班覺得公平的黃金擺放位置，請同學想辦法將所有可能的位置全部都畫出來（如圖 13）。

提問 6：全部喔，要全部畫出來喔，你要怎麼畫才可以把所有的可能位置全部畫出來呢？（如圖 14）。

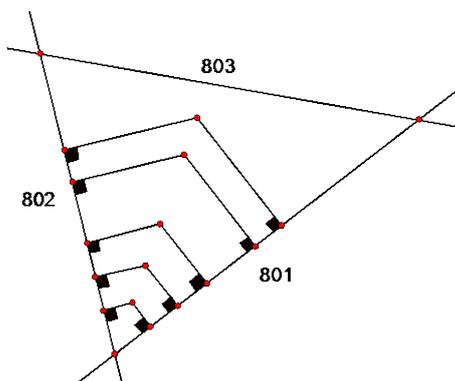


圖 13 找出對於 801 班和 802 班公平的黃金可能的放置位置

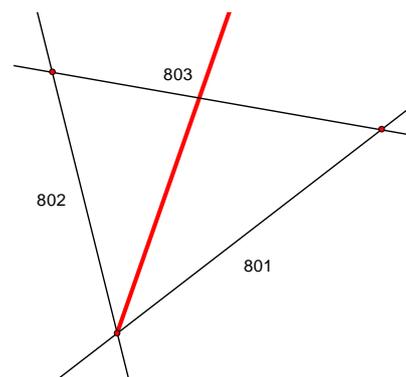


圖 14 找出對於 801 班和 802 班公平的黃金所有可能的放置位置

教師觀察：學生剛開始試著會找出並畫出 1 個、2 個、3 個...黃金擺放的位置，經由這個提問與要求，學生畫出了所有代表到 801 和 802 距離相等的直線就是角平分線，甚至有學生將直接利用尺規作圖畫出角平分線。

教學：我們可以看得出來，如果我們打算將所有可能的位置全部畫出來，最好的辦法，就是我們已經發現，原來這些位置都會在角平分線上，因此，我們只要畫出角平分線，就可以將所有黃金的擺放位置全部畫出來！有就是說，只要黃金放在角平分線上，將會讓 801 和 802 這兩個班級的學生覺得這是公平的擺放位置。

提問 7：既然如此，我們已經知道讓兩個班級學生覺得公平的黃金擺放位置是在角平分線上，那 3 個班級呢？請同學試著畫出可以讓 3 個班級的學生都會覺得公平的位置，你會怎麼畫呢？

提問 8：我們先畫出讓 801 和 802 覺得公平的角平分線（紅色射線），同樣的，我們也可以畫出讓 801 和 803 覺得公平的角平分線（藍色射線），你覺得這兩條角平分線的交點代表什麼意思呢？（如圖 15）

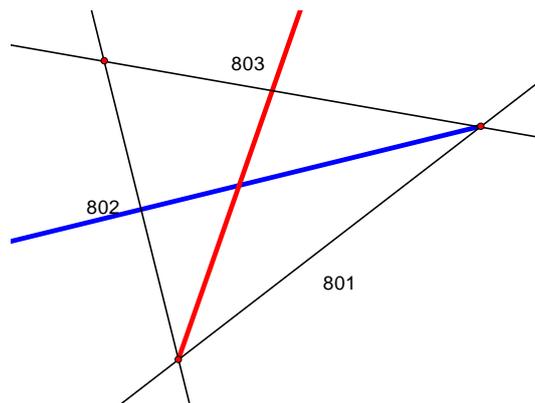


圖 15 利用角平分線找出公平的黃金放置位置

教學：這兩條角平分線的交點所代表的意思就是讓 3 個班級都會覺得公平的黃金擺放位置。

提問 9：這兩條角平分線的交點和 802、803 班直線的交點連線會是什麼樣的直線呢？這會不會是一條讓 802 和 803 覺得公平的直線呢？為什麼呢？你會怎麼說明呢？我們會怎麼稱呼這條直線？

教學：因為 $\overline{PF} = \overline{PD}$ ， $\overline{PD} = \overline{PE}$ ，所以 $\overline{PF} = \overline{PD} = \overline{PE}$ 。既然這兩條角平分線的交點就是讓 3 個班級都會覺得公平的黃金擺放位置，請同學畫出這 3 個班級的學生在搶黃金之前會選擇在那個位置起跑，請把那個起跑位置畫出來！（如圖 16）

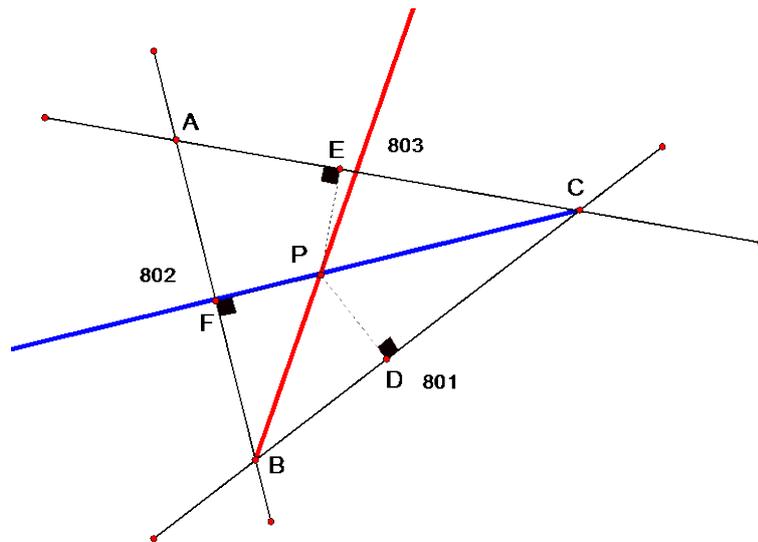


圖 16 畫出各班搶黃金的最佳起跑位置

教學：我們可以看到 P 點是紅色角平分線和藍色角平分線的交點，紅色角平分線會讓 801 和 802 覺得黃金擺放位置是公平的，也就是說，只要黃金擺在紅色角平分線上，801 和 802 可以找到的到黃金的最短距離會是一樣的；同樣的，藍色角平分線會讓 801 和 803 覺得黃金擺放位置是公平的，也就是說，只要黃金擺在藍色角平分線上，801 和 803 可以找到的到黃金的最短距離也會是一樣的。既然如此，紅色角平分線和藍色角平分線的交點 P 就可以同時讓這 3 個班級的學生都會覺得公平，也就是說，這 3 個班級的學生所找到的到黃金的最短距離 \overline{PD} 、 \overline{PE} 、 \overline{PF} 會是相等的，那因為 $\overline{PE} = \overline{PF}$ ，這代表著 P 點是可以讓 803 和 802 覺得黃金擺放位置是公平的位置，因此， \overline{AP} 就是可以讓 803 和 802 覺得黃金擺放位置是公平的角平分線，而 801、802 和 803 班將會很聰明的分別選擇從 D、E 和 F 點的位置起跑。

二、反思與結論

在實際的教學活動進行之中，因為故事性的情境引導，加上情境故事就是與學生自己相關，學生明顯積極主動的參與課堂活動的進行，平常低成就的學生在這一堂課也能有所發揮並參與討論，感覺上，學生是在解決一個生活中的問題，而在這同時，老師則是讓學生體會並發現到角平分線的性質，學生和老師的目標不同，最終卻可以匯合在一起，學生解決了問題的同時，老師也達成了教學的目標。

整堂課開放性的提問與討論，誘發學生願意思考的動機，在這堂課結束之後，有位平常學習低成就的學生在下課時間，提供了老師另外一個解決放置黃金位置問題的方法，「先找個位置

將黃金放好，決定好三個班級與黃金的距離，再拉出與黃金位置相同距離的三條直線來圍出三個不同班級」，這個方法比老師的方法更有效率的解決擺放黃金位置的問題。

這整堂課的教學，老師從一個簡單的教學設計為核心，從學生的生活經驗出發，以公平的感覺為核心討論出黃金的擺放位置必須是在角平分線上，這個過程因為佈題簡單易懂又迎合學生解題需求，每位學生都有機會可以思考這樣的問題，也相信自己有機會可以找出解決方法的動機之下，老師在學生的解題需求之下，慢慢的配合著學生思考的節奏中，在課堂中完成這堂課的教學設計。

如果我們願意試著不同的角度思考數學的教學，我們就會有機會找到可以和學生一起享受數學思考的樂趣，而且，學生將會帶給老師不同角度的啟發，豐富著一次又一次的教學活動。

參考文獻

左台益（2002）。Van Hiele 模式之國中幾何教材設計。中等教育。53（3），44-53。

論壇

論壇 1：臺灣國民中學階段學生尺規作圖表現的省思

作者 | 譚克平 (國立臺灣師範大學科學教育研究所副教授)

本期的台灣數學教師(電子)期刊刊登了陳梅仙老師撰寫的「從操作實驗談幾何教學」一文,編輯委員期望期刊能藉此文建立一個論壇,因此希望本人提供一些與該文相關的思考方向,提供讀者對平面幾何與尺規作圖教學的多元思考方向。「從操作實驗談幾何教學」一文立意良善,嘗試一改傳統上幾何教學過度著重演繹推理的方式,透過實驗操作帶領學生進行觀察及操弄,主動探索幾何圖形的性質,這樣的教學方式非常值得鼓勵。其實,平面幾何中的尺規作圖是一個數學教育工作者需要特別留意的教學主題,以下筆者從另一個角度思考國中幾何教學,首先從個人過去與尺規作圖研究相關的經驗開始分享,接著報導一些筆者所知關於國中學生在尺規作圖表現現況的資料,從中提出在課堂中幫助國中生學習尺規作圖以及幾何的一些淺見,以供參考,並盼能起拋磚引玉之效。

若干年前,我有一位碩士班研究生陳宥良同學,他原是在職的國中數學教師,特別留職停薪來我服務的單位進修兩年,並希望我能及早建議一些數學教育論文的主題,作為他選擇畢業論文題目時的選項,我詢問他過去是否曾有涉獵摺紙的活動,他表示有,而且先前即拜讀過日本學者銀林浩所編「用摺紙來學數學」一書的中文翻譯本。於是我詢問他是否有興趣以透過摺紙學習幾何作為他論文的大方向,但我補充說暫時未能給他一個比較聚焦的方向。他當下即表達十分有意願,而且還主動表示他曾思考是否可以透過摺紙來解決幾何尺規作圖的問題,我覺得這個想法非常好,因此建議他可從數學教育的角度,嘗試發展一套適合國中生透過摺紙學習尺規作圖的課程,並指出作為一個碩士論文的主題而言,其挑戰性相當高。宥良同學卻表示他願意試試看,因為根據他過去教學經驗所知,國中生面對尺規作圖題經常感到解題十分困難,所以他想嘗試發展別的途徑,幫助國中生在解尺規作圖題的時候,除了不斷應用尺規嘗試之外,還能夠有其它工具協助他們尋找解題的線索,從摺紙探索解決尺規作圖題的靈感,然後再將摺紙的動作轉換成尺規作圖的動作。筆者認為此見解很有機會可以落實,關鍵在於要善加利用學生對摺紙的直觀性來安排教學活動,並盡可能透過摺紙鞏固學生的對稱觀念。

雖然我沒有很多機會直接觀察國中生解尺規作圖題目時的表現,但由於過去有不少參與國中基測的經驗,因此有機會分析歷屆考生應付數學科試題的表現,尤其會留意他們在尺規作圖試題的作答情況。國中基測歷屆的尺規作圖試題,皆以選擇題的形式出現,而且部分題目設計是用甲、乙兩位學生分別就題目所要求的提出自己的作圖步驟,接著要求考生判斷兩人作法誰對誰錯。綜合而言,一般考生在尺規作圖試題的表現並不理想,個人估計它們的平均答對率約為3成5至4成左右,反映出一般國中生對尺規作圖推理的層面掌握不足,此現象亦部分支持宥良關於國中生解尺規作圖題會感到困難的觀察,因此建議國中數學教師宜正視學生學習該單

元時可能遇到的障礙。

當時，為了協助宥良同學能更瞭解國中生解尺規作圖題時真正困難之所在，好讓他在後續設計摺紙課程的過程中，能夠更清楚瞭解如何安排摺紙活動以協助學生習得尺規作圖的知識技能，於是我建議宥良同學先進行一個規模不大也不小的問卷調查，藉以初步瞭解大台北地區國中生尺規作圖的具體表現。該問卷調查有不少發現，主要報導於陳宥良（2009）的畢業論文內，部分結果亦發表於 Tam 與 Chen（2012）的論文中。在此僅扼要報導兩則發現，其一是很多參與研究的學生，他們對於尺規工具使用的限制似乎知之不詳，因此建議數學教師宜時常提醒學生該等工具在使用上的限制。另一則發現是根據學生作圖痕跡進行推測，有部分學生是藉由反覆運用圓規畫弧以逼近所欲作出的點，這似乎反映出有些學生缺乏作圖時需要運用的策略思維，即思考所欲作出的目標物為何？目前已知為何？該如何進行才可以達成目的？解尺規作圖題時，策略思維甚為重要，建議教師在解尺規作圖題時，與學生一起分析討論，共同制定一些作圖策略，然後才開始作圖，以減少在教室中唸完作圖題目後，就直接進入示範作圖動作的教學形式。

再從另一個角度瞭解國中生對於掌握尺規作圖知識的現況。國中基測自九十年實施以降，與尺規作圖相關的題目並不少，至一零二年基測共 37 題，另有兩題只簡略提及作圖步驟故可忽略不算，但連同 90 年的練習題本則達 38 題，其分布可參以下表 1 的歷年試題整理表。

表 1

歷屆國中基測與尺規作圖相關試題的題號整理表

年度	90 練習本	90	91	92	94	95	96	97	98	99	100	101	102
基測一		17									24		
		24	23	27	16	15	19	33	33	28	30	33	31
		31	29		30	32							
基測二		23						10					
	29	27	18	26	9		31	30	32	26	28		
		31	28					34		34	34		
北北基											23		
聯測											29		

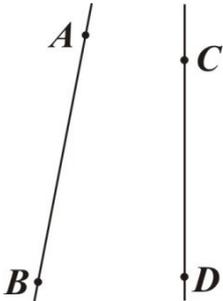
註：參考及修正自彭良楨（2011）及陳聖別（2012）。

由於歷屆國中基測共出現 37 道尺規作圖題，可知它是重要的題型之一。但由於考試實務上的考量，基測只以選擇題的形式出題，因此並不能直接要求學生完整完成一道作圖題的所有步驟，而改以陳述四種不同的作圖法，請考生選出其中正確的作圖法，或者是陳述甲、乙兩人解一道作圖題，各自提出自己的作圖步驟，並要求考生判斷甲、乙兩人的方法屬於正確與否。此外，國中基測題本的指導語中即已明白指出，試題的附圖並不一定代表實際大小，所以對於上述第二種尺規作圖試題的類型，考生並不一定能在作圖題的附圖上直接執行甲、乙兩人的作圖步驟，藉以輕易檢查誰的步驟可以達到題目的要求，而需要運用數學推理來判斷。因此要應付

這一類題型，考生除了需要掌握作圖步驟之外，還要能驗證結果及判斷對錯，從而考驗考生是否具備數學論證的能力。此類題型已成為基測難度稍高的題型之一，整理歷屆考生在此類題目的答對率約介於 2 成 5 至 5 成左右，可見一般國中生並不擅長應付此一形式的尺規作圖題。以下表 2 所報導的即為其中一個例子，它是 98 年國中基本學力測驗數學科第一試的第 33 題，以及考生在該題的作答表現，該題答對率僅為 27% 左右，表現不甚理想。

表 2

第 98 學年度基本學力測驗數學科第一試第 33 題考生作答表現

第 33 題					
題目	如圖(十三)，直線 AB 、直線 CD 為不平行之二直線，今欲作一圓 O 同時與直線 AB 、直線 CD 相切，以下是甲、乙兩人的作法： (甲)1. 過 D ，作一直線 L 與直線 AB 垂直，且交直線 AB 於 E 2. 取 \overline{DE} 中點 O 3. 以 O 為圓心， \overline{OE} 長為半徑畫圓，則圓 O 即為所求				圖(十三)
	(乙)1. 設直線 AB 與直線 CD 相交於 P 2. 作 $\angle BPD$ 之角平分線 L 3. 過 C ，作一直線 M 與直線 CD 垂直，且交直線 L 於 O 4. 以 O 為圓心， \overline{OC} 長為半徑畫圓，則圓 O 即為所求				
對於兩人的作法，下列敘述何者正確？					
(A) 兩人皆正確		(B) 兩人皆錯誤			
(C) 甲正確，乙錯誤		(D) 甲錯誤，乙正確			
評量目標：評量學生是否能利用圓和三角形的性質解題					
試題分析結果：					
答案	題型	難度(P)	鑑別度(r)	Rasch 難度	命題依據
D	2	0.2734	0.15	1.344	9-s-11
選 項 分 析		反應人次	百分比	有效百分比	累積百分比
	未作答	1157	0.37	0.37	0.37
	複選	31	0.01	0.01	0.38
	A	88962	28.75	28.75	29.13
	B	44275	14.17	14.17	43.30
	C	91761	29.36	29.36	72.66
	D	85459	27.34	27.34	100.00
	全體	312545	100.00	100.00	

此題的正確答案是 D 選項，甲、乙兩人的作圖方法中，只有乙的方法正確而甲的方法錯誤。從應試者的表現來看，卻有超過半數選擇 A 及 C 選項，換句話說，有超過半數的應試者認為甲的方法是對的。從此題的答對率來看，平均每四位應試者當中，約略只有一位答對此題，在三十一萬位考生當中，約有二十二萬位考生未能選出正確答案。若從各選項的選答率來看，它們都頗為接近 25%，加上鑑別度點二系列係數（point-biserial coefficient）的值偏低，因此部分應試者可能有猜答案的情況，而部分能力較佳的應試者，亦可能誤判甲的方法是對的。分析該題，甲的作圖法問題出在如果以 O 為圓心且 \overline{OE} 長為半徑畫圓的話，該圓與直線 CD 將有兩個交點，其中一個即為 D 點，但倘若考生不會運用數學推理來判斷，僅憑按照甲的作圖步驟作圖檢驗結果的話，該題的附圖中，兩直線距離頗為接近，即使直接在附圖上作圖，並不容易判斷該圓與直線 CD 會有幾個交點。這一題測驗學生是否瞭解圓與切線的性質，以及作圖動作相對應的幾何意義，雖則本題題幹的閱讀量比較高，而且是測驗考生判斷對錯的能力而非直接運用尺規作圖的能力，但國中畢業生對尺規作圖題感覺到的困難，由此題仍可管窺一二（譚克平、陳宥良，2009）。

這類尺規作圖題一題可以測驗考生是否掌握到兩種作圖步驟的正確性，涉及數學證明等高階思考能力，是一種綜合性的題型。當然，我們並不樂見考試領導教學的情況，但考生要應付國中基測的作圖題型，需要訓練也是一個事實，畢竟此類考題不失為可以接受的題型，學生接受這方面的訓練，基本上仍是可習得適當的數學思維訓練。

回到本期陳梅仙老師的文章，筆者認為在幾何課中，多一些帶領學生進行觀察及作圖操作的活動，讓學生主動探索幾何圖形的性質，而不是只有被動的吸收幾何知識，是值得鼓勵的教學方向。此外，幾何中的尺規作圖對國中生是頗為困難的單元，教師教學時宜嘗試多方配合，除了參考陳老師的教學方式之外，還建議指引學生在作圖前先擬定作圖的策略與步驟，並實際執行，接著還需要進行作圖正確性的驗證。在整個過程中，引導學生領悟數學有嚴謹性的要求。由於如 GSP 之類的電腦幾何軟體日漸普遍，目前有不少國中數學教師在課堂中亦會使用該等軟體作為教具，但個人想提醒的是，電腦幾何軟體的作圖方式與數學課程要求的尺規作圖略有不同，因此建議教師在課堂中，即使使用電腦幾何軟體教學，仍宜適當安排足夠活動讓學生使用尺規作圖。再者，為了因應國中基測或日後國中會考的尺規作圖題，建議教師讓學生在某些題目能有個別嘗試作圖的機會，然後安排兩、三位學生在同學面前分享其作圖步驟，接著分組讓同學們討論這兩、三位學生的作圖步驟誰對誰錯，並說明所持的理由。除此之外，還可以考慮採用陳宥良（2009）與陳聖別（2012）的透過摺紙學習尺規作圖的教學方式，他們的研究發現，這樣的教學方式對於數學科比較屬於後段的學生來說，可能會有一定程度的效果。著名學者 Schoenfeld（1985）的經典著作中，有不少討論尺規作圖的篇幅，有興趣的讀者亦可另作參考。本文希望藉由上述的討論和教學上的建議，對數學教師準備尺規作圖的教學時，能夠產生一些實際的幫助。

參考文獻

- 陳宥良 (2009)。探討國中三年級學生透過摺紙活動進行尺規作圖補救教學之成效 (未出版之碩士論文)。國立臺灣師範大學，臺北市。
- 陳聖別 (2012)。摺紙活動對尺規作圖學習之效益研究—以八年級學生補救教學為例 (未出版之碩士論文)。國立臺灣師範大學，臺北市。
- 彭良楨 (2011)。國中基測摺紙與尺規試題彙編。洪萬生主編，**摺摺稱奇：初登大雅之堂的摺紙教學** (頁 72-97)。臺北：三民。
- 譚克平、陳宥良 (2009)。運用摺紙提升學生尺規作圖技巧。**科學教育月刊**，323，15-24。
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. San Diego, CA: Academic Press.
- Tam, H. P., & Chen, Y. L. (2012). A regional survey of Taiwan students' performance in geometric construction. In Tso, T. Y. (Ed.). *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 131-138). Taipei, Taiwan: PME.



論壇 2：對「從操作實驗談幾何教學」一文之我見

作者 | 劉曼麗（國立屏東教育大學數理教育研究所教授）

「從操作實驗談幾何教學」的作者，擺脫傳統的教學方式，嘗試透過教具與情境式的引導，提供學生操作與探索的機會，並以提問方式激發學生進行數學思考。而探索角平分線的教學藉由情境引出問題也很生活化，頗有創意。整體而言，作者意圖帶給學生的，是有感覺的數學，希望學生從中能體會出數學的性質，值得讚許。但就細部來看，則個人有一些不同的想法和建議，希望藉此平台交流：

1. 在教學設計與活動的標題下，可先明確列出其具體的教學目標和欲達成此目標的先備知識（從已知的→核心的），以助讀者能快速對焦。
2. 用字遣詞宜力求精準與清楚，如「在數學上，我們稱使用 3 個相同邊長所組成的三角形具有 SSS 全等的關係。」之敘述並不清楚，也不完整。何謂 3 個相同邊長？而全等的關係應是針對兩個三角形才有意義。又如「作圖時的第二條邊...和第一條邊...」文中用第一條邊和第二條邊指稱，意義不大，因為以 $\angle A$ 為準，我們已有其對邊和鄰邊的名稱，直接稱呼即可，簡單易懂。還有，「3 個班級到黃金的距離」、「802 班到黃金的距離」與「直線到黃金位置的最短距離」等敘述也似乎不妥，因為我們的說法都是點到直線的距離而非直線到點的距離。另外，作者還特別給出「這種作圖的順序稱為 ASS 作圖」；作者是先畫出角，再取鄰邊 \overline{AB} 與對邊（線段 a ）。事實上，我們也可先畫出 \overline{AB} ，再作 $\angle A$ 。因此，ASS 作圖的順序並非唯一。無論是 ASS 作圖或 SSA 作圖，其名稱意涵皆應是指邊角位置關係而非作圖順序。
3. 提問是作者教學的一大特色，有時在重要關卡的一句關鍵問話又被忽略了，甚為可惜。如「當線段 $a = \overline{BC_1}$ 時，以 ASS 作圖...剛好就只能畫出一個直角三角形」，此處應再提問學生思考為何是一「直角」三角形？如何得知？又如由圖 13 和 14，...，應提問學生畫出的直線為何是角平分線（涉及角平分線逆性質）？以及圖 15 和圖 16，...，應提問學生畫三角形中的任意兩條角平分線所得的交點 P 相同嗎？即 P 點是否唯一（涉及角平分線性質與角平分線逆性質）？
4. 探索角平分線的教學目標究是要學生學習角平分線性質？還是要學生應用角平分線性質？易使讀者混淆。如為學習，似乎欠缺角平分線性質與逆性質的教學（探索與論證）？如為應用，為何文中多處有發現之說（讓學生體會並發現到角平分線的性質）？

此外，個人對於教學設計也有一些另類想法：

1. 基於學生之前已學過等腰三角形和正三角形，故以問話先喚起學生的舊經驗，再幫學生藉由舊經驗逐步攀升。如，什麼是等腰三角形？什麼是正三角形？你可以畫出一個三角形，是等腰三角形而不是正三角形嗎？...引導學生依據其舊經驗（用摺紙將等腰三角形對摺可得）以回答提問 3。再以對摺後的痕跡為起點，引進提問 4，是否較平順？因為提問 3 到提問 4 跳得太快。

2. 在探索三角形 SSS 全等活動時，可請學生用 2 支教具棒先圍成一夾角，讓其感受此夾角因移動而可大可小。若再將第 3 支教具棒加進來，則三角形就被固定了，以此為 SSS 全等性質鋪路。同樣地，在之後學習 SAS 全等性質時，此種方式還可再被用來做為鋪路，只是改成先將夾角固定而已。
3. ASS 作圖的探討到 $\angle A$ 是直角的情形時，可再順勢引進 RHS 性質，以求事半功倍之效。
4. 有關 ASS 作圖的教學只需引導學生探討 $\angle A$ 分別為銳角、直角與鈍角的三角形情形即可。至於是否還要再延伸到三角形邊角關係的教學，則有待斟酌。如再加料，易使整體教學顯得太雜而失焦。還有，透過 ASS 作圖引導學生探討三角形邊角關係時，恐使學生誤解只有固定 $\angle A$ 的特殊情形，有失一般性。況且三角形邊角關係通常都是透過等腰三角形性質得出，學生並不難理解。

基於教學多樣化，期盼這些想法能激盪更多的想法，為數學教育努力。



論壇 3：『從操作實驗談幾何教學』之評述

作者 | 李昕儀（基隆市碇內國民中學教師）

總是在新單元的開始，不斷找尋合適的情境，希望將數學知識自然而然的鋪陳在課堂教學中。閱讀本文的兩則教學活動，聯想起《摺摺稱奇》一書，在謝豐瑞（2011）教授的文章中提到「探索實驗與推理證明的連結，為幾何直觀與抽象的延續與連續提供了可能性，於是，探索實驗有時候並不是終點，而是後續推理證明中內容結構與邏輯步驟之藍圖。」以下就本文的兩則教學活動，從教學現場的可能性做探討。

一、從三角形 ASS 全等條件探索三角形的邊角關係

1. 由實際的動手操作及仔細的觀察，輔助幾何性質的論證，以幫助中後段的學生理解。
例：藉由扣條操作認識三角形三邊邊長的關係，並由扣條拼組而成的兩全等三角形，引導學生認識並試寫幾何論證。
2. 在提問 3「如何檢查或說明等腰三角形兩底角相等？」，學生可能以摺紙方式摺出對稱軸，或許教師能請學生觀察摺痕做為思考的參照，引導學生思考如何繪製輔助線，繼續完成幾何論證。
3. 探討 ASS 全等性質的過程，具體且明確的引導學生依序探討 $\angle A$ 為銳角、直角及鈍角的情形，讓學生從尺規作圖操作觀察現象，進而歸納統整。惟對於學習成就低的學生，或許可以讓過程再簡化，例：透過摺紙觀察 ASS 可能不全等的情形。

二、從搶黃金探索角平分線的數學意涵

1. 班級排成一列搶黃金競賽情境，讓人想躍躍欲試。尤其以提問 3「什麼是公平的感覺？要用什麼方式來表示是否公平呢？」正吻合了左台益教授提出的數學科差異化教學策略之一——「開放性問題」，除了激勵學生的最大參與外，同時也可引導學生思考各種策略。
2. 圖 13 中，對 801 班與 802 班公平的黃金可能放置位置圖示，提供學生有跡可循的思考，細膩的教學設計，展現了教學者能站在學生的角度思考問題。

「如果我們願意試著以不同的角度思考數學的教學，我們就會有機會找到可以和學生一起享受數學思考的樂趣，而且，學生將會帶給老師不同角度的啟發，豐富著一次又一次的教學活動。」對於作者這一段話深有同感，當教師願意放慢教學的腳步，關注學生的思考，教學將會是另一種不同的風貌。

參考文獻

謝豐瑞（2011）。使幾何教學活潑化——摺紙及剪紙篇。洪萬生主編，摺摺稱奇：初登大雅之堂的摺紙數學（頁 26-45）。臺北：三民。



《台灣數學教師(電子)期刊》稿約

2013.09.27 編審委員會會議通過

- 壹、《台灣數學教師(電子)期刊》(Taiwan Journal of Mathematics Teachers)(以下簡稱本刊)是國立臺灣師範大學數學系及台灣數學教育學會共同發行之期刊，內容以出版數學教育領域相關議題的原創性論文為宗旨。本刊徵求符合宗旨之教學實務文稿，內容包含探討數學教學策略、學生迷思概念之教學引導、數學教育課程、教材與教法等實務經驗分享、研究問題評析、數學教育之構想、書評、論文批判、數學教學與應用性研究、數學教育研究趨勢介紹、專題演講講稿、數學學習評量、電子媒材設計、數學教師專業發展及其他數學教育相關議題等內容。
- 貳、本刊每年發行兩期，分別於四月、十月出刊，並採電子方式發行。全年徵稿，隨收隨審。
- 參、本刊所刊之文稿須為原創性的教學實務文章，即未曾投遞或以全論文形式刊登於其他期刊、研討會彙編或書籍。未經本刊同意，已獲本刊接受之文章不得再於他處發表。投遞本刊之文稿須經編審委員會送請專家學者審查通過後予以刊登，被刊登文章之著作財產權歸國立臺灣師範大學數學系及台灣數學教育學會共同擁有，文責由作者自負。
- 肆、文稿請以中文撰寫，以8,000字為上限(包含摘要、文章全文、圖表、附註、參考文獻、附錄等)。文稿的呈現請使用單行間距之12級字新細明體或Times New Roman字體，以橫書方式於A4規格紙張上，文稿上下左右各留2.5公分空白，並以Microsoft Word 98以上之繁體中文文書軟體處理。
- 伍、文稿格式請參考《臺灣數學教育期刊》論文撰寫體例的說明或已發行之文稿，若有需要引用英文文獻以及數學符號、公式等請參考APA第六版出版手冊。交遞稿件時需注意下列事項：
 - 一、提交投稿基本資料表
 - (一) 文稿基本資料。
 - (二) 通訊作者之姓名、服務單位、職稱、通訊地址、聯絡電話和電子郵件地址。
一位以上作者時，非通訊作者只需填寫姓名、服務單位和職稱。
 - (三) 任職機構及單位：請寫正式名稱，分別就每位作者寫明所屬系所或單位。
 - (四) 頁首短題(running head)：以不超過15個字為原則。
 - (五) 作者註(author note)：說明與本篇研究相關的資訊。
 - 二、提交已簽署的《台灣數學教師(電子)期刊》著作財產權讓與同意書。

三、文稿除正文外，還需包含中文摘要，摘要請獨立一頁呈現，並置於正文之前。摘要頁內容包括論文題目（粗體20級字、置中）、摘要（不分段，限500字以內）、與關鍵詞（以五個為上限，並依筆畫順序由少到多排列）。

四、若為修正稿，遞交修正的文稿上請以色字標示修改處，並需提交「審查意見回覆表」，依審查意見逐項說明修改內容或提出答辯。作者應於發出文稿修正通知的三週內回傳修正稿及答辯書，若有特殊情況請先與本刊聯絡。

陸、文稿以電子郵件方式投遞，包括作者基本資料表、著作財產權讓與同意書與全文共三個檔案。作者應負論文排版完成後的校對之責，編輯委員僅負責格式上之校對。

柒、投稿電子郵箱：tjmeassistant@gmail.com

《台灣數學教師(電子)期刊》投稿基本資料表

篇名	(中文)		
	(英文)		
總字數	稿件全文 (含中文摘要、正文、參考文獻、附錄等) 共_____字。		
關鍵詞 (最多五個)			
頁首短題 (以不超過15個中文字為原則)			
通訊作者資料	姓名	(中文)	(英文)
	職稱		
	服務單位 (或就讀校系)	(中文)	(英文)
	E-mail		
	通訊地址		
	電話	辦公室：()	分機
	行動電話：		
如為共同著作，請詳填以下共同著作人欄位，非共同著作則不需填寫。(以下欄位不敷填寫時請自行增加)			
共同著作人	姓名	服務單位 (或就讀校系)	職稱
第一作者 (<input type="checkbox"/> 通訊作者)	(中文)	(中文)	
	(英文)	(英文)	
第二作者 (<input type="checkbox"/> 通訊作者)	(中文)	(中文)	
	(英文)	(英文)	
第三作者 (<input type="checkbox"/> 通訊作者)	(中文)	(中文)	
	(英文)	(英文)	
作者註 (可複選)	<input type="checkbox"/> 本篇論文為碩、博士論文改寫，指導教授為_____。 <input type="checkbox"/> 本篇論文曾於_____發表。 <input type="checkbox"/> 本篇論文獲國科會補助，計劃編號：_____。		
1.茲保證所填基本資料正確，文稿未曾以任何方式出版或發行，且無一稿多投、違反學術倫理，或違反著作權相關法令等事情。 2.茲瞭解並同意貴刊著作權授權規範，並保證有權依此規範進行相關授權。 3.茲保證文稿已經所有作者同意投稿至《台灣數學教師(電子)期刊》。			
填表人：_____		填表日期：_____年_____月_____日	

《台灣數學教師(電子)期刊》著作財產權讓與同意書

茲同意投稿至國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會共同發行的《台灣數學教師(電子)期刊》之一文，名稱為：

立書人聲明及保證本著作為從未出版之原創性著作，所引用之文字、圖表及照片均符合著作權法及相關學術倫理規範，如果本著作之內容有使用他人以具有著作權之資料，皆已獲得著作權所有者之（書面）同意，並於本著作中註明其來源出處。著作人並擔保本著作未含有毀謗或不法之內容，且絕未侵害他人之智慧財產權，並同意無償授權台灣數學教育學會於本著作通過審查後，以論文集、期刊、網路電子資料庫等各種不同方法形式，不限地域、時間、次數及內容利用本著作，並得進行格式之變更，且得將本著作透過各種公開傳輸方式供公眾檢索、瀏覽、下載、傳輸及列印等各項服務。國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會並得再授權他人行使上述發行之權利。惟著作人保有下列之權利：

- 1.本著作相關之商標權及專利權。
- 2.本著作之全部或部份著作人教學用之重製權。
- 3.出版後，本著作之全部或部份用於著作人之書中或論文集中之使用權。
- 4.本著作用於著作人受僱機關內部分送之重製權或推銷用之使用權。
- 5.本著作及其所含資料之公開口述權。

著作人同意上述任何情形下之重製品應註明著作財產權所屬，以及引自《台灣數學教師(電子)期刊》。

如果本著作為二人以上之共同著作，下列簽署之著作人已通知其他共同著作人本同意書之條款，並經各共同著作人全體同意，且獲得授權代為簽署本同意書。如果本著作係著作人於受僱期間為雇用機構所作，而著作權為讓機構所有，則該機構亦同意上述條款，並在下面簽署。

本著作之著作財產權係屬（請勾選一項）

- 著作人所有
 著作人之僱用機構所有

立同意書人（著作人或僱用機構代表人）簽章：_____

著作人姓名或僱用機構名稱：_____

（正楷書寫）

中華民國 年 月 日

Publisher | Department of Mathematics, National Taiwan Normal University
Taiwan Association for Mathematics Education

Editorial Board

Chief Editor | Tai-Yih Tso (Department of Mathematics, National Taiwan Normal University)

Vice Chief Editor | Chao-Jung Wu (Department of Psychology and Counseling,
National Taiwan Normal University)

Editorial Panel | Kai-Lin Yang (Department of Mathematics, National Taiwan Normal University)
Li-Yu Hung (Department of Special Education, National Taiwan Normal University)
Yuan Yuan (Graduate School of Education, Chung Yuan Christian University)
Hsin-Mei Huang (Department of Learning and Materials Design,
University of Taipei)
Chih-Chien Yang (Graduate Institute of Educational Measurement and Statistics,
National Taichung University of Education)
Der-Ching Yang (Graduate Institute of Mathematics and Science Education,
National Chiayi University)
Po-Hung Liu (College of General Education,
National Chin-Yi University of Technology)
Man-Li Liu (Graduate Institute of Mathematics and Science Education,
National Pingtung University of Education)
Yuan-Chen Liu (Graduate School of Educational Communications and Technology,
National Taipei University of Education)
Wen-Huan Tsai (Graduate Institute of Mathematics and Science Education,
National Hsinchu University of Educational)
Feng-Jui Hsieh (Department of Mathematics, National Taiwan Normal University)
Hak-Ping Tam (Graduate Institute of Science Education,
National Taiwan Normal University)

Address | No.88 Sec. 4, Ting-Chou Rd., Taipei City, Taiwan, R.O.C.
Department of Mathematics, National Taiwan Normal University
"Taiwan Journal of Mathematics Teachers"

TEL | 886-2-7734-6576

FAX | 886-2-2933-2342

E-mail | tjmeassistant@gmail.com

Website | <http://tame.tw/forum.php?mod=forumdisplay&fid=74>

1 一元一次方程式應用問題的補救教學
／ 黃淑華、鄭鈐華、王又禾、吳昭容

Remedial Teaching Strategies for Linear Equation Word Problems
／ Shwu-Hwa Hwong, Chien-Hua Cheng, Iou-Ho Wang, Chao-Jung Wu

17 從操作實驗談幾何教學
／ 陳梅仙

Teaching Geometry by Experimental Approaches
／ Mei-Hsien Chen

30 論壇
／ 譚克平、劉曼麗、李昕儀

Forum
／ Hak-Ping Tam, Man-Li Liu, Hsin-Yi Li

