許舜淵、胡政德（2014）。
動態幾何環境下大學生幾何探索之研究。
**臺灣數學教育期刊，1**（1），49-77。
doi: 10.6278/tjme.20140307.001

# 動態幾何環境下大學生幾何探索之研究

許舜淵[1]　　胡政德[2]
[1]國立中壢高級中學
[2]國立臺灣師範大學數學系

本研究目的在探索動態幾何環境下大學生幾何探索之思考運作模式。透過個案研究來進行探究並以質性分析來詮釋資料。研究結果顯示：（1）當學生觀察動態幾何軟體所產生動態表徵時，通常透過幾何思考後再做適當的拖曳行動；（2）動態表徵其外顯的行為和內在的數學性質會激發個體產生猜測，並在心智中模擬操作數學物件以及分析可能的動態行為來驗證猜測，進而產生宣告；（3）學生會依據模擬操作的複雜程度，再決定是否使用 DGS 具體操作以驗證幾何思考過程中的想法；（4）學生在動態幾何環境下進行幾何實驗並與幾何思考不斷地交互作用下探索幾何性質。

**關鍵詞**：動態表徵、動態幾何環境、幾何探索

通訊作者：胡政德，e-mail：jackhu@ntnu.edu.tw
收稿：2013 年 5 月 9 日；
接受刊登：2014 年 3 月 7 日。

Journal homepage: tame.tw/forum.php?mod=forumdisplay&fid=56

Xu, S. Y., & Hu, C. T. (2014).
Analyzing college students' geometric investigation within the dynamic geometry environment.
*Taiwan Journal of Mathematics Education*, *1*(1), 49-77.
doi: 10.6278/tjme.20140307.001

# Analyzing College Students' Geometric Investigation within the Dynamic Geometry Environment

Shun-Yuan Xu[1] Cheng-Te Hu[2]

[1]National Jhongli Senior High School

[2]Department of Mathematics, National Taiwan Normal University

The aim of this study is to explore, in a dynamic geometry environment (DGE), the operation models of the geometric thinking of college students. To achieve this, we conducted a case study. We recorded the process of geometry exploration activities by math-major college students, interviewed them, and interpreted their operation models of thinking through a qualitative analysis. The results are summarized as follows: (1) When students observe the dynamic representations generated by dynamic geometry software (DGS), they seldom react immediately, and instead engage in geometric thinking before they carry out appropriate dragging. (2) The apparent actions and intrinsic mathematical properties of dynamic representations tend to inspire students' conjectures. Students then mentally manipulate mathematical objects and analyze possible dynamic behaviors to confirm their conjectures. Finally, they are able to produce a declaration. This process is a basic model for geometric thinking. (3) Students manipulate mathematical objects mentally based on the complexity of operation, and then decide whether to use a DGS-specific claim or conjecture in geometric thinking. (4) Students explore geometry properties in DGE under the constant interactions between geometry experiments and geometric thinking.

**Keywords**: dynamic representation, dynamic geometry environment, geometric investigation

Corresponding author：Cheng-Te Hu，e-mail：jackhu@ntnu.edu.tw
Received：9 May 2013;
Accepted：7 March 2014.

# 壹、緒論

幾何探索是學習幾何的重要方法之一。幾何探索的過程中個體通常會透過圖像操作和邏輯論述進行幾何思考，在過去的研究也指出幾何的本質同時包含了圖形性與概念性的特徵，圖形性特徵是指視覺化可操作，概念性特徵是指可邏輯推理與論述（Fischbein, 1993），而幾何活動是複雜的認知過程，包含了構圖、視覺化與推理，發展視覺表徵與推理能力有利於各種不同的認知歷程的交互作用（Duval, 1995）。從小學到中學幾何學習活動包含經驗幾何與推理幾何，經驗幾何著重在操作行動，而推理幾何強調邏輯思考，而幾何探索活動正是學生學習幾何的重要方式之一。

動態幾何環境（Dynamic Geometry Environment, DGE）已經是學生學習幾何的重要學習環境之一。Battista（2007）指出近代在幾何學習與教學上的學術研究已經聚焦於電腦環境的使用，他談到為什麼幾何教學和研究接受科技越來越熱烈，比起其他數學教育的領域？首先，許多幾何的電腦環境讓學生感到興趣，但教學法與研究感興趣的是在這些環境超越動機的因素。動態幾何環境，例如 Cabri 和 GSP，是一種工具，對於每個人（不只是學生）能夠促進做幾何的過程，允許個人去探索幾何的想法，而這些探索是使用紙筆工具來進行是很困難的，例如：在動態幾何環境可以提供檢驗大量圖形例子。所以一點都不感到驚訝研究者花這麼多時間來探究動態幾何環境在幾何教學與學習上的功能與角色。

動態幾何環境如何影響學生進行幾何探索是目前一個重要的議題。Battista（2007）在關於電腦環境的研究針對過去這 20 年來的研究進行了整理與論述，尤其是在關於電腦環境對於幾何學習的研究上，他認為在電腦環境中有兩個特徵需要特別去注意，第一是探索特定的幾何圖形，其次是圖形的重構可以幫助幾何學習。雖然多數研究顯示 DGE 能夠增進與支持重要的學習，但在目前的研究中不知道增加幅度的影響，更不知道在 DGE 下學習與在紙筆環境下學時如何不同。因此，需要更多的比較研究，量的去探究一般性，與質的去探究歷程上的差異。

幾何探索是學習幾何的重要方法之一，動態幾何軟體（Dynamic Geometry Software, DGS）提供了學生幾何探索的環境，本研究的目的即在探討大學生在 DGE 下如何進行幾何探索。當個體在操作幾何物件時，觀察拖曳所產生的圖形變化，即產生了動態表徵，學生可以透過觀察動態表徵，引發個體去思考以輔助推理。從 Duval（1998）幾何認知理論來分析，在 DGE 下動態表徵如同視覺化歷程，個體的拖曳行動讓圖形產生了變化，拖曳行動如構圖歷程，其中幾何思考是在 DGE 下學生重要的數學推理思維方式（參考圖 1）。因此，在 DGE 下學生的思考、學生的拖曳行為與電腦的動態表徵是學生進行幾何探索的三個重要關鍵，本研究整合幾何認知模式與數學思考的研究來探討 DGE 下大學生幾何探索中的思考模式，主要探討下列兩個問題：

（一）在操作 DGS 的過程中，激發大學生進行幾何思考的機制為何？

（二）大學生在 DGE 中幾何思考運作模式為何？

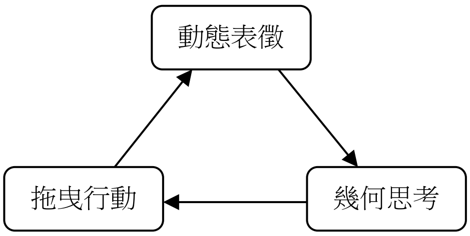


**圖 1　DGE 下幾何探索**

# 貳、理論架構

在 DGE 下的幾何探索，其本質為幾何問題的數學思考過程，而 DGE 是一個電腦的環境，許多相關研究指出 DGE 的功能與特色。因此，本研究架構將以幾何思考與認知的觀點為基礎，整合 DGE 相關研究結果形成本研究的理論架構，以作為本研究設計、分析與討論之理論依據。

## 一、幾何探索的本質與認知歷程

幾何探索為個體探究幾何問題的過程，包含了探究、猜測、驗證與證明，強調個體實際觀察、操弄相關幾何圖形，探究、猜測圖形特性，以歸納方式獲得幾何性質，再以推理演繹方式驗證該性質的正確性，使個體更清楚地掌握幾何性質。一般數學家在處理幾何問題時，通常不是直接進行形式化證明，而是透過構圖進行視覺化或操弄幾何物件來洞察數學的性質，再進行推理與驗證，但常常會再返回來於幾何物件上進行探索。因此，幾何探索的本質即是數學發現的過程。

數學發現的過程是一個猜測、檢驗與改進的過程。Lakatos（1976）於《證明與反駁》一書中探討數學發現的過程，他提出數學發現有一個簡單的模式說明數學家發現的過程實際上是提出猜測並不斷地對猜測加以證明、反駁和重構的過程。在此過程中猜測與檢驗與改進是不斷地反覆進行，其中演繹證明過程和反例反駁不斷地交替（如下圖 2）。因此，數學發現的過程是由原猜測不斷地改進，而證明與反駁是啟動對原猜測改進的必經的過程。陳英娥與林福來（1998）研究針對形成猜測的歷程（即臆測）深入研究發現數學家與學生在進行臆測有一個特定的模式（如下圖 3），猜測、檢驗、相信與反駁是進行臆測中主要的思考過程，而數學家與學生在臆測過程中主要的差異在於思考過程的複雜性上。

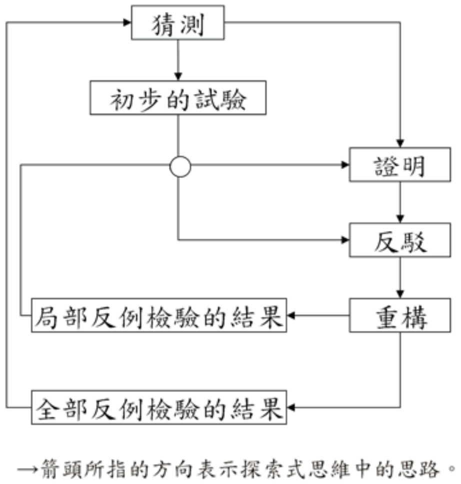


**圖 2　Lakatos（1976）數學發現探索式思維模式**。引自「數學臆測的思維模式」，陳英娥、林福來，1998，**科學教育學刊**，**6**（2），193。

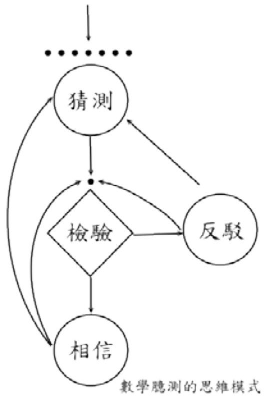


**圖 3　數學臆測的思維模式**。引自「數學臆測的思維模式」，陳英娥、林福來，1998，**科學教育學刊**，**6**（2），205。

本研究整合 Lakatos（1976）、陳英娥與林福來（1998）對於數學思考的研究將數學的思考歷程提出幾何思考包含了三個基本歷程：猜測、操作驗證、宣告（證明與反駁）。Lakatos 所提出來的數學發現模式是一個巨觀地看法，可以描述整個數學的發展過程，也可以用來描述進行一個數學發現的長期過程，而陳英娥與林福來特別專注在臆測的思考歷程，是一個局部的模式，短期的活動過程。數學臆測的思維模式可以視為 Lakatos 的模型的一部份，相信與反駁的歷程都是經過檢驗的後續活動，對於數學家而言，相信通常就是要透過證明，也就如同 Lakatos 的模式會進入證明階段，類似地，當經過檢驗後發現不正確時，數學家會透過反駁來推翻猜測進而建構新的猜測，而證明與反駁主要的功能在於宣告猜測的正確性。那麼，**在幾何探索中如何引動個體進行思考以及在思考過程中與數學物件的互動，這是本文所要探討的主要問題。**

幾何探索從幾何的本質與認知的面向言，幾何學習需同時透過圖像操作和邏輯論述進行思考。Fischbein（1993）即認為幾何的本質同時包含了圖形性與概念性的特徵，圖形性特徵是指可操作視覺化，概念性特徵是指可邏輯推理與論述。換句話說，幾何包含了具體事物的圖形表徵與推理論述的符號語言。

Duval（1995, 1998）從認知的觀點來分析幾何學習，認為幾何活動是複雜的認知過程，包含了**構圖**、**視覺化**與**推理**三種認知過程且各具特別的認識功能：

1.視覺化（visualization）過程：對於空間圖形表徵的認知，這些表徵呈現敘述的說明、複雜情境的探索或概要地呈現。譬如：觀察螢幕上的影像或幾何圖形來掌握其所呈現的幾何物件結構。

2.構圖（construction）過程：利用工具建構或修正幾何模型的歷程，藉由操作的呈現和觀察結果來關聯到數學物件的表徵。譬如：尺規作圖、使用動態幾何軟體來建立與呈現幾何圖形。

3.推理（reasoning）過程：透過語文論述以延伸到相關聯的數學知識，包含了進行歸納或演繹推理。譬如：證明或說明等。而推理的歷程一般可以分成二種，第一種是個體用自然的語言來進行命名及討論；第二種是個體用形式化的語言透過定義與定理來進行論述的演繹及組織。

Duval 認為個體於幾何活動中，這三個歷程可能獨立進行，但通常是兩個或全部的歷程結合在一起的複雜認知歷程；其中構圖是利用工具表徵知識，視覺化代表觀察的歷程，推理是演繹證明的歷程，這三種歷程的交互作用是一個複雜的模式（如下圖 4，其中實線箭頭表總是可以支持，虛線箭頭表示不一定支持。）。

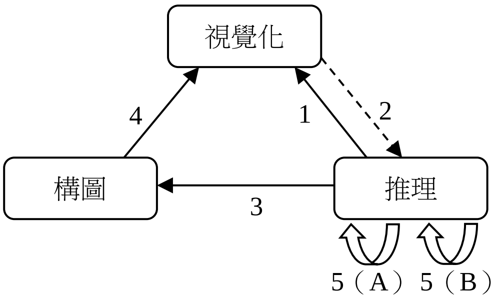


**圖 4　Duval 幾何認知模型**。引自 "Geometry from a Cognitive Point of View," by R. Duval, 1998, In C. Mammana and V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (p. 38). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Duval 認為推理歷程可以支持構圖與視覺化，例如：在中學的畢氏定理證明中，學生透過各種不同的推理過程來洞察這個直角三角形的性質，而其中推理的過程也支持了構圖，例如做輔助或作各邊上的正方形…等等；而構圖的歷程自然地會支持視覺化，例如：在直角三角形上進行構圖，必然會產生幾何圖形，經由構圖的過程學生能夠瞭解圖形從何而來或其結構，支持了學生對於圖形的視覺化歷程；雖視覺化歷程通常能夠支持推理歷程，但並不是總是有效的，甚至反而會阻礙推理的進行。

本研究根據 Duval 的幾何認知模型，在 DGE 下動態表徵如同視覺化歷程，個體的拖曳行動讓圖形產生了變化，拖曳行動有如構圖歷程。幾何認知模式中論述個體在幾何活動中主要有三種認知歷程，個體透過理解、推理、證明…等等歷程進行數學的活動，研究者認為當個體 DGE 環境下操作幾何物件時，觀察拖曳所產生的圖形變化，即產生了動態表徵，學生可以透過觀察動態表徵，引發個體去思考以輔助推理。從 Duval 的觀點認為視覺化歷程不總是能夠支持推理歷程，雖然動態幾何軟體被視為能夠幫助學生學習幾何，但在目前的研究中很少深入地探討動

態幾何軟體所提供的動態幾何物件如何讓個體能夠透過視覺化歷程來支持推理歷程，而本研究想深入探究動態幾何環境在個體進行幾何探索活動。**在幾何活動中這三種認知歷程通常是複雜關係，依據 Duval 幾何認知模型研究者可以詳細地分析個體進行幾何活動的過程**。

## 二、動態幾何軟體與幾何探索

動態幾何軟體( Dynamic Geometry Software, DGS )被大量地使用在幾何的學習與教學活動。DGS是一種可以讓使用者透過電腦建立並且操作一些幾何物件的軟體，譬如，The Geometry's Sketchpad（GSP）、Cabri…等。一般而言，DGS裡的幾何物件是模擬歐氏幾何的物件具有以下幾個重要的功能與特色：（1）電腦化尺規作圖且作圖快速、精確；（2）可以進行動態操弄，保持幾何物件結構；（3）可建立巨集模組物件；（4）提供動態模擬。早期關於DGS的相關研究多著重於探討DGS如何幫助學習者學習幾何概念、發現幾何性質或是觀察個體如何進行幾何探索及產生猜測、驗證及證明（Hazzan & Goldenberg, 1996; Hölzl, 1996; Hoyles & Jones, 1998）。

近年來關於動態幾何的研究開始探討DGS與學生思考的研究議題。其中有些學者深入關心個體在DGS的認知行為，譬如，Arzarello、Olivero、Paola與Robutti（2002）之研究發現學生運用DGS解決問題過程中會有七種不同的拖曳模式，分析學生進行幾何探索中處理幾何問題的認知過程，但關於DGS如何激發學習者進行數學思考尚未深入研究。Tall（1998）認為雖然電腦提供一個擁有可操作的視覺展示和符號工具的人性化互動界面，但它仍需要藉由數學家的想法去進行思考實驗來決定什麼是重要的？什麼是需要證明的？Tall（1999）認為思考實驗是一個人想像定理可能成立的條件，並試圖去看結論是否成立且是數學家作探索和推理證明時，常用的一種方法。啟發學生自發性數學思考是數學學習活動重要的目的，因此，於幾何活動中DGS與學生思考的關係便是一個重要的研究議題。

動態幾何環境（Dynamic Geometry Environment, DGE）是一個提供學生使用 DGS 來探索幾何的學習環境，涉及個體、電腦軟體與學習活動的互動。DGE 下個體在電腦螢幕上看到圖形變化引起學生去思考與探索幾何物件的變動關係，或者利用滑鼠拖曳改變幾何構圖進行幾何探索。因此，目前的研究中指出 DGE 下幾何活動主要有三個關鍵要素：（1）學生的思考；（2）學生的拖曳行動；（3）電腦的動態表徵。

DGE 下進行幾何探索最重要的就是學生的思考。他們可以透過滑鼠操作電腦中的幾何物件進行觀察與推理，Arzarello 等人的研究認為 DGE 下學生的拖曳模式與思考是相關的且反映其認知行為。

個體的拖曳行動是 DGE 下重要的構圖歷程，使得 DGS 中的幾何物件的改變產生動態的表徵，提供視覺化。Laborde（1993）認為拖曳行動可以外顯圖形內部幾何物件的關係，使個體觀察到圖形蘊含的幾何性質，Arzarello 等人（2002）和 Lopez-Real 與 Leung（2006）認為拖曳行

動如同一個能建構數學知識的互動工具，使學習者可以藉由圖形變動來觀察幾何圖形的總體行為。

幾何圖形的動態變化是另一個組成動態幾何學習環境的重要元素。Talmon 與 Yerushalmy（2004）即將此 DGE 中圖形物件的變動定義為動態行為（dynamic behavior），當拖曳物件使此物件在螢幕上產生動態變化的過程及狀態型成動態表徵，使得個體在 DGE 下處理幾何問題的時候，不只受到視覺化的圖形表徵所影響，也受到組成此圖形的幾何物件的動態行為所影響。在 DGE 下物件的動態行為會與作圖順序有關，相同的圖形但不同的作圖順序會產生不同的動態行為，進而影響動態表徵的變化。在 Talmon 與 Yerushalmy 研究中顯示學生有反序（reverse order）預測的行為，即學生猜測或想像物件的行為和電腦所顯現的動態行為不同。從學生具有反序預測行為這點可知軟體具有自主性，它將與個體的思維產生互動並與個體過去對幾何圖形的認知產生衝突。

綜合相關研究的結果，本研究探討 DGE 下學生進行幾何探索需特別注意這學生思考、拖曳行動與動態表徵三者間的關係，尤其是**電腦的動態表徵是如何引動學生的幾何思考。**

## 三、幾何實驗與思考模式

數學家在探索幾何問題時，往往非立即直接進行形式化證明，有時會先透過構圖進行視覺化或操弄幾何物件來觀察其數學性質，再進行推理與驗證，他們會在心智模擬操作幾何物件進行實驗觀察與歸納。Pinto 與 Tall（2002）曾提到一種在心智中操作方式：如果當我們改變等腰三角形 $ABC$ 的頂點 $A$ 的位置時，那麼將會發生什麼事情呢？移動 $A$，使得 $AB > AC$，則 $\angle ACB > \angle ABC$。反之，$AB < AC$，則 $\angle ACB < \angle ABC$。因此，當處於一個平衡狀態，即 $AB = AC$ 時，可以看出 $\angle ACB = \angle ABC$（參考圖 5）。

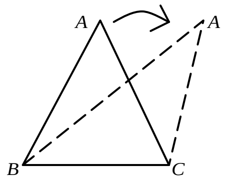


**圖 5　等腰三角形兩底角相等**

這種思考模式的特色是不用以實作方式具體實驗來驗證命題，而是想像的方式來進行。科學家伽利略依據鐘擺理論作為實驗的假設，在腦中設想光滑無摩擦力的斜面，並模擬球的滾動過程，最後推論出球的滾動類同鐘擺擺動的等高定律，這種在心智中想像的操作實驗是典型的思考實驗範例（Sorensen, 1992）。上述兩個例子共同之處在於他們的推理過程中，都未具體操作實際物品，而是透過心智操弄方式進行推論與驗證。此類型的思考方式既不是具體實驗操作，

也不是單純的形式證明，而是以想像的方式來模擬操作與進行推論。本質上是類似實驗的過程，但是依據想像和模擬操作的推論過程，有別於具體操作實驗。

Vygotsky（1978）在探討個體的高等思維時，認為有兩種主要仲介導引人類行為的方式，分別是科技工具（technical tools）和心理工具（psychological tools），科技工具的功能是做為人類影響活動中之物體的執行者；它是外在導向且導致物體的變化。心理工具則不會使心理操作中的物體產生變化，它是控制個體內在活動的媒介，為內在導向。當個體經過複雜的內化過程後，科技工具可能變成心理工具且形成新的意義，此時科技工具就如同符號仲介（semiotic mediator），具有符號仲介的功能（Mariotti, Laborde, & Falcade, 2003）。關於幾何活動之研究，Mariotti（2000）依據 Vygotsky 的觀點，以動態幾何軟體（Dynamic Geometry Software, DGS）引入學生的活動中，DGS 可能提供複雜的符號系統並支持符號仲介的過程，輔助學生發展符號運用的心理工具。

從幾何學習的對偶性與 Vygotsky 的仲介工具論，提示吾人幾何思考於幾何學習中是一種重要思維方式，而要探討學生幾何活動的歷程中的幾何思考，需注意學生對於科技工具和心理工具的使用和發展過程。而 Mariotti（2000）認為 DGS 是幾何活動中重要的仲介工具，加上近年來科技融入教學的趨勢，DGS 已常被使用於幾何學習活動之中。因此，**分析學生如何運用 DGS 的符號仲介功能進行幾何實驗與推理的數學思考活動不僅是學術研究的重要議題，更是具有教學實務價值。**

## 參、研究方法

本研究目的在探索動態幾何環境下大學生幾何思考之運作模式。在 Arzarello 等人（2002）和 Furinghetti 與 Paola（2003）的研究中透過一些幾何活動來探索中學生進行幾何探索，但未進一步深入探討與說明學生的思考與 DGS 之間的互動，研究者認為也許是因為中學生幾何推理與證明能力尚不足因此較難分析幾何探索活動中學生思考的運作模式。本研究延續前人的研究以大學生來進行深入觀察與分析學生在 DGE 下如何進行幾何探索的歷程。

幾何探索之歷程包含猜測、驗證與改進的歷程，實為一個相當複雜的歷程。本研究為整體大研究的一部分，主要聚焦於學生的思考與動態幾何環境的互動上，以深入研究幾何探索歷程。

在大學生幾何探索活動中，觀察與收集大學生於 DGE 下如何進行幾何思考，其中也包含了活動過程中的活動單與錄影，用以獲得大學生對於特定幾何問題的想法與思考方式。依據學生的觀點出發，以詮釋性分析來探討他們在 DGE 下的幾何思考，並由這些分析結果討論歸納出影響幾何思考的因素與機制。

由於需要深度觀察與分析大學生幾何探索過程，本研究將透過個案研究進行質性化的研究

方法。以下將說明關於本研究之研究對象、活動設計、資料收集與處理。

## 一、研究對象

研究對象的選擇採立意取樣，學生須具備充足的數學知識與使用 GSP 的技巧與知識，屏除個人知識與技能不足的因素。

本研究對象為 24 位國立大學數學系大二的學生，他們在大一的時候修過解析幾何，而在大二修習完一學年的高等幾何課程包含了綜合幾何、變換幾何、動態幾何，學生在這門課中學習幾何學相關知識以及幾何論證的知識。他們都已修完一學年的高等幾何課程，已具有足夠處理這個幾何問題的數學知識，並在高等幾何課程中，每週利用一至兩個小時的時間學習 GSP 的基本操作及運用 GSP 來探索和處理幾何問題。因此，他們都具有足夠的數學知識，且熟悉 GSP 的基本操作及運用 GSP 來探索和處理幾何問題。

## 二、活動設計

本研究以 Arzarello 等人（2002）和 Furinghetti 與 Paola（2003）所採用的問題作為幾何探索的幾何問題（參考表 1），此問題屬於開放性問題，其蘊含一個容易觀察到的幾何性質，但不易証明。學生能夠經由將四邊形 ABCD 拖曳成任意的圖形，觀察 EFGH 的各種變化情形，進而發現圖形蘊含的幾何性質，所以適合作為幾何探索的問題。

**表 1**

**動態幾何探索活動單**

幾何問題

令 ABCD 是一個四邊形，考慮四個內角的角平分線，且此四條角平分線兩兩分別交於 E、F、G、H 四點。

| 活動 | 活動敘述 | 活動目的 |
|---|---|---|
| 活動一 | 請在 GSP 下作出上述問題的圖形。 | 請學生建構出幾何圖形之動態表徵。（建立圖形及其相關的文字標示） |
| 活動二 | 請你預測拖曳四邊形 ABCD 變動後，四邊形 EFGH 會形成什麼圖形？（請直接思考，不要拉動你的 GSP 下的圖形。） | 探討學生的數學思考和動態表徵的交互影響。 |
| 活動三 | 請你拖曳四邊形 ABCD，將你所發現的現象盡可能的寫下來。 | 1.探討如何激發學生的數學思考。<br>2.探討學生的數學思考與動態表徵間的交互影響。 |

為了使主要研究能夠順利觀察到學生的幾何思考運作情形，研究者設計動態幾何探索活動單，活動施測時間約半小時，在本研究中主要設計三個活動來收集資料，活動單敘述與目的詳細說明參考表 1。每一個活動開始前，研究者會先敘述題目。在活動進行期間記錄學生的活動過程，且學生如果有問題可隨時提出，但研究者只幫忙解釋題意、適時地提問學生當下的解題想法和解決 DGS 相關操作問題，不給予探索活動問題的答案。但當學生在探索的過程花費大量時間專注在物件的動態行為時，會引導他們去注意圖形整體結構的變化，例如：問學生你看到了什麼…等。

### 三、資料收集與處理

在學生進行探索過程中，研究者透過活動單、錄影的方式來收集多樣的資料。活動單主要收集大學生個別進行探索的資料，錄影主要紀錄大學生操作 DGS 與進行討論之影音資料。學生依序編碼為 S1~S24，將所有活動單掃描至電腦存檔，以方便資料搜尋以引用。而錄影資料，除了以逐字稿紀錄討論的內容，並依據學生操作 DGS 的活動進行分類，透過詮釋性研究的方法進行討論分析。在資料的處理過程中，研究者與二位數學教育專家，其中一名為教授，另外一名為研究生針對研究資料的分析進行三角校正，以達到資料的準確性。

## 肆、研究結果與討論

本研究分析在動態幾何環境實驗下所收集之資料來討論以下兩個主要的議題：一、DGE 下動態表徵激發幾何思考的機制，亦即什麼狀況會激發學生進行幾何思考；二、DGE 下幾何思考運作模式，亦即學生如何進行幾何思考。以下為了方便討論，其中動態表徵、幾何思考、拖曳行動，皆是在 DGE 下。

### 一、DGE 下動態表徵激發幾何思考的機制

抽象幾何物件在 DGE 下以動態表徵方式呈現，它包含了物件變動的過程，以及所呈現的結果。動態表徵同時受個體的拖曳行動和物件的動態行為所牽制，學生經由操弄與觀察其動態表徵激發他們做幾何思考。從個案資料分析，發現有三種類型的動態表徵會激發學生進行幾何思考。

#### （一）動態表徵類型為「符合特定結構圖形」

符合特定結構圖形的動態表徵意指它在變動過程中會呈現出特定的圖形結構，例如，在 GSP 中一個四邊形的對角互補，或其四頂點共圓。

學生在觀察或操作幾何圖形之動態表徵時，當發現符合特定結構的圖形時，會激發他們進行假設與驗證的幾何思考。此時學生聯結動態表徵與他們過去所認知的圖形與知識，來思考動

態表徵符合特定結構的圖形之情境下可能產生的結果（如果…，則…）。以下以案例一與案例二說明：

案例一：

S16 於活動三中，探索四邊形 ABCD 四內角平分線的交點 EFGH 圖形（參考圖 6），他似乎察覺四邊形 EFGH 的對角和為定值，因此透過 GSP 測量功能測量 EFGH 的各內角角度。

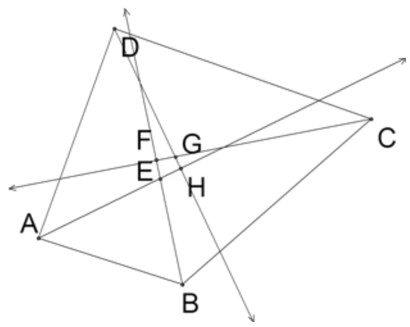


**圖 6 S16 於活動三的構圖 1**

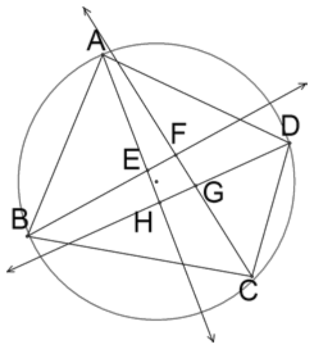


**圖 7 S16 於活動三的構圖 2**

S16 拖曳原圖形 ABCD 使其成平行四邊形或正方形，發現 EFGH 的兩兩對角和皆為 180 度。觀察一陣子後（約 7 分鐘），重新使用 GSP 先畫出一圓，並在圓上取 ABCD 點（參考圖 7），再做各個角平分線，並再度測量 EFGH 的四個角之角度。

研究者（R）詢問他正在觀察什麼現象時，S16 表示四邊形 ABCD 對角相加是 180°時，EFGH 也是 180°。以下為研究者與學生 S16 互動的片段。

S16：可以用 MEASURE（測量角度）嗎？

R：嗯！可以。

（S16 操作 GSP，大約 6 分鐘。）

R：好，你想到什麼？

S16：我想到那個... 就是量它的面積

（S16 操作 GSP，觀察與思考。大約 7 分鐘）

S16：那我重做一個喔，畫 ABCD 的外接圓。

（S16 操作 GSP，觀察與思考。大約 5 分鐘）

R：現在你看到什麼？

S16：就如果外面是對角相加是 180（度）裡面相加也是 180（度）。

S16：就是外面如果是外接圓的四邊形，裡面也是。

S16：不相似！然後邊長沒有關係，面積也沒有關係。

案例一分析：

S16 在活動一中使用 GSP 建構幾何圖形之動態表徵，到活動二時 S16 思考幾何圖形之動態表徵，在活動三中 S16 大多著重於 GSP 的操作，直到操作測量動作後，開始進行一些幾何推理。

S16 透過拖曳四邊形 ABCD 來觀察所形成的特殊四邊形，在這 7 分鐘過程中 S16 操作觀察 GSP 並不斷的進入沉思中，且在拉動的過程中，將焦點從四邊形的外型，轉移到四邊形的結構。

S16 在拉動 ABCD 四邊形之外形的過程中，注意四邊形 EFGH 的角度結構，激發 S16 進行約 7 分鐘的思考，且形成「外面四點（ABCD）共圓，而裡面四點（EFGH）會共圓」之猜測。接下來約 5 分鐘時間，S16 再度透過 GSP 重新建構與操作動態表徵來進行驗證幾何思考的假設。

實際上，不管四邊形 ABCD 是否為圓內接四邊形，四邊形 EFGH 的對角和永遠是 180 度（這個幾何圖形的不變性）。學生並非從形式化的方式證明此特定性質，而運用心智的操作實驗，透過想像所進行的推理，亦及幾何思考，最後當心智運作圖形複雜時，學生再透過 GSP 進行模擬驗證。

此案例顯示學生透過觀察動態表徵符合特殊結構之情形，進行幾何思考。從注意幾何圖形之外型，轉移到注意幾何圖形之結構，提出假設（假設 ABCD 是圓內四邊形會成立）並透過推理的方式進行驗證，再透過具體的實驗操作（使用 GSP 模擬並改變圖形觀察數值變化）以驗證所發現的不變性。

案例二：

S11 與 S12 一同進行活動。在活動二中，S11 一開始就提到「如果將 ABCD 拉成平行四邊形時，DEFG 會形成什麼圖形」。S12 立即回應「會形成四邊形」。S11 則持續思考，S12 試圖說服 S11，並開始進行討論。而這個過程主要可以分成四段：第一段，主要是 S12 在說明為什麼 ABCD 為平行四邊形時，EFGH 也為平行四邊形，其中 S11 一直在思考其中的結構關係。第二段，S12 透過腦中思考以及手勢操作，並向 S11 說明，S11 在腦中進行幾何思考與檢驗 S12 所提出的想法。第三段，S11 與 S12 延續上一段的討論，透過螢幕上幾何圖形的動態表徵，配合手勢操作進行幾何思考。第四段，S12 想像 B 點與 C 點重合，在腦中很快的進行了幾何思考，想像到會形成一個三角形，馬上聯結到熟習的三角形內角平分線交於一點。以下為 S11 與 S12 互動的四個片段。

第一段：

S11：如果把它拉成平行四邊形的話…會變成什麼圖形？

S12：平行四邊形啊！

S11：就會變成？

S12：所以是這樣子就變成這樣子（手指著電腦螢幕），就是一個平行四邊形啊！

S11：那如果把 ABCD 拉成平行四邊形?

S12：那裡面就是平行四邊形啊！因為是角平分線啊！

S11：等一下喔…

S12：如果只有動 A，只有 AD 會動，那麼這三條都會動（三條角平分線）。

S11：那只拉成平行四邊形。

S12：應該是這三條線都會動，那這三條線都會動。

S11：對喔，如果拉成平行四邊形。（持續思考中…）

第二段：

S12：如果我拉一拉有時會平行耶，兩條線很接近，那就會很遠。

S12：這兩邊平行，那…就只有兩個交點。

S11：一對平行，兩對平行，所以只要 AB 平行 CD 的話 GF 也會平行 HE。

S12：不一定啊！可是這樣子、這樣子、這樣子（手勢描述邊的關係）

S11：可是啊！你這邊平行它的話！為什麼不一定，你這樣平行它的話。

S12：喔，你說 GF 啊！

S11：對啊！你 GF 就平行 HE，你這樣平移它的話，內錯角就相等。

S12：可是旁邊不一定會平行啊（EF 與 GH）！那它有可能差很多啊！例如這樣子（手勢描述邊的關係），然後…

S11：哦~~你說 AD 和 BC，對對對對！

S12：線可能會平行，就是那個邊啊（EF 與 GH）！

S11：嗯嗯嗯。

S12：如果是這樣子的話，那應該是這樣子會平行。

第三段：

S11：你再說一次

S12：如果 AB 跟 CD 平行。

S11：把 D 拉過去（指著螢幕）。

S12：就變成 HE 這一條跟 GF 這一條會平行，因為它們這邊是…

S11：我說的就是這個啊（指著螢幕 EF 與 GH）！

S12：有嗎？有嗎？好像沒有耶！

S11：因為你剛說 AD 跟 BC 不一定會平行，所以它角不一定一樣。

S12：疑~不是不對嗎？那…我要講什麼？

S12：如果只有一對平行，另一對不平行。

第四段：

S12：如果我把 B 跟 C 合在一起的話，那這四個點就會變一個點，因為，把 B 跟 C 拉很近啊，就會變成三角形，它們都是內角平分線交點，所以交點就是三角形的內心。一個三角形只有一個內心嘛，所以這樣子有四個交點，如果變成一個平面三角形，那這四個點就很接近，變成一點。

案例二分析：

S11 與 S12 在活動二中思考幾何圖形之動態表徵，一開始就注意到符合特殊結構的圖形。雖然在第一段中 S12 立即的反應表現出一開始著重在幾何圖形的外型，但是透過對 S11 的講解他開始說明圖形的結構，然後激發 S12 開始進行幾何思考，思考只移動 A 點時，三條角平分線會跟著移動。

在第二段中，S11 也開始進行幾何思考，並向 S12 說明他幾何思考後的推論。在第三段中，S11 與 S12 重新開始他們的幾何思考，並依據電腦畫面中幾何的動態表徵來進行思考，並發現如果只有一邊平行另外一邊不平行，則裡面的圖形也會是一邊平行另一邊不平行。在第四段中，S12 一想像到形成一三角形，馬上聯結到舊經驗立即得到結果。

以上這四個片段，都顯示出學生注意到動態表徵符合特定結構時，會激發學生進入幾何思考。雖然有時候幾何思考的時間比較長而且複雜，常常需要圖形與手勢的輔助，但有些時候幾何思考是相當快速的，譬如：在第四段中，S12 一講到兩點重合，當下立即反應出三角形內角平分線交於一點。當學生注意到結構時，幾何思考才會開始啟動，若只注意到外型只是一種心像反映而非開始幾何思考，譬如第一段一開始 S12 立即的反應。

### （二）動態表徵類型為「蘊含某些不明顯的數學性質圖形」

學生在操作幾何圖形之動態表徵時，發現動態表徵蘊含某些不明顯的數學性質，亦即，圖形在特定情形下具有特殊的性質，但學生不是清楚地掌握為什麼（或不清楚其數學性質），這時他們會思考哪一些條件使得此情形成立（或為什麼會這樣），而激發幾何思考。以下以實際案例說明。

案例三：

在活動三中 S11 與 S12 觀察操作四邊形 ABCD 及四內角平分線交點 EFGH 的動態表徵。S11 開始拖曳某些點，當 A 點與 D 點重合時 ABCD 形成一個三角形且所有對角線交於一點；S11 繼續拖曳 D 點發現有時候圖形中 EFGH 會交於一點（參考圖 8）。進一步地，他在保持 EFGH 交於一點下，拖曳 A 點發現 A 點軌跡似乎具有某特殊性質，而激發 S12 開始進行幾何思考。以下為 S11 與 S12 的討論之片段。

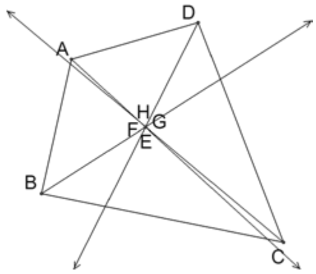


**圖 8　S11 與 S12 於活動三的構圖**

S11：…某些點會交於一點（EFGH 交於一點），而且不只一個點，所以可能會有一個軌跡是所有點（EFGH）都交於一點的。

S12：交於一點，就是四點（ABCD）同圓嘛。啊!不是，是距離（比手勢），應該是有一個內切圓？

S12：所以那個交點（EFGH 交於一點）到底是為什麼呢？

（停頓思考了一下）

S12：為什麼會交一點？…（思考一下）就這個點到每個邊距離都一樣…（思考一下）有內切圓。

案例三分析：

S11 經由拖曳 D 點觀察到動態表徵發現有些時候角平分線交於一點後，提出猜測「D 點應該有一個軌跡」，並引起 S12 做幾何思考，S12 停頓思考了一下，運用數學知識且以手勢操弄動態心像形成「四邊形 ABCD 有內切圓」的猜測。在這過程中，S12 停頓思考操弄而深思，顯示 S12 不斷的在進行幾何思考，思考為什麼會有交於一點的情形。在此情況下的幾何思考，促使學生透過相關知識與邏輯推理思考形成此動態表徵的原因。

案例四：

S13 在觀察動態表徵 EFGH 交於一點的情形時，他透過幾何思考與推理，發現 ABCD 會有內切圓。以下擷取 S13 與研究者（R）的討論片段如下。

S13：（操作 GSP 圖形）但是這樣確定這四個點有在一起嗎 ?所以有一點點誤差沒關係囉？

（停頓思考約 3 分 30 秒）

S13：啊~~會有圓在裡面。

R：為什麼？

S7：是這樣吧！因為它們都是角平分線，角平分線不是到兩邊等距離，每邊都等距離就是半徑啊！

R：你怎麼想到突然注意到這個？

S13：我也不知道耶！因為我想到它是角平分線，然後我就想到角平分線的性質，所以就想到這個。

案例四分析：

S13 觀察動態表徵，四個角平分線交於一點的情形，他是透過圖形角平分線的性質聯想到至兩邊等距離，進而推得 ABCD 具有內接圓。S13 是觀察到動態表徵所蘊含不明顯的數學性質，然後透過幾何思考來發現形成這個狀況的原因。

**（三）動態表徵類型為「認知衝突的圖形」**

當動態表徵與個體所認知的圖形產生衝突，會讓學生思考變的多元，通常第一個會問「為什麼會這樣子」，接著會問「假如這樣子就會得到…」。透過幾何思考使得認知衝突轉化成一個新的猜測或結論。以下以案例五與案例六說明：

案例五：

在活動一 S11 與 S12 使用 GSP 建構好幾何問題的動態表徵（圖 9）。進入活動二之前，他們發現圖形上角平分線兩兩的交點有六個，這時候 S11 對於圖形與問題題幹產生了認知衝突，以下是 S11 與 S12 的討論過程片段。

S11：那這些沒有點出來的點呢？它們也是相交，不是嗎？

S12：不是選四個嗎？

S11：所以它這個情況其實是沒有這種東西的。（一直觀察 GSP 中的圖形）

S12：因為四條線應該是六個點。

S11：因為一定不只這幾個點啊，一定還有其他的點。所以它是不是拖拖拖，拖到一種情況，讓裡頭只交四個點？

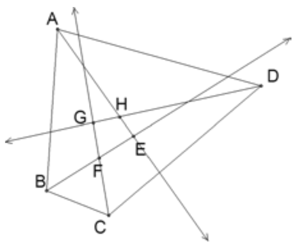


**圖 9　S11 與 S12 於活動一的構圖**

案例五分析：

當 S11 與 S12 發現螢幕上所呈現的動態表徵的四條角平分線交於六點，讓他對於問題的題幹產生了認知衝突。S12 開始思考為什麼會有六個交點，並提出任意四條線應該有六個交點，以說明為什麼會有六個交點。S11 一直觀察動態表徵，一開始懷疑是否有角平分線交於四點的情形，然後經過幾何思考後，提出可以將圖形進行拖曳可能形成角平分線交於四點的情形。S11

關注於特殊結構，並透過幾何思考要來得到，動態表徵符合特定結構之因果關係，雖然在這裡 S11 還沒得到一個具體的猜測，但具有此傾向。另外，S12 開始思考為什麼，透過幾何思考找到其原因。

案例六：

於活動三中，S5 與 S6 操作與觀察 GSP 中的動態表徵，檢驗了各種特殊四邊形，包含正方形、長方形、菱形、平行四邊形及鳶形，發現了正方形、菱形會時（EFGH）會交於一點，而長方形、平行四邊形時（EFGH）會形成平行四邊形。然後歸納出平行四邊形且四邊等長 EFGH 會變成一點的想法，但又發現鳶形時（EFGH）會交於一點，產生了認知衝突，而開始進行幾何思考，以下是 S5 與 S6 的討論過程片段。

S6：平行四邊形，四邊等長會變一點。可是鳶形不是平行四邊形也會交一點。

S6：對角線垂直。

S5：也會交一點。怎樣的圖形會對角線垂直…所以只有菱形、鳶形、正方形三個。因為你如果垂直這樣畫，一定平分嘛！

S5：不然...你看...你這樣任意做，一定是平分的。

案例六分析：

S5 與 S6 不斷的透過符合特定結構的動態表徵來進行幾何思考，而且幾何思考很快的就透過具體的 GSP 拖曳來形成符合特殊結構的情形，然後形成許多猜測，譬如：（ABCD）平行四邊形則（EFGH）為平行四邊形、四個角垂直則角平分線垂直、平行四邊形四邊等長則角平分線交於一點。但觀察到鳶形的時候，S5 與 S6 產生了認知衝突，S6 先解釋為什麼鳶形其角平分線會交於一點，他們先試圖解釋為什麼。然後，針對鳶形的結構進行幾何思考，發現具有對角線互相垂直的結構，而菱形、正方形也都有，讓他們產生對角線垂直則四個角平分線交於一點的猜測，然後透過 GSP 進行操作驗證。學生產生認知衝突時，會先思考為什麼會這樣，接受這個結果之後，開始思考當特殊的情況成立時會產生什麼。

## 二、DGE 下幾何思考運作模式

幾何思考是個體依據可能成立的或理想性的假設，在心智中模擬實驗操作的推理過程；它通常發生在個體對事物現象的觀察，其目的在以邏輯分析方式論述其道理。從個案資料中可以觀察到受訪學生在 DGE 下幾何探索活動過程中，並非毫無目的操作滑鼠。他們在拖曳行動前，會透過觀察動態表徵及依據某些幾何假設，先在心智中操作可能的動態行為進行幾何推理與論述。

本研究從深度分析個案資料，可以歸納出大學生在 DGE 下的幾何思考模式主要包含三個幾何思考基本歷程：猜測、模擬操作和宣告，大學生會依據可能成立的猜測，以模擬操作的方式

進行推論，最後再產生宣告。以下將論述大學生在 DGE 下的幾何思考運作的序列方式，最後闡述此模式的整體結構。

**（一）幾何思考基本歷程：猜測—模擬操作—宣告**

學生在進行幾何思考的過程中，通常以序列方式運作：猜測—模擬操作—宣告，個體透過模擬操作的方式將猜測轉換成宣告的幾何思考過程，以下以案例七說明。

案例七：

S1 與 S2 在活動三中操作 GSP 檢驗一些特殊的圖形（如正方形、長方形）內角平分線交點性質的觀察，再將圖形拉成近似等腰梯形後（參考圖 10），經過一段時間思考後，進行對話如下。

S1：等腰梯形交一點，會不會? 等腰梯形的話，這兩個角相等，這兩個角也相等，它也等於它嘛！我覺得等腰梯形會交一點。

S2：這兩個角就相等啦！

S1：然後呢？……不是啊！這個加這個就是這個的角度。

S2：這個加這個是這個的角度，畫個等腰梯形就好啦！

S1：等腰梯形就……畫畫看。

S2：畫囉！

S1：不用。等腰梯形，角平分線交一點，角平分線交一點。嘿！可以在裡面畫一個圓。等腰梯形…等腰梯形就是一個圓啊對啊！因為這兩邊會一樣，這兩邊會一樣，這兩邊會一樣。

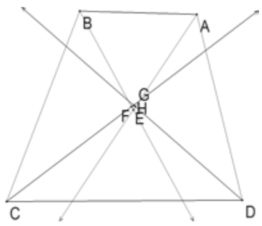


**圖 10　S1 與 S2 於活動三的構圖 1**

案例七分析：

S1 與 S2 在 DGE 下顯現的幾何思考過程，可以分成以下三段流程（參考圖 11）：

（1）當 S2 將四邊形 ABCD 拉成近似等腰梯形，使得四個內角的角平分線幾乎交於一點。此時動態表徵（圖 10）激發 S1 去猜想 ABCD 的動態行為並產生「等腰梯形會交一點」的猜測（動態行為）。

（2）在 S1 在腦中進行幾何思考的模擬操作（心像操弄）並透過手勢輔助說明，S1 利用手勢輔助說明他的想法（呈現出他的心像）向 S2 說明為何會交於一點。但對 S2 而言太過抽象，S2 提議將圖形畫出來，亦即讓心中的想法具體顯現在螢幕上。

（3）而 S1 認為不需要，繼續使用手勢來呈現想法並推論得到「等腰梯形就是一個圓」（數學性質）的宣告。

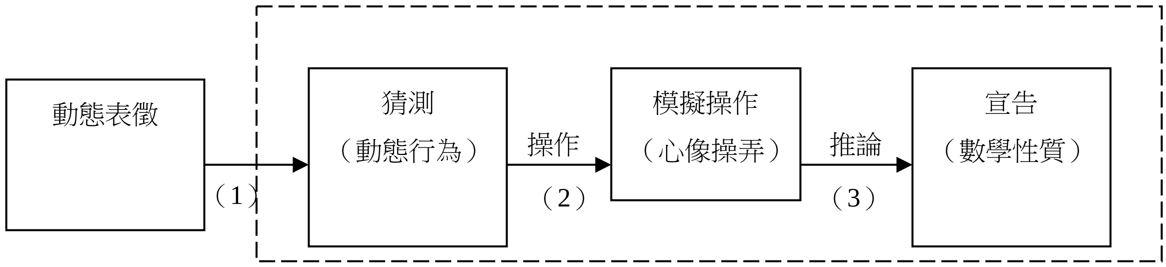


**圖 11　S1 的幾何思考基本歷程示意圖**

在本研究中也發現幾何思考有時不是一個單向的過程，也會展現循環的過程。個體會將宣告轉化成猜測再進行模擬操作，尤其是當個體模擬操作後所得到的宣告與猜測相衝突時。以下以案例八說明此循環運作情形。

案例八：

S11 與 S12 在活動三中正在觀察與操作幾何圖形之動態表徵。S11 拖曳某些點，嘗試將 A 點與 D 點重合使四邊形 ABCD 形成一個三角形且角平分線的交點 EFGH 交於一點。S11 繼續拖曳 D 點發現有時候四邊形 ABCD 不需退化成三角形也會使四內角平分線的交點 EFGH 交於一點。進一步地，他保持 EFGH 交於一點，拖曳改變 A 點，發現似乎 A 點會形成一個軌跡，而激發 S12 與 S11 深思其理由。以下是 S11 與 S12 的討論片段過程。

S11：...某些點會交於一點（EFGH 交於一點），而且不只一個點，所以可能會有一個軌跡是所有點（EFGH）都交於一點的。

S12：交於一點，就是四點（ABCD）同圓嘛。啊!不是，是距離（比手勢），應該是有一個內切圓？

S12：所以那個交點（EFGH 交於一點）到底是為什麼呢？
（停頓思考了一下）

S12：為什麼會交一點？...（思考一下）就這個點到每個邊距離都一樣...（思考一下）有內切圓。

案例八分析：

S11 與 S12 在 DGE 下展現的幾何思考形成以下循環過程（參考圖 12）：

（1）S11 在拖曳 D 點時看到動態表徵後產生「可能會有一個軌跡讓角平分線都交於一點」的猜測（動態行為）。

（2）S12 提出「交於一點，就是四點（ABCD）同圓嘛」的猜測，在腦中操弄幾何圖形。

（3）S12 透過在腦中的心像操弄，發現「應該是有一個內切圓」的宣告（數學性質）。

（4）S12 為了瞭解為什麼會交於一點，此時宣告轉化為猜測。

（5）S12 思考為何會交於一點，透過模擬操作發現「這個點到每個邊距離都一樣」

（6）S12 最後推得「有內切圓」。

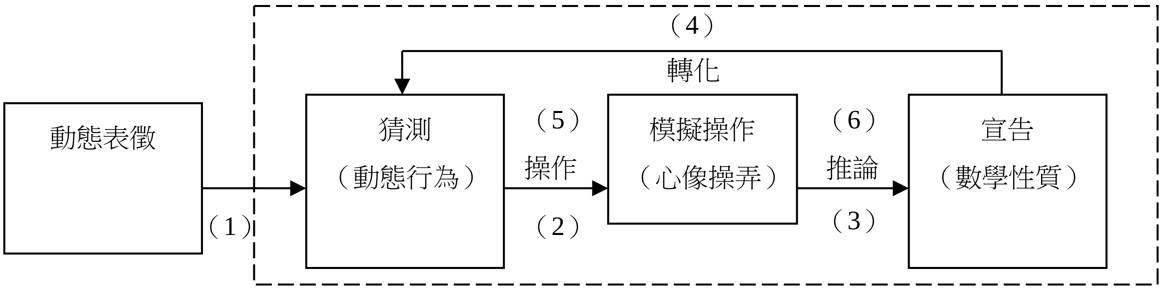


**圖 12　S11 與 S12 幾何思考示意圖**

**（二）幾何思考中的操作：模擬操作 V.S.具體操作**

在個體進行幾何思考過程中，有些時候個體形成猜測後，會直接透過 DGS 來進行具體的幾何實驗，但常常因為數學的結構太過抽象與複雜，而無法在心智中繼續模擬操作，在 DGE 下個體會進行數學物件的模擬與操作，來形成猜測與驗證猜測，並透過 DGS 來輔助幾何思考，以下以案例九與案例十分別說明此兩種情形。

案例九：

S5 與 S6 在活動三中觀察與操作 GSP 中的動態表徵，進行幾何思考中他們在提出猜測後，立即使用 GSP 來進行操作實驗，檢驗了各種特殊四邊形，包含正方形、長方形、菱形、平行四邊形，然後得到一些宣告。以下是 S5 與 S6 的討論片段過程。

S5：正方形的時候?

（GSP 操作過程，將圖形拖曳形成正方形。）

S5：正方形是一個點　。

S6：對~正方形是一個點。

S5：那拉長方形

（GSP 操作過程，將圖形拖曳形成長方形。）

S6：所以是平行四邊形。

S5：嗯!

S6：菱形也是一點嗎?

（GSP 操作過程，將圖形拖曳成菱形。）

S5：嗯~菱形會垂直。

S6：也是一點吧

S6：那做平行四邊形。

（GSP 操作過程，將圖形拖曳成平行四邊形。）

S5：（EFGH 呈現）正方形。

S6：（EFGH）還是平行四邊形

案例九分析：

學生的幾何思考的運作流程並非都會經過心智的模擬操作，有可能猜測產生後，而直接進行具體操作。在這個案例中，S5 與 S6 使用 GSP 依序實驗 ABCD 為正方形、長方形、菱形與平行四邊形的情形，都是先提出假設，然後使用 GSP 進行模擬實驗，而得到一個宣告。詳細過程如下：（參考圖 13）

ABCD 為正方形的情形：

（1）S5 提出正方形的時候，透過 GSP 將圖形拉成正方形；

（2）GSP 的動態形為使得幾何圖形呈現交於一個點；

（3）S5 與 S6 觀察到圖形交於一個點，得到（ABCD）正方形時，EFGH 交於一點之宣告。

ABCD 為長方形的情形：

（4）S5 提出長方形的時候，透過 GSP 將圖形拉成長方形；

（5）GSP 的動態形為使得幾何圖形呈現一個平行四邊形；

（6）S5 與 S6 觀察圖形為平行四邊形，得到（ABCD）長方形時，EFGH 形成平行四邊形之宣告。

ABCD 為菱形的情形：

（7）S6 提出菱形的時候，S5 透過 GSP 將圖形拉成菱形；

（8）GSP 的動態形為使得幾何圖形呈現交於一個點；

（9）S5 與 S6 觀察到圖形交於一個點，然後得到（ABCD）菱形時，EFGH 交於一點之宣告。

ABCD 為平行四邊形的情形：

（10）S6 提出平行四邊形的時候，透過 GSP 將圖形拉成平行四邊形；

（11）GSP 的動態形為使得幾何圖形呈現平行四邊形；

（12）S5 與 S6 觀察到圖形平行四邊形，然後得到（ABCD）平行四邊形時，EFGH 為平行四邊形之宣告。

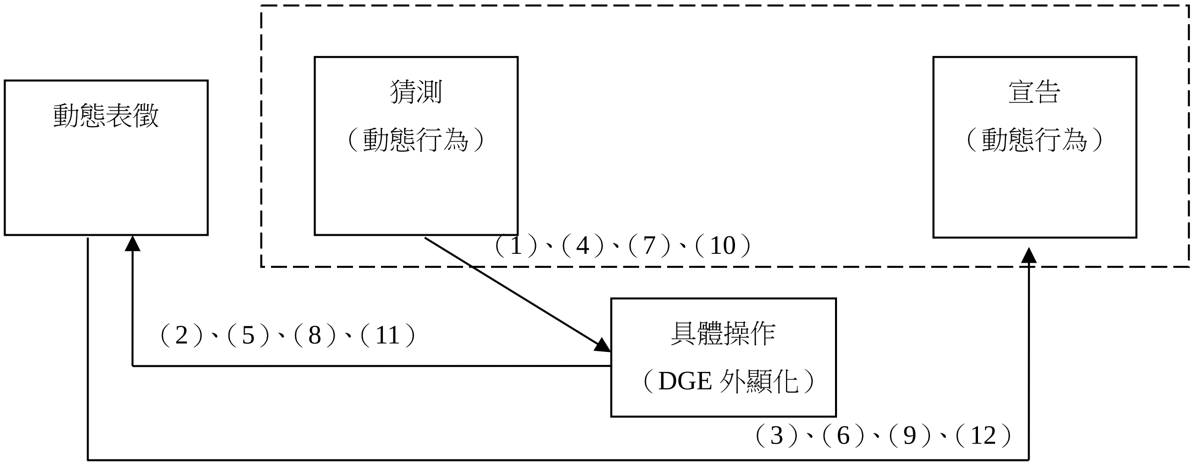


**圖 13　S5 與 S6 幾何思考的示意圖**

案例十：

S1 與 S2 在活動三開始使用 GSP 檢驗各種特殊的圖形，包含三角形、鳶形、菱形、正方形，發現這些都 EFGH 都會交於一點，而當他們將 ABCD 拉成梯形時，發現 EFGH 似乎沒有交於一點，也沒有形成特別的圖形，因此，討論 ABCD 為等腰梯形時。以下是 S1 與 S2 的討論片段過程。

S1：等腰梯形交一點，會不會？

（S1 與 S2 思考了一下約 1 分鐘）

S1：等腰梯形，角平分線交一點，角平分線交一點。嘿！可以在裡面畫一個圓。等腰梯形…等腰梯形就是一個圓啊對啊！因為這兩邊會一樣，這兩邊會一樣，這兩邊會一樣。

S2：哪有？

S1：我做給你看（使用 GSP 的圓工具，拖曳出一個圓，參考圖 14）。

S2：在裡面嗎？

S1：你看。等腰梯形你看唷！這兩邊會一樣長，這兩邊會一樣長。

S2：所以會交一點。

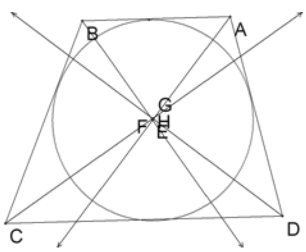


**圖 14　S1 與 S2 於活動三的構圖 2**

案例十分析：

S1 與 S2 在 DGE 下的幾何思考過程，可以分成以下幾段流程（參考圖 15）：

（1）S1 觀察 DGS 中的幾何圖形的動態表徵（ABCD 呈現梯形，EFGH 呈現一個四邊形），提出等腰梯形時 EFGH 會交於一點之猜想。

（2）S1 形成這個猜想後，思考了一下，然後得到「等腰梯形，角平分線交一點」的宣告，在這之後馬上說明他的想法。表示 S1 是有先進行心智中的模擬操作。

（3）S1「等腰梯形，角平分線交一點」的宣告，並試圖說服 S2。

（4）S2 提出疑問（似乎無法掌握），S1 使用 DGS 進行構圖，以具體的幾何圖形進行說明。

（5）DGS 中圖形上呈現等腰梯形與圓的關係。

（6）S1 透過 DGS 中的圖形驗證並說明其宣告，而 S2 同意此宣告。

當 S1 提出「等腰梯形就是一個圓」的宣告時，S2 抱持著懷疑的態度。此時宣告「等腰梯形就是一個圓」轉化為新的猜測，S1 為了清楚表達自己的想法，他暫時不使用手勢來解釋，而是開始使用滑鼠拖曳出圓驗證給 S2 看（具體操作）。在具體操作所產生的動態表徵（圖 13）使 S2 確信「角平分線會交於一點」並產生出宣告「所以會交一點」（數學性質）。之後再配合手勢驗證說明為何等腰梯形裡頭會有內切圓。

學生在 DGE 下作幾何思考的過程，會在心智模擬操作推論或驗證猜測，當他們面臨無法僅靠操弄內在的動態心像進行推論時，會利用外在的拖曳行動或 DGS 其他檢驗工具來驗證猜測。

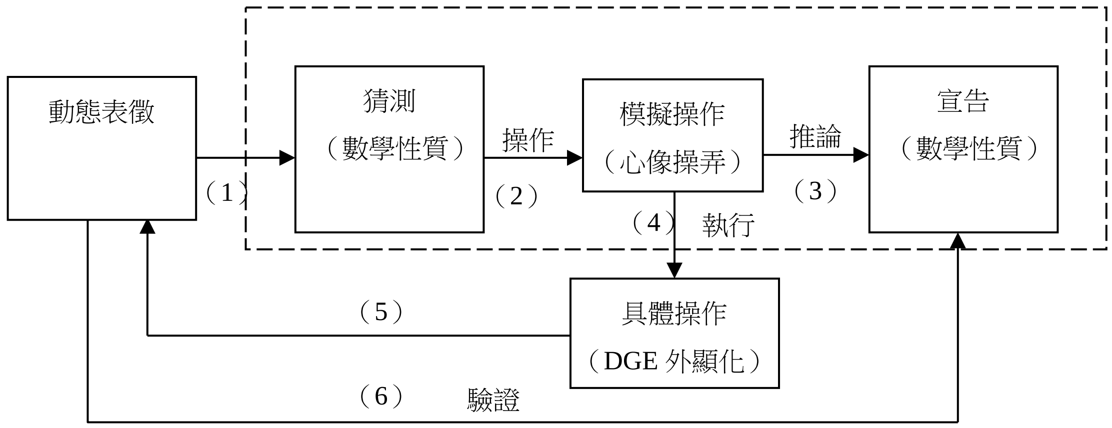


**圖 15　S1 與 S2 幾何思考示意圖**

### （三）DGE 下的幾何思考運作模式與機制

從基本元素和互動關係分析出學生在 DGE 下的幾何思考運作模式（圖 16），動態表徵激發學生作猜測，使其透過模擬操作來操弄動態心像來進行推論，進而產生宣告。當幾何問題情境過於複雜或簡單，以致於學生無法單靠在心智中作推論時，會朝向具體操作圖形的方式來驗證

猜測。

大學生在 DGE 下所發展的幾何思考主要是受到動態表徵外在的動態行為和內在的數學性質所影響而激發他們產生猜測，也會透過手勢輔助模擬操作的方式來驗證猜測，進而產生宣告。通常模擬操作完後，會再使用 DGS 具體操作驗證自己的想法。不過，當問題情境過於複雜或簡單時，會跳過模擬操作直接朝向具體操作圖形的方式來驗證猜測。此外影響學生作幾何思考的因素除了動態表徵，也會受到同儕的想法所影響。學生藉由同儕間的互相討論，激發他們產生或修改猜測，釐清推理的盲點，有助於幾何思考的運作和推論。

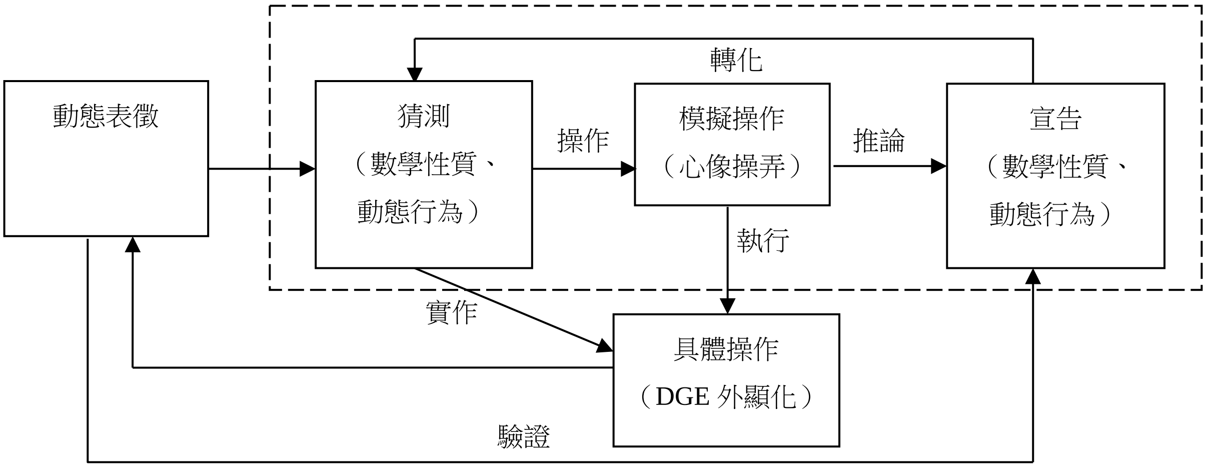


**圖 16　DGE 下的幾何思考運作模式**

以下將詳細說明幾何思考運作模式中的操作、推論、執行、實作、驗證和轉化等運作過程中的動作，其中虛框線所包含的基本元素和過程代表學生內在的幾何思考。

**操作**

當學生看到動態表徵時，它會激發他們去猜測表徵背後的數學性質及物件的動態行為。猜測產生後，學生會基於以下理由開始透過手勢或語言作模擬操作，操弄動態心像：1.解釋提出猜測的理由 2.反駁猜測 3.驗證猜測。

**推論**

在推論過程中，學生以其所擁有的數學知識或圖形表徵為基礎，配合手勢和語言進行推論，進而產生宣告。這裡的宣告內容主要與數學性質和物件的動態行為有關。推論的結果可分為兩類：

1.學生提出他們認為正確的宣告（如 S1、S2 幾何思考運作元素）或是假設性的宣告（如 S5、S6 幾何思考互動關係）。

2.學生經過推論過程後，發現原猜測錯誤，使其無法產生支持原猜測的宣告，例如學生 S13

推論過後得到「我的假設錯誤」的宣告。

**執行**

學生在模擬操作階段是利用想像的方式在心智中驗證猜測或找尋支持猜測的論點。不過，當學生為了使他人確信自己的推論結果或是對於模擬操作出的結果不具信心及模糊不清時，他們會執行動態幾何軟體來具體操作數學物件，亦即將抽象的推論具體化及動態心像視覺化。

**實作**

當一個猜測產生時，學生不一定先會以模擬操作的方式驗證，而是直接透過具體操作的方式，藉由觀察動態表徵來檢驗猜測。例如，當其面臨的幾何問題情境過於複雜，導致學生短時間內無法處理外在給予的訊息，需經由具體操作圖形來減輕認知負荷、或猜測過於簡單易懂使得學生不需先進行思考，而是直接操弄圖形，將想法實踐。

**驗證**

在具體操作的過程中所產生的動態表徵使學生驗證猜測或推論想法的正確性，並進一步對操作驗證的結果下結論，產生宣告。

**轉化**

當宣告產生後，會使其再度轉化會新猜測的理由主要是學生在具體或模擬操作過程中得到宣告後，為了再次驗證宣告的正確性，將宣告轉化為猜測，在心智中進行模擬操作驗證。

# 伍、結論與建議

## 一、主要結論

本研究主要在分析在動態幾何環境下大學生的幾何思考的運作模式。由研究結果顯示動態幾何構圖所產生的動態表徵能激發學生從事心智推理的幾何思考。三種類型的動態表徵對學生在幾何探索過程中產生認知意義或衝突時，會喚起所擁有的舊經驗，進而激發其作幾何思考推論出幾何性質或解釋衝突的原因。依據 Duval（1998）的幾何認知理論，本研究的發現更凸顯了動態幾何環境其支持構圖與視覺化的認知功能，而且能夠有效地激發學生進行思考與實驗。在幾何探索的過程中，本研究發現學生進行幾何探索過程中有類似 Arzarello 等人（2002）研究發現有各種不同的拖曳模式，而且我們發現很多時候學生是經過思考後再進行幾何操作，如同 Tall（1999）所言學生可以如同數學家的方法來進行自發性地探索與推理證明，而本研究的發現更凸顯了 DGE 環境是可以提供學生進行數學地思考的環境。

幾何思考運作的基本模式包含猜測、模擬操作、宣告。在動態幾何環境下大學生於幾何探索過程中幾何思考不斷地透過具體操作進行幾何實驗，幾何實驗中的動態表徵再次激發他們進行幾何思考。推論、執行、實作、驗證和轉化是幾何思考與和動態幾何實驗交互作用過程中主

要的運作方式。根據 Lakatos（1976）、陳英娥與林福來（1998）對於數學思考的研究，本研究的發現可以他們的研究結果為基礎，來建立的 DGE 下的幾何思考運作模式，從研究的結果本研究可以巧妙地連結 Duval 的幾何認知模式，來說明 DGE 在學生進行幾何探索中所扮演的角色，以及學生的思維發展。

## 二、研究結果的教學啟示與未來研究建議

當學生觀察動態幾何軟體所產生動態表徵時，通常不會立即反應，而是透過幾何思考後再做適當的拖曳行動。這種反應方式顯示學生是在進行有意義的活動而非盲目的行動。因此建議於佈置動態幾何學習環境時，可參考能激發幾何思考的三種動態表徵類型設計於活動中，以啟發進行後設認知形式的幾何探索。然而，本研究個案學生是具備充分的數學知識與動態幾何軟體操作技巧，而能反映出三思而後行的成熟行動，一般中小學生會如何行動反應是未來可進行探討的有趣問題。

動態表徵其外顯的行為和內在的數學性質會激發個體產生猜測，並在心智中模擬操作數學物件以及分析可能的動態行為來驗證猜測，進而產生宣告，形成一個幾何思考的基本模式。然而，學生不容易掌握動態行為與數學性質之間的結構關係而無法形成精確性質的宣告。因此，建議在動態幾何環境下進行幾何教學過程中，教師能適時的給予結構性的提示將有助於學生完成較完整的幾何思考。至於如何佈置適當的動態幾何學習環境激發學生從幾何操作上轉移至分析動態表徵與數學性質之間的結構關係是未來值得研究的議題。

學生會依據模擬操作的複雜程度，再使用 DGS 具體操作以驗證幾何思考過程中的想法。此時，學生依據幾何思考過程中的邏輯推理來進行 DGS 拖曳行動，所呈現出的動態表徵不僅反應推理的條件亦受動態行為的數學結構所節制，而具體檢驗模擬操作的可行性與精確度。因此，在設計動態幾何學習環境時，動態幾何軟體除了可作為操弄工具外，也可做為幾何學習的認知工具。這種認知作用除了 Arzarello 等人曾分析拖曳行動的認知功能外，而動態表徵的認知作用更是未來值得研究的議題。

學生在動態幾何環境下進行幾何實驗並與幾何思考不斷地交互作用下探索幾何性質。此時動態幾何軟體具有符號仲介的功能，整合複雜的符號系統以支助學生發展符號運用進行邏輯推理。此時，推論、執行、實作、驗證和轉化等過程藉助 DGS 符號仲介的功能形成幾何思考與和動態幾何實驗交互作用。為了能在動態幾何環境下的推理過程產生意義，同儕之間可藉助動態幾何軟體符號仲介的功能相互的溝通。由研究結果發現學生在作幾何思考和推理的過程中，兩人一組會藉由互相討論，逐步釐清推論的錯誤或提供解題的想法有助於個體作幾何思考。本研究並未深入探討兩個人的社會互動對幾何思考運作及推理的影響，建議未來可朝此一面向進行分析。

# 參考文獻

陳英娥、林福來（1998）。數學臆測的思維模式。**科學教育學刊**，**6**（2），191-218。

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *ZDM, 34*(3), 66-72. doi: 10.1007/BF02655708

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). Charlotte, NC: Information Age.

Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processing. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 142-157). New York, NY: Springer-Verlag. doi: 10.1007/978-3-642-57771-0_10

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp. 37-52). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24*(2), 139-162. doi: 10.1007/BF01273689

Furinghetti, F., & Paola, D. (2003). To produce conjectures and to prove them within a dynamic geometry environment: A case study. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th International Group for the Psychology of Mathematics Education Conference Held Jointly with the 25th PME-NA Conference* (Vol. 2, pp. 397-404). Honolulu, HI: CRDG, University of Hawaii.

Hazzan, O., & Goldenberg, E. P. (1996). Students' understanding of the notion of function in dynamic geometry environments. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *1*(3), 263-291. doi: 10.1007/BF00182618

Hölzl, R. (1996). How does ‘dragging’ affect the learning of geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *1*(2), 169-187. doi: 10.1007/BF00571077

Hoyles, C., & Jones, K. (1998). Proof in dynamic geometry contexts. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 121-128). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Laborde, C. (1993). The computer as part of the learning environment: The case of geometry. In C. Keitel & K. Ruthven (Eds.), *Learning from computers: Mathematics education and technology* (pp. 48-67). Berlin, Germany: Springer-Verlag. doi: 10.1007/978-3-642-78542-9_3

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge, UK: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9781139171472

Lopez-Real, F., & Leung, A. (2006). Dragging as a conceptual tool in dynamic geometry environments. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 37*(6), 665 - 679. doi: 10.1080/00207390600712539

Mariotti, M. A. (2000). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1-3), 25-53. doi: 10.1023/A:1012733122556

Mariotti, M. A., Laborde, C., & Falcade, R. (2003). Function and graph in DGS environment. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th International Group for the Psychology of Mathematics Education Conference Held Jointly with the 25th PME-NA Conference* (Vol. 3, pp. 237-244). Honolulu, HI: CRDG, University of Hawaii.

Pinto, M., & Tall, D. (2002). Building formal mathematics on visual imagery: A case study and a theory. *For the Learning of Mathematics*, *22*(1), 2-10. doi: 10.1007/BFb0099867

Sorensen, R. A. (1992). *Thought experiments*. New York, NY: Oxford University Press. doi: 10.1093/019512913X.001.0001

Tall, D. (1998). Information technology and mathematics education: Enthusiasms, Possibilities & Realities. In C. Alsina, J. M. Alvarez, M. Niss, A. Perez, L. Rico, & A. Sfard (Eds.), *Proceedings of the 8th International Congress on Mathematical Education* (pp. 65-82). Sevilla, Spain: S.A.E.M. Thales.

Tall, D. (1999). The chasm between thought experiment and mathematical proof. In G. Kadunz, G. Ossimitz, W. Peschek, E. Schneider, & B. Winkelmann (Eds.), *Mathematische bildung und neue technologien* (pp. 319-343). Leipzig, Germany: B. G. Teubner Stuttgart. doi: 10.1007/978-3-322-90149-1_32

Talmon, V., & Yerushalmy, M. (2004). Understanding dynamic behavior: Parent-child relations in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics*, *57*(1), 91-119. doi: 10.1023/B:EDUC.0000047052.57084.d8

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher mental psychological processes* (M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner, & E. Souberman, Eds. & Trans.). Cambridge, MA: Harvard University Press. (Original work published 1930-1935)