林勇吉、秦爾聰、段曉林（2014）。
數學探究之意義初探與教學設計實例。
臺灣數學教師，**35**（2），1-18。

數學探究之意義初探與教學設計實例

林勇吉　　秦爾聰　　段曉林
國立彰化師範大學科學教育研究所

本文藉由回顧先前的文獻，從五種觀點來闡述何謂數學探究（mathematical inquiry）、提出數學探究教學架構、探討數學探究與數學解題的差異，最後列舉國小至高中等三個階段的教學設計，具體說明數學探究教學為何。

關鍵詞：探究、數學探究、數學探究教學

通訊作者：林勇吉，e-mail：b8524039@gmail.com
收稿：2013 年 11 月 11 日

壹、前言

「探究」是科學中耳熟能詳的詞彙，這可追朔自 Dewey（1910），他鼓勵 K-12 的科學教師使用探究為主要的教學策略，儘管當時對於探究的意義，可能與當代略有不同，但我們無法否定探究在科學學習上的重要性（Bybee, 2000）。相對於「科學探究」,「數學探究」似乎受到較少的關注，然而，文獻指出「數學探究教學」能有效率提升學生的「數學解題能力」(Whitin, 2006)、「溝通能力」(Chin, Lin, & Lin, 2009）與「後設認知」能力（Chin, Lin, Chuang, & Tuan, 2007），並能降低「學習焦慮」，增進學習效能（Chin, Lin, & Wang, 2009）。此外，在數學探究中，學生必須探索（explore）和檢驗解題策略，用以解決開放式的問題，因此數學探究也與建構主義的學習哲學觀相符（Inoue, 2011）。

有鑑於數學探究的重要性，但並沒有研究者彙整過去文獻對數學探究提出詳盡說明，也沒有學者比較數學解題與數學探究的差異。本文將回顧過去文獻，經由五個觀點具體闡述數學探究的意義，並且列舉三個數學探究教學設計實例，幫助後續研究者更深入了解數學探究。

貳、數學探究的意義

數學探究可簡單解釋為「問題－過程－解答－延伸」的整體程序。換言之，它是發現問題、思考問題與解決問題的過程。Romberg 與 Kaput（1999）認為數學應被視為人類活動（human activity)，反映出數學家工作的性質。這個性質是經由探究來學習，例如，知道為何所提供的方法能夠運作、發現新的方法，證明主張等；Jaworski（1994）認為數學探索（investigation，意味數學探究）似乎是將學生融入在尚未定義清楚（loosely-defined）的問題，學生問自己問題，依據他們自己的興趣和喜好設定目標，做他們自己的數學，進一步獲得樂趣；Yerushalmy、Chazan 與 Gordon（1990）進一步提出數學探究是學生使用「數學家的態度」進行探索。

換言之，數學探究是數學知識發展的過程。在此過程中，我們必須考慮「數學到底是甚麼？」，「數學知識如何發展？」，這兩個問題與數學本質息息相關，在建立了數學本質的哲學思維後，我們分別從「如何溝通數學思維」(師生互動模式)、「數學應該如何被教」(課程綱要的信念)、「數學解題行為」(擬題）與「現實世界與數學世界的關聯」來探討數學探究：

一、數學本質的觀點

關於數學本質觀點，我們主要的論述主軸在「動態的知識觀」，以及「知識如何獲得」這兩方面，另外也輔以數學知識除了是演繹與符號的學科外，它也是探索的過程，這與知識如何獲得相關，整體說明如下：

哲學家對於數學本質觀點（知識論，epistemology）歷經不斷的改變與演進。古希臘時期（約西元前四世紀）的哲學家認為知識是客觀、且永恆不變的真理，如柏拉圖（Plato）認為知識存在於感官以外的獨立世界，它是固定且不可改變（Dossey, 1992）。這個想法一直延續到二十世紀初期，縱然哲學家們對於數學本質存在爭議，但這都沒有動搖「數學是客觀永恆真理」的立場，學者們所爭議是如何詮釋這個永恆真理的方法。

晚近，學者對上述想法提出新思維。Peirce（1877/1982）提出知識的動態觀（dynamic view of knowledge），認為知識是由不確定性引起的探究過程（process of inquiry motivated by uncertainty），這個知識是動態的想法，影響了 Dewey（1933）、Kuhn（1970）、Lakatos（1976）和 Kline（1980）等人的哲學觀，他們提出許多科學理論與數學知識隨著時代變遷而不同的看法。因此，Lakatos 在其證明與反駁（proofs and refutations）一書中主張，定義並非永遠為真，常常需要透過後來的更深入的思維進行修補。他以一段師生關於尤拉多面體公式（V-E+F=2）對話作為開場，強調不斷提出反駁（反例）與重新論證（argument 或證明），是數學知識發展的必經之路，意即反駁啟動對原臆測的精進。

上述知識動態觀的想法一路延續至根本建構主義學者的思維（e.g., von Glasersfeld, 1990），他們認為知識是社會建構（socially constructed）的產物，所以既不是既定的（predetermined），也不是絕對的（absolute）。從數學史的例子，也許可以更明白這一點：古希臘時代認為所有的數都是有理數，無理數的發現在當時造成整個學界的動盪與不安；在非歐幾何中，三角形的內角和不是 180 度，內角和 180 度只存在歐基里德的幾何思維中，當然，現實生活中亦可展現非歐幾何的思維，例如在一個「曲面」畫三角形。

從這個角度來看，數學知識本身就充滿模糊（ambiguity）與衝突（conflict），Borasi（1992, 1996）認為可透過這個特性來幫助學生探究。例如：（1）利用錯誤（題目）當跳板，引起學生思考「為何錯」與「該如何修正」等問題；（2）藉由提出與現狀不同的另有（alternatives）解答，創造模糊和衝突，例如問學生：「如果改變一些假設、定義或目標，會發生什麼事？」；（3）探索學生不熟悉的新概念。例如非歐幾何：討論如何在方格紙上畫「圓」（此時如何定義圓？如何在方格紙中呈現？）。

此外，就數學特質來說，數學本質普遍被認為是計算（calculation）與演繹（deduction）的學科，但是數學其實還包含了猜測（conjectures）、估計（estimation）與觀察樣式（observation of patterns），這就是所謂數學上的探究。換言之，數學是一種探索的過程，目的在於揭露隱藏在世界背後的規則（Jarrett, 1997），Jarrett 更具體提出數學探究的架構為：（1）在一個資源豐富的環境下學習（具有適當的學習輔助工具、實驗器材）。（2）思考問題並寫下或畫下一些他們初步探

究的想法。（3）提出假設。（4）擬定探索的計畫（investigation）。（5）蒐集資料。（6）分析這些資料。（7）形成結論。（8）溝通分享這些發現。

二、師生互動的觀點

除了從理論來看數學探究外，我們期待從學生與教師的行為（社會文化環境造成）來解釋甚麼是數學探究，這就是本研究所稱的師生互動觀點。Wood 等人的研究（Wood & Turner-Vorbeck, 2001; Wood, Williams, & McNeal, 2006）由心理學與社會學的角度，探討在不同課室文化（culture）中學生所形成的互動模式（interaction pattern）。他們的研究發現在改革取向的課室中（reform-oriented classes），主要有兩種互動模式，分別是「策略報導」（strategy reporting）和「探究／論證」。「策略報導」的課室文化中，學生報導解題的不同策略，有時候學生會被老師提問他們是如何找到解答的，但是幾乎不會有學生發問。在「探究／論證」類別中，學生提供不同的解答方法方面跟「策略報導」類似，但是需要解釋「為什麼」，他們必須對自己的想法提出理由說服其他學生（或老師）；此外，學生或老師在此課室中彼此問問題進一步澄清自己的想法或瞭解，這些討論通常包含了挑戰（challenge）或是不同意對方的想法，藉由這個過程促進彼此想法的交流，並且也刺激學生思考如何辯證（justification）自己的觀念（ideas）（意味對自己的想法提出合理的解釋或支持）。

Wood 等人的實徵研究告訴我們在改革取向的課室中，師生的互動模式為何；Anderson（2002）提出只要是符合新課程綱要（改革取向）的教學，就可以稱作探究取向的教學。透過 Anderson 的觀點，我們認為 Wood 等人的研究可以作為詮釋數學探究的一種方向，是故，當課室形成「策略報導」或「探究／論證」的文化時，兩者都是數學探究教學，只是「探究／論證」的探究層次高於「策略報導」。Zion、Cohen 與 Amir（2007）認為探究教學活動是在一條連續光譜上，兩個極端分別是結構式探究（記憶步驟）與完全開放式的探究（教師不介入），是故，探究可以有層次之分。

三、擬題的觀點

擬題是數學家發展數學知識第一個步驟，從觀察既有的事實中產生新的質疑與問題，這可以呼應到「數學知識發展歷程」的數學本質上。「擬題」（problem posing）從「數學解題」（problem solving）的觀點來看數學探究，它較傾向於教學的角度。擬題是數學探索（exploration）中的一個重要元素（Cai & Hwang, 2002），在探究中，做好「形成問題」這件事（formulating a problem well）通常比找到它的解答來的更有意義。「擬題」也與「解題」彼此相互呼應（e.g., NCTM, 2000），如果我們認同解題是一種數學探究行為，那麼擬題也應是數學探究的一部分；更進一步來說，擬題是探究的開端。

Whitin（2006）使用擬題策略於數學探究教學，這裡的擬題並非給予學生產生問題的機會，而是教師運用擬題，引發學生的數學探究。Whitin 以學生的「觀察」和「問題」當作跳板，做為進行探究的機會，例如當學生知道 6+4=10，可以進一步詢問有哪些三個數相加，也可以得到同樣的結果（如 2+4+4；3+4+3）。更進一步，Whitin 使用擬題（problem posing）做為數學探究的工具。這意味找出（identifying）給定問題的特性（attribute），之後改變一個或幾個特性，創造新的問題，這個過程與上述例子相同。Whitin 使用擬題策略的原因，是因為擬題其實融入一些數學探究重要元素於其中，包括：細心觀察、使用多樣的觀點、產生問題、提供臆測、設計與執行計畫、反思這個結果等。

Lee（2001）對數學探究也提及類似的觀點，他認為數學探究起始自學生的臆測（conjecture），並且經由學生自主佈題與解題，組織整個探究過程，例如當學生處理了「偶數加偶數還是偶數」的問題後，有些學生可能會好奇的問「那奇數加奇數呢？」，這些就會變成探究的機會，教師可以把握這些機會，讓學生探究這些問題，或是將這些問題變成學生的回家功課。原來的小問題，可以導致更多的問題和臆測，這個步驟，可以變成教師進入下個單元前的轉折，然而，學生除了偶然的提問，更需要教師刺激他們探究，教師可以藉由與學生討論的機會，引發一些學生想探究的問題。

四、課程標準的觀點

課程標準所揭露的探究是整個社會或研究社群所期待的數學教學，而課程標準的發展來自於數學本質與數學教育研究。American Association for the Advancement of Science（AAAS, 1993）認為的數學探究，就像是數學家在做數學所進行的工作，數學可以被描述為一個探索的循環（a cycle of investigation），透過這個發展數學觀念（mathematical ideas）的有效性。它進一步提出數學探究的循環（cycle），分別是：「表徵」（representation）、「操弄」（manipulation）與「驗證」（validation）。「表徵」意謂使用符號或算式來表徵真實，在這個過程，學生最主要目標是能理解用符號來表徵抽象，並且應用來解題。例如想像一些數量、分配它們的性質、選擇某些運算、用符號表徵事物、設定問題、然後依據邏輯規則、移動這些符號、獲得答案，這些就是操弄的過程。「驗證」在數學中是判斷（judgment），而非權威（authority），一個解答的好壞，應該關係到這個問題是如何形成的，以及解題的過程如何實施，在真實的數學探究中，唯一「正確」的答案並不存在。AAAS（1993）認為學生應該要有機會使用整個循環（use the entire cycle），去執行他們的數學探究，然而，AAAS 也認為，數學探究雖然包含上述三個主要過程，但這些過程的次序（order）並非一成不變的，也不要將所有經歷這三個過程所產出的探究結果當成正確解答，換言之，這三個過程有其必然重要性，但不要將這三個過程當作一種數學探究或求得

數學解答的固定模式，它可能會針對不同的探究有不同的重視之處，例如某個當我們想應用數學模型於經濟學上，那麼一個有效的探究應該在於其探究的結果可否解決實際的經濟學問題。從上述來看，AAAS 著重於描述「數學行為」的本質。

英國教育技能部（Department for Education and Skills [DfES], 2001, p. 21）主張「探究是數學的核心，探究技能可以讓學生問問題、定義探究的問題、計畫研究（plan research）、預期結果（predict outcomes）、推論與作結論」。DfES 主要在強調探究的重要，並且定義探究教學為何。

National Council of Teachers of Mathematics（NCTM, 1989）在評量標準二、「多元的資訊來源」（multiple sources of information）中定義：數學知識是將數學概念和程序整合（integration）在一個連貫（coherent）且有意義（meaningful）的結構，意謂學生能夠在不同形式的任務（task）中，展現整合性的數學知識，因為數學知識是整合、連貫且有意義的結構，為了讓學生獲得整合性的數學知識，課程標準倡議（advocate）探究取向（inquiry orient）教學，應以解題為媒介，透過應用所學的數學知識達成，這意味將課本中所學的數學知識進行統整與融會貫通，並實際應用以解決真實情境化的問題，在此過程中，學生將有進一步的機會再次統整所學，並獲得新知識。NCTM（1989）進一步解釋他們所定義的「解題」，認為解題就是「探究」與「應用」（application）的方法：

> 數學課程必須包含多樣的「探究」和「應用」的經驗，這個探究與應用是以解題做為手段，如此，學生能夠：1.使用解題取向去探索（investigate）和瞭解數學主題；2.由數學內與數學外的情境，型塑問題；3.發展和應用多樣的策略去解決問題，注重多重的步驟和非例行之問題；4.產生解答和策略至新的問題情境；5.在有意義的使用數學中，獲得自信（p. 75）。

NCTM（2000）在「推理與證明」的課程標準中提及：「教師應該努力的創造討論、提問和聆聽的教室風氣。教師應該期待他們的學生去尋找、形成（formulate）、批判解釋，因此課室轉變成探究的社群」（p. 346）。那麼甚麼是「探究的社群」？簡單的說，就是課室中充滿對話過程。我們認為 NCTM（1991）對於「課室中對話」（discourse of a classroom）的說明隱含著對「探究的社群」之解釋，NCTM（1991）解釋「課室中對話」包含了數個面向：表徵的方式、思考的方式、說話的方式、同意和不同意的方式（the ways of representing, thinking, talking, agreeing and disagreeing），換言之，這代表課室中我們如何提出證據去說服他人，這些方法表現了學生所學習的數學是人類探究的領域（a domain of human inquiry）。此外，NCTM（1991）也提到對話（discourse）與建立數學知識的基本（fundamental）有關，因為「對話過程」或「數學家論證

過程」讓數學變得真實與可理解，意即「對話過程」讓這個知識可被大眾信服；而數學推理和證據是這個對話的基礎，意味數學推理和找出證據（論證）在課室對話中很重要。

NCTM 的觀點與前述數學本質的觀點相符，他們皆認同數學是人類探究後的產物，那甚麼是 NCTM 所認為的「探究」？它是數學解題、它是求知的方法，更具體的說它是「形成」與「解決」問題、產生臆測（making conjectures）、建立論證（constructing arguments）、驗證解答、與評價數學主張的合理性（evaluating the reasonableness of mathematical claims），這也是 NCTM（1989, 1991）所稱的數學力量（mathematical power）。

五、建模的觀點（modeling）

建模的觀點主要在強調數學如何與真實世界連結，這個連結的程序就是一種數學探究的程序。Wubbels、Korthagen 與 Broekman（1997）的數學探究教學模型，是經由一連串的步驟，將真實世界的問題轉化（translation）成數學問題，並且利用數學的方法創造出（creation）答案後，再轉化到真實世界中，之後藉由反思（reflection）獲得更精煉（refined）的問題、一般化（generalized）的問題、或是新的問題（圖 1），這種真實世界與數學世界間的交互轉換過程，便是他們所謂的數學探究。

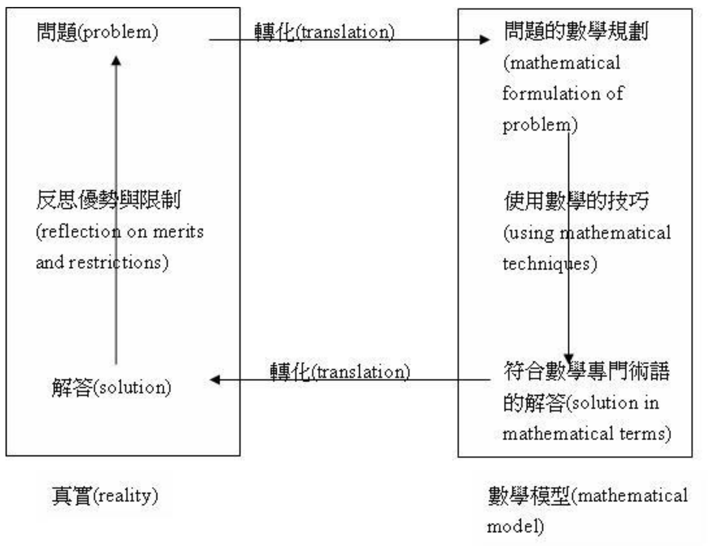


圖 1　數學的探究模型。翻譯自“Preparing Teachers for Realistic Mathematics Education,” by T. Wubbles, F, Korthagen, and H. Broekman, 1997, *Educational Studies in Mathematics*, *32*, p.7.

我們整合上述學者意見（圖 2），認為「數學探究」是指數學知識發展的過程與方法，在這個構念底下，學生猶如數學家在探索知識，過程中充滿不確定性和衝突性。在課室中，教師主要的工作是引起學生討論與論證，而學生應論述自己的想法，挑戰其他同學的思維。擬題是一

個幫助學生探究的策略，教師利用學生的觀察結果與提問，與學生共同溝通，創造一些新的問題，引發學生的探究。相對的，課程中必須安排讓學生有臆測、推理、論證、解題與展現多元策略與開發新問題的機會。從真實數學（realistic mathematics）的觀點來看，數學探究也是學生如何發展數學模型解決生活實際問題的過程。

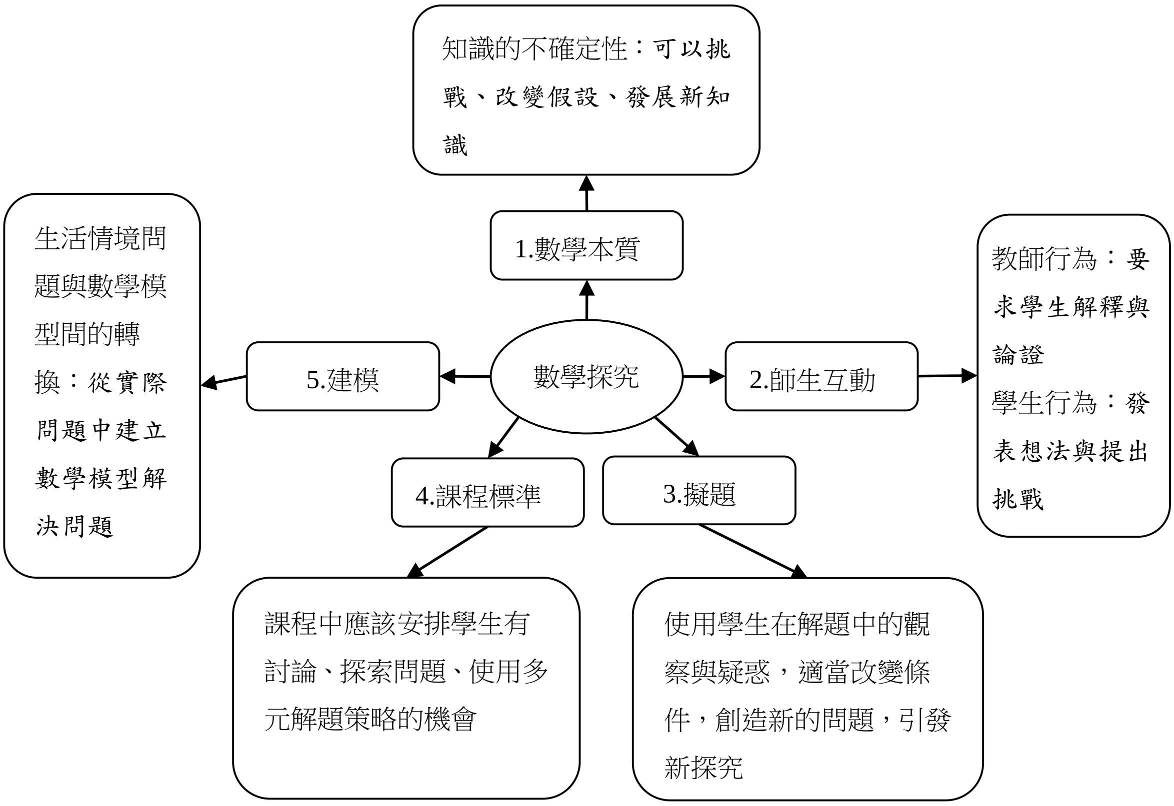


圖 2　數學探究的五個觀點

參、數學探究與解題

數學解題被課綱（NCTM, 2000）視為學習的核心，這裡想要解釋他們細微的差異。事實上，整體來看，把數學探究當成數學解題也是正確的。

數學解題是數學探究的子集。Baroody 與 Coslick（1998）認為數學探究，包含了三個過程：「數學解題」、「數學推理」和「數學溝通」。廣義的來說，數學解題是指整個解決問題的過程，包括形成問題（或被給予問題）與使用解題策略等；數學推理，泛指所有在數學中的邏輯，包括直覺、歸納、演繹與臆測等，傳統上，探索一個問題應該是來自臆測，接著再經由直覺或歸納推理獲致結論或主張；數學溝通，是指澄清或反思對於數學概念的思考，藉由這個合作學習的過程，互相檢驗彼此的相法，並促進數學概念的思考與瞭解。

Lederman 與 Niess（2000）指出探究所強調的精神，比解題提供了更多瞭解學生思考的機會，因為探究強調的「臆測」與「論證」（或證明），較能充分顯露數學學習的過程；Marzano 等人（1988）提出探究是用來預測和解釋這個世界，符合數學建模（mathematical modeling）的精神，比解題的層次更高深。

Borasi（1996）認為解題取向，是指問題是由教師設定的，並且教師已經預先知道解答；發現學習則是學生的發現已在事前設定先好，不會產生更多的疑問；然而在探究的模式下，學生參與在一個更開放與更具生產性（generative）的過程（意味能有較多的數學知識產出），在事前，不管是教師或學生都可能不知道探究的結果，並且學生通常主動的融入，關於探究的方向與範圍的決策，然而這並不意味教師放棄他計畫與精心編排（orchestrating）課室活動的角色，對於探究取向的數學教學，教師並沒有減少他們的責任，反之，他們必須承擔新的任務，即是，他們必須提供刺激與結構的活動，幫助學生進行探究。

肆、數學探究教學的架構

數學探究教學並沒有具體的固定方式（Borasi, 1992），重點在於讓學生能自主探索、找到問題的答案，相關論述如下：

Siegel、Borasi 與 Fonzi（1998）提出四個數學探究階段（稱之為「探究環」（inquiry cycle），代表這四階段是一個循環，階段四可再回到階段一）：

1. 準備與聚焦探究（setting the stage and focusing the inquiry）。此階段是探究的暖身階段，主要工作是：（1）透過教師介紹活動，喚起學生的初始想法與欲探究主題之知識；（2）並且挑戰學生的原始想法，點燃學生的興趣，（3）聚焦在值得討論的議題上。
2. 執行探究（carrying out the inquiry）。在上述階段 1.中決定出問題與探究的方向後，（1）學生開始進行臆測、分析、推理與試驗等探究行為，（2）並經討論後，獲得初步的結果。
3. 綜合（synthesizing）和溝通來自探究的結果。此階段是將上個階段的探究產生最後結論。過程包含：（1）與他人討論，藉由相互辨證、論證的過程，獲致最後結果；（2）學生必須學習如何闡述自己的想法（如運用表格、圖形、證明等）與回應他人的意見。（3）另外一方面，教師在此階段中，適時引導或幫助學生作結論（可使用閱讀文章或讀教科書之策略）。
4. 評估與延伸（taking stock and looking ahead）。此階段的核心是「反思」，內容如下：（1）學生必須反思這整個探究的過程；（2）確認與討論在探究過程中所獲得的數學知識；（3）教師也藉由評鑑學生的探究，幫助學生精進下次的探究；（4）最後，學生可以依據對探究結果的反思，形成新的探究問題，開啟下一個新的探究循環。

McNeal 與 Simon（2000）舉出數學探究教學是：（一）由老師或學生佈題；（二）學生在小組中工作；（三）教師要求學生提出具說服力（persuasive）的論證；（四）並且學生討論這些論證。因此，教師與學生在數學探究教學中的工作分別是：

1. 教師的工作是：（1）要求解釋、（2）要求澄清與示範、（3）要求小組提出論證、（4）佈新的問題。
2. 學生的工作是：（1）發表想法（ideas）、（2）問彼此問題、（3）在討論中挑戰（challenge）或精煉（refine）想法。

Inoue（2011）認為數學探究是學生在開放問題中，有機會探索和驗證不同的解題策略。在他的研究中，他認為數學探究教學有四個主要的元素：（1）教師給予一個能引起豐富概念性討論（conceptual discussion）的數學問題。（2）學生分組或個人解題，而教師巡視其中。（3）全班性討論。比較、對比不同解題策略，並獲得一致的共識。（4）總結。其中，步驟（3）是整個數學探究教學的關鍵。

綜合上述，數學探究教學起始於（1）問題、（2）接著學生開始推理與論證對問題的猜測、（3）再與同學間進行討論，並比較不同的策略、（4）最後總結整個學習，發展較精緻的想法。在其後的教學實例中，我們將以 Siegel、Borasi 與 Fonzi（1998）作為架構進行分析，（1）因為其架構將 McNeal 與 Simon（2000）、Inoue（2011）的想法以較有邏輯系統性的呈現，有助於清楚呈現教學的流程。此外，相較於其他兩位學者，（2）Borasi 在其著作中（Borasi, 1992; Siegel et al., 1998），亦有依據探究環架構呈現其教學範例，可以幫助我們更加瞭解如何使用這個架構。

伍、數學探究教學實例

在下面的教學案例中，我們依序呈現國小、國中與高中三個階段的數學探究教學，藉此展現探究教學可在各個層級實施。

在教學上，國小階段的學生應該著重於讓學生解釋或發表自己的想法，或是讓學生知道或體驗到數學思考的過程，不須將焦點放在讓學生學習較高階的數學知識（非當前教學主題），或是更抽象的思考能力上，例如過度要求學生必須要有形式化證明的能力。國中程度的學生，教師可以嘗試引導學生更進階的探究層次（這同時包含了學生的探究能力與學習或使用更進階的數學知識）。簡而言之，可以與學生有更多的討論與互動，引導他們產生較抽象的數學知識，例如本文的範例二，除了以純粹數字來探討兩個量的關係外，我們期待學生能夠用代數表徵兩個量的一般性（使用 x, y 形成通式）。至於高中階段的學生，我們將賦予他們更多的自主性，教師的角色是一個富有知識的諮詢者、討論者，學生應該更自主的主導自己的探究，甚至自己擬定探究問題。綜合上述，不同階段與教師的介入程度有關，越低階段的學生，需要教師越多的引

導與協助。國小階段的學生重點在於體驗探究過程，至於探究的成果（學習目標）需要老師大量的協助，國中階段的學生應該可以在老師適當的幫助下，透過探究過程來學習數學知識，而高中階段的學生可以擁有更開放的探究過程，老師的介入程度最低。

在引入這些不同的例子中，我們嘗試用實際在文獻中發表的範例，換言之這些教學案例曾經被實際實施過，並非只是一種理念設計，強調這些都是可行的範例。此外，我們也交錯一些不同主題的設計，例如國小、高中階段的課程內容直接來自課本內容；而國中階段則是課外情境化的問題與課本連結。

從前述階段，我們可以感受到數學知識是人類探索以後的結果，在這些教案中，我們想要展現如何去探索建立這些知識，意即如何想問題、解問題、發表想法、在別人挑戰後（反駁），精進自己的想法。

一、國小階段：奇數與偶數的定義

教學主題：奇數與偶數的定義

探究活動：小明說：「6 可以是奇數，也可以是偶數，因為 6 可分成 3 堆(2+2+2)與 2 堆(3+3)」，你覺得這位學生的說法對嗎？為什麼？

階段	教學內容
1. 準備和聚焦	**藉由一位學生的說法，挑戰學生的已知（6 非偶數），進而引起學生討論如何定義奇數與偶數** 1. 告訴學生數字可分類為奇數與偶數，並實際舉出一些奇數與偶數的例子 參考結果：1, 3, 5, 7…與 2, 4, 6, 8… 2. 詢問學生是否可以舉出更多相似的例子？ 參考結果：學生說出偶數可以是 10, 12, 14… 3. 評量學生所給的例子 4. 引入探究題目，讓學生討論小明的說法
2. 執行	**學生開始推理與檢驗小明的想法，並提出自己的看法分組討論的方式進行** 1. 詢問學生是否能夠給出更多與小明說法相似的例子，所謂相似的例子是指與小明一樣，用同樣的方法去定義奇數或偶數，即是這些數字能夠用加法拆解成奇數個或偶數個重複的數字相加，更具體的例子如參考結果所示： 參考結果：數字 10，10=5+5, 10=2+2+2+2+2 2. 引導學生探索小明的分類規則為何？ 參考結果：$4n+2$

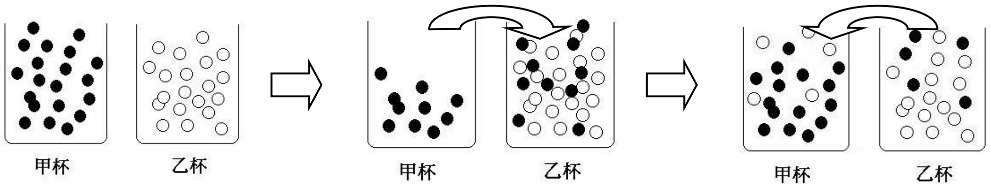
3. 綜合和溝通	**總結學生的整個探究，並且引導學生彼此溝通自己的探究成果** 1. 學生分享自己的想法，並與其他同學互動，接受別人的挑戰。 參考結果： 學生可能會說小明是錯的，因為 6 是偶數不是奇數 學生可能會說小明是錯的，因為如果一個數可以分作偶數與奇數，那麼就不需要發明這樣的分類方法，沒有意義 學生可能會說小明是錯的，因為偶數是可以被 2 整除的數 2. 教師總結或精緻化學生的想法：對於奇數與偶數可以有哪些不同的定義方法？ 參考結果： 平分：一個數可以分作恰相等的兩堆稱作偶數（例：6=3+3） 配對：一個數可以兩個一數，恰全部數完稱作偶數（例：6=2+2+2，與能被 2 整除同意義） 錯置：從 0 出發，偶數與奇數錯置（偶數、奇數、偶數、奇數…）
4. 評估和延伸	**引導學生反思，讓學生瞭解與精進自己的探究過程，並進一步延伸新的探究議題** 1. 學生討論他們的探究過程，分享所獲得數學概念為何？ 參考結果：例如學生提到奇數、偶數的定義 2. 詢問學生偶數加偶數答案一定是偶數嗎？為什麼？ 參考結果：是，方法不唯一，例如學生可畫圖（如圈圈數量代表數字）或列舉多個例子來說明 3. 奇數加偶數答案是偶數還是奇數？為什麼？ 參考結果：奇數，方法不唯一，例如學生可畫圖（如圈圈數量代表數字）或列舉多個例子來說明 4. 奇數加奇數答案一定是奇數嗎？為什麼？ 參考結果：不是，方法不唯一，學生可畫圖（如圈圈數量代表數字）或列舉多個例子來說明

註：原文是對國小三年級進行教學，在此不限定年級。整理自 Ball & Bass (2009)。

二、國中階段：黑白棋

教學主題：以符號代表數，用代數式一般化（generalization）兩個量之間的關係

探究活動：（1）在甲、乙兩個「不透明」杯子中分別放入黑、白棋各 20 子；接著，（2）從甲杯（黑棋）中取 10 子放入乙杯（白棋）中；（3）再從乙杯（現為黑、白棋相混）中「隨機」取 10 子放至甲杯中。請問：甲杯中的白棋數量與乙杯中的黑棋數量，哪一個比較多？



階段	教學內容
1. 準備和聚焦	**藉由展示一個調低酒精濃度的活動，引起學生探究的動機** 1. 教師展示兩個的大小一樣空杯，將其中一杯裝滿水，另外一杯裝$\frac{1}{2}$杯 100%的純酒精。 2. 將水倒入純酒精中，直到純酒精的杯子全滿為止（倒$\frac{1}{2}$杯的水至酒精中），此時純酒精變成酒水混合液。 3. 再將酒水混合液倒回原來的水杯中，讓水杯再度全滿，酒精杯剩下$\frac{1}{2}$，此時原來的水杯中也有酒精。 4. 詢問學生，此時「水杯」中的「酒精」比較多？還是純「酒精」杯中的「水」比較多？ 參考結果：一樣多，因為水杯中失去的水被酒精補滿，酒精杯中失去的酒精被水補滿，失去多少水等於得到多少酒精（也可從濃度的觀點來看）。 5. 引入本次欲進行的活動，讓學生用具體物進行探究：
2. 執行	**學生使用具體物操作實驗、進而驗證自己的想法並提出結論** 1. 分組討論的方式進行 2. 教師可於此時再次解釋題意幫助學生了解問題 3. 學生使用教具（黑、白棋、兩空杯）實際操作、並驗證自己的猜想 4. 學生用紙筆紀錄與歸納實驗後的結果（學生可用未知數 x 一般化）
3. 綜合和溝通	**總結學生的整個探究，並且引導學生彼此溝通自己的探究成果** 1. 教師引導學生上台分組報告，詳述自己的想法 2. 教師引導學生對於不同想法進行批判與討論 學生可能認為不一定，因為機率是公平的，可以引導學生多試幾次，看結果是否恆定 3. 教師總結這些探究結果，並引導學生用較抽象的數學符號，去討論兩個量之間的關係（例如黑棋拿走 x 個，剩下 $(20-x)$ 個）

	引導學生反思，讓學生瞭解與精進自己的探究過程，並進一步延伸新的探究議題 1. 學生討論他們的探究過程，分享所獲得數學概念為何。 （請教師協助總結） 2. 詢問學生，假使改變初始的黑、白棋個數會不會影響答案？ 參考結果：不會 3. 詢問學生，假使改變拿走乙杯回甲杯的數量，會不會影響答案？ 參考結果：會 4. 在什麼情況下，甲杯中的白棋數量必大於乙杯中的黑棋數量？* 參考結果：一開始從甲杯拿走的量小於從乙杯再拿回來的量，例如一開始從甲杯拿走 5 顆黑棋，但從乙杯拿 10 顆相混的棋子回來 5. 在什麼情況下，甲杯中的白棋數量必等於乙杯中的黑棋數量？ 參考結果：拿走與拿回的量相同，本題即為此例 在什麼情況下，甲杯中的白棋數量必小於乙杯中的黑棋數量？ 參考結果：一開始從甲杯拿走的量大於從乙杯再拿回來的量，例如一開始從甲杯拿走 10 顆黑棋，但只從乙杯拿 5 顆相混的棋子回來
4. 評估和延伸	

註：活動設計參考自 Eastaway & Wyndham (1998/2004)。

* 設從甲杯先取走 w 個黑棋，再從乙杯拿回 x 個黑棋與 y 個白棋

When $w < x + y$, $(w - x) < y$, $(w-x)$*是乙杯中黑棋的數量*，y *是甲杯中白棋的數量*

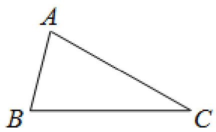
When $w = x + y$, $(w - x) = y$

When $w > x + y$, $(w - x) > y$

三、高中階段：三角探究

教學主題：餘弦定理

如下圖， ΔABC 是老農夫擁有的一塊田地，$\overline{AB} = 7km$，$\overline{BC} = 8km$，$\overline{AC} = 9km$。



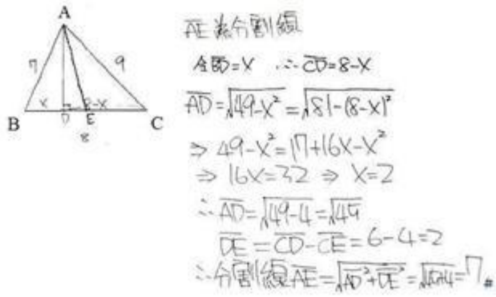
1. 老農夫想將這塊地，平分給他的兩個兒子，請問該怎麼做？為什麼？
2. 承上，求這個分割線的長度為何？

階段	教學內容
1. 準備和聚焦	1. 引導學生進入問題情境，詢問如何平分此三角形農地。 參考結果：學生可能會取中線，因為同底等高兩面積相等 學生可能會取$\overline{AB}$與$\overline{AC}$的中點，因為誤認為面積相等 2. 引導學生聚焦於取中線，並討論「如何求此中線長」

2. 執行探究

1. 引導學生閱讀課本找到可用的公式，或從過去的經驗解題。

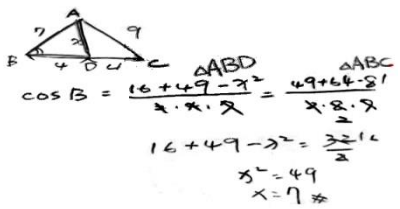
   參考結果：第五組學生用畢氏定理解題（如下圖）。該組學生先誤認「$\overline{AE}=\overline{AB}\sin B$」；接著引發作輔助線：高$\overline{AD}$；再以高相等為條件列式，分別解出$\overline{AD}$與$\overline{DE}$，最後使用畢氏定理得$\overline{AE}$。



3. 綜合和溝通

1. 教師刻意讓第五組先上台分享（因使用大家較熟悉的畢氏定理解題），接著讓第三組分享使用餘弦定理解法（挑戰大家的想法），進而引導大家聚焦「餘弦定理」。

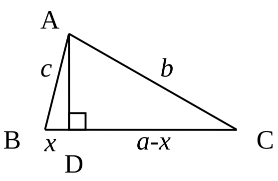
   參考結果：



4. 評估與延伸

1. 教學者先帶領大家回顧求取中線長的兩種方式，接著進一步解釋餘弦定理，用不同方式表示餘弦定理（如 $b^2=c^2+a^2-2cacosB$），並連結畢氏定理與餘弦定理的關係（畢氏定理是餘弦定理的特例）。
2. 討論完餘弦定理後，教學者進一步引發新探究問題「證明餘弦定理」，學生一開始對此感到茫然，教學者因此更具體說明題意，並引導學生用在先前解中線長的方式（作高）來證明它。

   參考結果：第五組學生模仿剛剛求中線長的方式（作高，並以高相等為條件列方程式），很快得出接近的答案（$b^2=c^2+a^2-2ax$，$\overline{BD}=x$），然而他們不知如何將 x 代換成 $cosB$，經教學者提示後證明成功。



註：整理自秦爾聰、林勇吉、陳俊源（2009）。

陸、結論

本文中，我們嘗試透過深入的文獻分析，幫助讀者勾勒數學探究的輪廓，從上述內容來看，我們也許可以這樣簡單的解讀數學探究：它是學習者「研究」數學問題的總稱。更清楚地來說，它就是數學家想問題、解問題、發表想法、接受挑戰、產生更精緻想法的過程，在這個過程中，它和數學解題、數學推理、數學溝通、臆測、論證的過程環環相扣。

改革取向的數學教學大聲疾呼必須幫助學生成為「獨立的學習者」（e.g., NCTM, 2000），「數學探究」與此理念完全相符。在數學探究教學中，學生將擁有主動「思考」、「臆測」、「推理」、「論證」、「解釋」與「挑戰」他人等能力，主動參與知識的建構過程，成為獨立的學習者。是故，瞭解數學探究與從事數學探究相關研究的重要性，已不言可喻。

參考文獻

秦爾聰、林勇吉、陳俊源（2009）。探討高二學生在三角探究教學中的解題表現。**科學教育學刊**。**17**（5），433-458。

Eastaway, R., & Wyndham, J.（2004）。**為什麼公車一次來三班？：81 個生活中隱藏的數學謎題**（*Why do buses come in threes?: The hidden mathematics of everyday life*；蔡承志譯）。臺北市：三言社。（原作出版於 1998 年）

American Association for the Advancement of Science. (1993). *Benchmarks for science literacy*. New York, NY: Oxford University Press.

Anderson, R. D. (2002). Reforming science teaching: What research says about inquiry. *Journal of Science Teacher Education*, *13*(1), 1-12.

Ball, D. L., & Bass, H. (2009, March). *With an eye on the mathematical horizon: knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures*. Paper presented at the 43rd Jahrestagung der Gesellschaft fur Didaktik der Mathematik, Oldenburg, Germany. Retrieved from http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/BzMU/BzMU2009/Beitraege/Hauptvortraege/BALL_Deborah_BASS_Hyman_2009_Horizon.pdf

Baroody, A. J. & Coslick, R. T. (1998). *Fostering children's mathematical power: An investigative approach to K-8 mathematics instruction*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Borasi, R. (1992). *Learning mathematics through inquiry.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Borasi, R. (1996). *Reconceiving mathematics instruction: A focus on errors*. Norwood, NJ: Ablex.

Bybee, R. (2000). Teaching science as inquiry. In J. Minstrell & E. van Zee (Eds.), *Inquiring into inquiry learning and teaching in science*. Washington, DC: American Association for the Advancement of Science.

Cai, J., & Hwang, S. (2002). Generalized and generative thinking in U.S. and Chinese students' mathematical problem solving and problem posing. *Journal of Mathematical Behavior, 21*(4), 401-421.

Chin, E. T., Lin, Y. C., & Lin, C. P. (2009). A study of improving 7th graders' mathematical problem solving and communication abilities through inquiry-based mathematics teaching. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & C. Sakonidis (Eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, p. 359). Thessaloniki, Greece: PME.

Chin, E. T., Lin, Y. C., & Wang, Y. L. (2009). An investigation of the influence of implementing inquiry-based mathematics teaching on mathematics anxiety and problem solving process. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & C. Sakonidis (Eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, p. 447). Thessaloniki, Greece: PME.

Chin, E. T., Lin, Y. C., Chuang, C. W., & Tuan, H. L. (2007). The influence of inquiry-based mathematics teaching on 11th grade high achievers: Focusing on metacognition. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, & D. Y. Seo (Eds.). *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 129-136). Seoul, Korea: PME.

Department for Education and Skills. (2001). *National strategy for key stage 3*. London: DfES.

Dewey, J. (1910). Science as subject-matter and as method. *Science, 31*, 121–127.

Dewey, J. (1933). *How we think: A restatement of the relation of reflective thinking to the educative process*. Boston, MA: D.C. Heath.

Dossey, J. A. (1992). The nature of mathematics: Its role and its influence, In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 39-48). New York, NY: Macmillan.

Inoue, N. (2011). Zen and the art of neriage: Facilitating consensus building in mathematics inquiry lessons through lesson study. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(1), 5-23.

Jarrett, D. (1997). *Inquiry strategies for science and mathematics learning: It's just good teaching*. Portland, OR: Northwest Regional Educational Laboratory.

Jaworski, B. (1994). *Investigating mathematics teaching: A constructivist enquiry*. London, UK: The Falmer Press.

Kline, M. (1980). *Mathematics: The loss of certainty*. New York, NY: Oxford University Press.

Kuhn, T. S. (1970). *The structure of scientific revolutions*. Chicago, IL: University of Chicago Press.

Lakatos, I. (Ed.). (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Lederman, N. G., & Niess, M. L. (2000). Problem solving and solving problems: Inquiry about inquiry. *School Science and Mathematics, 100*(3), 113-116.

Lee, L. (2001). An inquiry-based mathematics classroom. *Voyages in Mathematics and Science, 26*, 3-6.

Marzano, R. J., Brandt, R. S., Hughes, C. S., Jones, B. F., Presseisen, B, Z., Rankin, S. C., & Suhor, C. (1988). Dimensions of thinking: A framework for curriculum and instruction. Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.

McNeal, B. & Simon, M. A. (2000). Mathematics culture clash: Negotiating new classroom norms with prospective teachers. *Journal of Mathematical Behavior, 18*(4), 475-509.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989) *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000) *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

Peirce, C. S. (1982). The fixation of belief. In H. S. Thayer (Ed.), *Pragmatism: The classic writings* (pp. 61-78). Indianapolis, IN: Hackett. (Original work published 1877)

Romberg, T., & Kaput, J. (1999). Mathematics worth teaching, mathematics worth understanding. In E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 3-32). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Siegel, M., Borasi, R., & Fonzi, J. (1998). Supporting students' mathematical inquiries through reading. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(4), 378-413.

Von Glasersfeld, E. (1990). Chapter 2: An exposition of constructivism: Why some like it radical. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph, 4*, 19-29.

Whitin, P. (2006). Meeting the challenges of negotiated mathematical inquiry. *Teaching & Learning: The Journal of Natural Inquiry and Reflective Practice*, *21* (1), 59–83.

Wood, T., & Turner-Vorbeck, T. (2001). Extending the conception of mathematics teaching. In T. Wood, B. Nelson, & J. Warfield (Eds.), *Beyond classical pedagogy: Teaching elementary school mathematics* (pp. 185-208). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Wood, T., Williams, G., & McNeal, B. (2006). Children's mathematical thinking revealed in different classroom cultures. *Journal for Research in Mathematics Education*, *37*(3), 222-255.

Wubbels, T., Korthagen, F., & Broekman, H. (1997). Preparing teachers for realistic mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 32*, 1-28.

Yerushalmy, M., Chazan, D., & Gordon, M. (1990). Mathematical problem posing: Implications for facilitating student inquiry in classrooms. *Instructional Science*, *19*, 219-245.

Zion, M., Cohen, S., & Amir, R. (2007). The spectrum of dynamic inquiry teaching practices. *Research in Science Education*, *37*(4), 423-447.