

論壇

論壇 1：數學教師的挑戰：數學探究教學

作者 | 左台益（國立臺灣師範大學數學系教授）

無論在數學教育的研究或教學現場的實務面向，均朝向以學習者為中心，能提供學生主動探索的機會來發展數學知識，已成為近來數學教學的共識。因而數學探究教學，亦即，鼓勵學習者能如同數學專業人員般進行數學探究活動的教學也被引進於數學課室。數學探究教學期望學習者在探索的活動中，經驗多樣的數學思維與溝通表達技能，進而從中發展數學知識。然而以探索取向進行教學，對數學教師卻是極大的挑戰，因其不僅是教學策略的改變，更牽涉數學教學信念的調整、數學教師本身的數學專業素養以及經營探究活動所需形成的社會與數學規範。如何讓中小學數學教師瞭解探究教學的意涵與實踐準則，以使教師能安心地進行數學探究教學，本身即是需要審慎思考研究的主题。

由林勇吉、秦爾聰與段曉林（2014）共同發表之文章〈數學探究之意義初探與教學設計實例〉，即嘗試說明數學探究的意義與實施探究教學的架構。此文從數學本質、師生互動、擬題、課程標準與建模五個觀點概論數學探究的意涵，作者們總結「數學探究」為「數學知識發展的過程與方法，在這個構念底下，學生猶如數學家在探索知識，過程中充滿不確定性和衝突性（頁7）」。數學探究教學，「在課室中，教師主要的工作是引起學生討論與論證，而學生應論述自己的想法，挑戰其他同學的思維（頁7）」。這對一般傳統以講述法為主的數學教師可能在教學信念上是一大挑戰，他們要相信學生可以如同數學家般進行數學探索，而且能從此探索中發展數學知識。數學教師要能引起學生討論且願意容忍學生可能的發散性思考，這些教學信念的調適或許需要時間的磨合及成功案例的鼓勵。

〈數學探究之意義初探與教學設計實例〉一文參考 Siegel、Borasi 與 Fonzi（1998）四個階段的數學探究環，認為「數學探究教學起始於（1）問題、（2）接著學生開始推理與論證對問題的猜測、（3）再與同學間進行討論，並比較不同的策略、（4）最後總結整個學習，發展較精緻的想法」做為數學探究教學架構。因此，透過情境問題激發學生啟動數學探究活動的關鍵。教師如何佈置有趣且具挑戰性的問題激發學生進行探究，對教師而言可能也是一大挑戰，事實上，一個有趣且具挑戰性的問題本身也是推動學生對數學產生興趣方法之一。這需要教師對數學專業的素養。進行數學探究教學時，教師思考問題情境不僅在發展問題，更重要的是如何發展學生的能力來尋找一個好問題，亦即，「教師利用學生的觀察結果與『提問』，與學生共同溝通，『創造一些新的問題』，引發學生的探究（頁8）」。

林勇吉等人（2014）在文章中提供相關研究文獻的教學案例，分別為國小階段的奇數與偶數的定義，國中階段的黑白棋與高中階段的三角探究。他們主張國小階段重點在體驗探究過程，國中階段重點在透過探究過程來學習數學知識，而高中階段讓學生擁有更開放的探究過程；而

老師的介入程度而小學到高中逐漸降低。從這三個案例均可以理解學生的積極參與且遵守討論批判的規範是數學探究教學的關鍵。這也是教師進行探究教學的挑戰，教師介入的時機與程度以及如何建立學生探究社群組織與探索文化的社會規範均有待教師長期的經營。成功探究教學案例是支持教師願意投入探究教學的動機。歐盟近來進行大規模跨國計畫，在歐盟跨國間推動中小學數學與科學探究，也發展出一些教學材料，並將這些素材放在網路上免費提供使用 (www.primas-project.eu)，或許有興趣的教師可從此收尋有用資料。

參考文獻

- 林勇吉、秦爾聰、段曉林 (2014)。數學探究之意義初探與教學設計實例。臺灣數學教師，35 (2)，1-18。
- Siegel, M., Borasi, R., & Fonzi, J. (1998). Supporting students' mathematical inquiries through reading. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(4), 378-413.



論壇 2：關於〈數學探究之意義初探與教學設計實例〉一文之評述

作者 | 英家銘（臺北醫學大學通識教育中心助理教授）

〈數學探究之意義初探與教學設計實例〉這篇論文從「數學探究」的不同觀點出發，向讀者介紹數學探究的意義與其可能的操作模式。接下來，作者整理文獻，說明數學探究的其中一類教學模式，依照「準備與聚焦探究」、「執行探究」、「綜合與溝通」、「評估與延伸」這樣的探究循環進行。最後，作者舉出了算術、代數與幾何教學的三個實例，可分別適用於小學、國中與高中階段的探究教學。整篇論文結構與理路清楚，並且在最後以實例讓讀者理解數學探究的操作方式，使得對此有興趣的現場教師，有可能依照文中的模式進行教學，甚至發展出適合自己的教學方法。從實務的角度來說，這的確是一篇值得稱讚的好文章。

對於文中提到的三個探究實例，作者認為在小學階段重點在體驗探究過程，在學習成果上需要教師大量的協助，而國中與高中則可以有較開放的探究過程，年紀越大，教師的介入程度越低。原則上來說，這是頗為正確的思考。然而，教師的「介入」，很多時候不見得是要幫助同學達到「正確」的結果，而比較是把探究的過程釐清頭緒，形成未來繼續探究的方向或是結論，無論這些方向或結論是否與教學目標相同，或是這個結論是否夠形式化。任何一種非傳統教學法的介入，都會招致「影響上課進度」這一類的批評。因此在實務上，除了傳統的進度與成績，我們對教學實驗的目標或許可以更開放。當老師讓孩子的探究空間放得更寬，得到各種不同的有趣結果，那麼「數學探究」這個教學方法可能就更有說服力。

舉例來說，本文舉例中大多數的互動過程，都是同學分享加上教師總結與引導，或是老師在綜合與溝通階段給出關鍵問題，引導同學得到正確的解答。這當然是有助於達到原本設定的教學目標。但如果教師能讓同學在發表之後，由其他同學對原本報告的同學提出質疑，也可以同時培養同學的「批判思考」能力。讓不同組的同學「交相問難」，此時教師的功能就變成協助同學「把話說清楚」的「形式化」功能。在目前社會普遍對國文作文教學太注重文采而不重邏輯的不滿之下，數學教學對批判思維的幫助，或許是我們更重要的貢獻。

另外，同學的某些「錯誤」答案，其實也可能是更多學習機會的出現。文中第三例的三角探究，原本的目標是餘弦定理的應用。題目給定三角形土地的三邊長，問如何將之平分。事實上，這是一個極為開放的問題，中線不是唯一的答案。教師在操作數學探究時，必須去預期學生可能提出的不同方法。學生可能直接計算面積，然後在三角形中做出數個長方形總和為其面積的一半。這個方法不漂亮，但是切割成小長方形其實是積分的根本概念。又比如說，作者指出的「學生可能會取（三角形兩邊的）中點，因為誤認面積相等」。取兩邊中點連線，分割出來的小三角形的確只有原來三角形的 $1/4$ ，而我們知道這個答案的原因是因為學生必須已經有「相似形」的基本概念。如果是這樣的話，那麼這個「錯誤」加上相似形的先備知識就可以引申到更有趣的探究，那就是：如果我們要做底邊平行線將三角形平分，那麼這條線的高度為何？探究這個問題的難度不見得比使用餘弦定理困難，但是它不是傳統問題，而且更有趣。

綜上所述，「數學探究」這樣的教學法卻是不容易進行的，因為學生不見得能達到我們設定

好的目標。然而，如果教師有充分的準備，而且能夠用各種方式鼓勵同學參與探究及討論的話，這個方法能夠達到的效果，或許會比原本的設定更豐富更多元。



論壇 3：〈數學探究之意義初探與教學設計實例〉之我見

作者 | 蘇惠玉（臺北市立西松高中教師）

〈數學探究之意義初探與教學設計實例〉這篇文章從文獻回顧出發，探討「數學探究」這樣的教學徑路之意義、架構方法與目標，並提供在文獻中已經過檢驗的教學範例。在此僅就此篇文章所提的教學範例，根據個人的教學經驗，提供一點意見：

（1）國小階段：奇數與偶數的意義

此活動以提出這樣問題：「6 因為可分成 2 堆（3+3），也可分成 3 堆（2+2+2），所以是偶數也是奇數」來造成認知衝突並進行討論。不過在「準備與聚焦」階段時，老師一開始告訴學生何謂奇數與偶數時的說法其實相當重要，如果教學目標是要發展出奇偶數的定義，那麼一開始似乎只能說「像 1, 3, 5, 7, … 這樣的數叫做奇數，2, 4, 6, 8, … 這樣的數叫做偶數。」之後教師評量學生給的例子時要如何評量？僅回答對錯嗎？如果學生僅能從這些數字例中去自行歸納出奇偶數的特性時，恐怕不能體會分成 2 堆與分成 3 堆的差別；其實教師可以從給出的數字例以及學生的例子中，先讓學生討論（探究）歸納奇偶數的特性（偶數可以平分成兩堆，奇數不行）之後，再提出問題，並總結與引導溝通。

（2）國中階段：黑白棋

此活動將數學探索的方法用在解題上，教學目標為利用符號將問題與解法一般化。在此範例中，教師在準備階段展示的問題（酒精與水互換），相對來說學生反而較難理解，因為液體是連續的量，學生無法直接數出量的多寡後進一步看出數量的關係，反而是學生探究活動中的問題較能從視覺上或實地操作中獲得兩數量的關係。一般在教學活動的設計中，可以先利用簡單的問題讓學生真正理解問題的意義，還有利於直覺觀察其模式；或是以較難問題引起動機，在學生自行探究出方法之後，回過頭來解決這個較難的問題。另外，此探究活動的教學目標在於讓學生理解符號的便利性，以及利用符號進行一般化後可將問題延伸，此範例中的探究問題（黑白棋的個數）學生反而容易利用舉例的方式得出結論，進而失去使用符號的正當性。建議可將老師準備的問題與探究的問題對調。另外，在問題的呈現上，盡量不要讓學生迷惑在文字或名詞的使用上，例如用甲、乙杯來稱呼，而不是用水杯、酒精杯等等。

（3）高中階段：三角探究

此活動藉由探究三角形中線長的求法，引出餘弦定理並引伸到餘弦定理的證明。此教學範例中先讓學生閱讀課本並從中尋找可用的公式，學生可能利用舊經驗「畢氏定理」，也可能從課本中找到所謂的餘弦定理來利用。這個探究活動很像現在流行的教學法「翻轉教室」的使用模式：先讓學生自行學習，然後花時間在學生問題的討論與解決上。不過與「翻轉」不同的是此活動讓學生同步在課堂上自行閱讀後找出可能的公式；然而台灣目前的教育現況是大部分的高中生都已經先在補習班學習過了，他們不需要去找就知道用餘弦定理求中線長度，因此失去此探究活動的意義。同時，在目前課程的編排中，求中線長的問題通常被當成是餘弦定理的應用，此活動設計容易變成在已經學習過餘弦定理的情形下，再回頭發展餘弦定理的證明。若我們的

教學目標為讓學生探究學習餘弦定理的證明方式，那麼可以直接從探究出畢氏定理求中線長的方法後，直接再讓學生繼續發展討論餘弦定理的證明，並讓學生自主發現其與畢氏定理的連結。

我們在各階段的數學教學過程中，不管是在明意識或潛意識，每位教師心中對數學知識的本質與學習法都有所「信仰」。在推廣某一種教學徑路時，如果不先改變教師的「信仰」，任何教學法最終都只會淪為文獻中論述的方法而已。不管如何，教學的最終目標都是讓學生學好數學，在教學現場，第一線教師在時間、進度與成績的三重壓力下，勢必得考慮每一次活動設計在階段教學過程中的重要性，以及能夠達成的目標效果。如果設計一次解題的探索活動，一節課下來的教學成果只是學生自主學會解決這個問題，或是延伸出的問題或觀念在銜接的課程中又沒有進一步探究或利用，那麼這樣的教學範例將很難說服現場教師去使用。不過如果教師認同數學探索這樣的教學徑路，倒不妨可以試著在合適的主題上設計與使用這樣的方法，至少可以在一片死水的傳統數學學習中，帶來一縷清新的微風，造成一些足以促進生長的漣漪。

