秦爾聰、劉致演、尤昭奇（2015）。
探討七年級學生在以臆測為中心的數學探究教學脈絡下其數學素養展現情形。
臺灣數學教師，**36**（1），1-16。

探討七年級學生在以臆測為中心的數學探究教學脈絡下其數學素養展現情形

秦爾聰[1]　劉致演[1]　尤昭奇[2]
[1]國立彰化師範大學科學教育研究所
[2]臺中市立清水國民中學

本研究旨於探討在施以臆測為中心的 5E 數學探究教學模式下，國中七年級學生數學素養展現情形。教學活動以皮克面積速算公式作為學生探究主題，採用質性研究做為資料收集及分析架構。參與研究的個案班級為中部某公立中學的七年級學生，班級人數共 34 人，教學活動時間為期兩週。研究結果發現，學生面對非例行性問題時，在數學臆測思維的驅動下，其數學素養五股能力呈現彼此和諧交織的狀態。

關鍵詞：5E 探究教學、數學素養、數學臆測

通訊作者：劉致演，e-mail：unique.cs@msa.hinet.net
收稿：2014 年 4 月 22 日；接受刊登：2014 年 9 月 4 日。

壹、前言

當今國際上數學教育改革的趨勢皆致力於培養國民「數學素養」(如 National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000; Organization for Economic Co-operation and Development [OECD], 2010),在如此教改的理念下,「探究教學」似乎顯得格外重要(Brown, Wilson & Fitzallen, 2007)。此外,數學探究就是做數學,做數學包含探索與發現,而探索與發現的主要途徑就是猜想(NCTM, 2000),透過猜想的檢驗與修正即是臆測的歷程(陳英娥、林福來,1998);要言之,臆測可以幫助數學推理的發展,而數學推理更是數學教育的核心(Reid, 2002)。甚者,理解是數學學習的首要目標,而數學素養是檢驗學生是否理解的主要表徵(Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001; NCTM, 2000)。有鑒於此,本研究擬透過融入數學臆測思維的數學探究教學活動,探討在施以臆測為中心的數學探究教學脈絡下學生數學素養展現情形。

貳、文獻探討

一、數學臆測

數學臆測脈絡緣起於 Lakatos(1976, 1978)的擬經驗主義,他認為數學既非純粹理性的產物也不完全等同於其他經驗學科,反之,數學應是擬經驗的(quasi-empirical)、是可能犯錯的。陳英娥與林福來(1998)以 Lakatos 數學理論知識創造歷程作為研究理論架構進行實徵性研究,根據研究結果建構出臆測思維的一般化模式如圖 1。Pólya(1954)認為臆測的過程是在特殊化(specializing)與一般化(generalizing)的上升與下降過程中來來回回。面對非例行性問題時通常我們會將問題加以簡化,並透過簡單的試驗來檢驗,經過多次的試驗後將結果加以擴充並形成一般性通則;簡化問題以及試驗的過程即是特殊化,形成通則的過程稱為一般化。綜上所述,數學臆測是在猜測、檢驗、相信與反駁間的遞迴歷程。若說數學探究的是做數學,那我們可以理解做數學的過程即是數學臆測思維的歷程,並且此歷程是奠基在一般化及特殊化的核心思維之上。

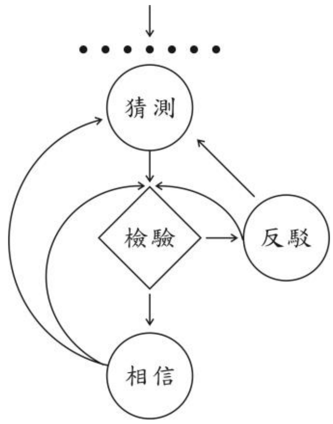

圖 1　數學臆測思維模式。引自「數學臆測的思維模式」，陳英娥、林福來，1998，科學教育學刊，6（2），205。

二、數學探究教學

Franke、Kazemi 與 Battey（2007）指出數學教學旨於建構一個數學學習環境，在這環境中教師應致力於協助學生主動發現學科知識獨有的表徵。然而，文獻中並未提出有關數學探究教學的明確架構，對於初次嘗試數學探究教學的教師而言，實有施行上的困難。有鑑於此，5E 學習環的探究教學模式，可視為教師發展數學探究教學的參考架構。5E 學習環是 Trowbridge 與 Bybee（1990）以建構主義觀點為基礎所發展而得，包括參與（engagement）、探索（exploration）、解釋（explanation）、精緻化（elaboration）、評鑑（evaluation）等五個教學階段；（一）參與：教學活動能夠引發學生興趣、學習動機，使學生願意主動參與教學活動；（二）探索：鼓勵學生透過進行合作學習，教師在活動進行中觀察學生互動，必要時提出問題進行探討，引導學生探究方向；（三）解釋：鼓勵學生用原有經驗來解釋自己的想法並提出佐證，並提出正式的定義與解釋；（四）精緻化：預期學生能使用正式的定義與解釋，並鼓勵學生應用已知概念，自行建構概念理解、擴展知識和技能；（五）評鑑：教師引導並鼓勵學生主動評量自己學習的理解，並提供回饋以供教師修正教學策略與措施。

三、數學素養

美國國家研究會曾籌組一項數學學習研究，內容的主要宗旨之一在於明確界定何謂成功的數學學習，研究結果主張數學素養是數學學習者的成功表徵（Kilpatrick et.al., 2001）。數學素養是指由五股數學能力所交織，分別為：（一）概念理解（conceptual understanding），為數學概念間的整合性及功能性中樞；（二）程序流暢（procedural fluency），指對於程序性知識的瞭解以及

如何適當使用程序知識，以及彈性、準確而有效率地、合適地運用程序性知識及執行的過程技能；（三）策略運用（strategic competence），指能夠形成、表徵和解決數學問題的能力；（四）適性推論（adaptive reasoning），指能夠在概念及情境間進行邏輯性思維的能力；（五）建設性傾向（productive disposition），是指將數學視為有理、有用且有價值的學問，並且相信自己有能力且願意努力成為有效率的學習者，以及數學知識的實踐者。

參、研究方法

一、教學活動設計

本教學活動設計是以 5E 學習環探究模式（Trowbridge & Bybee, 1990）作為探究教學主體架構，強調學生的自主學習、考量學生的先備知識，利用學生的好奇心來引起動機（engagement），提供真實情境的問題讓學生思考、探索並擬定解題計畫（exploration），透過驗證活動收集與整理資料以提出猜想，並藉由小組討論與分享來進行辯證（explanation & elaboration），最後對問題的答案形成全班的共識（evaluation）。另本研究在 5E 探究教學活動架構下，引入猜測、檢驗、相信及反駁等數學臆測思維，教師在歷程中搭建一般化及特殊化的思維鷹架，幫助學生驅動數學臆測思維並融入 5E 探究學習環，本研究將教學架構具體化如圖 1。本教學活動內容設計以皮克定理做為教案發想起點，皮克定理是奧地利數學家喬治皮克（Georg Pick，1859～1943）所發現的一個面積速算法，以格點為頂點的多邊形叫格點多邊形。若已知在多邊形內部的格點稱為內格點（代號 x），在多邊形邊上的格點稱為邊格點（代號 y），則面積可以透過$\frac{y}{2}+x-1$而得。活動設計共分為個人探究與小組探究兩階段，個人探究階段請學生在方格紙中，分別建立兩個直角座標平面，在第一個直角座標平面中標出 A（4, 1）、B（-3, 1）、C（-3, 5）的點，並計算$\triangle ABC$ 的面積。並在第二個座標平面中標出 D（4, 0）、E（6, -5）、F（0, -3）的點，並計算$\triangle DEF$ 的面積。並給定兩個問題：（1）你認為正確的答案是什麼？（2）如果有面積的速算公式，你認為面積跟什麼有關係？面積的速算公式是什麼？小組探究階段請學生在方格紙中，分別設計三種三角形圖案，頂點必須在格點上，請分別計算出其面積 S 及其內格點 x 與邊格點 y 之個數。小組合作根據組員所設計的三角形圖案，及計算出其面積 S 及其內格點 x 與邊格點 y 之個數，加以整理後觀察隱藏其中的皮克面積速算公式規律。

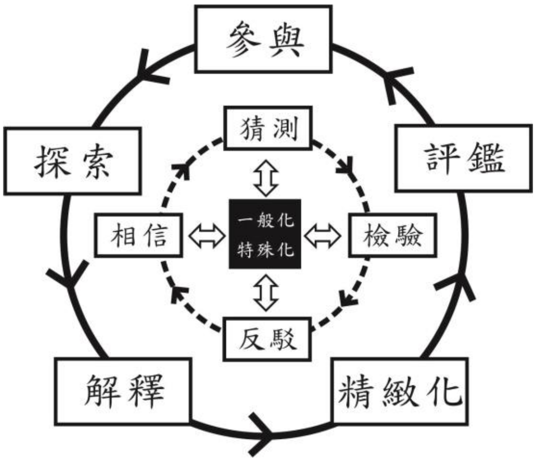

圖 2　以臆測為中心的 5E 數學探究教學架構

二、研究參與者

（一）數學探究教學者

本研究實施探究教學教師為師範體系的數學系本科畢業，已有七年的教學資歷，過去一直以傳統講述的方式授課。因為進修的關係，加入了一個由在職與職前數學教師所組成的教師專業成長團體而接觸到探究教學與臆測相關理論，再加上服務學校鼓勵教師採取創新教學與多元評量，因此激勵了該教師從事教學改變，屬於探究教學新手。

（二）研究對象

研究對象為中部某國中之七年級的一個常態班，男生 20 位、女生 14 位，全班共 34 人。本研究以立意取樣，除以全班為觀察對象外，各小組按照學習成就進行異質性分組，總計分為 6 組、每組 5-7 人。為觀察學生數學素養之展現情形，特選定其中一組 7 人為主要觀察及晤談對象。

三、資料收集

資料蒐集來自多元管道，共有學生探究活動學習單、教師反思日誌、學生反思日誌與課室錄影。學習單主要目的為了解學生臆測歷程與探究活動的進行情形，教師日誌旨於作為日後進行改進教學設計的參考依據，學生反思日誌則幫助我們了解學生所遭遇的困難及其建設性傾向，而課室錄影用以蒐集小組討論互動及論述，以提升資料來源之效度。

四、資料分析

（一）研究效度

本研究所收集之質性資料分析架構主要整合 Glaser 與 Strauss（1967）持續比較的分析方法，以及 Strauss 與 Corbin（1990）的對於質性資料進行開放性編碼及主軸譯碼，再依現象觀察結果加以有系統性的歸納，以分析出支持學生五股素養展現之證據。數學素養五股能力資料編碼，以 Kilpatrick et.al.（2001）五股數學素養為主，並參考美國國家評量指導委員會所訂定之 NAEP 數學評量架構（National Assessment Governing Board [NAGB], 2002）、NCTM（2000）和 Niss（2003）數學學習核心能力等標準，形成數學素養五股能力檢核表，如下：

表 1

數學素養五股能力檢核表

數學素養	編碼	內容
概念理解（C）	C1	能充分了解數學概念的定義
	C2	能理解做數學的過程，如演算、公式等所表達的含意
	C3	能以不同的表徵呈現數學概念
	C4	能理解不同概念或表徵之間的關連性
程序流暢（P）	P1	能運用基本數學定義和性質進行演算
	P2	能熟練地使用各種數學演算流程
	P3	能解釋運算程序中蘊含的數學概念
	P4	能根據問題情境靈活運用不同的演算程序
策略應用（S）	S1	能運用以前的數學知識和經驗進行解題
	S2	能建構一個或多個數學表徵以呈現問題的數學關係
	S3	會選擇比較有效的方法解題
	S4	能看出不同問題的共同數學結構，將問題一般化
適性推論（A）	A1	會檢驗自己或他人的想法
	A2	能為自己或他人的想法進行解釋與辯證
	A3	能根據數學知識對自己或他人的想法提出質疑
	A4	能比較不同的解題策略並進行修正或得出結論
建設性傾向（D）	D1	會主動參與數學活動
	D2	只要持續努力，相信自己能學好數學
	D3	認為數學對日常生活有幫助
	D4	會將數學學習經驗應用在其它學習領域

另外，針對學生在數學探究活動進行過程中之猜測、檢驗、反駁、相信、特殊化、一般化的編碼原則為：（1）猜測：學生能面對問題時，能提出一個合理的敘述，在未經實證之前即為猜測（Yerushalmy, 1993）；（2）檢驗：學生能利用自己的先備知識，針對自己或他人的猜測進行辨證；（3）反駁：指學生反對自己或他人所提出的猜測、證明或論述；（4）相信：指學生接受自己或他人所提出的猜測、證明或論述；（5）特殊化：特殊化是將問題轉換成為簡易的範例，尋找在一般情形下具有較特殊性的性質藉以瞭解原問題（Mason, Burton, & Stacey, 2010）；（6）一般化：學生有系統地將特殊化後的結果歸納成一般性的規則或樣式（patterns）（Stacey, 1989）。此外，由於一般化無法自辯證（justification）中切割（Lannin, 2005），因此針對學生在論述過程中援用先備知識進行辨證，本研究特將之編碼為先備一般化。另猜測與猜想皆譯自原文 Conjecture，當名詞時譯為“猜想”；當動詞時譯為“猜測”，如提出猜想。

（二）研究信度

本研究藉由「多元資料來源」和「多位分析參與者」進行資料分析之三角校正；多元資料來源指的是前述質性資料；多位分析者參與則是由三位研究人員針對多元資料所做的現象觀察進行討論磋商，直到形成共識後才作成研究結論。

（三）資料分析

分析進行方式由教師及研究者分別進行閱讀文本資料，以數學臆測及數學養共同編碼（coding）後撰寫研究結果。本研究擬於研究結果第一小節中，呈現開放性編碼註記及其分析結果，以作為分析範例。

肆、研究結果

一、數學臆測驅動策略推論、概念理解與程序流暢

在小組探究階段，針對面積 S、內格點 x 與邊格點 y 之個數關係進行論述與探討結果，有些小組發現三角形面積是跟三角形的邊長有關，有些小組則發現面積與座標位置有關。在發表、辯證、與反駁的精緻化過程中，學生無法彈性的應用已知的解題策略（學生在先前已學習過利用填補三角形成為矩形的方式計算三角形面積），即習慣計算三角形面積時一定要是「水平」的三角形，以至於在直角坐標平面上思考三角形面積計算問題時，遇到非平擺的三角形面積計算反例時即產生認知衝突。根據下列對話轉錄可以發現學生 S32 在 C4（能理解不同概念或表徵之間的關聯性）、P4（能根據問題情境靈活運用不同的演算程序）及 S1（能運用以前的數學知識和經驗進行解題）等三個項目上顯得有所不足，以致於當數學問題情境轉變時顯得有些捉襟見

肘。

S32：我們這組想到的是面積跟座標有關（猜想）（S1），因為把座標標出來，就可以看出面積的長和寬多少（檢驗）（C1、P1、P2）。

S13：斜的怎麼算出面積？（猜測）（A3）

S32：你說的斜是哪一種斜法？（A3）（S13上台畫出平的三角形，如圖3左）

S32：你用這裡..跟y軸的距離跟這裡跟y軸的距離，就算出面積了。（特殊化）（A2）

S31：啥！那是斜的捏？（A3）斜的你要怎麼算？（A3）

S32：就是這邊（指左邊點）加跟這邊（指右邊點）跟y軸的距離，就變成它的長了。（特殊化）（C1、P1、P2）

S17：如果這邊是斜的呢？（A3）（上台畫更斜的底，如圖3右）不要跟y軸平行呢？（A3）

T ：就是如果三角形的底，底不是平的，是斜的怎麼辦？有什麼辦法可以算出面積？

S32：對吼！…想一下！…不可以！找不到答案！（A3、S1）

圖 3 學生 S13 上台畫出心中的三角形

T ：你在發表的時候，畫了一個三角形，你當時是怎麼想的？

S32：就畫出來，看一看，就可以（算出面積）了。（特殊化）（C1、C2、P1）

T ：看它的座標，看它下面水平的座標，就可以了。

S32：對啊。我想的是下面是平的。（先備一般化）（A2）

T ：下面是平的，那它的面積怎麼算？

S32：就它的高跟它的底，水平的。（先備一般化）（A2）

T ：後來同學畫這條是什麼意思？斜的這一條。

S32：斜的那一條，他是問我斜的那一條底怎麼算？（特殊化）（A1、A2）

T ：所以你原來考慮的都是平的？（A1）

S32：對啊。

T　：那時候怎麼沒有考慮到斜的？

S32：沒想那麼多。

T　：所以後來他們畫斜的，你就發現了？（特殊化）（A1）

S32：對啊。（相信）（A4）

教師針對學生 S32 進行深入了解與對話時，發現學生對於三角形面積計算方式來自於先備知識的一般化結果，當學生遇到反例時，在缺乏概念理解、程序流暢及適性推論的情況下便無法彈性的進行數學思考，然而，在後續的學生發表中，可以發現三角形底部非平擺的圖形面積計算並不是困擾，反而是用來驗證皮克面積速算公式的極佳例證（如圖 4）。此點呼應了 Ernest（1991）客觀知識建構觀點，數學知識的創造來自於客觀知識與主觀知識的相互交流，由主觀知識引導個體與社群進行互動，經由發表與批判形成客觀新知。在此段論述中，主觀知識可能包含了自身無法理解的認知衝突。然而在此階段裡，學生仍停留在接受批判與反思的階段，在下階段學生與教師的論述中，可以發現學生有新的進展。

S34：我們猜想面積與圖形的邊長有關（猜測）（C2），如果是一個三角形的話（畫了一個接近直角的三角形）（特殊化），我們只要找出旁邊這兩個的邊長，就可以找出這個三角形的面積了（C2、C3）。

S09：為什麼不用第三個邊長？你說跟兩個邊有關，可不可以跟三個邊有關？（A3）

S34：只要任何兩個邊都可以（用手比出任意兩邊）（一般化）（C2）

T　：妳的意思是只要跟兩個邊的邊長有關係就好嗎？

S17：如果只有兩個邊，另外一邊怎麼辦？（A3）

S10：而且這兩邊又不是直角，這兩邊不可以當高、當底。（一般化）（C2）（S34 迅速擦掉原來的三角形）

（教師介入澄清兩個邊長不能形成固定三角形，因為面積會改變，就不能求出面積，固定三個邊長則可以求出面積，所以應該說面積跟三邊長有關係較合理。）

學生嘗試將特殊化所產生的衝突情境，再次利用特殊化的策略形成新的解題思維，將三角形特殊化成為直角三角形，以利面積求解，然而再次遭遇到挑戰與質疑。誠如 Mason 與 Johnston-Wilder（2004, p.142）主張：「學生在臆測的氛圍（特殊化與一般化）裡，能被激勵於構建極致及典範性的例證，並嘗試尋找反例（透過探索先前未曾被注意到之可能的變項維度），並且在能在過程中主動思考與建構新知」。從上述學生與教師間的言談轉錄文本中發現，學生嘗試在面積、邊長與座標間尋求對於反例的合理解釋，因著特殊化驅動了學生的適性推論，在編碼中「A3 根據數學知識，對自己或別人的想法產生質疑」出現頻率最高，也連帶驅動了程序流暢與概念理解，因為學生提出質疑後，通常會回到原本已知的數學知識進行驗證與理解。根據

編碼註記的統計亦證實了這樣的推論，在數學素養範疇的開放性編碼統計結果中共計有 29 次註記，其中策略推論出現 14 次佔 48%，概念理解出現 9 次佔 31%，程序流暢出現 5 次佔 17%。根據上述例證，我們可以理解學生能在特殊化臆測過程裡主動展現策略運用、概念理解、程序流暢等數學素養，因此，數學臆測可視為驅動學生探索可能的變項維度，並主動思考與建構客觀新知。在下一小節的研究結果中可發現，學生在推論皮克面積速算公式過程時，能在數學臆測思維中遞迴並驅動數學素養能力交織展現。

二、數學素養五股能力交織展現

皮克面積速算公式的數學探究活動，最終教學目標是希望學生藉由觀察及計算內格點數 x、邊格點數 y 與三角形面積 S 之間的關係，推論出一般化的公式。由圖 4 可知，小組成員藉由分工合作得到龐大的相關實驗數據，彙整成表格進行觀察。整體而言，大多數小組都能夠發現其中蘊藏的規律，在小組發表過程中可以看學生靈活應用不同的策略進行解題。

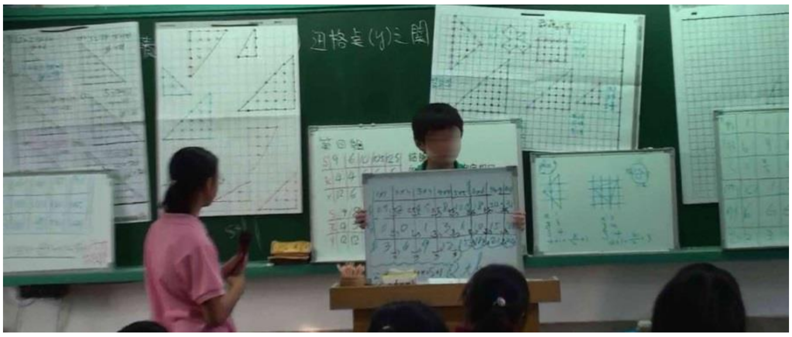

圖 4　小組發表皮克公式的推論結果

透過對於觀察組（S31 為代表）學生的小組互動觀察，發現小組成員透過特殊化的歷程個別畫出不同的三角形再個別求出內格點、邊格點與面積，將大量的實驗數據加以歸納並整理成表格後，嘗試推論一般化的結果。該小組後發現表格中所隱藏的樣式（pattern），即：當內格點固定時，面積的差的 2 倍與邊格點的差相同；當固定外格點時，又可以觀察得到面積的差與內格點相同。學生雖然沒有直接發現皮克面積速算公式 $\frac{y}{2}+x-1$，但反而發現更抽象的概念。根據 S31 的發表結果，我們可以將多邊形面積 S、內格點 x、邊格點 y 的關係寫成 $2S = y + 2x - 2$，並且將兩關係式 $2S_1 = y_1 + 2x_1 - 2$、$2S_2 = y_2 + 2x_2 - 2$ 加以相減得到 $(S_1 - S_2) = (y_1 - y_2) + 2(x_1 - x_2)$，此時我們便可理解當 x 相同時 $x_1 - x_2 = 0$，則 $S_1 - S_2 = y_1 - y_2$，當 y 相同時 $y_1 - y_2 = 0$ 則 $S_1 - S_2 = x_1 - x_2$；這樣的形式化推論源自於圖 5 中學生對於皮克斯公式推論所得之理解：①如 x 相同，2 數 S 相減等於 2 數 y 相減、②如 y 相同，2 數 S 相減等於 2 數 x 相減。雖然學

生僅用寫出一般性的概念，而非直接推論出皮克面積速算公式$\frac{y}{2}+x-1$，但學生已經能夠覺察兩組數據中所隱藏的一般式彼此間的關係，顯示學生在數學臆測的過程中已開發出某種形式化推論能力的潛能。

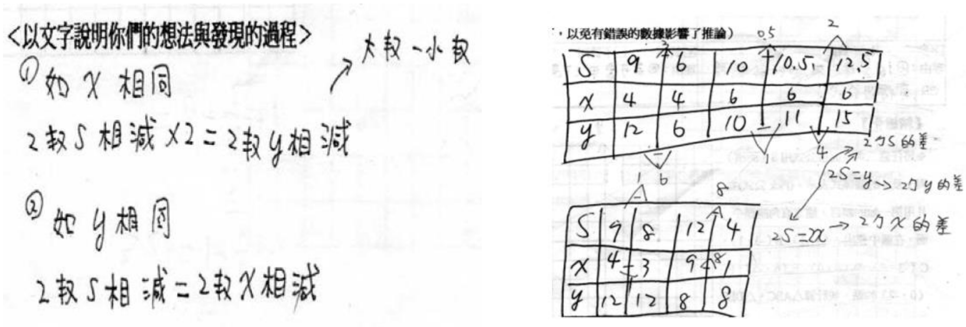

圖 5　S31 組一般化及特殊化歷程

相較於其他組別（S32 為代表），雖然一樣利用小組成員的所有資訊，透過特殊化到一般化的過程，將所得資料與以表格化，藉由觀察數字間的規律發現公式，但是僅知其然、不知其所以然。根據學生（圖 6）的論述：「我們先找 x 一樣的，但 y 不一樣而 S•2 就等於 y，然後我們再找出 x 一樣的，但 y 不一樣的我們就找出$\frac{y}{2}+x-1$」，在此陳述中用了兩次相同的敘述“x 一樣的，但 y 不一樣”，（猜測第二個條件可能是想表達“y 一樣的，但 x 不一樣”），因此無法得知公式的發展脈絡，並且學生在發表過程中亦無法清楚說明公式的由來。

圖 6　S32 小組皮克面積公式猜想

T　：你覺得討論式的上課方式，跟傳統的上課方式的感覺呢？

S32：沒什麼差別，除了換位子、討論。

T　：你覺得你比較適合哪一種上課方式？

S32：正常上課！

T　：為什麼？

S32：因為我不喜歡跟別人討論，討論好無聊不好玩，因為討論就是一直講話，不然就聽別人講話，討論不好玩。

學生在上一節中已能藉由特殊化的方式嘗試推論一般化的結果，但是數學臆測之猜想並非建立在毫無根據的基礎上，反之，合理的猜想來自於初步的分析基礎（Fischbein, 1987），S32 小組雖能猜想出皮克面積速算公式，但在缺乏合理分析基礎與正面的建設性傾向的情況下，學生便無法在社會脈絡中將主觀知識轉化為客觀新知。相較與 S32 小組，研究者觀察到另外一組的推論（S10 為代表），在一般化與特殊化的來回歷程中（Mason, 2002; Pólya, 1954），發現令人驚豔的結果。

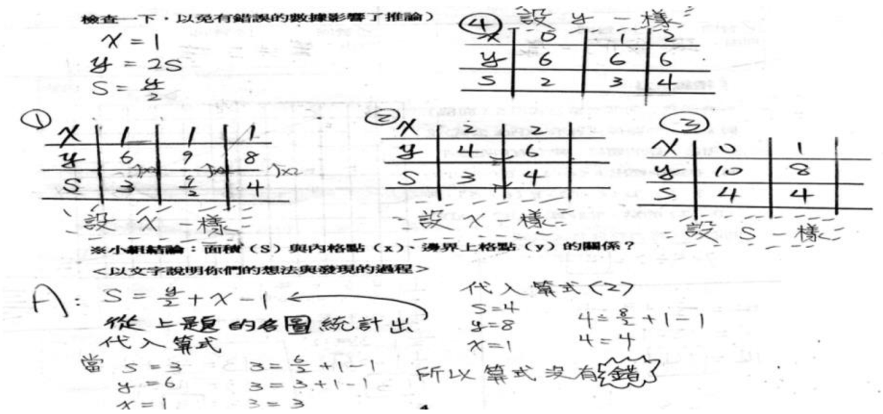

圖 7　S10 一般化與特殊化的來回歷程

在小組討論初期，學生雖能善用特殊化技巧，但在邊格點數 y 與內格點數 x 的組合中，一直苦於無法找出一般性的規律，因此老師建議學生從彙整表格、固定變數著手。學生 S10 小組在探索皮克公式的過程中，巧妙利用老師所搭建的鷹架，先固定內格點 $x=1$ 畫出各種可能的三角形，接著找出邊格點 y 與面積 S 關係之規律，令 $x=1$ 得到 $S=y/2$ 的結論；接著他們利用所得的結論，檢驗固定 $x=2$、$S=4$ 與 $y=6$ 時的結果，發現並不適用，但他們並沒有因此放棄，反倒是再從錯誤的結果中，重新尋找可能的規律，最後發現只要先將 y 的值除以 2 後加上 x 的值再減 1 就是 S 的值。

T　：你們怎麼找出公式的？

S10：我們先固定 x 讓它等於 1，發現在三組資料中，S 是 y 的 1/2

T　：接下來呢？

S10：我們嘗試令 x 等於 2，發現 S 與 y 的關係跟上一次的結果不一樣，所以我們又讓 S 固定為 4 及令 y 等於 6 再試試看。

T　：結果你們發現什麼？

S10：還是沒有找到 S 是 y 的 1/2 的結果。但是，我們想到 S 一定是由 x 跟 y 組合出來。

T　：所以？

S10：所以，我們把前面整理好的表格中每個 y 都先除以 2，發現它加上x後再減 1 後就會等於 S 了。

T　：非常好（全班鼓掌叫好）。

我們發現 S10 小組得到一般化的結論後，將原本自行設計表格中的數字嘗試代入檢驗，藉以證明其合理性，甚至在工作單上註記「所以算式沒有錯」。在評鑑階段時學生 S10 在正四邊形與自行設計的凹凸多邊形檢驗中，再次證明他們所發現的公式，具有可推論的特質，也為自己發現很自豪地說「非常適用啦！」。我們在學生的解題過程中發現，融入臆測思維的數學探究教學，可以幫助學生自然地運用特殊化與一般化策略，在猜測、檢驗、反駁與相信間遞迴，學生也能自然而然地在數學探究的過程中增進其建設性傾向，甚至體會到數學可錯的動態性與奧妙性。

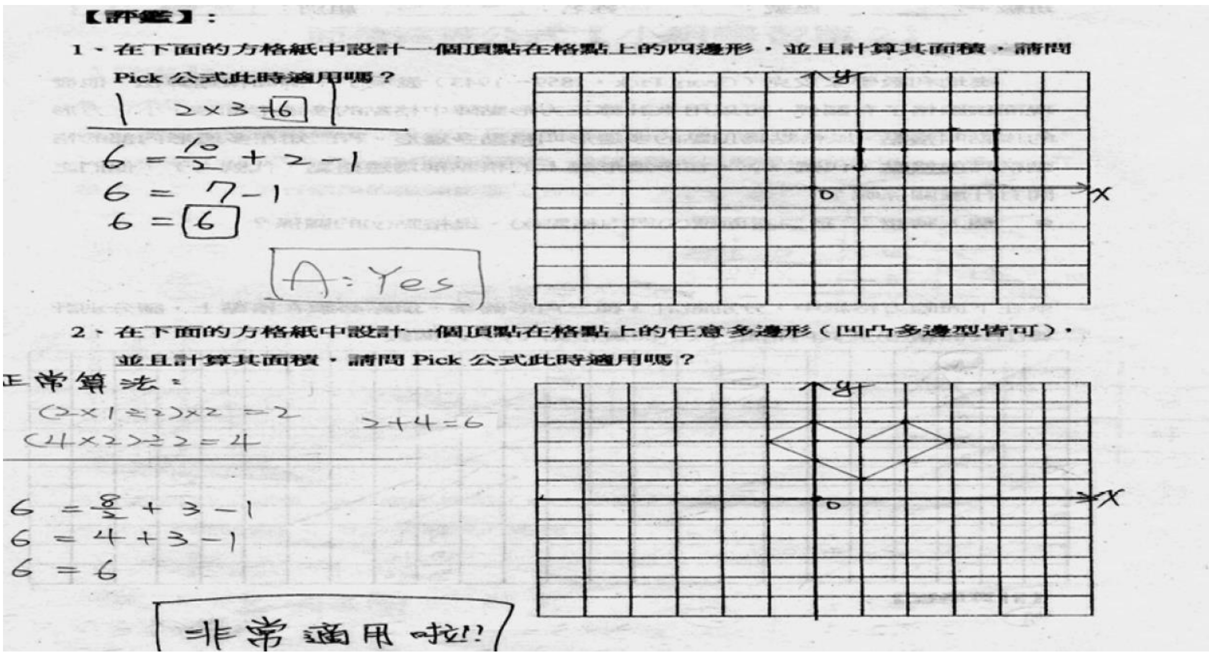

圖 8　學生 S10 一般化公式的應用

剛開始都不知道要幹嘛，後來固定數字才得到結果。最後，找到一個速算公式可以把全部圖形求出，雖然可算面積，但是方法很多，可以速算公式也很多，不一定只有一種方法可以算面積。　　（S19 學生反思日誌）

數學越來越難，很有挑戰性，解出的同時也有成就。又更了解數學的奧妙，非常好。

（S32 學生反思日誌）

Lakatos（1976, 1978）認為擬經驗論的基本原則是：針對問題尋找最具潛力的方法，然後施以嚴格的檢驗，以尋找反駁的可能性，在這個過程裡進步的動力來自於極富想像力的猜想。學生 S10 的小組成員們的表現，充分詮釋了這樣的觀點，他們透過特殊化策略，在過渡到一般化結果的過程中不斷遭遇反例的挑戰，然其對於合理猜想的堅持幫助他們實證公式存在的可能，過程中可以發現學生的概念理解如發現面積與格點關係、程序流暢如面積計算、策略應用如將數據關係加以一般化、適性推論如修正解題策略、建設性傾向如了解數學知識的動態本質等數學素養五股能力是彼此和諧交織的。

伍、結論與建議

本研究結果顯示，數學臆測是數學素養的驅力，學生面對非例行性問題情境時，在以臆測為中心的數學探究教學脈絡下，其數學素養五股能力呈現彼此和諧交織的狀態。這樣的結果亦為 Lin（2006）的主張：「一個好的課程必須提供學習者主動思考及建構的機會，並且，數學臆測不僅是數學化的核心更是數學素養的驅動力」，提供了實徵性研究證據的支持，更實證了 Kilpatrick et.al.（2001）的觀點「數學素養是彼此交織的五股能力」。此外，Richards（1991, p.38）認為學生不會意外地成為主動的學習者，除非經由計劃性的設計，始能讓學生進行結構性的探索與探究，因此，皮克面積速算公式的主題活動，是國一學生在學習座標平面上求解多邊形面積後，利用先備知識解決非例行性問題的極佳的數學探究活動，除能幫助學生結合學習經驗與先備知識外，更能幫助學生透過數學臆測驅動數學素養並強化學習成效。最後，本研究發現教師在引導小組探究過程中數度聚焦於管控班級秩序，事實上，小組探究的合作效能是建構在自發性遵守的常規上，因此建議未來嘗試實施以臆測為中心的數學探究教學之教師，能夠先行建立數學合作學習常規，尤其是社會性數學常規（sociomathematical norms）（Yackel & Cobb, 1996）。

陸、研究限制

本研究主要研究對象為國中七年級學生，其研究結果可能受限於課程內容、性別、數學教師之探究教學能力。研究證據發現，數學臆測之所以能驅動學生數學素養，主要由於教師在其假設性學習軌線（Simon, 1995）中引導學生透過有系統的特殊化進行猜想並形成一般化的結果。教師針對不同課室學生可能設計不同的假設性學習軌線，當對象或教學方法不同時是否能獲致

相同結果，則需由教學者依實務經驗應時、應地而制宜，不宜將本研究結果作過度推論。

參考文獻

陳英娥、林福來（1998）。數學臆測的思維模式。**科學教育學刊**，**6**（2），191-218。

Brown, N., Wilson, K., & Fitzallen, N. (2007, November). *Using an inquiry approach to develop mathematical thinking*. Paper presented at the AARE 2007 International Education Research Conference, Fremantle, Australia.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education.* London, UK: Falmer Press.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach*. Dordecht, The Netherlands: Reidel.

Franke, M. L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Understanding teaching and classroom practice in mathematics. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 225-256). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Glaser, B. G., & Strauss, A. L.(1967). *The discovery of grounded theory: Strategies for qualitative research.* Chicago, IL: Aldine.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Lakatos, I. (1978). A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics? In J. Worrall & G. Currie (Eds.), *Mathematics, science and epistemology* (pp. 24-42). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(3), 231-258.

Lin, F. L. (2006, December). *Designing mathematics conjecturing activities to foster thinking and constructing actively*. Paper presented at the meeting of the APEC-TSUKUBA International Conference, Tokyo, Japan.

Mason, J. (2002). Generalisation and algebra: Exploiting children’s powers. In L. Haggerty (Ed.), *Aspects of teaching secondary mathematics: Perspectives on practice* (pp. 105-120). London, UK: Routledge Falmer.

Mason, J., Burton L., & Stacey K. (2010). *Thinking mathematically* (2nd ed.). Harlow, England: Pearson Education.

Mason, J., & Johnston-Wilder, S. (2004). *Fundamental constructs in mathematics education*. New York, NY: RoutledgeFalmer.

National Assessment Governing Board (2002). *Mathematics framework for the 2003 National Assessment of Educational Progress*. Washington, DC: Author.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.) (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: The National Academy Press.

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. In A. Gagatsis & S. Papastavridis (Eds.), *Proceedings of the 3rd Mediterranean Conference on Mathematics Education* (pp. 115-124). Athens, Greece: The Hellenic Mathematical Society and Cyprus Mathematical Society.

OECD (2010). *PISA 2012 mathematics framework*. Paris, France: OECD Publications. Retrieved from http://www.oecd.org/dataoecd/8/38/46961598.pdf

Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning.* London, UK: Oxford University Press.

Reid, D. A. (2002). Conjecture and refutations in grade 5 mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(1), 5-29.

Richards, J. (1991). Mathematical discussion. In E. von Glaserfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 13-51). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 114-145.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(2), 147-164.

Strauss, A. L., & Corbin, J. M. (1990). *Basics of qualitative research: Grounded theory procedures and techniques*. Newbury Park, CA: Sage.

Trowbridge, L. W., & Bybee, R. W. (1990). *Becoming a secondary school science teacher* (5th ed.). New York, NY: Macmillan.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(4), 458-477.

Yerushalmy, M. (1993). Generalizations in geometry. In J. L. Schwartz, M. Yerushalmy, & B. Wilson (Eds.), *The geometric supposer: What it is a case of?* (pp.57-84). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.