專書論文導讀

科技工具與數學證明教學
＜Experimental Approach to Theoretical Thinking: Artefacts and Proofs＞論文評述

作者｜左台益（國立臺灣師範大學數學系教授）

一、緣起

本期刊於近期編輯會議中建議能在期刊中增添書評文章，以豐富本期刊內容之多樣性。依此規劃，本文原構想朝向以數學證明為主題之專書評論，唯所選讀之專書內容豐富且限於時間處理，故僅擇其中一篇有關科技工具與數學證明一章評述導讀。本文所評論之文章為 Arzarello , Bartolini-Bussi, Leung, Mariotti 與 Stevenson（2012）所作的＜Experimental Approach to Theoretical Thinking: Artefacts and Proofs＞，以下以「該文」稱之。該文出自 ICMI Study 19 研討會後，由 Hanna 與 de Villiers（2012）主編之專刊書籍《Proof and proving in mathematics education》一書之第五章。

國際數學教育委員會（International Commission on Mathematical Instruction, ICMI）每年召集會議（ICMI Study Conference），就當時國際間數學教學與學習的核心議題舉辦工作群討論與論文發表。2009 年 5 月 10 日至 15 日的 ICMI Study 19 研討會為期六天在台北，由國立臺灣師範大學承辦，主題為 Proof and proving in mathematics education。除了徵稿發表文章外，共有六個工作群組（working group），從不同面向就數學證明與論證之教與學進行討論。研討會後，再從中選求徵稿，由加拿大數學教育學者 Gila Hanna 和南非數學教育學者 Michael de Villiers 共同主編彙刊成專書《Proof and proving in mathematics education》。

所導讀之該文作者群有五位，均為近年來在數學教育中積極從事科技工具與數學教育之研究人員，其中 Ferdinando Arzarello, Maria Giuseppina Bartolini Bussi 與 Maria Alessandra Mariotti 三位來自義大利，Allen Yuk Lun Leung 來自香港浸會大學，和 Ian Stevenson 來自英國。他們五位在工作群討論後，分別從各自的專長領域編寫，使該文內容充實，願景深遠，且貼近數學證明教學的實務面，值得細讀。本文報導以該文內容為主，添之本人一些評論，期待能有助於之後讀者易於閱讀。

二、概覽

從該文標題＜Experimental Approach to Theoretical Thinking: Artefacts and Proofs＞約略可知其重點在證明的教與學。作者們分別從實驗操作與演繹推理兩個面向討論數學證明的教學和學習。該文也同時從古代與現代科技工具論述工具的使用及其在數學證明的角色：不僅作為實務

工具，且是概念的塑造者。內文中引述數學史及一些研究實例，來闡釋實驗與演繹之間的動態張力，以及工具使用的探索活動與邏輯推理的形式證明之間的相互關係。最後該文嘗試整合活動理論，發展科技工具與數學證明的教學模組。

該文作者於文章簡介的一開始即主張在數學歷史中，科技工具和數學抽象概念與想法之源起和發展相互交織。科技的使用帶進數學實驗操作的面向，和要求嚴謹形式化的演繹本質之間形成一個動態張力。近來電腦與視訊科技的發展提供多樣地數學實驗與視覺理論於數學知識及發展的過程，因此需要重新思考數學學習過程的本質，特別是從知識論與認知觀點考慮數學證明的學習現象。該文作者曾詳細檢驗數學活動關鍵方法，不僅有演繹法，尚有溯因與歸納法，因而強調證明教學中實驗元素的重要性。

該文組織結構除簡介一節外，主要分成三個部分。第一部分作者從西方數學史中的一些事證論述器具在數學概念的發展扮演關鍵角色。第二部分從一些教學研究實例分析學生使用工具於證明活動的現象與效果。第三部分整合活動理論推導出一個理論架構解釋用以適當的教學情境。

三、第一部分－張力

該文第一部分主要在闡釋數學的兩個面向－實驗操作與演繹推理之間的動態張力，以及工具和教師在此張力中的作用與重要性。首先，作者們從西方古典幾何到現代數學的發展，論述工具在探索解題（如尺規工具的作圖探索）的功能，同時也受數學的規範所造成實驗與演繹之間的張力。接著，引進三個數學教育研究的案例，討論在此探索推理教學活動的張力中，教師角色的重要性。作者從數學史知識論與實徵研究案例總結教師、學生、教學與工具在教學活動中的關係。

1.歷史見證：實徵與理論之間的動態張力

該文第一部分首先以幾何作圖為範例，展示從歐幾里得以來工具支助運作的執行，也能塑造概念。如作者所述，「幾何作圖無論其是否有明顯地實務目的，它們也具有理論意義。」作圖工具如直尺、圓規，固然能提供實務操作的探索經驗，然而工具及其使用是受理論系統的公理、定義與定理規範，是以作圖問題本身是特定理論系統下的理論問題。例如，倍立方、三等分角與化圓為方等傳統歐氏幾何的尺規理論系統的不能作圖問題，但如果引用其他工具系統，如可以繪製螺線（conchoid）的尼可美底亞規（Nicomedes compass）這些問題即成為理論可解問題。

西方傳統歐氏幾何在十七世紀時已累積相當多繪圖工具及幾何物件的理論狀態。該文作者透過笛卡兒（Descartes）首度引用連續運動與方程式兩種方式表徵曲線以及所發明的「圓規」工具，來闡述改變繪圖工具，也就改變了可解問題組。因此，一個幾何作圖的實務問題，以不同的工具使用而成為幾何理論的進路。

從十九世紀起，歐洲數學在幾何作圖與工具使用能對幾何產生直觀觀察的假設逐漸消失，取而代之的是如 epsilon-delta 的純邏輯關係。直到最近電腦科技的發展，這種計算工具同時提供

數學發現與學習的新路程。對此該文呈現樂觀的看法，「事實上，幾何作圖具有豐富的意義且也完美地適合在今日教室中實現」。

2.教室事証－教師在動態張力中的重要角色

該文第一部分中引述三個使用不同工具的研究案例，來討論在實驗與理論數學面向之間的張力中，教師角色的重要性。三個研究案例都是使用工具探索數學現象，其教學目標在於學生發展理論觀點。第一個研究案例使用實體工具直尺、圓規進行幾何作圖。第二個研究案例中，學生先使用尺規作圖，再以 Cabri 動態幾何虛擬世界繪圖，所繪製的圖形不僅是圖形，而是受 Cabri 限制，並能受拉曳檢驗物件階層結構的圖形。第三個研究案例是在電腦代數系統（Computer Algebra System, CAS）探索函數的行為。作者從這三個研究案例中觀察到學生運用工具探索，形成臆測，但走向理論證明需要教師明確的引導。

從上述研究個案，作者理解教師在推動學生從幾何探索到理論證明中的關鍵角色；教師不僅要選擇適合學生操作探索的作業，更要導引學生從實務行動轉換到理論論證的複雜過程。他們將教師、學生、數學與工具製品在教學活動中的關係模式以圖 1 表示。

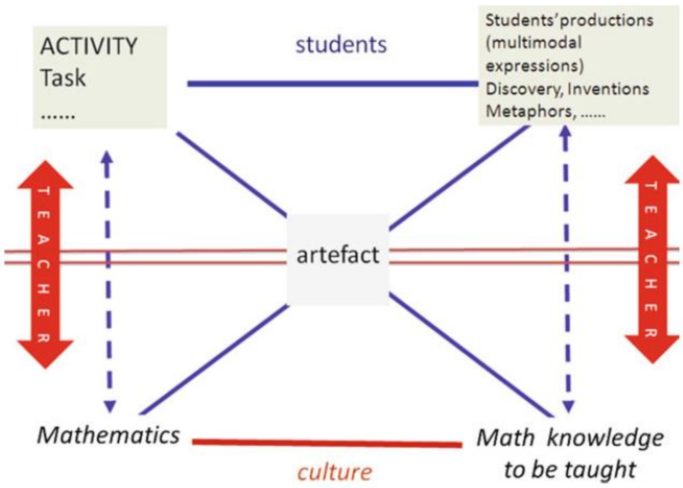

圖 1 教師、學生、數學與工具製品關係。引自”Experimental approach to theoretical thinking: Artefacts and proofs,” by F. Arzarello, M. Bartolini-Bussi, A. Leung, M. A. Mariotti, and I. Stevenson, 2012, in G. Hanna and M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI study* (p.107). Berlin: Springer.

在圖 1 的以工具為核心的教學活動中，上半部是學生探索空間，下半部為數學的本質文化。左半部表示教師設計與數學有關的活動作業。學生在此設計的活動作業中，使用工具操作探索實驗產品。右半部表示學生透過工具操作實驗活動，發現與產出學校課程所需的數學知識。從左上角至右下角，表達教師的關鍵角色。教師設計作業，學生操作工具探索，教師幫助學生將其個人發現的意涵轉換成一般理解的數學。該文作者認為此其間教師負有兩個重要責任（1）選

擇適當作業（左半部）;（2）監控與管理學生生產數學敘述與證明的過程（右半部）。

四、第二部分—轉化

第二部分是該文的核心,透過一些詳細的例子討論從實驗探索轉化至演繹證明的心智過程。其中溯因（abduction）推理是論述的主要理論基礎，該文闡述在實驗操作中的溯因思維如何引領至理論層面的演繹證明。該文作者認為這種轉化過程可以經由動態幾何系統（DGS）或電腦代數系統（CAS）這類工具及適當的教學設計來支助達成。在動態幾何系統中的拉曳能維持某種幾何不變性，稱為維持不變拉曳（Maintaining Dragging, MD），這種器具性行動將隱藏的幾何性質視覺化，有助於臆測的形成與潛在性的證明。間接證明是此部分討論的重要議題，作者亦以案例說明如何透過系統軟體的中介溯因思考來支助間接證明。

1.溯因推理

該文在第二部分，首先引進幾近實驗行動（almost-empirical action），並以 Arzarello（2009）的研究案例解說幾近實驗行動處理數學問題如同實驗科學般進行實驗探索。所有這些實驗都有一般典型步驟：（1）選取變數，（2）設計實驗，（3）收集資料，（4）建構數學模型，（5）驗證模型有效。然而，幾近實驗以實驗方法探索數學，但所處理的對象並非科學實驗的物理量，而是電腦計算或模擬的數學物件。就如作者所言，幾近實驗行動不僅是實務方法，也具有知識本質，它能支助產生溯因理論，而由此從歸納實驗模組轉化至此形式化的演繹推理。

除了歸納和演繹方法外，溯因推理也成為探究過程的一部分。在眾多溯因推理的定義中，作者說明 Peirce 兩個在數學教育中比較有用的定義：（1）三段論的溯因，以及（2）說明假設的溯因。Baccaglini-Frank（2010）指出這兩種溯因推理都是在形成解釋原因的假設，只是第一種從眾多可能原因中擇一；第二種是在建構一個說明理由的假設。溯因為推理過程，參照一些確定事實及法則，提出假設語句用以說明觀察現象。該文作者認為在 DGS 環境中可以產生溯因推理，因而橋接介於知覺事實與理論轉換間的缺口；若配合適當的教學設計，透過溯因推理可支助介於探索與證明兩層面的張力間的結構地認知一致性（cognitive unity）。

該文作者在內文中引用研究案例說明學生展現溯因推理與完成證明過程。熟悉動態幾何軟體操作且修習過幾何課程的 11-12 年級學生被安排使用動態幾何系統，探索四邊形四頂點共圓的開放性問題。作者提出學生在探索過程中主要展現兩種特徵：（1）產生溯因理論，（2）結構地一致性。學生們透過拉曳物件形成臆測，且嘗試說明其因，而發展出解釋性假設。在證明過程中，學生們強烈地表現出與探索、臆測、溯因過程的一致性。

2.認知一致

上述動態幾何系統中，學生進行幾近實驗行動產生溯因推理，其要素在 MD。MD 為器具行動包含認知特定圖形，以及透過滑鼠移動保持特定的不變性質。若 MD 行動能內化成心理工具，則有助於學生從實驗端轉化至理論端。因此，認知一致是從實驗到理論，從論證到證明的關鍵

因素。事實上 Boero, Garuti, Lemut 與 Mariotti（1996）即定義認知一致為介於形成臆測至產生證明間的論證連續性。該文作者認為認知一致性與論證層次兩觀念，於分析學生在數位環境中，從論證到證明的思維過程特別有效，尤其在間接證明的過程。

該文在討論動態幾何系統中的間接證明中，引入 Lopez-Real 與 Leung（2006）的平行系統觀念。他們認為形式公理化歐氏幾何（Formal Axiomatic Euclidean Geometry, FAEG）和動態幾何環境（Dynamic Geometry Environment, DGE）是平行系統。兩個是不同的記號現象，而非具有層次關係。MD 拉曳策略結合所建構的物件及軌跡，連結所伴隨的推理行動，此二平行系統如圖 2。

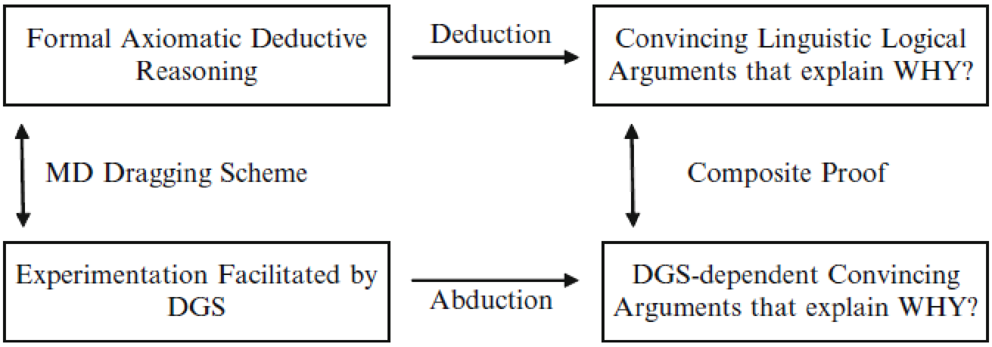

圖 2 FAEG 和 DGE 兩個記號系統。引自”Experimental approach to theoretical thinking: Artefacts and proofs,” by F. Arzarello, M. Bartolini-Bussi, A. Leung, M. A. Mariotti, and I. Stevenson, 2012, in G. Hanna and M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI study* (p.127). Berlin: Springer.

在 DGE 下的組合證明如同 FAEG 和 DGE 的混合。學生在歐氏形式推理與 DGE 的探索溯因交織中完成證明。

五、第三部分－推理

該文第三部分首先應用活動理論提出一個模型，來突顯在張力轉化過程中技術工具的角色，之後討論數位科技在幾何學習的仲介角色與發展證明的運用。圖 3 為由活動理論所導出之，而用以描述使用製品工具進行證明過程的架構。

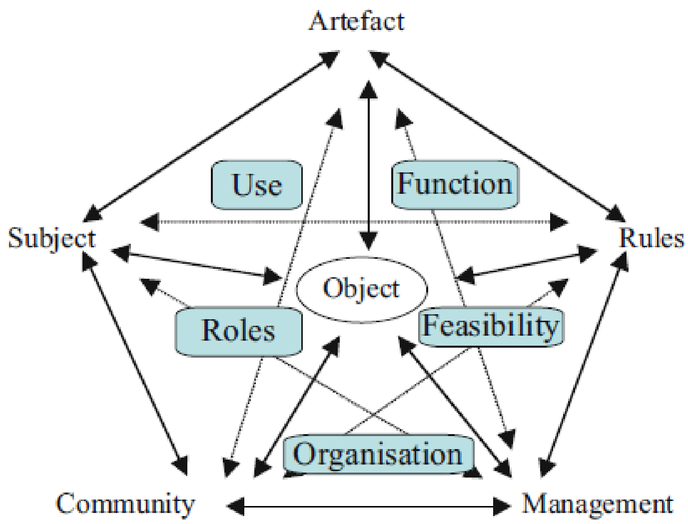

圖 3 活動理論之器具證明架構。引自”Experimental approach to theoretical thinking: Artefacts and proofs,” by F. Arzarello, M. Bartolini-Bussi, A. Leung, M. A. Mariotti, and I. Stevenson, 2012, in G. Hanna and M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI study* (p.128). Berlin: Springer.

此理論系統的物件（object）由問題形成，以激發與驅動證明過程，結果（outcome）即是此系統產生的證明。工具製品（artefacts）是在證明過程中的物質材料，如直尺、圓規及 DGS 等。主體（subject）是個體，也是活動群體（community）的一部份。此社群經由有力的結構所管理（management），他賦予情境角色與狀態。規則（rules）組合各種關係以定義系統的不同面向。

六、結語

該文從知識論、認知觀點、教學法與教學理論，多面向闡述工具與數學證明教學之間的關係，內容豐富，事例解說詳細值得細讀。該文雖歸於研究立場論文，但強調教師在證明教學活動中的重要角色，因此也值得教師教學參考。在設計數學證明課程時，不是僅單純地運用演繹邏輯推理使學生確信定理為真，更須帶領學生進行實驗操作、探索臆測數學性質。數學證明本身為數學研究工作的核心，更具有學習的價值。數學證明過程複雜，牽涉甚多的認知因素，如何設計教學活動激發學生動機與興趣，需要考量。或許該文建議之實驗探索、演繹論證與應用反思證明數學三部曲值得參考。

參考文獻

Arzarello, F. (2009). New technologies in the classroom: Towards a semiotics analysis. In B. Sriraman & S. Goodchild (Eds.), *Relatively and philosophically earnest: Festschrift in honor of Paul Ernest's 65th birthday* (pp. 235–255). Charlotte: Information Age Publishing, Inc.

Arzarello, F., Bartolini-Bussi, M., Leung, A., Mariotti, M. A., & Stevenson, I. (2012). Experimental approach to theoretical thinking: Artefacts and proofs. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI study* (pp. 97-137). Berlin: Springer.

Baccaglini-Frank, A. (2010). *Conjecturing in dynamic geometry: A model for conjecture-generation through maintaining dragging*. Doctoral dissertation, University of New Hampshire, Durham, NH). Published by ProQuest ISBN: 9781124301969.

Boero P., Garuti R., Lemut E. & Mariotti, M. A. (1996). Challenging the traditional school approach to theorems: A hypothesis about the cognitive unity of theorems. In L. Puig & A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of 20th PME Conference* (Vol. 2, pp. 113–120), Valencia, Spain.

Hanna, G., & De Villiers, M. (Eds.). (2012). *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI Study* (Vol. 15). Berlin: Springer.

Lopez-Real, F., & Leung, A. (2006). Dragging as a conceptual tool in dynamic geometry. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *37* (6), 665–679.