

王毓婕、陳光勳（2016）。

運用幾何軟體 Cabri 3D 與實體積木教具教學對國小二年級學童學習空間旋轉概念之影響。

臺灣數學教育期刊，3（1），19-54。

doi: 10.6278/tjme.20160323.002

## 運用幾何軟體 Cabri 3D 與實體積木教具教學 對國小二年級學童學習空間旋轉概念之影響

王毓婕<sup>1</sup> 陳光勳<sup>2</sup>

<sup>1</sup>桃園大業國民小學

<sup>2</sup>國立台北教育大學數學暨資訊教育學系

本研究旨在探討二年級學生以 Cabri 3D 幾何軟體與實體積木融入空間旋轉概念教學之後，學生的學習成效以及解題策略和錯誤類型。研究法係採用準實驗不等組前後測研究設計，以六十一位二年級學童為研究對象。實驗組進行 Cabri 3D 幾何軟體搭配實體積木操作進行教學，而控制組僅以實體積木操作進行教學。研究發現結果如下：一、兩組學童在空間旋轉能力測驗的後測成績均有進步，顯示空間旋轉能力的教學對二年級學童是有效的。二、接受不同教學模式之兩組學童其學習成效並沒有顯著差異。於延後測後以訪談的方式探究二年級學童在空間旋轉能力的解題策略及錯誤類型，進行質性研究的分析。結果發現多數學生先以直觀方式做選項的判斷，先找出整體結構類似的立方塊，接下來欲確認答案的方式則大多會使用心像旋轉的解題策略，並再以整體或是切割立方連塊、進行分析比對來做確認。也有部分學生以直觀方式做形體的判別後，並未做旋轉而是直接選擇答案，此類學生容易出現鏡射形體迷思。最後綜合上述研究結果，分別從教學與未來研究等，提出具體建議。

**關鍵詞：**Cabri 3D 幾何軟體、空間能力、空間旋轉能力

---

通訊作者：陳光勳，e-mail：[kachen@tea.ntue.edu.tw](mailto:kachen@tea.ntue.edu.tw)

收稿：2015 年 5 月 25 日；

接受刊登：2016 年 3 月 23 日。

Wang, Y. J., & Chen, K. H. (2016).

Based on Cabri 3D and physical manipulatives to study the effect of learning on the spatial rotation concept for second graders.

*Taiwan Journal of Mathematics Education*, 3(1), 19-54.

doi: 10.6278/tjme.20160323.002

## **Based on Cabri 3D and Physical Manipulatives to Study the Effect of Learning on the Spatial Rotation Concept for Second Graders**

Yu-Jie Wang<sup>1</sup>      Kaung-Hsung Chen<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Dayes Elementary School, Ta Yuan City

<sup>2</sup> Department of Mathematics and Information Education, National Taipei University of Education

For teaching spatial rotation concepts, this study investigated the learning effectiveness, problem-solving strategies, and error types produced by different teaching methods that used physical manipulatives with and without Cabri 3D geometry software. The study adopted a quasiexperimental, nonequivalent group design, and 61 second graders participated. The experimental group comprised 31 students who used physical manipulatives with Cabri 3D geometry software. The control group comprised 30 students who used only physical manipulatives without the software. The research revealed the following findings: Both the experimental and the control group exhibited considerable improvement following the posttest and showed that these methods of teaching spatial rotation concepts were effective for second graders; however, there was no significant difference in learning effectiveness between the groups. In addition, qualitative analysis was performed on interviews conducted after a relay test. The results indicated the following problem-solving strategies and error types: Most students first used intuition to make spatial judgements, before finding overall similarities between objects, checking for possible alternatives, and confirming their spatial judgement by using mental rotation strategies that employed all or part of the objects. After using their intuition, some students directly chose without rotating the objects; these second graders were apt to make an error involving a mirror misconception. Finally, some suggestions for future research and teacher development are offered as a reference to researchers and teachers, respectively.

**Keywords:** Cabri 3D, spatial ability, spatial rotation concept

---

Corresponding author : Kaung-Hsung Chen · e-mail : [kachen@tea.ntue.edu.tw](mailto:kachen@tea.ntue.edu.tw)

Received : 25 May 2015;

Accepted : 23 March 2016.

## 壹、緒論

### 一、研究動機

在孩童的日常生活中，有許多情境與其空間能力有關，但是九年一貫數學課程中，國小幾何課程裡有關立體空間的課程明顯比其他主題來得少，尤其低年級幾何課程也較多著重在平面圖形。莊月嬌與張英傑（2006）針對九年一貫課程小學的幾何教材分析，認為應加強空間視覺化之教材，以提升學童之空間能力。在 TIMSS 2003 與 TIMSS 2007 的測驗結果中，學生在空間能力相關概念平均答題正確率偏低，發現在國小數學教材中未處理這些概念。而「易混淆圖形的旋轉與平移」也是我國學生在 TIMSS 2003 與 TIMSS 2007 中，答題上常出現的錯誤類型（孫嘉德，2010）。可見在我們小學階段對於空間能力之教材較薄弱，相對的學生的學習表現亦較差。

根據 Piaget 的認知發展論，二年級的學童正處於具體運思操作期，也就是他們的學習需要透過動手操作來建立學習經驗。此階段的學生在 Van Hiele 幾何思考的發展模式中是屬於視覺層次（劉好，1994），經由視覺觀察具體物，而達到學習。但是，在立體圖形的學習上，從學生課本乃至紙筆評量時，都是將立體圖以平面視圖呈現。因此有關幾何課程的學習，除了具體操作外，學生必須能由二維的平面圖像辨識三維的立體圖形。

目前資訊科技融入教學是教育趨勢，Cabri 3D、GeoGebra 等動態幾何軟體，在處理立體圖時，都有許多效果的展現，例如圖形翻轉、透視、堆疊、旋轉...等。虛擬教具乃是利用電腦軟體或某種電腦語言所設計出來的半具體物件，透過滑鼠操弄如同具體教具被手操作，對老師的數學教學與學生的抽象概念學習有很大的幫助。王智弘（2006）在多方塊虛擬教具的開發與教學研究中也發現多方塊數學電子軟體教學時，促使學生有更多時間思考與討論，產生新的數學思維，軟體的使用也方便學生比對檢驗重複圖形，在解題策略上有所成長。Bouck 與 Flanagan（2010）曾說虛擬教具確實能提升學生的學習興趣。Baki、Kosa 與 Guven（2011）利用 Cabri 3D 軟體和實物教具針對職前數學教師空間視覺化技能的比較研究中，其結果發現使用 Cabri 3D 動態軟體能輔助學習者在空間視覺能力的提升。又現今有關「空間旋轉能力」的研究，鮮少針對國小低年級的研究。陳毓梅（2011）針對不同教具教學環境對國小一年級學生學習立方體積木堆疊計數的影響研究中，發現學生對於幾何形體凹處造成錯視、以積木與其他積木接觸面為隱藏積木、2D 紙上幾何形體方位錯視認知等都是學童無法正確計數立方體積木數，造成學習困難的主要原因。鄭美玲與陳光勳（2015）研究也發現國小高年級學生對於二維紙上的幾何形體辨別不容易掌握；幾何形體隱藏處也容易造成錯視，因此對於低年級學生在幾何形體辨別不容易掌握之下，以資訊科技融入空間旋轉能力的教學，藉由滑鼠操控旋轉立方塊，來辨識被隱藏的立方塊，並以不同視角觀察立方塊，促使學生發展將三維的立體圖形辨識成二維平面圖像之能

力，進而提升學童幾何學習的效益。

目前已有許多研究證實動態幾何軟體對幾何學習上有正向的影響，但以往的研究大多是針對國、高中，或是國小高年級，並且在實驗組的處置都是單純以動態幾何軟體介入學習，控制組則為傳統教學模式。因此以此設計的研究不多，而陳毓梅（2011）有初探，陳毓梅於老師授課時以投影設備將虛擬教具融入教學的方式進行立方體積木堆疊計數，並沒有實際讓學生以電腦軟體操作進行虛擬物件旋轉，而本研究則從空間旋轉的面向去做探討，並讓學生以電腦軟體操作進行虛擬物件的旋轉！不同其他研究，於本研究除了是針對國小二年級學生外，在實驗組的處置是以動態幾何軟體介入並且搭配實體教具的操作學習。當二年級的孩童在同樣的教學時間與學習目標下，同時擁有兩種工具：Cabri 3D 軟體和實體教具的實驗組在學習上是否能將兩種工具使用得宜而達到有效學習？值得探究。

## 二、研究目的

基於上述研究動機，本研究目的有：

- （一）探討以不同教學模式的教學活動後，國小二年級學童在學習空間旋轉能力之成效。
- （二）探討二年級學童在空間旋轉測驗的解題策略以及錯誤類型。

## 三、名詞釋義

以下就本研究相關之名詞作解釋或界定：

### （一）立即教學成效

空間旋轉能力立即教學成效係指學生在「空間旋轉能力測驗」的後測成績表現。在實驗課程結束後，兩組學生進行空間旋轉能力後測，並與教學前的前測比較，作為學生立即教學成效的分析。

### （二）保留成效

空間旋轉能力保留成效係指學生在「空間旋轉能力測驗」的延後測成績表現。在實驗課程結束三週後，兩組學生進行空間旋轉能力延後測，並與後測成績比較，作為學生保留成效的分析。

### （三）延宕教學成效

空間旋轉能力延宕教學成效係指學生在「空間旋轉能力測驗」的前測與延後測成績表現情形，作為學生延宕教學成效的分析。

## 貳、文獻探討

以下就有關空間能力、空間旋轉能力的相關研究、國內外空間旋轉的課程分析、資訊融入幾何課程的相關研究，進行文獻探討。

### 一、空間能力的相關研究

#### (一) 空間能力的定義與分類

提到空間能力，大多數人往往會聯想到有關智力測驗當中的題目。近一世紀有關空間能力的研究也愈來愈多，McGee (1979) 指出，Kelly 在 1928 年確認了空間因素，並且描述它是對於形狀的一種心理操控。本文歸納整理有關空間能力之定義與分類，並探討空間能力與學童在數學學習的關係。

早期心理學家以因素分析的技術發現了所謂「空間能力」是為人類心智能力之一，此後便有學者陸續提出數種不同的空間能力因素（張碧芝、吳昭容，2009）。整理有關空間能力的定義與分類之相關文獻後，發現每位學者對於空間能力各持有不同的定義而有不同的詮釋，這與學者們所持的觀點以及分析層面之不同而異。McGee (1979) 將過去有關空間能力之研究做進一步的統整與歸納，他認為過去對於空間能力的探討，主要都可以歸類為以下兩大類：一是空間視覺化 (spatial visualization)，二是空間定位 (spatial orientation)。空間視覺化指的是在心理旋轉、操縱和扭轉二維和三維的物件。而空間定位則是指在一個空間結構其改變方向而不被混淆的能力和相對於一個人的身體能判斷的空間方向。Linn 與 Petersen (1985) 認為空間能力可以表示、轉化、生成和回憶符號的非語言信息。並將空間能力分為有：空間知覺 (spatial perception)、心理旋轉 (mental rotation)、空間視覺化 (spatial visualization)。

學者們對於空間能力的定義大多都圍繞在同一個指標，即都表明空間能力是個體進行一種心理活動的形式，無論是在二維的圖形或是在三維的物件上，對於目標物進行一連串的心理活動，擁有對目標物進行操控的能力，像是位移、旋轉、翻轉，甚至是重新再組織、定位。因此研究者認為空間能力指的是，個體能在心理或腦海中對於包含在二維或三維空間中的形體進行觀察、辨識，並進行不同方位位移、旋轉、翻轉的操弄，以達成轉換或類化心像的一種能力。

#### (二) 空間能力與數學學習

雖然少數文獻曾報告，有些學生其數學不好，但在空間能力發展特好，但絕對多數文獻認為空間能力和孩童的學業成績是密切相關的。Fennema 與 Sherman (1977) 認為個人空間視覺化能力關係著其個人數學幾何的學習。Hegarty 與 Waller (2005) 更提出數學思維通常是被認為需要具備有視覺感知以及空間能力相關的能力 (引自 Pittalis & Christou, 2010)。

Cheng 與 Mix (2014) 針對在 6 至 8 歲的孩子進行有關是否心理旋轉的培訓能提高學童的

數學成績，在這個研究結果支持心理旋轉能力與數學成績呈正相關。Weckbacher 與 Okamoto (2014) 整理過去的許多相關研究 (例：Battista, 1990; Battist, Wheatley, & Talsma, 1982; Casey, Nuttall, & Pezaris, 1997; Casey, Nuttall, Pezaris, & Benbow, 1995; Delgado & Prieto, 2004; McGee, 1979)，一致認為心理旋轉已經常常被視為成功解決問題表現之重要因素，尤其是在數學學習的幾何方面，心理旋轉的能力關係著其數學的解題能力。

由以上的研究顯示，學童在數學學習的表現情形如何和學童本身的空間能力情形是正相關的。而且，空間能力與數學的相關不僅在數學幾何方面，也有研究文獻證實在數學計算上也與個體的空間能力呈正相關。這表示當一位孩童其空間能力較佳時，能幫助他數學的學習，他在學習數學的課程內容會遭遇的困難就比較少，相對的其數學成就的表現也會比較高，尤其更多的證據明顯反映於幾何課程當中。這也意味著當孩童在數學學習遭遇困難，尤其是在幾何領域的學習遇挫折時，欲協助解決孩童的困難，教學者應能從培養孩童的空間能力來著手而加以改善。

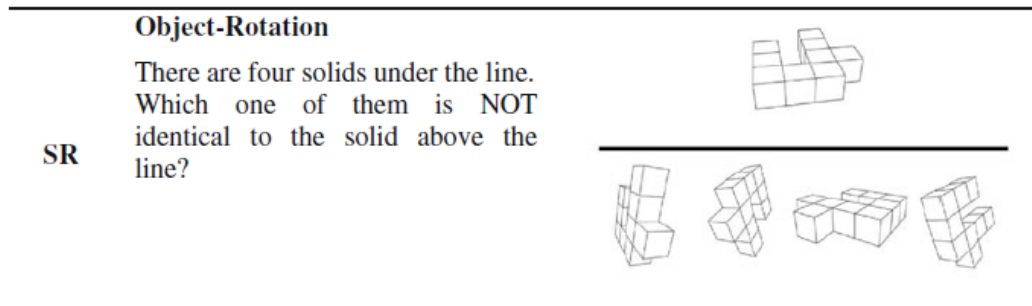
## 二、空間旋轉能力的相關研究

### (一) 空間旋轉能力的教學

從國外學者的研究中，充分顯示空間能力經過適當教學引導，是能促進能力的提升與進步的。例如，Wheatley 與 Wheatley (1979) 針對一群 14 歲的孩童進行有關空間處理的實驗，發現兒童可以從被設計的空間教學的活動中受益，他們的空間能力測驗也反映出有明顯的進步。而 Cheng 與 Mix (2014) 針對六到八歲孩子進行空間心理旋轉培訓，以訓練孩童的空間旋轉能力。Baki (2011) 針對大學生一年級職前數學教師，以動態幾何軟體融入於與旋轉能力有關的空間視覺化教學研究中，研究結果表明了不論是使用動態軟體或是實體教具的操作，都比傳統教學更有效的培養學生的空間視覺化技能。也就是空間視覺能力是可以經由培訓、適當的教導而加以改善的。對於空間旋轉能力透過教學活動、適當的訓練多數是能協助學童提升其空間旋轉能力的表現。因此，需要更多的研究來探討空間旋轉能力的學習問題，不論是以融入電腦軟體的教學，或是透過積木方塊的操作，如何以最適當教學策略、教學方式來進行空間能力的教與學，以作為實際教學上的應用。

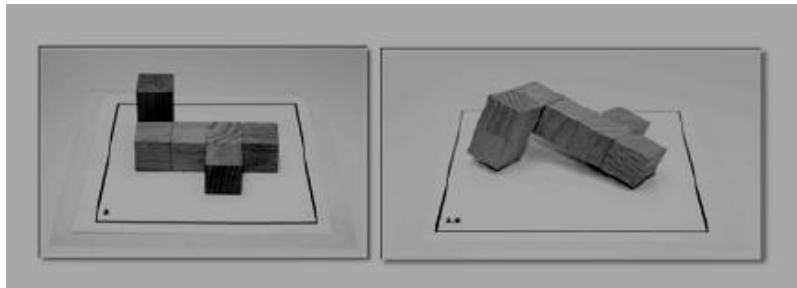
### (二) 空間旋轉能力的測驗

為了測量學童學習成效，空間旋轉試題編製更顯重要。茲整理有關國內外學者進行空間立體旋轉能力測驗時，所使用的測驗工具：Pittalis 與 Christou (2010) 在研究 3D 幾何思維的推理類型與空間能力的關係中，針對十一至十五歲的男女學童進行有關空間能力測驗，當中關於 spatial relations (SR) 向度測驗，其試題示例如圖 1，讓測驗者在透過心理旋轉後，找出不是該積木旋轉過後的圖像。



**圖 1 Pittalis 與 Christou (2010) SR 向度測驗例題。**引自 “Types of reasoning in 3D geometry thinking and their relation with spatial ability,” by M. Pittalis and C. Christou, 2010, *Educational Studies in Mathematics*, 75(2), p. 199.

Plath 與 Ruwisch (2012) 在研究有關兒童在空間能力任務的解決策略中，對四年級學童所進行的心理旋轉任務這一項目，所使用的任務型態如圖 2：給定兩個立方連塊圖像，問學童這兩個圖是否是相同的。



**圖 2 Plath 與 Ruwisch(2012)心理旋轉測驗例題。**引自 “Elementary school children solve spatial tasks a variety of strategies,” by M. Plath and S. Ruwisch, 2012, In T. Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th International Group for the Psychology of Mathematics Education Conference* (Vol.3, p. 309.) Taipei, Taiwan: PME.

國內的研究學者針對空間旋轉能力所進行的測驗中，也都會選擇以積木方塊堆疊的刺激物做為測驗的題目。例如黃惠薇(2008)進行六年級學童之空間旋轉能力研究的測驗，其中針對三維物件的旋轉試題是以立體堆疊的積木作試題編製。其所設計在至少拐兩個彎的正方體連塊下，學童進行心理旋轉後，找出相同的連方塊積木。而其測驗的題目為正方體六連塊、七連塊以及八連塊。示範例題如圖 3。

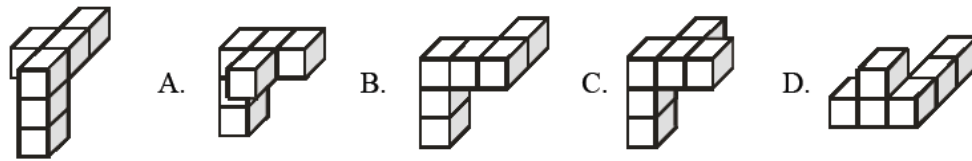


圖 3 黃惠薇 (2008) 立體積木旋轉例題。引自「資訊科技融入教學對國小六年級學童在空間旋轉能力之研究」(未出版之碩士論文)(頁 40), 黃惠薇, 2008, 國立臺北教育大學, 臺北。

由於使用立方塊進行三維空間物體的建構,能促使、提升學生發展其空間能力(Izard, 1990),整理相關空間旋轉測驗的文獻裡,發現多數學者使用的實驗刺激物大多為立方連塊,並且根據研究對象年紀的不同,立方塊所堆疊的高度、複雜度也會有不同的變化。當進行空間旋轉能力測驗時,在立體旋轉的項度下,立方塊是很常被使用的刺激物。立方塊可以透過堆疊而發展出更多的形體,也藉由數量的擇定、拐彎的情況,增加其複雜度,故在進行空間能力測驗時,積木立體旋轉將會是一種很方便使用的工具。

### (三) 空間旋轉測驗錯誤類型

關於學生在空間旋轉測驗中出現的錯誤類型,陳師潔(2011)針對國小二年級兒童以觸覺辨識正方體連塊的解題活動研究中,利用自編測驗進行紙本版(視覺表現)及實物版(觸覺表現)的團體調查,再從中選擇兩名個案透過晤談法來收集兒童解決正方體連塊的解題活動,得到以下結果:在視覺表現中,以鏡射類型的因素錯誤率最高,其次依序為基底形狀相似的因素、與桌面關係的因素,最後是徑長個數差異的因素。可發現二年級兒童對於鏡射的問題類型是比較難掌握的。

## 三、國內外「空間旋轉」的課程分析

為了空間旋轉教學活動設計,再針對國內外空間旋轉課程做分析。美國數學教師協會(National Council of Teacher s of Mathematics, NCTM)在 2000 年提出的「學校數學的原則與標準」四個幾何學習目標中的兩項即為空間課程。而在幼稚園至二年級這階段,其課程中涵蓋有「使用空間記憶和空間視覺化,創建幾何形狀的心理圖像」、「識別並應用平移、旋轉和翻轉」等相關空間旋轉之能力。由此可以發現,美國在幾何的課程中相當重視空間概念的學習,尤其在低年級階段課程就已包含空間能力之學習。

芬蘭的 WSOY Oppimateriaalit 出版的數學教材中關於幾何教學目標中,列有「能透過不同方向檢視場景以發展視覺理解能力」(彭惠群, 2010),訓練學生的空間視覺能力。其教科書從一年級開始就陸續於課程中編有立體方塊的計數,在二年級的數學教科書裡也出現有立方塊旋轉的相關教材,學生必須要能推論立體方塊旋轉後的樣子,以發展空間的能力。從教科書的呈現可以看出芬蘭數學在空間課程的重視,尤其從國小學生一年級就開始紮根。



曾湘玲（2012）在探究臺灣與澳洲小學幾何教材的教學目標與幾何教材內容之呈現情形的研究中，發現澳洲 Targeting Maths 教科書比我國對於空間概念的發展著墨更多，包括空間位置、翻轉、平移和旋轉等空間概念。澳洲數學教材其中「幾何形體的視覺化以及空間概念」佔所有幾何課程比例最高。

而我們國內九年一貫的幾何課程目標有：1.掌握基本形體之特徵。2.培養欣賞與設計幾何形體的能力。3.培養設定方位與描述空間關係的能力。4.培養幾何形體關係之論證能力。5.培養解決圖形與空間相關問題的能力（張英傑、陳創義，2003）。這當中包括有「空間基本概念」和「空間能力」的培養。但是現今國小幾何課程有關立體空間的課程明顯比其他主題來得少，且並沒有相關空間旋轉的課程，尤其一、二年級幾何課程也較多著重在平面圖形的認識。

從以上整理的資料，發現近年來國外的數學教育對於空間能力逐漸重視，認為空間能力是數學能力的一部分，因此在數學教育的課程都將相關空間概念規劃入學童的數學學習活動當中。我們在九年一貫課程中，對於空間概念部分的比例卻是較少。

#### 四、資訊科技融入幾何課程相關研究

目前資訊科技的不斷進步且日新月異，使得在教室裡的教學型態也隨著電腦科技的精進，而轉變成透過電腦的精確、方便，以及電腦的特殊動態功能，來輔助學生學習。左台益（2012）指出動態幾何軟體提供（1）拉動（dragging）的核心操作的方式，（2）動態行為關連物件之間的關係變動，以及（3）軌跡或痕跡（locus or trace）的呈現，輔助動態心像的外顯化及操弄化。因此利用動態幾何軟體的特殊功能，能協助學生在幾何學習上的思考與操作，輔助學生從不同觀點、視角察覺幾何性質。且有許多研究顯示利用電腦輔助軟體進行教學，有助於學生幾何課程的學習。尤其在數學的幾何相關課程裡，應用軟體於教學已相當的普及，例如使用 GSP、GeoGebra、Cabri 等軟體的教學融入。

動態幾何軟體 Cabri 其以動態方式呈現的功能，使我們更容易觀察幾何構造並操控之。自從 2004 年 9 月 Cabri 3D 問世以來，動態幾何的領域已經由平面幾何擴充到立體幾何及球面幾何（全任重，2005）。在繪圖製作三維空間的幾何圖形，動態幾何系統 Cabri 3D 是一個具有強大動態功能的軟體，在近幾年的數學教育領域中逐漸受歡迎。Baki（2011）認為 Cabri 3D 是專門用來探索 3D 幾何體，並說明這個軟體被認為是 3D 幾何圖形進行視覺化和推理的革命性電腦輔助產品，它不但可以容易地做出立體圖形，而且只要按住滑鼠右鍵，就可以隨意地使圖形做三度空間的旋轉，也就是說，可隨意地改變視角（林倉億，2011）。讓學生可以從不同的角度觀察空間幾何圖形，了解其性質，使得更容易理解數學空間幾何的概念。

許多有關使用 Cabri 動態軟體的研究，大多是針對國、高中學生，其較少研究是在國小低年級的教學。然而數學概念裡有關空間的學習，對不少學生而言是困難的。左台益與梁勇能（2001）

指出，空間能力是組成數學能力的一個重要元素，且空間能力為幾何學習的重要認知因素。尤其當國小階段學童進入到高年級課程時，會學習有關體積與表面積單元，此一範圍是牽涉到立體空間概念與抽象思考的學習，這與學生空間能力發展息息相關。因此若能在學童低年級時透過適當教學奠基其空間能力的培養，將有利於往後的幾何學習，而教師若只利用黑板與粉筆的教學，往往不易使空間學習的概念進行有效的傳授。況且要將三維圖像辨識成二維平面圖形，對低年級學童更是困難。Cabri 3D 其色彩豐富、解析度較高能更為清楚呈現、旋轉功能的操作上較 GeoGebra 簡易些。我們發現使用 Cabri 3D 這套軟體輔助教學於低年級學童，其簡單的操作方法之特性，可讓教師很快的進行立方體的堆疊、旋轉，讓學生從不同的視角觀察立體物件，進行空間概念的學習。基於以上因素，故本研究選用 Cabri 3D 作為資訊融入空間旋轉課程之軟體。

## 參、研究方法

### 一、研究設計

本研究採「準實驗研究」不等組前後測設計之方式進行。選取研究者任教學校中二年級其中兩班為研究對象，一班為實驗組，以幾何軟體 Cabri 3D 搭配實體積木操作融入空間旋轉課程教學。一班為控制組，以實體積木操作的空間旋轉課程教學。在實驗教學後，針對前、後測成績差異大或前後測表現無進步且表現較差之學童抽樣進行半結構訪談，以了解學童的錯誤類型及解題策略。如表 1 為準實驗研究設計表。

表 1

準實驗研究設計

	前測	空間旋轉能力教學	後測	延後測
實驗組	O <sub>1</sub>	X <sub>1</sub>	O <sub>3</sub>	O <sub>5</sub>
控制組	O <sub>2</sub>	X <sub>2</sub>	O <sub>4</sub>	O <sub>6</sub>

註：O<sub>1</sub>：表示實驗組班級「空間旋轉能力測驗」前測分數

O<sub>2</sub>：表示控制組班級「空間旋轉能力測驗」前測分數

X<sub>1</sub>：表示實驗組班級「空間旋轉能力補充課程」教學

X<sub>2</sub>：表示控制組班級「空間旋轉能力補充課程」教學

O<sub>3</sub>：表示實驗組班級「空間旋轉能力測驗」後測分數

O<sub>4</sub>：表示控制組班級「空間旋轉能力測驗」後測分數

O<sub>5</sub>：表示實驗組班級「空間旋轉能力測驗」延後測分數

O<sub>6</sub>：表示控制組班級「空間旋轉能力測驗」延後測分數

## 二、研究對象

以桃園縣某國小二年級其中兩班為研究對象，共計 61 名學童，其中實驗組共 31 位學生，其中男生 15 位，女生 16 位。控制組共 30 位學生，其中男生 16 位，女生 14 位。總計男生 31 位，女生 30 位。

實驗組的班級為研究者本身擔任導師的班級，而控制組班級的選取是扣除進行預試的班級，從剩餘的班級中，選與實驗組班級的期中考數學程度最為相近的一班，且其班級導師的帶班方式以及數學教學與研究者最為相似，數學教學方式都以講述為主，並鼓勵學生動腦思考及上台發表。

## 三、研究工具

### (一) 空間旋轉能力測驗

#### 1. 試題編製

本測驗主要是了解學童的空間旋轉能力之表現，依據相關國內外空間旋轉能力文獻之參考，與專家教師共同討論，積木旋轉測驗為探究空間能力常用的測驗試題，針對三度空間積木旋轉進行試題編製。試題計分方式：每題答對得 1 分，答錯得 0 分，總分共計 24 分。整份測驗卷之雙向細目表如表 2：

表 2

空間旋轉能力測驗雙向細目表

		物件旋轉						總計
		順逆時針 水平旋轉		左右向 翻轉		前後向 翻轉		
		90 度	180 度	90 度	180 度	90 度	180 度	
立體連塊 與桌面的 關係	平貼	6.	5.	10.	1.	2.	3.	12 題
	桌面	9.	7.	21.	4.	8.	23.	
	凸出	18.	15.	13.	14.	11.	19.	12 題
	桌面	20.	16.	24.	17.	12.	22.	
總計		8 題		8 題		8 題		共 24 題

立體連塊與桌面的關係，當立體連塊可以完全平貼桌面，是指所有的小正方體至少都有一面與桌面接觸。若不能完全平貼於桌面，則立方塊為凸出桌面的關係。

#### 2. 空間旋轉能力測驗試題範例

如圖 4 為積木凸出桌面，前後向翻轉 90 度之範例試題：

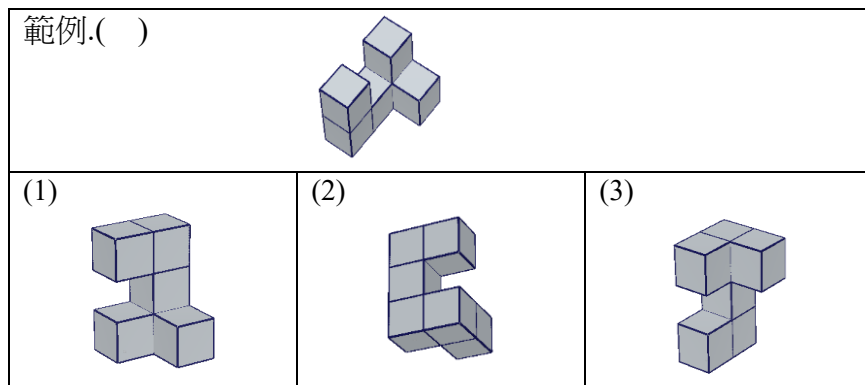


圖 4 空間旋轉能力測驗試題範例

### 3. 預試後試題分析與修正

在完成自編的空間旋轉能力測驗後，挑選二年級的某一班級進行預試。把預試結果與專家學者以及學校資深教師討論後，原本題目中的四連塊題目對二年級學童而言太簡單，故予以刪除，更改為五連塊或六連塊，以增加連塊的數目來增加試卷的難度。第二次預試題目共計 24 題，其內部一致性係數 Cronbach's  $\alpha = 0.63$ 。將預試結果與專家學者以及學校資深教師討論後，將難度在 0.8 以上且鑑別度在 0.3 以下題目進行修改。根據以往文獻表明，國小二年級學童在辨識正方體連塊的測驗中，最容易產生錯誤的類型是鏡射因素的類型，另外，正方體連塊基底雷同情形下，只差在第五個相對積木的位置，其在出現錯誤答案比例也較高（陳師潔，2011）。在此次預試後，修正的題目主要是將學生容易出現的錯誤類型列作為選項答案，以增加題目的難度。修正編製後，為使前測、後測和延後測的試卷困難度相同，此份試題於前測進行使用，後測試題則將此份試題的題幹與正確選項的答案交換。延後測的試題則是將後測試題的題目順序進行調換。

### 4. 信度與效度

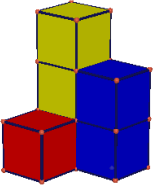
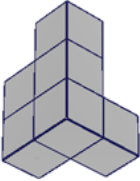
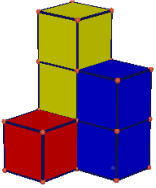
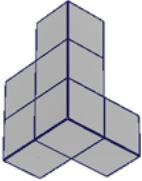
測驗卷信度採試題內部一致性 Cronbach's 的  $\alpha$  係數，正式測驗卷前測信度  $\alpha = 0.663$ ，後測信度  $\alpha = 0.7$ 。效度採內容效度及專家效度，內容效度以雙向細目表檢核試題的適切性。專家效度則請相關研究專長的專家和教學經驗豐富的教師共同審核本測驗卷，並提供試卷之修正參考。

#### (二) 空間旋轉課程教案

本研究共有兩份教學教案，一份是於控制組班級進行教學的空間旋轉課程的教案，教師先以大型立方塊積木放置在講桌上，為彌補傳統教學中教師以實體教具進行展示時，容易產生視覺死角，致使學生不易察覺，緊接著拿起大型立方塊積木面對每一排排頭走一趟再放回講桌上。每位學生桌上也同時擁有一堆邊長 2 公分的小正方體實體教具，讓學生透過實物觀察與操作，瞭解物件旋轉後的圖像。另一份是於實驗組班級進行的空間旋轉課程的教案，此實驗班級於電

腦教室於 Windows 作業系統下，每位學生使用 Cabri 3D 2.0 試用版之軟體的操作，建立立體方塊快速堆疊、旋轉的影像輔助教學，從不同視角觀察立方塊，將三維圖像辨識成二維圖像，並搭配實體積木教具操作使用以對照檢驗旋轉後的結果產生內蘊。由於實驗組班級學生對於 Cabri 3D 軟體操作不熟悉，故於實驗教學前先實際到電腦教室進行一節課 Cabri 3D 軟體基本操作的教學，初步認識 Cabri 3D，使用滑鼠進行拖曳、旋轉等功能之操作練習。

有關兩組教案活動舉例如下：

第三節：「翻轉吧！立方連塊」教學活動舉例	
實驗組	控制組
<p>1.開啟檔案，如圖</p>  <p>圖 1</p> <p>(1)請學生將在學習單第 2 題上的立方塊</p>  <p>依照螢幕上的積木塗上顏色。</p> <p>(2)請學生塗色後，再以滑鼠操控旋轉功能旋轉圖 1，使圖 1 與學習單的立方塊擺放的角度相同，確認所塗的顏色對不對？</p> <p>(3)學生利用實體積木動手拼出如學習單第 2 題之立方連塊，並旋轉實體積木與旋轉螢幕虛擬方塊做比對。</p> <p>(4)統整：教師控制螢幕，旋轉積木呈現如學習單的角度，學生再次確認螢幕畫面、學習單以及實體積木的立方塊是否相同？</p>	<p>1.教師佈題海報如下圖 1 於黑板</p>  <p>圖 1</p> <p>(1)請學生將在學習單第 2 題上的立方塊</p>  <p>依照黑板上的積木塗上顏色。</p> <p>(2)學生塗色後，請學生以實體積木拼出如黑板海報上的立方連塊。並旋轉積木，確認所塗的顏色對不對？</p> <p>(3)請學生發表要如何旋轉此積木，以確認所塗顏色是否正確？(學生上台示範旋轉大型積木)</p> <p>(4)統整：教師旋轉大型積木呈現如學習單的角度，學生再次確認黑板海報、學習單以及實體積木的立方塊是否相同？</p>

實驗課程的教學活動有四節(共計 160 分鐘),以下為教學活動設計,第一節:活動名稱「大家一起疊積木」。第二節:活動名稱「揭開立方連塊的真面目」。第三節:活動名稱「翻轉吧!立方連塊」。第四節:活動名稱「立方連塊的計數與拼組」。

#### 四、資料分析

##### (一) 量的部份

將研究對象在空間旋轉能力測驗前測中的答題情形進行分析,以了解二年級學童在空間旋轉能力的表現。接著用 SPSS 12.0 統計套裝軟體,對空間旋轉能力測驗之前測、後測,和延後測的成績進行量化分析。配對樣本的  $t$  檢定(單組教學成效),及單因子的共變異數分析(兩組比較),以了解空間旋轉能力實驗教學對於研究對象之立即教學成效、保留成效和延宕教學成效。

##### (二) 質的部份

探究二年級學童在空間旋轉能力的解題策略及錯誤類型,將進行質性研究的分析。於測驗後將前、後測成績差異大及成績無明顯差異又其成績較差的學童,共計 14 名,進行一對一個別晤談,訪談後編寫逐字稿並予以編碼。將學童編號,每位學童編為 4 碼,其中編碼方式如下表 3:

表 3

編碼意義表

資料編碼	意義
第 1 碼學童代碼	S 學童
第 2 碼班級代碼	E 實驗組 C 控制組
第 3、4 碼學童編號	01、02、...
舉例 SE05	代表實驗組 05 號學童
SC26	代表控制組 26 號學童

#### 肆、研究發現

本章共分四節呈現研究結果與討論。第一節探討兩組學童在空間旋轉能力前測的表現;第二節探討兩組學童在空間旋轉課程教學後的學習成效;第三節分析二年級學童解決空間旋轉測驗的解題策略及錯誤類型。

## 一、兩組學童在空間旋轉能力前測的表現

教學介入之前，兩個班級分別先進行空間旋轉能力測驗的前測。藉由前測的成績來了解兩組學童在教學前空間旋轉能力的差異。由表 4 得知，實驗組平均分數為 16.10。控制組平均分數為 14.03。在空間旋轉課程教學前，實驗組班級整體空間能力前測平均分數比控制組班級高。

表 4

實驗組與控制組班級空間旋轉能力分數摘要表

	組別	平均數	標準差	調節平均數
前測分數	實驗組	16.10	4.03	
	控制組	14.03	3.03	
後測分數 (立即)	實驗組	17.26	3.13	(16.70)
	控制組	14.67	3.76	(15.24)
延後測分數 (保留)	實驗組	18.71	2.31	(17.96)
	控制組	16.40	3.40	(17.18)

接著探討在  $\alpha = .05$  的水準之下，實驗組與控制組班級學童的前測表現是如何。由獨立樣本  $t$  檢定分析得知， $t(59) = 2.265$ ， $p = .027$ ，已達顯著水準。所以說明兩班級學童在實驗課程教學前，空間旋轉能力測驗表現有顯著差異。

## 二、兩組學童在空間旋轉課程教學後的學習成效

根據測驗的資料分析學生的立即教學成效、保留成效、延宕教學成效。由數據資料可以發現，實驗組受試的 31 位學童，其前測平均分數為 16.10，後測平均分數為 17.26，延後測平均分數為 18.71。表示經過空間旋轉課程的實驗教學後，實驗組學童在後測以及延後測的平均分數都比教學前的前測成績佳。控制組受試的 30 位學童，其前測平均分數為 14.03，後測平均分數為 14.67，延後測平均分數為 16.40。表示經過空間旋轉課程的實驗教學後，控制組學童在後測以及延後測的平均分數都比教學前的前測成績佳。緊接著呈現兩組學生學習成效：

### (一) 實驗組與控制組學生學習成效的差異

為比較實驗組與控制組學生在不同教學模式下其學習成效的差異，研究者採用單變量共變異數分析。

#### 1. 立即教學成效

為滿足單變量共變異數分析的條件，必須先進行組內迴歸係數同質性檢定。兩組迴歸線斜率相同，符合共變數迴歸係數同質性假定，接著進行第二步驟共變數分析。

以學生後測成績為依變量，前測成績為共變量，藉以排除兩班前測成績之差異，進行共變數分析。共變數分析結果之  $F(1,58) = 3.639$ ， $p = .061$ ，未達顯著水準。由此可知，在不同教學模式的四節課之後，其後測成績進步的幅度彼此未達顯著差異，亦即不同教學模式的介入方式對於學生的空間能力學習都是適合的。

## 2.保留成效

以學生延後測成績為依變量，後測成績為共變量，藉以排除兩班後測成績的差異性，進行共變數分析。結果  $F(1,58) = 1.875$ ， $p = .176$ ，未達顯著水準。由此可知，在不同教學模式的實驗教學結束後三週，其延後測成績進步的幅度彼此未達顯著差異，但不同教學模式的介入方式都有助於學生的空間能力的學習。

## 3.延宕教學成效

以學生延後測成績為依變量，前測成績為共變量，藉以排除兩班前測成績的差異性，進行共變數分析。由兩班延後測成績同質性檢定結果顯示，兩組學童的  $F(1,59) = 9.677$ ， $p = .003$ ，未具有同質性，違背了同質性的假定。因此將資料經過自然對數指數轉換後再進行共變數分析，得到統計數據  $F(1,59) = 0.81$ ， $p = .777$ ，符合變異數同質性的假定。進行兩個班級延後測共變數分析，結果  $F(1,58) = 0.017$ ， $p = .896$ ，未達顯著水準。由此可知，兩個班級的延後測成績進步幅度彼此未達顯著差異。

因為兩組學習成效比較無顯著差異，因此緊接著呈現各組之學習成效。

### (二) 實驗組學生的學習成效

#### 1.立即教學成效

根據實驗組前測、後測成對樣本  $t$  檢定分析的數據資料，實驗組學生在空間旋轉課程教學後的後測平均分數較前測平均分數進步 1.161 分， $t(30) = 2.139$ ， $p = .041$ ，已達顯著水準。可得知在空間旋轉教學後，實驗組學生的前測、後測成績有明顯差異。透過實物教具立體方塊的操作並搭配運用幾何軟體 Cabri 3D 來輔助空間旋轉能力的實驗教學，學生表現具有良好的立即教學成效。

#### 2.保留成效

實驗組學生在空間旋轉課程教學後的延後測平均分數較後測平均分數進步 1.452 分，成對樣本  $t$  檢定分析中， $t(30) = 3.439$ ， $p = .002$ ，已達顯著水準。可得知在教學後過了三週，學生的空間旋轉能力具有保留成效，且有進步的現象。

綜合上述的研究結果可知，使用幾何軟體 Cabri 3D 電腦操作並搭配實體教具學習的學童，於實驗教學後具有良好的立即教學成效、保留成效，這與高俊彬（2008）、黃惠薇（2008）、呂易儒（2012）等人認為以資訊幾何軟體 Cabri 3D 融入教學中能提高學生學習成效的論點是一致



的。也與林佳蓉(2004)、林逸農(2006)、Cheng 與 Mix(2014)、Wheatley 與 Wheatley(1979)等人所持的觀點相同，學童只要經過適切的引導與教學學習，可以在空間能力顯見其進步的表現。

### (三) 控制組學生的學習成效

#### 1. 立即教學成效

根據控制組前測、後測成對樣本  $t$  檢定分析的數據資料，控制組學生在空間旋轉課程教學後的後測平均分數較前測平均分數進步 0.633 分， $t(29) = 0.983$ ， $p = .334$ ，未達顯著水準。可得知在空間旋轉教學後，控制組學生前測、後測成績並無出現明顯差異。透過實物教具立體方塊的操作進行空間旋轉能力的實驗教學，學生成績表現雖有進步但未能立即看到明顯的立即教學成效。

#### 2. 保留成效

學生在空間旋轉課程教學後的延後測平均分數較後測平均分數進步 1.733 分，成對樣本  $t$  檢定分析中， $t(29) = 3.598$ ， $p = .001$ ，已達顯著水準。可得知在教學後過了三週，學生的空間旋轉能力具有保留成效，且有進步的現象。

綜合上述的研究結果可知，使用實體教具學習的學童，於教學後未能有明顯的立即教學成效。但在教學後三週，延後測成績明顯進步，數據資料分析中出現了明顯的保留成效，表示控制組學生雖未能在教學當下立即明顯進步，但在一段時間後其空間能力都已提升。

#### 總結

由上得知不同教學模式進行空間旋轉的教學活動後，對實驗組具有顯著立即教學、保留成效。而控制組雖不能馬上呈現顯著立即教學成效，但在保留成效顯著呈現。相對於控制組，實驗組能在教學後產生立即教學成效其可能的原因有三：一是二年級學生對於能到電腦教室進行電腦操控的新鮮感與好奇。每當學生得知要進入電腦教室進行實驗教學時，總是雀躍不已。在操控滑鼠過程中，每個孩子都樂在其中、驚聲連連，也不時將滑鼠操作的結果與同儕分享。學生的學習態度與興致在教師的觀察下，確實高昂許多。此結果與 Bouck 與 Flanagan(2010)的發現一致。第二個原因則是實驗組學童以 Cabri 3D 幾何軟體對照實體積木的學習時，就已經在進行三維形體與二維圖形的辨識，由於本研究的空間旋轉能力測驗係採二維紙筆評量呈現方式與虛擬教具剛顯示在螢幕平面未操作前一樣，故實驗組比對照組對於二維圖形的辨識更能適應。再從 Piaget 幾何認知發展、van-Hiele 兒童幾何思考發展及 Duval 幾何概念理解角度來看，第三個原因可能兩種不同表徵教具之操弄更能促進對具體運思操作期、視覺期學童學習幾何空間旋轉概念的理解。至於兩組在學習成效沒有顯著差異可能是基於同一教師、同樣教學目標、一樣教學時間，兩種教具也能旋轉。

### 三、二年級學童解決空間旋轉測驗的解題策略及錯誤類型

接受訪談的對象是從兩組各選取表達能力好、口才較佳的學生，且顧及訪談不同成就表現的學童，因此挑其前、後測成績表現明顯進步者 2 名，前、後測成績表現明顯退步者 2 名，及成績無明顯差異又表現較差的學童 3 名，兩班共計挑選 14 名，進行一對一半結構式訪談，以蒐集學童的錯誤類型及解題策略。

晤談题目的篩選方式，研究者先分析各試題在後測以及延後測的答對率，從立方塊旋轉方式及立方塊和桌面的關係之六大類题目中，挑選試題答對率在 0.5 以下的試題或兩組學童表現差異較大的題目。因此整理出訪談題目為以下 6 題，如圖 5、圖 6、圖 7、圖 8、圖 9、圖 10。

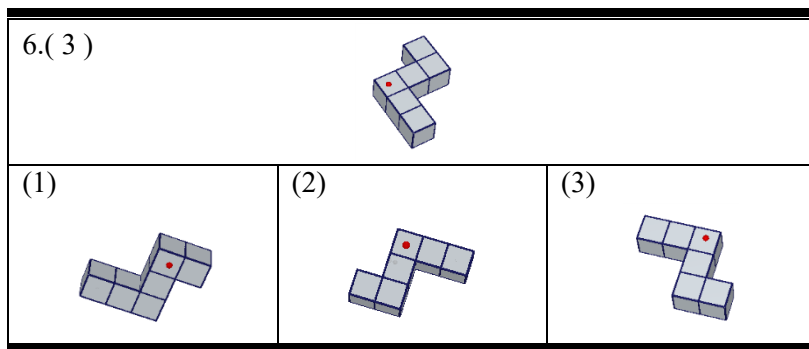


圖 5 空間旋轉測驗訪談試題第 6 題

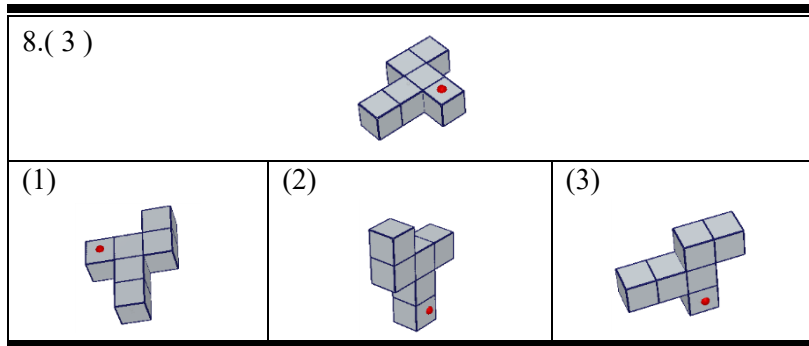


圖 6 空間旋轉測驗訪談試題第 8 題

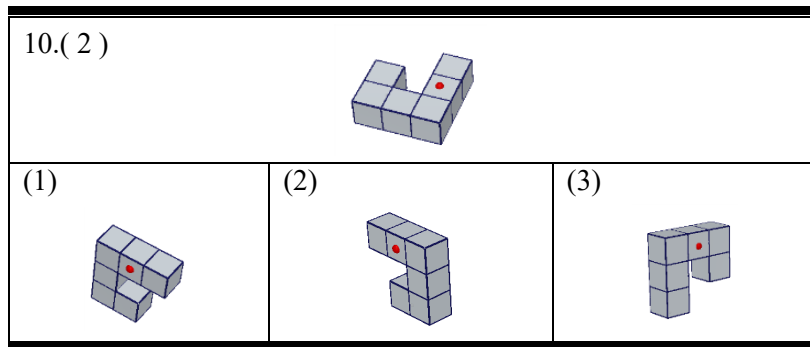


圖 7 空間旋轉測驗訪談試題第 10 題

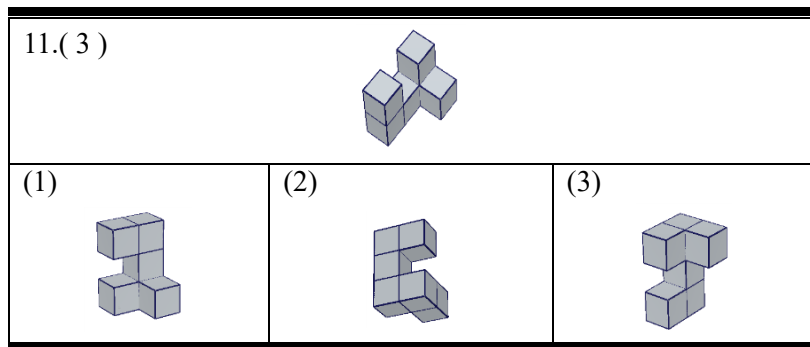


圖 8 空間旋轉測驗訪談試題第 11 題

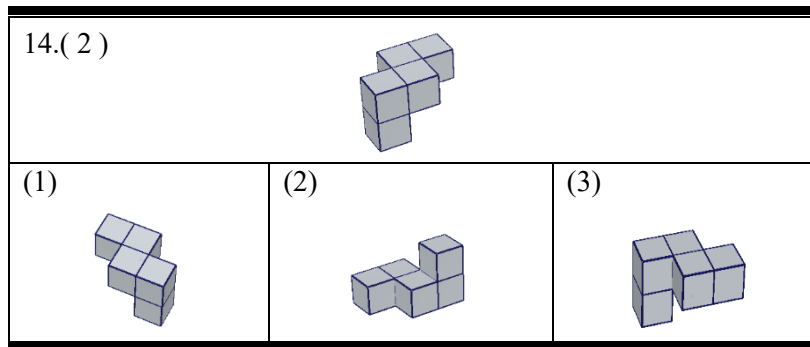


圖 9 空間旋轉測驗訪談試題第 14 題

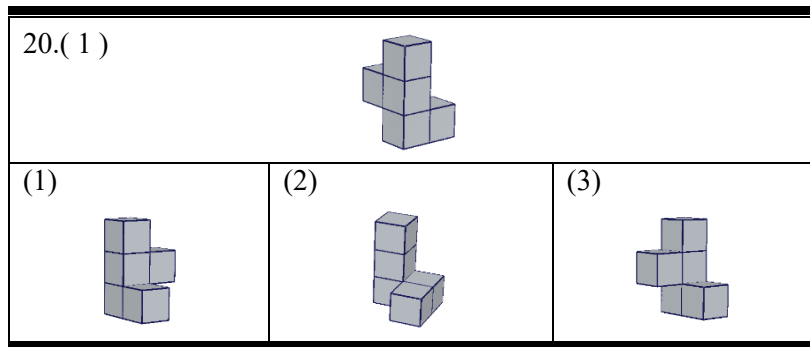


圖 10 空間旋轉測驗訪談試題第 20 題

接著整理每一試題各個選項的選答率，如表 5。挑選出的訪談題目再仔細分析其每一選項的選答率，選答率在 0.3 以上的錯誤選答列為訪談的重點問題，以分析學童的錯誤類型。

表 5  
訪談題目之選答率

題號	選項 1 (%)	選項 2 (%)	選項 3 (%)
6	3.3	55.7	41.0
8	19.7	6.6	73.8
10	39.3	55.7	3.3
11	70.5	13.1	16.4
14	49.2	27.9	23.0
20	75.4	23.0	1.6

註：■為該題正確答案

□為錯誤選答率皆在 0.3 以上

以下為將訪談學生後的紀錄內容，進行整理，發現兩組學生解題策略及錯誤類型大同小異，茲將學童的空間旋轉能力試題之解題策略(含正確和錯誤解題策略)並將錯誤類型分析如下：

### (一) 解題策略

#### 1. 心像旋轉

學生在心理以想像的方式將立方塊做心理旋轉的動作，旋轉後在腦海中形成立方塊影像，再與題目的圖形做比對。

SE20 回答第 20 題：(正確)

T：那 20 題呢？

SE20：第 1 個

T：你怎麼確定的？

SE20：因為這兩個很像(選項 1 和 3)，這個(選項 1)轉了之後(逆時針轉)這個(圈起處)是會跑到這裡(圖 11(A)，指與題目相同位置)，但是這個(選項 3 圈起處)轉過來(逆時針轉)是跑到這裡來(圖 11(B)，指與題目不同方向位置)。

T：所以你覺得 1 和 3 很像，就轉這兩個，轉了之後發現只有第 1 個選項的這一顆(圖 11(C))跟題目角度一樣？

SE20：對。

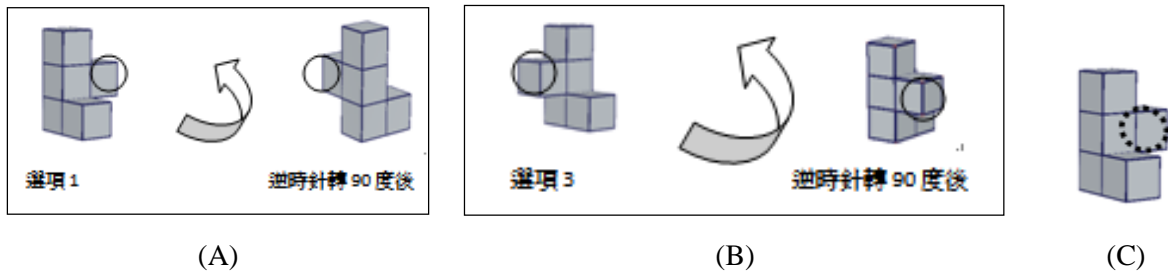


圖 11 SE20 於試題 20 的解題記錄

心像旋轉是在心理運作想像，雖然學生做了心像旋轉，但也可能因為立方連塊的複雜度而受到影響，其心像能力不足無法形成正確的心像旋轉，而導致選擇了錯誤的答案，如以下 SE10 的訪談結果。

SE10 回答第 14 題：(正確答案是 2，學生選了錯誤答案 1。)

SE10：第 1 個

T：為什麼？

SE10：它(選項 1)跟它(題目原圖)題型一模一樣，把它(選項 1)轉成跟它(題目原圖)同方向就好了。

T：你說你覺得他們長得一模一樣？

SE10：對！把它(選項 1)轉成它(題目原圖)這一面它就一模一樣。

T：那你怎麼轉的？你用說的或手比，都可以。

SE10：就把它拿到另外一邊(手勢動作—順時針轉選項 1)

T：把它轉過來就會一樣？

SE10：對，這個頭放到這邊(圖 12(A))，對好然後就 ok 了。

T：轉過來之後這個(頭)是(題目原圖)這顆(圖 12(B))？

SE10：嗯！

T：那老師編號 2 的這顆呢？

SE10：這顆(圖 12(C))。

T：那寫 3 的這顆，是哪一顆？

SE10：這顆(圖 12(D))。

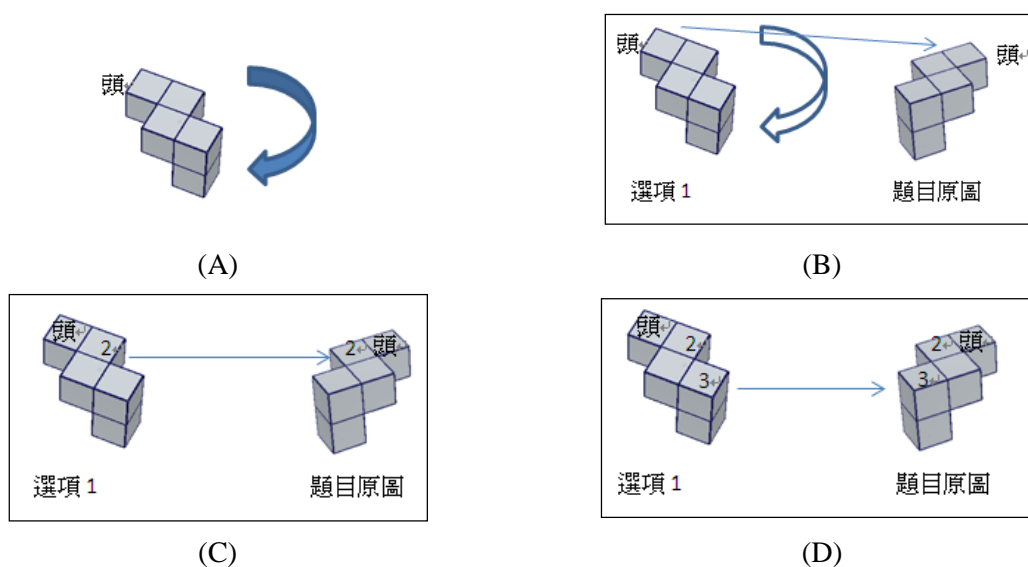


圖 12 SE10 於試題 14 的解題記錄

像這樣的學生，在心裡進行心像旋轉，但卻出現鏡射形體的迷思，將旋轉後呈現鏡射形的立方塊誤認為是相同的立方塊。

在這次的空間旋轉能力測驗中，心像旋轉是學生使用機率較高的解題方式。但並沒有導致學生都能有正確的結果，除了立方連塊的擺放方式、立方連塊的複雜度，學生心像旋轉的成熟度等，都會影響其解題結果。

## 2. 切割立方塊，分析形體特徵

學生將整個立方塊先分段做切割，變成幾個部分後，再一部分一部分的與题目的圖形做比對。

SC16 回答第 6 題：(正確)

T：我們先看這張考卷第 6 題。想一想，你會選哪一個答案？

SC16：第 3 個

T：為什麼你會選第 3 個？

SC16：(手指著積木圖案比畫) 這邊一橫這邊也一橫，這邊也這樣彎過去...

T：所以你是把它分成：

這邊(選項 3)兩塊跟這邊(題目原圖)這兩塊一樣(圖 13(A))，然後橫的這 3 塊有黑點的也一樣(圖 13(B))，然後直的也一樣(圖 13(C))。

SC16：嗯。

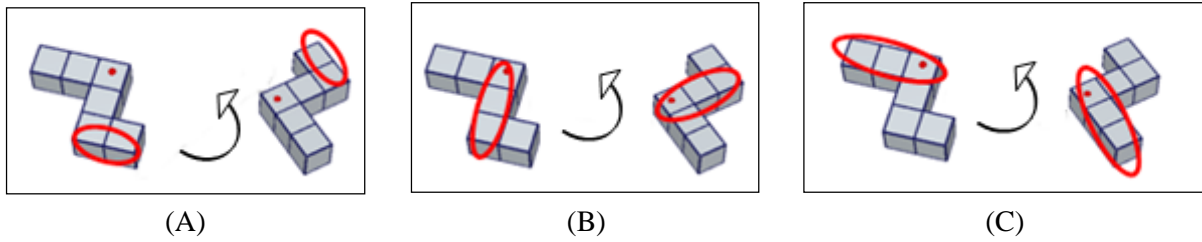


圖 13 SC16 於試題 6 的解題記錄

以上的學生在心中將立方塊分割成三個小部分，再從選項中一部分一部分的檢核比對，找出三個部分都相同的立方塊。

相對於參考立方連塊的整體外型，學生會依照立方連塊的特徵進行切割處理，以方便觀察者進行形體分析比對。尤其對於較複雜的立方連塊，學生更容易採取先將立方塊做分割切塊的解題方式。

### 3. 整體外觀特徵

學生依照立方塊整體性的外型特徵，以直觀方式尋找形狀相同的立方連塊。

SE26 回答第 8 題：(正確答案是 3，學生選了錯誤答案 1。)

T：再來看第 8 題，你會選哪一個答案？

SE26：第 1 個。

T：為什麼？

SE26：因為這裡（第 1 個）這樣轉過來，這裡跟這個的形狀都一樣。

T：「這裡」是指...上面嗎？還是整個？

SE26：整個。

T：那你覺得黑點的位置對嗎？

SE26：對。這裡是 L 型（圖 14(A)），這裡也是 L 型（圖 14(B)）。



圖 14 SE26 於試題 8 的解題記錄

以上的學生依據整個立方塊的外型來判斷，找出外形相像的，卻沒有注意到「點」的位置是否也相同。

此類型學生多是以直觀方式，判斷立方塊整體的外形，尋找整體結構相同的答案。

#### 4. 選擇容易翻轉旋轉的立方連塊

學生認為有兩個可能是正確答案的選項時，會傾向選擇在翻轉上是較簡單完成的答案。較複雜的翻轉，亦即旋轉角度比較多時，學生雖有猶豫，但不會選擇該選項。

SC31 回答第 10 題：(正確)

T：第 10 題你怎麼做？

SC31：應該 2 是一樣的，然後....因為它（選項 2，圖 15(A)）這個只要稍微轉過來再放平就好了。這個（選項 1，圖 15(B)）也是一樣要再翻還要再轉。

T：那如果把它翻、再轉，會不會跟第 10 題上面這個圖（圖 15(C)）一樣？

SC31：(點頭)

T：也是一樣？那 2 也一樣 1 也一樣你是覺得兩個答案都對？

SC31：嗯...就覺得一個比較好用，一個比較麻煩。

T：喔，所以你選了一個比較好用，很快就可以轉好的？

SC31：嗯。

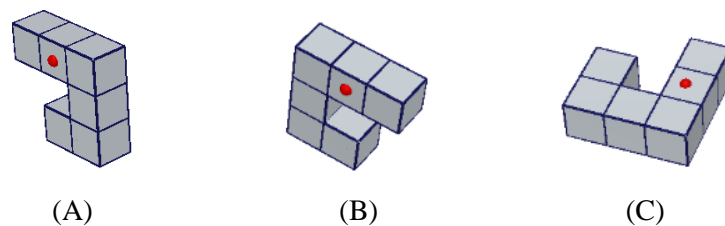


圖 15 SC31 於試題 10 的解題記錄

以上的學生在作答時，當認為出現兩個答案都正確時，會選擇比較容易就翻轉出來的立方塊，也就是旋轉角度較少者作為答案。

#### 5. 轉動試卷

學生會選擇轉動題目試卷紙張，再比對題目圖形來選擇答案。

SC01 回答第 8 題：(正確)

SC01：2 號（選項 2）也有可能在這裡，這兩個（選項 2 和 3）可能性比較高。

T：哪這兩個怎麼選擇，哪個才是對的？

SC01：...那我們...就來...我們就來反轉（翻轉）看看它們。

T：所以你要轉紙？



SC01：對。我先翻轉 2 號（選項 2）的。（轉動試題紙張...）沒有辦法翻轉成這樣的（題目原圖），所以 2 號不可能。

T：2 號（選項 2）的你轉了紙之後，把紙轉過來之後，沒有辦法轉成像上面一樣的，所以你覺得 2 號不可能。

SC01：對。

T：那你有沒有辦法轉 3 號呢？

SC01：有啊！（開始轉紙...）這樣（紙張向左轉）。

T：所以這樣就跟上面的圖一樣了。

SC01：對，轉紙比較簡單。

學童無法做心像旋轉時，會利用試卷的轉動來輔助其答案的選擇。不過當物件需進行的前後向或左右向翻轉時，就無法順利由轉動紙張來判斷答案，因此利用此解題策略並不多。

### 小結

整理有關空間能力旋轉測驗學生出現的解題策略有：1.心像旋轉。2.切割立方塊，分析形體特徵。3.整體外觀特徵。4.選擇容易翻轉旋轉的立方連塊。5.轉動試卷。

## （二）錯誤類型

### 1.鏡射形體混淆

由於鏡射形體外觀相似，學生也會認為那是一樣的立方塊，而未做旋轉確認。在空間旋轉能力測驗中，包含有鏡射形體的題目中，學生在在鏡射形體的誘答選項上，也明顯出現較高的選答率。

SE30 回答第 14 題：（正確答案是 2，學生選了錯誤答案 1。）

T：第 14 題。

SE30：1。

T：你怎麼確定是第 1 個？

SE30：它這邊跟這邊也有一塊（圖 16(A)），然後這邊很像一個 Z 的東西（圖 16(B)）。

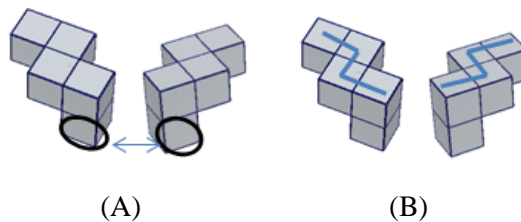


圖 16 SE30 於試題 14 的解題記錄

SC20 回答第 6 題：(正確答案是 3，學生選了錯誤答案 2。)

T：好，你剛剛有看第 6 題，那你知道第 6 題的答案是什麼嗎？

SC20：第 2 個。

T：第 2 個，好，你怎麼找出它來的？

SC20：因為它轉過來這個點跟它（選項 2）一樣的方向，它上面也是一個 L 狀。

T：上面這裡有一個 L 狀？

SC20：嗯。

T：L 狀？在這裡是不是？（圖 17(A)）

SC20：嗯。

T：然後你說「點」的位置（選項 2 和題目原圖）也一樣。然後這裡（選項 2，圖 17(B)）有 L，這裡（題目原圖，圖 17(A)）也有 L。

SC20：嗯。

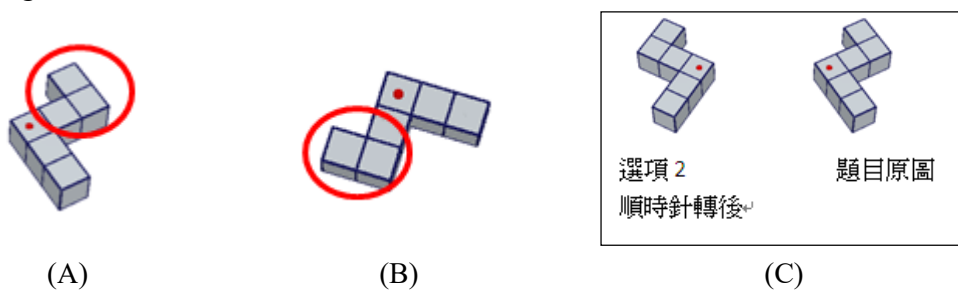


圖 17 SC20 於試題 6 的解題記錄

學生在立方塊外型相似的情況下，進行心像旋轉，而誤認鏡射後的形狀就是相同的立方塊（圖 17(C)）。

## 2. 只旋轉 90 度，忽略可轉到 180 度

學生將立方塊進行心像旋轉，只做 90 度的旋轉就停止，而未能將立方塊進行到 180 度的旋轉。

SC17 回答第 14 題：(正確答案是 2，學生選了錯誤答案 1。)

T：第 14 題，你會選哪一個答案？

SC17：第一個。

T：為什麼選第一個？

·  
·  
·

T：那第 2 個答案對不對？

SC17：不對。

T：為什麼？你有沒有試著轉或翻？

SC17：(題目原圖) 怎麼翻都跟它(選項 2) 不一樣。如果把它倒下來，這個會頂住 這  
不會頂住

T：往哪邊倒？

SC17：(手勢動作-題目原圖往後倒 90 度)

T：所以你的意思是題目往後倒，會有 2 顆停在桌上(圖 18(A))，但是選項 2 有 4 顆  
停在桌上(圖 18(B))？

SC17：對。

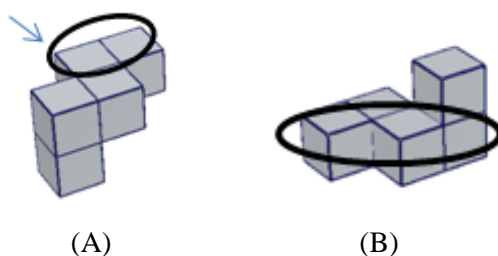


圖 18 SC17 於試題 14 的解題記錄

### 3.與桌面接觸的數量相同時，直接利用其他立方塊的特徵分析

當兩個立方塊與桌面的關與桌面接觸的數量相同時，學生會忽略可以再進行旋轉對照，而直接利用其他凸出桌面的立方塊特徵進行分析。

SE19 回答第 14 題：(此題學生選了正確答案 2，但是在訪談過程中，學生回答她排除  
答案 1 時的錯誤現象。)

T：再來看 14 題。

SE19：第 2 個。

T：為什麼覺得是第 2 個？

SE19：這個把它翻正...翻正(手勢動作—向左翻)，不要倒下來，就是凸凸的朝下面。

T：凸凸的是哪一塊？

SE19：(手指出圈起處，如圖 19(A))

T：那老師編的 1 號是题目的哪一塊？

SE19：(手指出，如圖 19(B))

T：2 號呢？

SE19：(手指出，如圖 19(B))

T：那答案 1 有沒有可能是對的？

SE19：不對。

T：你有沒有發現哪裡不對？

SE19：這個(選項 1)是朝這邊(圖 19(C))，這個(題目原圖)是朝這邊(圖 19(D))。

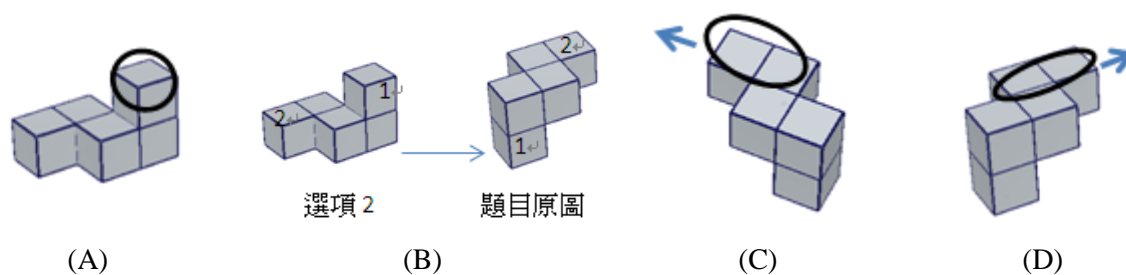


圖 19 SE19 於試題 14 的解題記錄

#### 4. 只進行部分形體的旋轉

學生做心像旋轉時，只旋轉了立方塊其中一部份形體，忽略立方塊的其他部分。

SC16 回答第 11 題：(正確答案是 3，學生選了錯誤答案 1。)

T：第 11 題呢？

SC16：這裡有 2 個 1 個，1 個 2 個(圖 20(A))，所以就像 3... 欸... 第 1 個。

T：題目可以怎麼轉，會跟第 1 個答案一樣？

SC16：這個(題目原圖)轉過來(手勢-順時針轉)再倒過來(立起來)就一樣(圖 20(B))，3 顆在底下，中間就 1 個，上面就 2 顆。

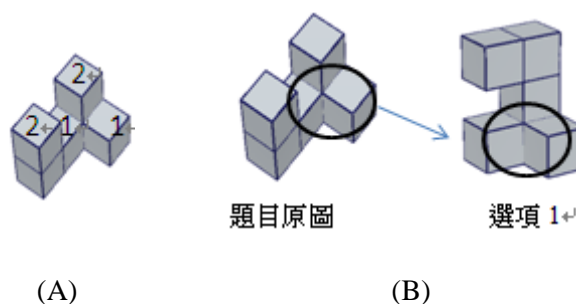


圖 20 SC16 於試題 11 的解題記錄

#### 5. 只注意到部份的特徵

學生忽略整體立方塊的關係，只注意到立方連塊的某些特徵。

SC17 回答第 11 題：(正確答案是 3，學生選了錯誤答案 2。)

T：第 11 題呢？

SC17：第 2 個。

T：為什麼？

SC17：因為它(題目原圖，如圖 21(A))立起來這邊有一個(圈起來的那一顆)，如果它(選項 2，如圖 21(B))這樣立起來這邊也有一塊。

T：所以看到了那一塊立起來會一樣。

SC17：對。

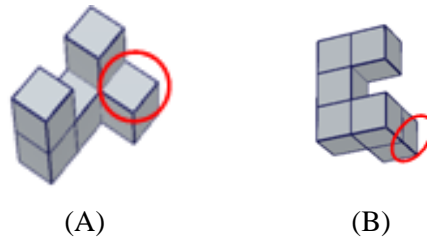


圖 21 SC17 於試題 11 的解題記錄

### 小結

二年級學童出現的錯誤類型有：

- 1.鏡射形體混淆。當學生以「心像旋轉策略」或直觀的以「整體外觀特徵」進行解題時，對於鏡射的問題類型難以掌握，而造成鏡射形體混淆的錯誤類型。
- 2.只旋轉 90 度，忽略可轉到 180 度。當學生以「心像旋轉策略」或「選擇容易翻轉旋轉的立方連塊」解題時，因未能正確掌握超過 90 度的旋轉，故產生錯誤選擇。
- 3.與桌面接觸的數量相同時，直接利用其他立方塊的特徵分析。當學生以「心像旋轉策略」或「選擇容易翻轉旋轉的立方連塊」解題時，因心像旋轉能力不足，或遇到較複雜的立方塊時，學生在初步的、可掌握的翻轉旋轉後，逕行利用立方塊與桌面的關係尋求解題。
- 4.只進行部分形體的旋轉。當學生在「心像旋轉」時，未充分掌握整個立方塊，僅針對部分方塊的旋轉。
- 5.只注意到部份的特徵等類型。當學生以「切割立方塊，分析形體特徵」進行解題時，忽略其他立方塊的關係而形成錯誤。

本研究所發現錯誤類型 1.鏡射形體混淆和錯誤類型 3.桌面接觸數與陳師潔(2011)研究結果是一樣的，基本上以視覺為主。

## 總結

空間任務解題策略經常出現的區分法是關鍵特徵策略 (key features strategies)，移動物件策略 (move objects strategies)，和移動自身策略 (move self strategies) (Barrat, 1953; Carpenter & Just, 1986; Schulz, 1991; 引自 Plath & Ruwisch, 2012)。在綜合整理學童的解題策略後，又可以將這些策略歸納分析如下：當學生使用「切割立方塊，分析形體特徵」、「整體外觀特徵」時，歸類屬於關鍵特徵策略。當學生使用「心像旋轉策略」、「選擇容易翻轉旋轉的立方連塊」或「轉動試卷」時，歸類屬於移動物件策略。

本研究的空間旋轉測驗問題，是類似於 Plath 與 Ruwisch (2012) 針對四年級孩童進行立方塊七連塊配對的任務，是屬於心理旋轉任務。Plath 與 Ruwisch 提出，空間任務是一個典型的心理旋轉任務時，預期學童解決方式採用移動物體的動態策略。但事實上，面對不同類型的立方連塊呈現時，學生除了使用動態的移動物體策略外，也有學生使用分析性的關鍵特性策略，以靜態方式分析立方塊的特徵，再進行比對。

學童受到題目類型的影響，例如題目的立方連塊的複雜度與呈現的樣式，可能會影響學生策略的選擇。當然也有可能學生的個人喜好與習慣決定了他的解題策略。而且不管是否學生是使用符合理論所預期的策略，都能有致使成功解題。同樣的，也出現了學童使用符合理論所預期的移動物體策略來解決心理旋轉的任務，但卻呈現失敗的解題。

## 伍、結論與建議

依據本研究的待答問題，針對接受不同教學模式之國小二年級學生在空間旋轉能力的學習成效、解題策略以及錯誤類型加以彙整提出最後結論和建議；侷限資源本研究限制也做個說明

### 一、結論

#### (一) 二年級學童在空間旋轉能力的學習成效

1. 運用幾何軟體 Cabri 3D 並搭配實體教具立體方塊操的教學能有效幫增進學生空間概念的學習。
2. 兩種空間概念的教學皆能提升學生的空間能力。

#### (二) 二年級學童在空間旋轉能力的解題策略與錯誤類型

在空間空間旋轉能力延後測結束後，進行 14 名學童的訪談，整理訪談的結果，進行學生出現的解題策略與錯誤類型之分析，歸納整理如下：

##### 1. 解題策略

以下是晤談後，將學生解題的過程進行整理歸納。

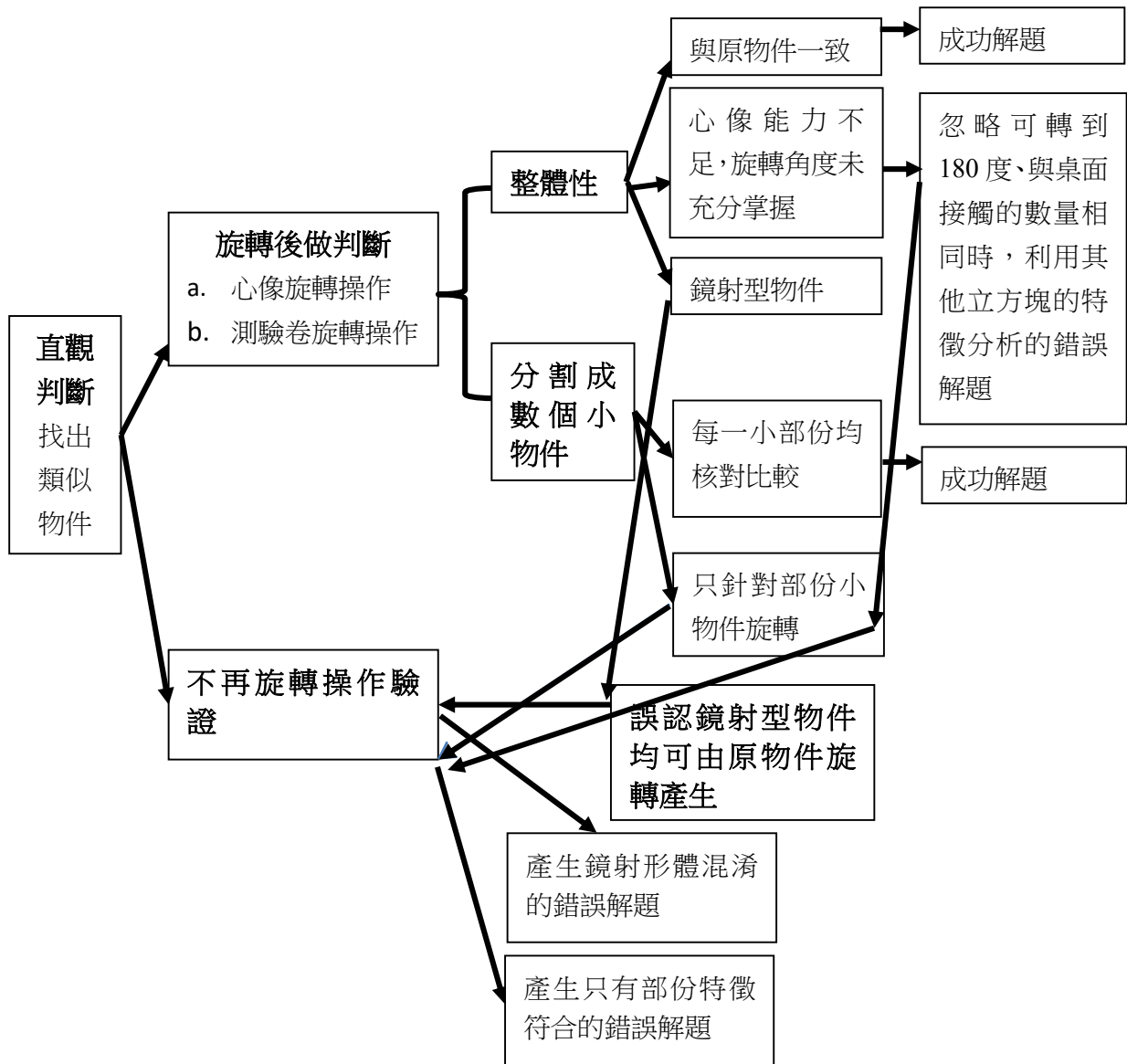


圖 22 學生解題流程圖

在訪談過程中，發現兩組多數學生先以直觀方式做選項的判斷，先找出整體結構類似的立方塊，接下來欲確認答案的方式則大多會使用心像旋轉的解題策略，並再以整體或是切割立方連塊、進行分析比對來做確認。也有部分學生以直觀方式做形體的判別後，並未做旋轉而是直接選擇答案，此類學生容易出現鏡射形體迷思。

然而立方連塊拐彎的複雜度與旋轉的角度會影響學生的心像運作之正確性。當立方塊與桌面關係是屬於平貼桌面時，學生較會使用心像旋轉的方式，並做出正確答案。而當立方塊與桌面關係是屬於凸出桌面時，學生在做旋轉想像時比較無法掌握旋轉某些角度之後的圖像，而會出現於心像旋轉後仍無法做出正確的選擇。

## 2. 錯誤類型

二年級學童進行空間旋轉能力測驗會出現的錯誤類型有：鏡射形體混淆、只旋轉 90 度，忽略可轉到 180 度、與桌面接觸的數量相同時，直接利用其他立方塊的特徵分析、只進行部分形體的旋轉，以及只注意到部份的特徵。

從學生的晤談中，發現學生容易受鏡射形體的混淆，像是上述學童接受訪談在解第 6 題與第 14 題時，都會認為鏡射形體與該物件就是相同的立方塊。在測驗結果中，也顯示出學生在包含有鏡射形體的這類型题目的錯誤率高，更發現當题目中鏡射誘答選項與原物件的擺放角度幾乎成面對稱的圖樣時（例如第 6、14 題），學生選擇該鏡射誘答選項的比率幾近 50%，這與陳師潔（2011）提出的觀點相同，二年級兒童對於鏡射的問題類型是比較難掌握的。立方連塊形體非常接近的鏡射形體選項，確實容易造成學生在題目選擇上的誘答。另外當學生對於較複雜的立方連塊，無法在心裡做出正確心像旋轉時，學童就會出現只進行該立方連形體的某一部分的旋轉，並依他所旋轉的部分形體來選擇答案。另外學童在進行立方塊旋轉時，大多能掌握旋轉 90 度後的心像，但對於旋轉的角度增大時，有些學童會產生不確定感，有些學童甚至不認為可以進行如此大的角度旋轉或翻轉。

## 二、建議

### （一）就教學上而言

本研究結果顯示，以動態幾何軟體搭配實體積木融入空間旋轉能力教學，在立即教學成效的表現上確實有助於二年級學生的空間旋轉能力學習。因此，研究者建議教師在進行相關課程時，可以動態幾何軟體作為輔助的虛擬教具，促進學生的學習成效。而運用資訊科技於課程中是目前教育發展趨勢，而動態虛擬軟體的應用能帶來有別於實體教具之效果，並且能彌補實體教具在實際教學中所產生的不足與問題，像是教師拿實體教具展示操作時所產生視覺死角的問題等。

另外，從學生的測驗結果和晤談分析，發現二年級學生對於鏡射形的題目容易產生迷思，因此建議教師於教學上，利用 Cabri 3D 軟體操控配合實體積木教具操作來輔助教學，讓學生產生認知衝突，衝突學生的迷思概念，進而予以修正。例如當學生認為以下兩組立方塊為相同的立方塊時，則教師可以請學生利用 Cabri 3D 軟體電腦現場操作。讓學生試試，是否能透過旋轉、翻轉成同樣的角度，以表示兩組立方塊是相同的立方塊。接著再以實體積木教具操，以確認結果。讓學生鏡射形题目的迷思能立即獲得修正。



## (二) 就課程編製而言

空間旋轉能力與日常生活有關，又與空間視覺、空間定位有關。國外課程二年級已有空間旋轉單元，由本研究學童在接受空間旋轉能力教學課程後之學習成效，顯示出學生相關能力已提升，因此空間旋轉能力教學對於二年級學童是適合的。故國內數學課程亦可將空間旋轉列入二年級學習單元之參考。

## (三) 就未來研究而言

本研究的研究工具空間旋轉能力測驗是以二維紙筆測驗方式進行，主要想藉由二維測驗方式探討兩組學生在空間能力上三維物件轉換成二維的成效表現。而未來的研究在測驗上則建議可以直接呈現三維的立方塊，進行動態幾何軟體搭配實體積木融入空間旋轉能力教學之探討。其次本研究僅針對不同教學模式於空間旋轉做探究，亦可針對空間截面、展開摺合等空間能力做類似研究。有關學生學習態度，除了觀察學生在教室學習態度之外亦可透過量表來蒐集量化資料，以進一步了解學生們的學習興趣。

另外在進行學生解題訪談時，由於低年級學生的口語表達未能很清楚，而造成訪談溝通上的困難，建議在訪談時給予學生立方塊實體教具作立即性操作，以方便了解學生究竟是如何進行旋轉。這除了能縮短訪談的時間及語意上的理解外，當學生於訪談的解題當下，出現了錯誤迷思時，可藉由實體教具的操作，也能當下釐清不正確的觀點。

本研究雖力求測驗卷信效度能達高標程度，但由於預試的樣本數不夠多，信度比 0.8 仍差一些。因此，仍需更多樣本的檢測，以達較高的信度比。或許在未來研究，可以除了增加預試樣本數外，再透過質性分析以增強研究的信度。

## 誌謝

本文作者群非常感謝審查委員們提供一些很有建設性修改意見，也一併致謝貴刊編輯小組及助理對本篇圖文多次校訂與排版。

## 參考文獻

- 王智弘 (2006)。多方塊虛擬教具的開發與教學研究 (未出版之碩士論文)。國立交通大學，新竹市。【Wang, Chih-Hung (2006). *Research on the development and teaching of virtual manipulative - Example of polyominoes explorations* (Unpublished master's thesis). National Chiao Tung University, Hsinchu. (in Chinese)】
- 左台益 (2012)。動態幾何系統的概念工具。《中等教育》，63(4)，6-15。doi: 10.6249/SE.2012.63.4.01  
【Tso, Tai-Yi (2012). The conceptual tool in dynamic geometry system. *Secondary Education*, 63(4), 6-15. doi: 10.6249/SE.2012.63.4.01 (in Chinese)】

- 左台益、梁勇能 (2001)。國二學生空間能力與 van Hiele 幾何思考層次相關性研究。師大學報：科學教育類，46 (1&2)，1-20。doi: 10.6300/JNTNU.2001.46.01 【Tso, Tai-Yi, & Liang, Yung-Neng (2001). The study of interrelationship between spatial abilities and van Hiele levels of thinking in geometry of eighth-grade students. *Journal of Taiwan Normal University: Science Education*, 46(1&2), 1-20. doi: 10.6300/JNTNU.2001.46.01 (in Chinese)】
- 全任重 (2005)。動態幾何環境下的立體幾何。行政院國家科學委員會專題研究計畫 (編號：NSC94-2521-S-007-001)，未出版。【Chuan, Jen-Chung (2005). *Solid geometry under the dynamic geometry environment*. National Science Council Project Report of R.O.C (NSC94-2521-S-007-001), unpublished. (in Chinese)】
- 呂易儒 (2012)。動態幾何系統 Cabri 3D 輔助教學下對高中生空間概念單元學習成效影響之研究 (未出版之碩士論文)。國立交通大學，新竹市。【Lu, I-Ju (2012). *The study on the effect of Cabri 3D on spatial conception unit into the education of high school mathematics* (Unpublished master's thesis). National Chiao Tung University, Hsinchu. (in Chinese)】
- 林佳蓉 (2004)。幾何空間教學對國小二年級學童空間能力學習之研究 (未出版之碩士論文)。國立臺北師範學院，台北市。【Lin, Chia-Jung (2004). *The study of geometric spatial teaching for second graders' spatial ability learning* (Unpublished master's thesis). National Taipei Teachers College, Taipei. (in Chinese)】
- 林倉億 (2011)。用電腦畫中學數學。科學發展月刊，459，18-23。【Lin, Tsang-I (2011). Using computer to draw middle school mathematics. *Science Development*, 459, 18-23. (in Chinese)】
- 林逸農 (2006)。五連方幾何積木課程對國小學童視覺空間能力的影響 (未出版之碩士論文)。國立臺灣科技大學，臺北市。【Lin, Yi-Nung (2006). *The effect of pentomino lessons on children's visual-spatial abilities* (Unpublished master's thesis). National Taiwan University of Science and Technology, Taipei. (in Chinese)】
- 孫嘉德 (2010)。從教科書分析來瞭解我國四年級學生在TIMSS 2003與TIMSS 2007幾何與測量表現之差異 (未出版之碩士論文)。國立新竹教育大學，新竹市。【Sun, Chia-Te (2010). *Textbooks analysis for understanding the fourth-graders performing the differences of TIMSS 2003 and TIMSS 2007 in geometry and measurement* (Unpublished master's thesis). National Hsinchu University of Education, Hsinchu. (in Chinese)】
- 高俊彬 (2008)。高中數學空間概念 Cabri 3D 電腦輔助教學之成效 (未出版之碩士論文)。國立高雄師範大學，高雄市。【Kao, Chun-Pin (2008). *A study on the effect of computer-assisted instruction by Cabri 3D for space concept of senior high school mathematics* (Unpublished master's thesis). National Kaohsiung Normal University, Kaohsiung. (in Chinese)】
- 陳師潔 (2011)。國小二年級兒童以觸覺辨識正方體連塊的解題活動之個案研究 (未出版之碩士論文)。國立臺北教育大學，台北市。【Chen, Shih-Chieh (2011). *A case study on the haptic identification of tetrominoes and pentominoes problem solving for second graders* (Unpublished master's thesis). National Taipei University of Education, Taipei. (in Chinese)】
- 陳毓梅 (2011)。不同教具教學環境對國小一年級學生學習立方體積木堆疊計數的影響 (未出版之碩士論文)。中原大學，桃園市。【Chen, Yu-Mei (2011). *Effect of applying different manipulatives on first graders' learning of counting cubes in a 3D figure* (Unpublished master's thesis). Chung Yuan Christian University, Taoyuan. (in Chinese)】

- 莊月嬌、張英傑 (2006)。九年一貫課程小學幾何教材內容與份量之分析。國立臺北教育大學學報, 19(1), 33-66。【Chuang, Yueh-Chiao, & Chang, Ying-Chieh (2006). An analysis of content and quantity of geometry textbooks for elementary schools in the nine years curriculum】 *Journal of National Taipei University of Education*, 19(1), 33-66. (in Chinese)】
- 張碧芝、吳昭容 (2009)。影響六年級學生立方體計數表現的因素－空間定位與視覺化的角色。教育心理學報, 41 (1), 125-145。doi: 10.6251/BEP.20081212 【Chang, Pi-Chih, & Wu, Chao-Jung (2009). Exploring the factors that influence sixth graders' cubic enumeration: The roles of spatial orientation and visualization. *Bulletin of Educational Psychology*, 41(1), 125-145. doi: 10.6251/BEP.20081212 (in Chinese)】
- 曾湘玲 (2012)。台灣與澳洲國小數學教科書幾何內容之比較研究 (未出版之碩士論文)。國立暨南國際大學, 南投縣。【Tseng, Hsiang-Ling (2012). *The comparative study of geometric contents in the elementary mathematics textbooks of Taiwan and Australia* (Unpublished master's thesis). National Chi Nan University, Nantou. (in Chinese)】
- 黃惠薇 (2008)。資訊科技融入教學對國小六年級學童在空間旋轉能力之研究 (未出版之碩士論文)。國立臺北教育大學, 台北市。【Huang, Hui-Wei (2008). *The study of information technology into instruction of spatial rotation ability for sixth graders* (Unpublished master's thesis). National Taipei University of Education, Taipei. (in Chinese)】
- 彭惠群 (2010)。芬蘭國小數學教科書之幾何教材研究－以 W 版為例 (未出版之碩士論文)。國立屏東教育大學, 屏東市。【Peng, Hui-Chun (2010). *A research of Finland primary school geometric textbook contents—Based on W edition* (Unpublished master's thesis). National Pingtung University, Pingtung. (in Chinese)】
- 劉好 (1994)。國小數學科新課程中幾何教材的設計。檢自 [https://market.cloud.edu.tw/content/primary/math/jm\\_jh/math/index1.htm#](https://market.cloud.edu.tw/content/primary/math/jm_jh/math/index1.htm#) 【Liu, Hao (1994). The design of geometry teaching material for new curriculum in elementary school mathematics. Retrieved from [https://market.cloud.edu.tw/content/primary/math/jm\\_jh/math/index1.htm#](https://market.cloud.edu.tw/content/primary/math/jm_jh/math/index1.htm#) (in Chinese)】
- 鄭美玲、陳光勳 (2015)。國小六年級學生表面積與體積「量的公式概念」調查之研究。國民教育, 55 (4), 73-90。【Cheng, Mei-Ling, & Chen, Kaung-Hsung (2015). A study on the sixth graders' quantitative formula concept of surface area and volume. *National Education*, 55(4), 73-90. (in Chinese)】
- 張英傑、陳創義 (2003)。九年一貫數學學習領域綱要諮詢意見－幾何篇。檢自 <http://140.122.140.2/~cyc/mathedu/me9/nineyear/index.htm> 【Chang, Ying-Chieh, & Chen, Chuang-I (2003). Counseling opinions in the outline of nine years integrated learning field for geometry. Retrieved from <http://140.122.140.2/~cyc/mathedu/me9/nineyear/index.htm> (in Chinese)】
- Baki, A., Kosa, T., & Guven, B. (2011). A comparative study of the effects of using dynamic geometry software and physical manipulatives on the spatial visualisation skills of pre-service mathematics teachers. *British Journal of Educational Technology*, 42(2), 291-310. doi: 10.1111/j.1467-8535.2009.01012.x
- Battista, M. T. (1990). Spatial visualization and gender differences in high school geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(1), 47-60. doi: 10.2307/749456

- Battista, M. T., Wheatley, G. H., & Talsma, G. (1982). The importance of spatial visualization and cognitive development for geometry learning in preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13(5), 332-340. doi: 10.2307/749007
- Bouck, E. C., & Flanagan, S.M. (2010). Virtual manipulatives: What they are and how teachers can use them. *Intervention in School and Clinic*, 45(3), 186-191. doi: 10.1177/1053451209349530
- Casey, M. B., Nuttall, R. L., & Pezaris, E. (1997). Mediators of gender differences in mathematics college entrance test scores: A comparison of spatial skills with internalized beliefs and anxieties. *Developmental Psychology*, 33(4), 669-680. doi: 10.1037//0012-1649.33.4.669
- Casey, M. B., Nuttall, R. L., Pezaris, E., & Benbow, C. P. (1995). The influence of spatial ability on gender differences in mathematics college entrance test scores across diverse samples. *Developmental Psychology*, 31(4), 697-705. doi: 10.1037/0012-1649.31.4.697
- Cheng, Y., & Mix, K. S. (2014). Spatial training improves children's mathematics ability. *Journal of Cognition and Development*, 15(1), 2-11. doi: 10.1080/15248372.2012.725186
- Delgado, A.R., & Prieto, G. (2004). Cognitive mediators and sex-related differences in mathematics. *Intelligence*, 32(1), 25-32. doi: 10.1016/S0160-2896(03)00061-8
- Fennema, E., & Sherman, J. (1977). Sex-related differences in mathematics achievement, spatial visualization and affective factors. *American Educational Research Journal*, 14(1), 51-71. doi: 10.3102/00028312014001051
- Izard, J. (1990). Developing spatial skills with three-dimensional puzzles. *The Arithmetic Teacher*, 37(6), 44.
- Linn, M. C., & Petersen, A. C. (1985). Emergence and characterization of sex differences in spatial ability: A meta-analysis. *Child Development*, 56(6), 1479-1498. doi: 10.2307/1130467
- McGee, M. G. (1979). Human spatial abilities: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences. *Psychological Bulletin*, 86(5), 889-918. doi: 10.1037//0033-2909.86.5.889
- Pittalis, M., & Christou, C. (2010). Types of reasoning in 3D geometry thinking and their relation with spatial ability. *Educational Studies in Mathematics*, 75(2), 191-212. doi: 10.1007/s10649-010-9251-8
- Plath, M., & Ruwisch, S. (2012). Elementary school children solve spatial tasks a variety of strategies. In T. Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.3, pp. 305-312). Taipei, Taiwan: PME.
- Weckbacher, L., & Okamoto, Y. (2014). Mental rotation ability in relation to self-perceptions of high school geometry. *Learning & Individual Differences*, 30, 58-63. doi: 10.1016/j.lindif.2013.10.007
- Wheatley, C. L., & Wheatley, G. H. (1979). Developing spatial ability. *Mathematics in School*, 8(1), 10-11.