ISSN: 2312-5810
DOI: 10.6278/tjme

第 4 卷　第 1 期
二〇一七年四月
VOL. 4　NO. 1
April　2017

臺灣數學教育期刊

Taiwan Journal of Mathematics Education

國立臺灣師範大學數學系
Department of Mathematics,
National Taiwan Normal University

台灣數學教育學會
Taiwan Association
for Mathematics Education

臺灣數學教育期刊　　第 4 卷 第 1 期　2017 年 4 月

地址	臺北市汀州路四段 88 號國立臺灣師範大學數學系 《臺灣數學教育期刊》
電話	886-2-7734-6576
傳真	886-2-2933-2342
電子郵件	tjmeassistant@gmail.com
網址	http://tame.tw/forum.php?mod=forumdisplay&fid=56

主編的話

學術研究的發展與精進有賴其社群成員間交流順暢與相互砥礪。《臺灣數學教育期刊》即在提供數學教育研究社群發表研究成果論述的平台。本期刊以發行高品質學術研究論文為宗旨，支持多樣性觀點探討數學教育。無論是實徵性研究或具批判性理論論述之立場論文，只要是原創性論文均為本刊鼓勵發表之文章。每篇進入審查程序之文章均有一位責任編輯從中輔導與協助作者進行文稿的修訂。無論文章最後結果是否接受刊登，作者皆能在過程中獲得適當正面意見。

數學本身為高度抽象的知識體系。因此，如何輔助學習者有效地學習數學即是數學教育研究的重點。然而，此涉及學習者多樣的學習風格與教學工具的使用。本期所刊登之三篇論文中，第一篇是由鄭英豪、陳建誠與許慧玉共同發表用動態幾何軟體作為輔助工具以分析國中臆測幾何性質的過程。第二篇文章是由連文宏與洪儷瑜共同發表探討數學學障與數學合併閱讀障礙國中生計算能力表現之特徵以及其差異。第三篇是由陳埩淑所發表之探索性研究，探索幼童重複樣式之教學。本期三篇論文分別展現多樣性的數學教育研究，期能給讀者有用的參考資訊與啓思。

本期刊得以維持高品質的論文發行接有賴於副主編、責編與編審委員們的無償付出與把持，以及台灣數學教育研究社群的投入，特此致謝。期盼各界能繼續支持，不吝賜稿。

《臺灣數學教育期刊》主編

左台益 謹誌

臺灣數學教育期刊

第 4 卷　第 1 期

2014 年 4 月創刊　　2017 年 4 月出刊

目錄

Taiwan Journal of Mathematics Education

Vol. 4 No. 1

First Issue: April 2014 Current Issue: April 2017

CONTENTS

鄭英豪、陳建誠、許慧玉（2017）。
國中生在動態幾何軟體輔助下臆測幾何性質之研究。
臺灣數學教育期刊，4（1），1-34。
doi: 10.6278/tjme.20170317.001

國中生在動態幾何軟體輔助下臆測幾何性質之研究

鄭英豪[1]　　陳建誠[2]　　許慧玉[3]
[1]臺北市立大學數學系
[2]明志科技大學
[3]國立清華大學數理教育研究所

本研究探討國中生如何在動態幾何環境下臆測幾何性質。研究以程序性反駁模式為中介理論架構設計幾何臆測學習單，目的是瞭解國中生如何在動態幾何環境中建構圖形案例，並依據案例來臆測正確的幾何性質。其中，本研究特別強調將動態幾何軟體定位為「例子產生器」，結合幾何圖形案例測量值的紀錄表格，鷹架學生進行臆測活動。研究樣本為 15 位七年級國中生，以質性分析方法為主、量化資料輔助說明下，研究發現（1）動態幾何環境下，幾何性質本身涉及測量值關係的複雜程度及幾何性質是否容易在圖形上視覺觀察，影響學生造例與臆測表現。同時這兩個因素影響學生在動態幾何環境下的認知行為和學習困難；（2）具備良好的幾何物件分類系統是在動態幾何環境中成功臆測的重要關鍵；（3）學生對圖形進行分解與重組操作有助於在動態幾何環境中察覺圖形中蘊含的特徵或關係；（4）學生能拖曳不同圖形案例並不等同他們能察覺符合命題結果的正反例，進而影響臆測結果；（5）學生仍缺乏動態幾何環境知識以建構原本意圖產生的圖形案例。另，本研究也依據學生在結合動態幾何與案例記錄表格的表現，區辨出不同臆測認知策略：分別為有限隨機離散案例歸納、系統性調整案例臆測以及動態性調整案例臆測。

關鍵詞：動態幾何軟體（DGS）、幾何性質、程序性反駁模式（PRM）、臆測

通訊作者：許慧玉，e-mail：huiyuhsu@mail.nhcue.edu.tw
收稿：2016 年 4 月 6 日；
接受刊登：2017 年 3 月 17 日。

Journal homepage: tame.tw/forum.php?mod=forumdisplay&fid=56

Cheng, Y. H., & Chen, J. C., & Hsu, H. Y. (2017).
Junior high school students conjecture geometric properties in a dynamic geometry software environment.
Taiwan Journal of Mathematics Education, *4*(1), 1-34.
doi: 10.6278/tjme.20170317.001

Junior High School Students Conjecture Geometric Properties in a Dynamic Geometry Software Environment

Ying-Hao Cheng[1] Jian-Cheng Chen[2] Hui-Yu Hsu[3]

[1] University of Taipei

[2] Ming Chi University of Technology

[3] Graduate Institute of Mathematics and Science Education, National Tsing Hua University

This study investigated how junior high school students conjecture geometric properties in a dynamic geometry software (DGS) environment. Using the proceduralized refutation model as an intermediate theoretical framework, we particularly examined the process and the difficulties that students may have when conjecturing. Specifically, we referred to DGS as an "example generator" and combined it with spreadsheets to support students in conjecturing geometric properties. A total of 15 seventh grade students participated in this study. Based on the qualitative analysis and quantitative data, we demonstrated that (1) the complexity of the relationship among measurements involved in a geometric property and the possibility of visualizing that property play important roles in determining students' performance when conjecturing in a DGS environment; (2) being able to effectively classify geometric objects was the key to successfully perceiving geometric properties and relationships embedded in geometric diagrams; (3) decomposing and recomposing diagrams aided students in recognizing embedded geometric properties; (4) the ability to drag a geometric diagram into different shapes in a DGS environment did not guarantee the ability to discern supportive and counter examples or the ability to use those examples to correct false conditional statements; and (5) a lack of knowledge specific to DGS environments, particularly those related to dragging, hindered students' effective construction of diagram examples. Additionally, we identified three types of conjecture approach: induction by randomly generating a finite number of discrete examples, conjecture by systematically making examples, and conjecture by dynamically altering examples.

Keywords: dynamic geometry software (DGS), geometric property, proceduralized refutation model (PRM), conjecture

Corresponding author：Hui-Yu Hsu，e-mail：huiyuhsu@mail.nhcue.edu.tw

Received：6 April 2016;
Accepted：17 March 2017.

壹、前言

一個好的數學活動設計應提供學生主動思考與建構的機會，而學生參與在這類數學學習活動是改善當前臺灣學生「成就高與態度低」學習表現的主要關鍵（林福來，2010）。在此前提下，臆測是達成此目標、解決臺灣面臨教育問題的策略之一。研究清楚指出臆測是數學問題解決歷程的骨幹（backbone）（Mason, Burton, & Stacey, 1982），亦是發展數學能力的重要樞紐。參與數學臆測活動的學生有充分的主動思考與建構機會，有助於發展學生數學概念知識、數學程序性知識、及問題解決能力，並改善學生學習態度，進而對數學持著正面的態度意向。近年來，臆測與論證已然成為全世界數學教育的核心之一，例如，NCTM（2000）就提出臆測與論證是各學習階段學生應該要學習的課程內容，包含幼稚園、國小階段等，課室教學都應該提供學生有臆測與論證的學習機會（Ball & Bass, 2003; Reid, 2002）。而臆測與論證也是目前推動十二年國教用培養臺灣學生數學素養的重要主張之一。

幾何問題的探索通常需要持續在證明與反駁間交互循環，其歷程提供參與者臆測以及推理論證的機會（Lakatos, 1976）。動態幾何軟體（Dynamic Geometry Software, DGS）能鷹架學生探究幾何問題、臆測與推理論證幾何性質，進而瞭解幾何相關知識。本研究所謂的幾何性質意旨國中小教科書出現的定義、定理、引理等等。這些定義、定理和引理在教科書的呈現並不一定遵照「若…則」（if-then）的條件命題敘述，而是以數學事實的陳述方式呈現，其並不強調邏輯的前因後果。如教科書呈現平行四邊形的性質為「平行四邊形的對角線把此平行四邊形分成兩個全等三角形」。探討動態幾何環境對幾何教學與學生學習相關研究進行已經行之有年（Chazan, 1993; de Villiers, 2004; Healy & Hoyles, 2001; Laborde, 2000; Mariotti, 2001; Yerushalmy & Chazan, 1990）。這些研究不但分析動態幾何環境的特性，學生如何與之互動，以及互動對幾何學習的影響等議題，同時，強調教師應該具備所謂的 TPCK（technology pedagogical content knowledge）（Koehler & Mishra, 2009），也就是教師使用科技工具進行教學活動所應具備的相關專業知能。無論課室教學融入何種科技工具，在論述工具融入教學的成效之前，應先瞭解學生對科技工具的理解，如何與科技工具互動，及藉由互動來幫助自己建構數學知識。而這些研究結果是科技融入教學成功與否的重要關鍵。

幾何與代數最大不同之處在於幾何圖形。從認知觀點來說，幾何圖形具備了兩種不同特質，學者 Fischbein（1993）就提出圖形概念（figural concept）來描述個人認知幾何的雙重本質，他認為幾何圖形同時具備圖形性質及概念性質，前者是個人對圖形樣貌的知覺理解；後者則是個人對此圖形所產生的數學意義。個體在進行幾何解題過程中，幾何圖形的兩種性質必須交互作用，並以此為基礎，進行幾何推理。Fischbein 的圖形概念是從個人認知觀點出發，因此，不同

的個體對於相同的幾何圖形就可能產生不同的圖形概念。據此，學者 Laborde（2005）對幾何圖形提出另一種不同的觀點，他聚焦在幾何圖形的外在表徵，區別出圖形的兩種性質：空間圖形的性質（spatio-graphical properties）以及理論的性質（theoretical properties）。空間圖形性質是指圖形的外在特徵，傳達出哪些視覺的特質，例如，這個窗戶看起來好像長方形；理論的性質則是指圖形本身表徵的幾何定義或條件，例如，直角圖形∟的標示就表示此角度必定為 90 度。學者 Fischbein 和 Laborde 的論述顯示出個人認知與客觀呈現兩者間可能的差異。

從學者 Fischbein 的觀點來看，幾何教學通常希望學生同時知覺幾何圖形的概念性質與圖形性質，尤其應從概念來思考圖形，瞭解同一幾何概念下，圖形本身涵蓋的變異性與不變性。因此，教學期望的不只是協助學生建構典型心像（prototypical images），也希望學生能夠將圖形當成數學結構化後的一個有條件變動的物件。更進一步希望學生能夠將圖形視為不同幾何性質組合而成的結構，也就是所謂的論述性理解（discursive apprehension），同時，希望學生能將既有圖形進行拆解、組合與重構，也就是所謂的操作性理解（operational apprehension）（Duval, 1995）。從學者 Laborde 的觀點來看，教學應該提供圖形表徵蘊含的空間圖形的與理論的意涵。學者 Hsu（2008）在教師幾何教學研究中，就提出教師教學過程中常涉及此兩種性質的轉換，例如，教師在黑板上畫出一個看起來很像直角的角，但若未在角度上標示直角，學生不可自行推論此角度為直角。教師藉由兩種圖形性質的轉換歷程，可以清楚地傳達幾何圖形所賦予的意涵，同時亦能夠協助學生瞭解幾何意義，例如，學者 Cheng 與 Lin（2006）的研究則是利用塗色策略，引導學生視覺化圖形的不同組成元素，再由這些組成元素喚起對應的幾何性質，反之亦然，此研究證實塗色策略確實能夠提升學生幾何推理表現。

動態幾何環境是一個提供學生瞭解圖形的理論與空間圖形性質之表徵媒介（mediator）（Klaczynski & Narasimham, 1998）。它可以協助學生建構概念心像，尤其藉由圖形間的對應關係與不變性，幫助學生整合理論的與空間圖形的特徵，建構完備的幾何概念，這也就是學者 Laborde（2005）所謂的幾何性質即是許多變動物件下所共同具備的不變性。現有許多研究分析動態幾何環境如何幫助學生探究、臆測幾何性質（de Villiers, 1999; Laborde, 2000; Leung, 2008），另外，有些研究特別強調動態幾何軟體的拖曳功能（Arzarello, Olivero, Paola, & Robutti, 2002）或是測量功能（Olivero & Robutti, 2007），並探討這些功能如何幫助學生認識幾何性質或是形成幾何臆測。本研究亦使用動態幾何軟體，但不同於這些研究，本研究將動態幾何軟體定位為「例子產生器」，也就是學生根據某些幾何條件並利用其產生出符合條件的案例，此定位理由將於下一章節中清楚陳述。學者 Arzarello 等人（2002）已發現僅提供學生動態幾何環境，不一定能夠有效地協助學生瞭解幾何內涵或是形成幾何臆測，需要其他教學媒介的使用（如：表格），才能有助於空間圖形性質與理論性質的連結與轉換。因此，本研究整合動態幾何軟體與案例資料表

格，協助學生進行幾何性質的檢驗、反駁與臆測活動，以促進學生瞭解特定幾何性質為目標。研究問題為：

學生在整合動態幾何軟體為「例子產生器」與表格的學習單設計下，如何臆測幾何性質？其可能遇到的認知困難為何？學生又有哪些不同的臆測策略？

貳、文獻探討

一、數學臆測

臆測在數學問題解決裡扮演重要的角色。學者 Mason 等人（1982）利用進入（entry）、進擊（attack）和回顧（review）三階段來解析數學家如何解決數學問題，他們從問題解決的思考歷程中辨識出兩組交互使用的基本程序：特殊化（specializing）與一般化（generalizing）、臆測（conjecturing）與取信（convincing）。此四個基本活動是整個數學問題解決的骨幹，其中臆測更是數學思考的核心，簡單地說，臆測是數學問題解決的關鍵數學思考。進一步來說，數學問題解題歷程所涉及的臆測，並非只是某個猜測或判斷，而是個體在面對不明確的樣式或關係，能夠根據已知的知識及資訊，選擇合適的表徵，進行猜測、檢驗、相信或反駁等循環歷程，在此歷程中，個體所提出的猜想並不一定為真，仍需要進一步檢驗（陳英娥、林福來，1998）。

設計臆測活動需要瞭解臆測活動所涉及的數學內容外，更重要的是要瞭解學生是如何形成臆測的，學者 Cañadas、Deulofeu、Figueiras、Reid 與 Yevdokimov（2007）從許多數學教育研究結果整理出形成臆測的類型，包含由離散的有限案例歸納、動態案例歸納、類比、發想和知覺性臆測等五種不同認知過程的類型。無論是哪一種形成臆測的思維歷程，案例始終扮演著承先啟後的關鍵地位，若要協助學生形成臆測，就得先協助學生產出特定的、多樣的或一般的案例，才能有機會從案例中調整或重構臆測出命題。學者 Lin 與 Wu Yu（2005）從例子產生的觀點，提出程序性反駁模式（Proceduralized Refutation Model, PRM）（如圖 1），當作臆測教學設計時，教師與學生互動的歷程模式。此模式是一個以數學專家進行數學反駁的歷程為架構，教師先導入錯誤敘述為起點，而此錯誤敘述可選用學生的迷思概念，透過教師適時的介入來促成學生投入反駁與臆測的歷程，藉以增進學生反駁、臆測甚至是論證的能力。此模式的主要教學活動包含：（1）教師導入錯誤命題，用來引導學生進入命題；（2）教師確認學生理解命題，透過學生產生的案例來確認其理解命題；（3）教師鼓勵學生窮舉案例，用以促進學生提出各種類別案例；（4）教師檢驗/演示數學式，用以促成學生區辨支持例和反駁例及其通性的表達；（5）教師鼓勵學生產生臆測，用以促進學生修改命題形成臆測，以及針對臆測進行論證。此模式希望教師多鼓勵學生主動提出不同類型的案例、主動區別支持例與反駁例、主動找出支持例與反駁例性質、主動修正敘述以及提出臆測等。

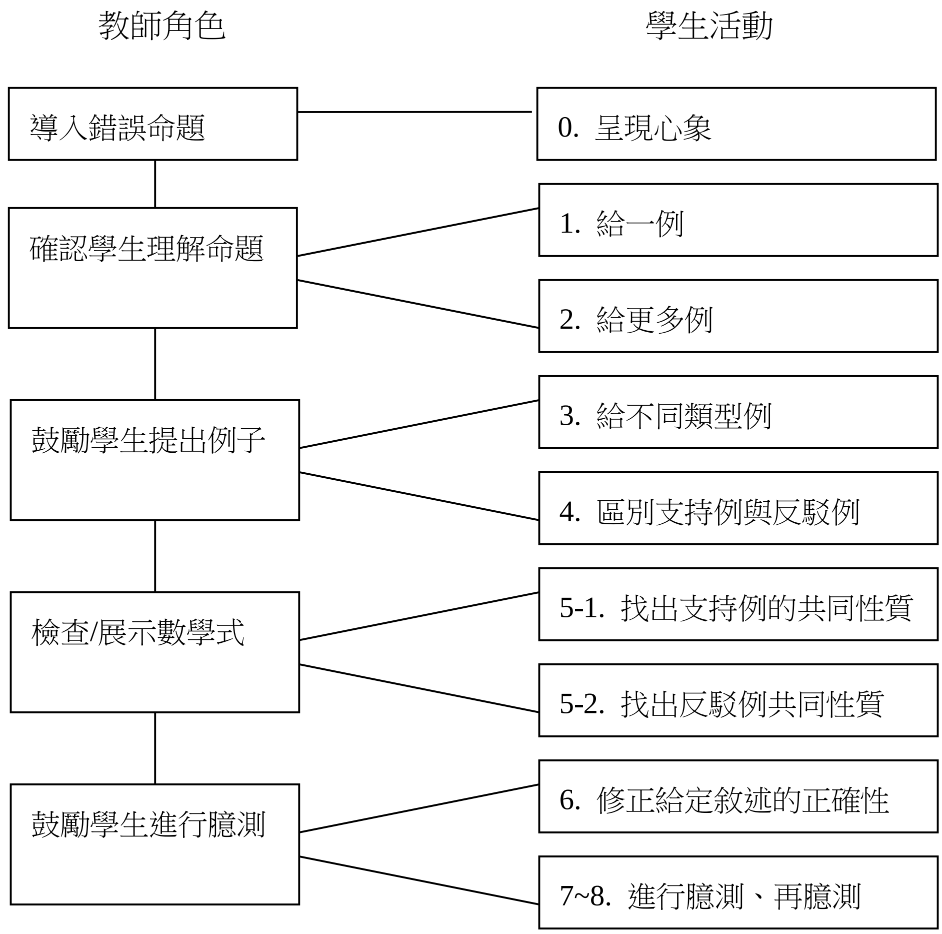


圖 1　程序性反駁模式（Proceduralized Refutation Model, PRM）

二、在動態幾何環境下的教與學

目前常見課室教學使用的動態幾何軟體包括 Cabri, GeoGebra, The Geometer’s Sketchpad, The Geometric Supposer…等，這些幾何軟體都可以當成「例子產生器」，協助學生能夠根據特定條件便利地產生幾何案例，學生有了這些幾何案例，才能進一步認識、觀察或歸納出可能的幾何性質。特別是幾何概念或性質的學習中，學生常依據典型例（prototypical examples）來建立幾何的概念心像（concept image）（Tall & Vinner, 1981）。從典型例的觀點來看，動態幾何軟體其中一個重要功能就是提供學生建構各種不同的圖形例子，包括典型例和非典型例，並讓學生對建構出的圖形案例做剛性變化（rigid transformation）（Leung, 2008）。換句話說，動態幾何環境扮演著幾何學習的中介媒介，提供學生在心像和概念上交互作用，形成將來可以多元運用、具有清楚幾何結構的概念心像。

動態幾何軟體會因教師使用的不同方式而對學生學習產生不同的影響，例如，學者 Laborde

（2001）從觀察多位高中老師使用 Cabri 融入課室教學的歷程中，提出 Cabri 整合到教學的角色有四種，蘊含著階層發展的觀點，其包括（1）資料收集：動態幾何環境主要被使用當作協助任務的材料面向，任務本身沒有概念性的改變（相對於紙筆）；（2）形成臆測：動態幾何環境被當成協助發現數學任務的不變性（如：拖曳三角形，但三中線交於一點並不受之改變）；（3）形成問題：動態幾何環境因其工具使用的可能性，進而可以扮演協助學生修正任務，形成解題策略；（4）探索論證：動態幾何環境本身為學生帶來新的意義與推理，成為學生論述幾何的基礎。同樣的，Laborde（2005）論述動態幾何環境下的學習是一種圖形的實驗本質，其因為拖曳動作而產生圖形變化，可以將定義好的圖形關係具體化，更重要的是圖形本身蘊含的變異性與不變性可以藉由拖曳圖形改變而清楚地呈現出。

另外，學者 Arzarello 等人（2002）區分出動態幾何環境下圖形拖曳（dragging）行為可能帶來的不同認知功能。他們認為幾何教學應該是視覺的圖形和理論的性質間的整合，因此，他們從圖形和理論之間的認知互動提出兩種歷程：上升歷程（ascending processes）和下降歷程（descending processes）。其中，上升歷程是指動態幾何軟體的使用是為了探索某個情境、發現規律和不變性，這是從圖形到理論的發展過程；反之，下降歷程是動態軟體的使用是為了驗證、反駁臆測或確認性質，這是從理論到圖形的思考過程。他們更進一步主張拖曳本身是一種認知行為表現，並將拖曳行為區分為不同類型並建立可能的階層型態，包含：（1）徘徊拖曳（wondering dragging）指拖曳本身是隨機的，隨便選擇螢幕上的一個點進行拖曳，其拖曳本身沒有任何要發現規律或不變性的目標；（2）邊界拖曳（bound dragging）是半可拖曳點（semi-dragable point）的移動過程，其所謂半可拖曳指的是這個點已經與某個物件做連結。比如說長方形的點拖曳，無論其如何拖曳必須符合對邊等長，且角度為直角。（3）引導拖曳（guided dragging）為了形成某一個特殊圖形而拖曳圖形的基本構成元素。（4）擬軌跡拖曳（dummy locus dragging）則是為了保持性質的拖曳動作。因此，這拖曳遵循某一軌跡，即使拖曳者並未發現。（5）線段拖曳（line dragging）則是在線段上畫出新的點以保持圖形的規律。（6）連結拖曳（linked dragging）是拖曳而造成某一個點到圖形上。（7）拖曳檢驗（dragging test）拖曳可移動或者是半可移動的點來檢驗是否圖形可以保持原有的性質。學者 Arzarello 等人並沒有明確說明哪幾種拖曳認知行為屬上升歷程；哪幾類屬下降歷程。只有點出前面幾項拖曳類別偏向上升歷程，主要是讓學生藉由一系列圖形觀察出特定的性質並形成臆測；而後幾項拖曳活動則是傾向於下降歷程，主要是讓學生針對特定的猜想進行檢驗、確認或反駁。

動態幾何環境除了產生圖形的功能外，亦可顯示特定邊或角的量測值。不過，有關幾何特有的測量值面向上，Olivero 與 Robutti（2007）指出幾何測量同時具有雙重本質，包括數學中的絕對性與科學中的不確定性。其中，數學的絕對性是指依據幾何性質而決定的測量值是絕對的，

例如，等腰三角形的兩腰邊長的測量值必定相等；科學的不確定性是指在現實環境的科學測量中，測量所得數值是不可能一致的及穩定的。某個程度來說，動態幾何軟體提供的測量值就兼具兩種本質，也就是當圖形是依據幾何性質所建構產生的，其測量所得的數值必須符合數學的絕對性，反之，若圖形是由視覺或實徵所建構產生的，其測量值的不確定性是必然的。兩種看似相互矛盾的本質同時存在於動態幾何環境中，基本上，測量雙重本質帶來的矛盾現象其也同時出現幾何的紙筆環境中。Olivero 與 Robutti（2007）類比 Arzarello 等人（2002）提出的拖曳模式，並結合 Laborde（2005）所提出圖形表徵的空間圖形性質（spatio-graphical properties）和理論性質（theoretical properties）的對應，區分出幾種不同的探索導向測量模式，包括徘徊測量（wondering measuring）、引導測量（guided measuring）、知覺測量（perceptual measuring）、驗證測量（validation measuring）、證明測量（proof measuring）

利用動態幾何環境協助學生形成臆測、進行探索並拓展到幾何證明的教學研究也是新的研究趨勢（Baccaglini-Frank, Mariotti, & Antonini, 2009）。事實上，學生在動態幾何環境下，進行圖形拖曳之前需先建構幾何圖形，而圖形的建構歷程是一種幾何性質的應用而不是幾何性質的學習。學生必須了解幾何性質，甚至是幾何性質如何在動態軟體中如何構築及呈現，才能夠產出具備特定性質的圖形。例如，學生使用動態幾何軟體畫出一個平行四邊形的任務中，即使學生知道平行四邊形是對應邊互相平行的四邊形，但建構四邊形時，如果僅以視覺判別對應邊看起來「像」是相平行的，而非真正對應邊互相平行的四邊形。對於不知道平行四邊形的所需的幾何特徵與相關性質的學生，就更不可能利用軟體建構具備此特徵或性質的圖形。因此，學生要使用動態幾何軟體畫出一個平行四邊形，需要知道平行四邊形的定義（如，對邊平行），或是相關等價性質（如，對角線相互平分），並使用這些定義或性質進行構圖，才能將具備平行四邊形特徵的四邊形畫出。這也正是（Duval, 1995）所謂的幾何作圖所需的序列性理解（sequential apprehension）。

在動態軟體環境所建構的幾何圖形，會利用拖曳來進行不變性或關係的探索，因此，拖曳過程前後是否保持原本的幾何特徵就顯得相當重要。學者 Erez 與 Yerushalmy（2006）就區別兩種不同保持幾何屬性的拖曳方式及理解，其一是拖曳自行建構的幾何圖形並保持幾何屬性，也就是學習者自己依據幾何性質建構幾何圖形，而拖曳歷程將保持幾何特徵、性質或關係等，學生對拖曳的理解即代表其對於拖曳歷程中幾何特徵、性質或關係的理解；其二是拖曳他人建構好的幾何圖形，也就是學生並不需要具有建構圖形所需的幾何知識，以及利用動態幾何軟體建構圖形的知識，因此，學生進行拖曳並不能保證學生理解圖形內涵的重要幾何特徵、性質或關係。Erez 與 Yerushalmy 強調學生拖曳他人已建構好的幾何圖形，必須要能夠知道拖曳所蘊含的幾何特徵、性質或關係，但如何協助學生察覺到拖曳圖形所內蘊的共同特徵或性質，是使用動

態幾何軟體進行幾何教學與學習的需要面對的重要課題。學生對於動態幾何環境圖形在拖曳過程所內蘊的幾何特徵或性質進行臆測，就成為橋接學生認識與理解圖形拖曳蘊含的幾何特或性質的中介策略。就如學者 Arzarello 等人（2002）所謂的上升歷程（ascending process），是從視覺觀察連結到理論進而來回對應，讓學生在拖曳歷程中理解圖形內蘊的幾何特徵或性質。

學者 Baccaglini-Frank 等人（2009）發現學生根據圖形關係來處理圖形的不變性是有困難，他們為了分析學生認知行為與學習困難，將圖形上可拖曳的點區分為基礎點（base point）與建構點（constructed point）：前者是指可任意的或半任意的拖曳的點；後者是指由建構物件交集而形成的點，它是由這些物件所產生的，並不能被拖曳的。根據這樣的觀點，所謂的圖形結構的不變性，就是指拖曳圖形的任何基礎點，該圖形仍具有相同的幾何特徵或性質；所謂的在動態幾何環境中進行臆測，就是指透過動態幾何軟體的協助發現圖形結構的不變性；所謂的證明則是指表達圖形結構不變性的推理與論述過程。不過，學者 Baccaglini-Frank 等人也發現當學生發現圖形結構上的不變性時，並無法直接過渡到認知的不變性，也就是順利證明這結構不變性背後的理由，換句話說，從動態幾何環境中產生的臆測不等同於學生能夠順利地過渡到證明（González & Herbst, 2009）。

三、例子產生器—動態幾何環境的新論述

許多研究文獻主張動態幾何環境有助於學生臆測幾何性質或是瞭解幾何性質，然而，文獻也指出學生使用動態幾何環境來建構幾何知識可能面臨的困難。例如，學者 Erez 與 Yerushalmy（2006）就指出動態幾何環境的拖曳操作經驗，不能保證學生能順利觀察拖曳背後所帶來的關鍵屬性。學者 Arzarello 等人（2002）對於動態幾何環境下圖形拖曳的分類，與 Olivero 與 Robutti（2007）針對動態幾何環境下測量的分類，都說明了學生在動態幾何環境下，他們會以不同的認知模式與其互動，如果學生停留在視覺判斷階段，就不容易成功形成特定性質的臆測，進而瞭解圖形結構所隱藏的特徵或性質。

事實上，這些研究文獻也都點出動態幾何環境可以協助學生產生案例，進而從案例進行觀察或歸納可能性質。本研究雖然依循此方向，不過卻強調動態幾何環境是學生學習歷程所需的「例子產生器」，這樣的主張有以下三點意涵：

第一、將動態幾何環境當成例子產生器的觀點，強調案例在學生形成數學臆測或是概念學習歷程的重要性。學者 Michener（1978）為了理解瞭解數學瞭解（understanding understanding mathematics），提出數學瞭解的三個對偶空間結構，此三空間分別是（1）結果（results）空間，包含傳統邏輯演繹的數學元素，通常是指定理（如：畢氏定理）；（2）例子（examples）空間，包含說明的材料，通常是指案例，例如，邊長 3, 4, 5 的三角形為直角三角形；（3）概念（concepts）空間，包含數學定義、啟發性的觀點與看法，通常是指概念，例如，直角三角形的定義或心像。

根據 Michener 所提出的三個對偶空間結構來看，若要數學瞭解當然不可缺少例子，而且好的數學瞭解除了需要例子、概念及結果三者外，更重要的是三者具有對偶關係（dual relations），透過三者對偶關係的聯繫而建立良好的數學瞭解。就以例子空間與結果空間的對偶關係為例，對偶關係可以是用來支持或啟動結果產生的案例，亦可以是用來說明或證明結果的案例，或是根據結果所產出的案例…等，這些關係讓例子與結果緊密連結，因而有助於數學瞭解。更具體來說，若以「畢氏定理」為結果空間的元素，它對應到案例空間的對偶關係可能包含，使用特定案例（如邊長 3、4 和 5 的三角形）支持此結果的合理性，或是利用多邊形及其邊長與面積概念說明或證明，更進一步，有關「畢氏定理」的結果、案例與概念及其對偶關係，亦可以成為「餘弦定理」的特殊結果、案例與概念。另外，從形成數學臆測的歷程來看，無論是離散的案例歸納、動態的案例歸納或是類比形成臆測，都需要適當且正確的案例為基礎，才能進行歸納或類比的推理，因此，學生是否能夠產出適當且正確的案例，就成為是否能夠成功臆測出幾何性質或關係的主要關鍵。不過，此關鍵並無法完全仰賴動態幾何環境協助而得以解決，尤其對弱勢學生或程度較差的學生來說，他們使用軟體產出的例子可能是隨機的、不恰當的或是不正確的，這些缺乏系統的、無關的或是不正確的案例，都無助於學生形成臆測。

第二，將動態幾何環境當成例子產生器的觀點，強調學生學習產生具有不同屬性或不同類型的案例的重要性，而不是僅產出沒有屬性或類別區別的案例。學生藉由例子產生器產出支持或反駁特定幾何命題的案例，進而再從不同類型案例找出共通性或差異性，藉以修改或調整幾何命題，同時增進數學瞭解。這樣的論點與目前動態幾何環境的相關文獻上所提出的產生案例之觀點不盡相同，但與程序性反駁（PRM）中提出建構更多樣例子的觀點不謀而合。事實上，建構幾何例子是一個高認知需求的活動，學生通常會受典型心像（prototypical images）所影響，他們產生的案例經常類似典型例。如何有效地使用軟體構圖舉例，這須仰賴學生認知該圖形概念性的心像，也就是掌握一類圖形中不變的及可變的構圖特徵來產生圖形，就以產出直角三角形為例，學生必須瞭解直角三角形中有兩個邊夾出一個直角，其他角及其對應的邊長都是可變的，如果能掌握這個直角三角形不變的與可變的構圖條件，學生才能發展出使用軟體產出各種不同變異的直角三角形案例，如等腰直角三角形，而接續其後的幾何活動就會在一個較相關的、正確的與系統基礎上進行。換句話說，學生要正確建構出幾何圖形案例，他們就需要對幾何圖形進行適當的分解和重組（decomposition and recomposition）。學者 Cheng 與 Lin（2007, 2008）從教學實驗中發現有約三分之一的國中生無法從論證問題的資訊中辨識出證明所需的關鍵元素。換句話說，這些學生無法在附圖中解構出有助於證明的子圖以及理解子圖所對應的幾何性質，並以這些幾何性質來進行論證。學者 Hsu（2010）進一步說明解構幾何圖形辨別幾何性質是解題的重要關鍵，而非幾何證明形式與幾何計算形式的區別。同時，Hsu 也發現圖形的複雜度顯著影

響學生的解題表現，即使題目要求相同的幾何性質進行解題。學者鄭英豪（2010）調查發現，國中生舉出各種不同三角形來檢驗「三角形最長邊的中點可以做一個圓恰好經過三角形三頂點」是否正確的問題中，只有約四分之一的 8 年級學生可以舉出三種以上的三角形來檢驗，約有六分之一的學生會給出非特殊的三角形來檢驗，而大多數學生所舉出的多個案例，其實只是不同大小的一兩種特殊三角形。這個結果顯示我國國中生對於三角形的概念心像是十分狹隘的，學生對於三角形的例子空間非常地窄小，因此當他們被要求要做出三角形時，多半只能憶取部分課本上有命名的特殊三角形。

第三，將動態幾何環境當成例子產生器的觀點，強調學生僅靠軟體協助仍無法適當且正確地產出有屬性或類別區分的案例。雖然軟體有助於學生產出案例，但是學生要針對特定幾何問題進行有系統的且正確的產出不同類型案例，仍需要其他配套策略給予學生支撐，才能成功地接續後續的幾何臆測與論證歷程。在動態幾何環境中，學生利用拖曳來改變或產出圖形案例，並不能保證學生能夠看出拖曳前後的案例所隱藏的共同的與不同的幾何性質。基本上，幾何性質是幾何圖形的特徵、不變性或是關係，這些特徵、不變性或關係有時候需要將圖形轉換為測量值才能觀察到。因此，測量值的觀察亦成為歸納形成特定幾何性質臆測的關鍵。由於圖形複雜性特質，學生直接從圖形中觀察測量值，並從測量值的變化歸納出可能的幾何性質並不容易。本研究認為，圖形中同時結合測量值與圖形特徵有其優勢，就如同學者 Olivero 與 Robutti（2007）主張測量本身具備的理論與實徵的觀點，在此觀點下，結合測量與圖形能夠幫助學生概念化幾何特徵或性質，同時可以提升學生拖曳的認知層次與測量的認知層次。不過，兩者的結合並不能完全保證達成目標，從圖形空間的性質來看，每一個圖形的建構會因為特殊的幾何性質而產生特殊處，例如，菱形如果歪斜了，學生可能就無法辨識其為菱形（Fischbein & Nachlieli, 1998），即使在圖形結合測量數值標示，學生已有的典型心像仍會阻礙觀察與轉換數值關係進行可能性質的推論，因此，圖形與測量的結合，需要利用透過其他媒介協助，特別是能夠有助於學生進行有目標地、有系統地與正確地的觀察幾何性質。從另一觀點來看圖形與測量的關係，基本上，幾何性質也可以看成是測量值之間的關係，就某個程度來說，此數值的關係可表示成一個代數式，而學者 Koedinger 與 Anderson（1990）就指出這樣的代數式本身具備不確定性，幾何問題若使用代數符號來表示幾何圖形的測量值，則學生解題表現會有顯著的降低。從 Koedinger 與 Anderson 的觀點來看，根據幾何圖形不同元素測量值而產生代數關係式是相對較高的認知活動。這類的學習活動必須另外設計，特別是結合動態幾何「例子產生器」的功能，引導學生建構類別不同的案例，進而觀察不同類別案例之間的相異性與相同性。據此，本研究用來協助學生結合圖形與測量的媒介是表格，適當的表格具有結構化的功能，能夠有效幫助學生觀察數值間關係的介入工具（Haspekian, 2005）。

參、研究方法

本節分別從研究工具的開發與設計、研究對象的特質及研究時程與資料分析等部分說明。

一、研究工具

本研究根據程序性反駁模式（PRM）為臆測學習單設計的中介理論架構（intermediate theoretical framework）（Ruthven, Laborde, Leach, & Tiberghien, 2009），以動態幾何軟體為媒介工具，完成三份幾何性質臆測學習單的設計。因臆測的本質，三份學習單的幾何性質，均以條件命題（conditional statement）（Selden & Selden, 1995; Wu Yu, Hsu, Lin, & Chin, 2009）的形式呈現。學習單呈現錯誤的幾何條件命題，學生需臆測並提出新的論點來修改錯誤的命題敘述。因本研究將動態幾何軟體定位為圖形例子產生器，學生不需具備動態幾何軟體操作的相關知識。例如：利用平行線性質，操作動態幾何軟體來畫出一個平行四邊形。學生只需拖曳給定的幾何圖形，透過拖曳產生不同的幾何圖形案例。另外，考量幾何性質的獨特性與複雜性，研究工具包含了三個不同幾何性質臆測學習單，以深入瞭解學生在動態幾何環境中製造案例、檢驗錯誤命題、觀察共通性、形成臆測及論證等歷程的認知行為、臆測策略與可能的學習困難。以下分別就三份學習單進行說明如下：

（一）外角定理學習單

外角定理為三角形內角與外角形成固定關係之一。此份學習單的設計則是先給定一個有關外角定理的錯誤命題為起點，該錯誤命題敘述如下圖 2：

「如右圖，在任意三角形 ABC 中，∠1 的角度一定等於∠2 加上∠A 的角度和。」

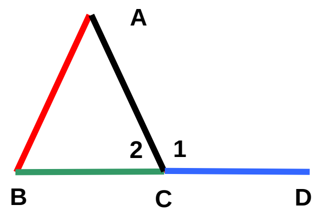


圖 2　外角定理學習單給定的錯誤命題敘述及附圖

如圖 2 所示，此份學習單主要學習目標是讓學生探索出三角形中∠1、∠2 和∠A 三個角度之間的關係，先透過產出案例進行檢驗原錯誤命題，再經由觀察支持案例的共同性來修改錯誤命題，並從而猜測出命題敘述一或命題敘述二，此兩命題敘述分別如下：

命題敘述一：在任意三角形 ABC 中，∠1＝∠A+∠B

命題敘述二：三角形 ABC 中，當 AB＝AC，∠1＝∠2+∠A

就命題敘述一來說，學生在動態幾何環境中，使用軟體拖曳出的三角形均符合此命題敘述（外角定理），也就是學生產生的案例均為此命題的正例或支持例。學生如何從自己產出的案例

中觀察與歸納出這三個角度測量值之間的關係便是重點，它是修改原錯誤命題的結論而形成的臆測命題。就命題敘述二來說，學生產生案例反駁原錯誤命題相對容易，但要將原錯誤命題修改為命題敘述二，就需要找到具有原錯誤命題的結論特徵的特例，此三角形特例為等腰三角形，從而修改原錯誤命題而臆測出命題敘述二，也就是具有等腰三角形的性質才會得到$\angle 1 = \angle 2 + \angle A$。

在動態幾何環境中，研究者配合此份學習單，先提供學生一個已建構好的三角形，如圖 3 所示，同時標示出此三角形的各角度和邊長測量值。學生可以進行圖形拖曳的部分僅有頂點 A、線段 AB 或線段 AC，其餘頂點或線段均不可移動。無論學生拖曳點的是頂點或線段，三角形上的角度與邊長的測量值都會隨之而改變。

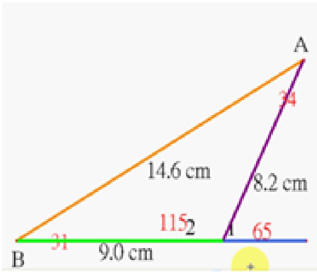


圖 3　動態幾何上學生拖曳外角定理而成的圖形範例

（二）三角形外接圓學習單

外接圓學習單的設計也是先給一個與三角形外接圓有關的錯誤命題敘述為起點，該錯誤命題敘述如下圖 4：

「在三角形中，我們可以用最長邊的中點為圓心，畫出一個剛好連接三個頂點的圓。」

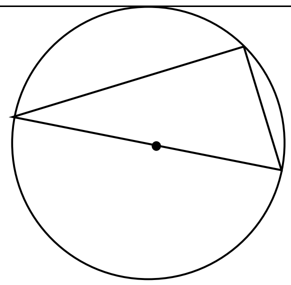


圖 4　三角形外接圓學習單給定的錯誤命題敘述及附圖

如圖 4 所示，此學習單主要目標是希望學生能夠產生案例檢驗出原錯誤命題敘述是錯誤的，進而從案例中觀察出只有特殊的直角三角形為前提下，原錯誤命題的結論才會產生，也就是唯有三角形為直角三角形時，最長邊的中點為圓心才能得到通過三個頂點的圓。

在動態幾何環境中，研究者配合此份學習單，先提供學生一個非特殊的三角形，並在圖形上標示出三角形所有的角和邊的測量值，參考圖 5 內的三角形，接著，學生藉由拖曳三角形的

任一頂點來改變圖形成為某個的三角形，而圖形拖曳過程，標示的角與邊長的測量值也隨之改變。當學生確認不再拖曳改變三角形後，就請學生點選三角形的最長邊，並利用設計好畫圓按鍵執行以最長邊的中點為圓心且最長邊為直徑畫出圓，如圖 5，學生藉由視覺畫圖形關係來決定是否符合原命題敘述。當學生進行一次拖曳形成的三角形並點選完成外接圓後，三角形與外接圓都會被取消，並回到最初給定三角形後，再讓學生進行拖曳改變圖形，形成新的三角形，然後學生再根據新的三角形，再畫出最長邊為直徑的圓，並視覺判斷該圓是否第三個頂點。此種動態幾何軟體使用方式的目的是希望學生意圖產生案例時，便能夠關注圖形案例的幾何特徵，無論是角度或是邊長，而不是只關注在如何把三角形的第三個頂點拖曳到圓形上。希望藉由三角形案例製造和畫外接圓的檢驗，促進學生思考三角形應該具備什麼樣的特徵，它的三個頂點會同時落在最長邊所畫出來的圓（三角形的外接圓）。同時，學生可以利用視覺化判斷三角形的三個頂點是落在圓上、圓內、或圓外。

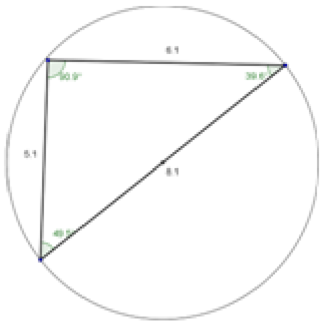


圖 5　動態幾何環境中學生拖曳三角形外接圓形成的圖形案例

（三）直角三角形斜邊上的高學習單

直角三角形斜邊上的高學習單與第一份的外角定理學習單比較相似，希望學生從造例中觀察出直角三角形斜邊的長度與斜邊上高的可能關係，同樣的，先給一個錯誤的命題敘述為起點，此錯誤命題的敘述如下圖 6：

「在一個直角三角形中，斜邊上的高等於斜邊長的一半。」

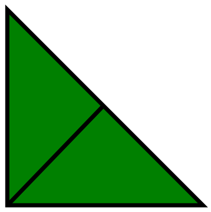


圖 6　直角三角形斜邊上的高學習單給定的錯誤命題敘述及附圖

如圖 6 所示，此學習單希望學生利用拖曳而產生不同的直角三角形，並觀察拖曳過程產生案例的斜邊上的高與斜邊之關係，檢驗原先給定錯誤命題敘述是否正確，並根據邊長的測量值

區辨符合與不符合該命題的正例與反例。學生參與這份學習單的過程中，觀察測量值及其關係，就成了學生回頭檢視原錯誤命題敘述、判斷原錯誤命題的正確性、以及修改錯誤命題成為可能正確命題的臆測重點工作。

第三份學習單的原始附圖選用教科書用來建構學生幾何性質典型心像常見的附圖。在動態幾何環境中，研究者配合此份學習單，會先提供學生一個類似於學習單上的直角三角形的圖形，而此圖形會標示不同角度或不同邊長的測量值。學生只能夠拖曳非直角的頂點來改變圖形，其餘的圖形部分是不可移動的，透過拖曳產生案例並觀察斜邊與斜邊上的高之測量值的可能關係（如圖 7）。

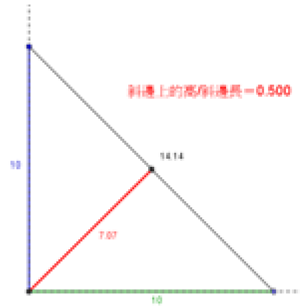


圖 7　動態幾何環境直角三角形斜邊上的高圖形範例

正如前面文獻論述提到將動態幾何軟體當成例子產生器的概念，在動態幾何軟體中拖曳並不一定會幫助學生產生正例與反例，進而觀察出正例或反例的共通性，然後修改或形成新的臆測命題。因此，如同其他學習單一樣，提供給學生不僅是動態幾何軟體外，還搭配記錄圖形特徵的表格，讓學生記錄自己拖曳產生的圖形之角度或邊長的測量值，再藉由觀察表格內的各項測量數值之間的特徵、不變性或關係，提出修改給定錯誤命題的新臆測命題。

學者 Boero（2006）認為一般化（generalization）需要從各自孤立的大量案例中尋找其共通性（commonalities），此共通性是學生形成抽象化的必經之路。因此，三份學習單均提供學生記錄表格，讓學生將使用動態幾何軟體產生圖形的各項測量值記錄下來，藉由表格的系統性或結構性的特徵（Haspekian, 2005），協助學生觀察各項或各類測量值之間的差異性或共通性，據此反駁原有錯誤的幾何命題，進而修改或提出新的臆測命題。就以外角定理提供的表格為例，提供學生圖形測量的記錄表格如下圖 8 所示，包含學生拖曳產出圖形的不同角度和邊長的測量值，此表格內資訊協助學生反駁原有錯誤幾何命題（∠1＝∠2+∠A）外，並能夠歸納出合理的幾何命題一：外角定理（∠1＝∠A+∠B）。另外，為了支撐學生更全面地觀察各案例測量值之間的不變性或差異性，進而能夠進行可能關係的歸納推理，圖 8 特地將原本錯誤幾何命題的測量值（∠1＝∠2+∠A）予以錯開，讓學生的觀察不會只侷限在特定項測量值的特定關係成立與否的判斷上（∠1＝∠2+∠A？），或是僅就鄰近數值相同與否進行表層的判斷。

圖形編號	BC長度（公分）	AC長度（公分）	AB長度（公分）	∠2角度	∠1角度	∠B角度	∠A角度
圖1	9公分						
圖2							

圖 8　外角定理學習單所提供的表格格式

學習單以程序性反駁模式（PRM）為活動設計的中介架構（intermediate framework）（Ruthven, Laborde, Leach, & Tiberghien, 2009）。學習單首先提供錯誤幾何命題，命題敘述旁邊提供一個教科書常用來建構學生典型心像的附圖。動態幾何軟體介面提供與學習單相同的幾何圖形，學生必須利用拖曳功能來產生各種不同圖形案例，並將圖形案例的測量值記錄在學習單表格中。學生利用拖曳觀察到的圖形案例及學習單上表格的測量值來檢驗原先給定錯誤命題是否正確。接續其後的活動序列包含幾項，首先，要求學生區辨正例與反例，也就是要求學生根據自己使用軟體拖曳產生的圖形案例及其測量值記錄，判斷哪些案例符合原先給定錯誤命題的結論，並稱之為正例；哪些案例則是不符合原先給定錯誤命題的結論，並稱之為反例。其次，進一步要求學生觀察與歸納出正例的共同特性。最後，要求學生並根據這個共通性來修改原本錯誤的命題敘述，使它成為新的且合理的臆測命題。就以外角定裡的學習單為例，後續引導學生的問題敘述如下：

- 根據拖曳形成的圖形和表格數據，哪些案例<u>符合</u>「∠1 的角度<u>等於</u>∠2＋∠A 的角度和」？
- 根據拖曳形成的圖形和表格數據，哪些案例<u>不符合</u>「∠1 的角度<u>等於</u>∠2＋∠A 的角度和」？
- 從符合「∠1 的角度<u>等於</u>∠2＋∠A 的角度和」的案例中，觀察這些案例的圖形。想想看，這些圖形有哪些共同性呢？
- 根據你的發現，你會怎麼修改原先給定的錯誤敘述呢？

（四）三份學習單的綜合分析

三份臆測學習單涉及不同幾何性質，學生必須在動態幾何環境中拖曳產生圖形案例，並依據這些圖形案例來臆測學習單設定目標的幾何性質。本研究從試題分析的角度（Greeno, 1980; Resnick, 1975），就動態幾何軟體的特質以及幾何本質，架構出兩維度來檢視三份臆測學習單的共通性與差異性。此兩個維度分別為建構測量值的關係性（relation of measures）及視覺化（visualization）。首先，測量值的關聯性是指學生反駁或臆測幾何命題依據是從不同測量值之間建構其關聯性，這些關聯性可能只要簡單地觀察測量值的不變性，例如，根據邊長測量值看出

三角形可能具有等腰的特徵，亦即看出某兩個邊長測量值相同，但關聯性也可能涉及建構多個測量值之間的複雜關係，例如，根據邊長測量值看出可能的外角定理，這需從多個角度測量值中觀察出特定三個角度值間的特定關係。其次，視覺化的影響是指學生反駁或臆測幾何命題是仰賴觀察圖形的特徵或變化而察覺到該幾何性質的，例如，根據圖形關係看出三角形的三頂點不是共圓的，或是根據圖形特徵看出三角形可能是直角三角形。

表 1 是以測量值的關聯性及視覺化的影響兩個面向分析三份學習單的特徵。從表 1 可以看出，外角定理學習單和直角三角形斜邊上的高學習單，其本質上比較類似，兩份學習單均要求學生觀察不同測量值，並建構出較複雜的關係式，例如，外角定理學習單期望學生從四個角度數值資訊歸納出外角定理：∠1＝∠A＋∠B，因此，這兩份學習單所搭配的動態幾何環境中，學生利用拖曳產生正例或反例的過程，視覺化圖形案例並不一定能夠幫助學生區別正例或反例，當然就不一定有助於學生瞭解正例或反例與學習單給定錯誤命題之間的關聯性。尤其是外角定理學習單，無論是原先給定的錯誤命題或是期望學生臆測的命題，其牽涉到的是四個角度中的特訂三個角度之間的關係式，學生就其拖曳產生的圖形案例進行觀察，對於形成角度關係式的臆測命題之幫助並不大。

表 1

三份學習單綜合分析

學習單名稱	測量值的關係性（relation of measures）	視覺化（visualization）
外角定理	● 三個角度測量值之間的關係	● 不容易直接觀察出
圓內接三角形	● 單一量	● 觀察三角形的三頂點是否在圓上 ● 觀察直角
直角三角形斜邊上的高	● 直角三角形斜邊與斜邊上高測量值之間的關係	● 不容易直接觀察出

相反的，三角形外接圓學習單則仰賴視覺化推理。學生拖曳圖形是否產生特定的圖形，或是產生的兩圖形是否具有特定關係，都必須仰賴圖形視覺化的資訊加以判斷，例如，學生拖曳出特定三角形後，利用造圓按鍵產生相對的圓，透過視覺判斷出三角形的第三個點頂是否在圓上、圓內或圓外。如果三角形的第三個頂點看起來都在圓上時，學生就有機會看出三角形第三頂點所在的角看起來是直角。同樣的，如果第三個頂點落在圓內，學生也有機會視覺化出第三個頂點所在的角度看起來是鈍角。這些圖形或圖形關係的視覺化資訊回饋，提供了學生區別出正例或反例，以及看出正例或反例的共通性的機會，透過這些視覺資訊察覺或猜測出僅在三角形為直角三角形的情況之下，三角形的三個頂點會剛好落在以最長邊為直徑的圓上。

目前動態幾何研究文獻分析的學習單性質大都類似三角形外接圓學習單設計，學生可以直接在動態幾何環境中藉由拖曳來觀察不變性與變異性，進而臆測隱藏的幾何性質。相對的，較少動態幾何研究採用的學習單內容類似外角定理或直角三角形斜邊上的高，其臆測內容需建構多個測量值之間的關係式。

二、研究對象

研究對象為臺灣北部某一國中七年級學生。研究進行過程中，參與的國中學生尚未學習過三份學習單所含括的幾何性質（外角定理、直角三角形斜邊上的高與斜邊的關係、直角三角形與外接圓的關係）。參與對象由該校老師篩選，以數學表現中等且有學習意願為篩選標準。此篩選標準的目的是希望學生具備基本數學及幾何知識，且但對於三份學習單的幾何內容完全未知。除瞭解學生在動態幾何環境下的學習歷程外，也希望瞭解學生可能產生的學習困難。同時，研究者希望進一步檢驗教學介入是否有效的解決學生面臨的學習困難。綜而言之，學生樣本的選擇提供此研究瞭解學生在動態幾何環境造例的認知歷程及可能產生的學習困難。同時，提供檢驗將動態幾何環境視為例子產生器的教學介入的有效性。

共 15 位七年級學生參與此研究，學生隨機分派到不同學習活動。其中 5 位學生參與外角定理學習單；6 位學生完成三角形外接圓學習單，另有 4 位學生完成直角三角形斜邊上的高學習單。

三、研究流程與資料分析

研究流程類似個案訪談方式，參與學生單獨操作動態幾何軟體、單獨完成學習單。每位學生只需要完成分派到的那一份學習單即可。開始先請學生自行閱讀學習單內容，並由施測者提供操作動態幾何環境簡要說明。閱讀完學習單之後，學生可自由拖曳給定的幾何圖形。如何拖曳圖形及停止圖形拖曳由參與學生自行決定。停止拖曳之後，學生需觀察拖曳後的圖形並將圖形例子的測量值記錄在學習單圖表上。學生可自行決定何時需要建構幾個圖形案例，並以這些圖形案例完成學習單其他問題。當建構不同案例之後，學生需分類建構的幾何圖形案例，觀察分類圖形案例的通性，並修改給定的錯誤命題。造例過程中，研究者在旁訪談學生在想什麼，瞭解學生如何造例以及決定案例的背後想法。由於測量數值對以幾何圖形案例進行臆測影響重大，而測量誤差是不可避免的，對此，研究者除在動態幾何軟體設定測量值呈現方式（小數或整數）外，當學生因測量產生的誤差而無法正確臆測並修改錯誤命題時，研究者將介入，與參與學生討論，幫助學生微調圖形，修正錯誤測量值。研究不限時間，直到學生完成為止。

本研究以質性研究方法（Merriam, 1998; Strauss & Corbin, 1998）為主，目的是瞭解學生在動態幾何軟體與表格整合的學習環境下如何進行臆測並修改給定的錯誤命題。同時要瞭解涉及

不同幾何關係的複雜性與不同視覺化需求的學習單對學生建構圖形案例與臆測幾何性質的影響為何。為達成研究目標，在學生與學習單及動態幾何環境互動歷程中，研究者首先晤談學生，瞭解他們的先備知識（如：學生是否已經知道學習單主要的臆測目標），檢視並確認學生發生的認知困難，然後根據這些認知困難採取對應的教學介入。對應到本研究目標，教學介入僅止於協助學生能夠順利產生幾何圖形案例，研究者尤其關注學生是否能夠順利產生符合給定命題的正例和反例。當學生能在動態幾何環境與圖表的輔助下產生出各種正反例之後，學生需自行完成剩餘學習單內容。操作動態幾何軟體、寫學習單及訪談過程全程錄影。同時，以電腦螢幕錄影程式軟體（Camstudio）記錄學生使用動態幾何軟體拖曳過程，追蹤學生如何移動給定幾何圖形的點或邊，何時停止拖曳。資料收集完成之後，研究者採用內容呈現方式（manifest content approach）(Erickson, 2006)，進行後續質性資料分析。內容呈現分析方法強調學科內容如何藉由對話、文字表徵、肢體動作、手勢和其他的非語言資訊呈現出來。以內容為主要關注，配合其他資料訊息，包括學生在動態幾何的拖曳行為，用以瞭解學生的想法。因此，口語資料先轉成逐字稿，再將逐字稿、學生肢體動作和動態幾何軟體拖曳結果作一對應，並由不同資料來源來瞭解學生的想法。分析後的資料進一步由三位研究者討論與校正，再次確認資料分析結果的信效度。研究結果呈現以質性分析為主，同時輔以量化資料，主要是將學生的認知行為及學習困難描繪清楚。因此，研究分析資料的呈現不是個別學生，而是這些認知行為的特徵。

肆、結果與討論

本研究將研究結果區分為兩個部分：第一是國中生在動態幾何環境的認知行為。第二是整合學生在動態幾何環境及圖表的學習單設計下，呈現哪些臆測策略。尤其本研究將動態幾何軟體當成例子產生器，其對學生臆測表現影響，將作一討論。

一、學生與動態幾何環境的互動分析

互動分析依據本研究提出的兩個維度：測量值的關係性及視覺化兩者為主要分析結果呈現的考量。三份學習單中，其中有兩份臆測目標的幾何性質本身涉及複雜性較高的關係式（外角定理及直角三角形斜邊上的高）。這兩份學習單學生不易直接在動態幾何環境中視覺觀察出幾何性質。另一份，圓內接三角形，其觀察的幾何量較簡單，學生容易在動態幾何環境中觀察。

（一）學生臆測複雜關係式的幾何性質的認知行為分析

研究分析結果顯示學生在直角三角形斜邊上的高的學習單的認知行為類似於外角定理學習單。受限於篇幅關係，以外角定理學習單的結果分析來呈現學生各種不同的認知行為。外角定理學習單的主要工作任務包括：

- 拖曳給定三角形的底邊或是定點以獲得新三角形。

- 記錄所造三角形的邊長、角度在表格內，觀察表格內符合命題的角度值，臆測這些角度值所形成的數學關係。

學生根據給定的錯誤幾何命題，可修改其錯誤命題的前提或是推論結果，而形成新的命題敘述。學習單預期學生產生的新命題敘述包括：

新命題敘述一：在任意三角形 ABC 中，$\angle 1 = \angle A + \angle B$

新命題敘述二：三角形 ABC 中，當 AB＝AC（等腰三角形），$\angle 1 = \angle 2 + \angle A$

學生需要根據給定的命題，利用拖曳產生符合給定命題前提與結論的正例，以及符合給定命題前提但不符合結論的反例。學生拖曳產生圖形案例後必須將邊與角的測量值記錄在表格上，藉此觀察與推論出合理的或正確的命題敘述。從這些個案訪談中，研究者發現學生在產生幾何圖形案例有不同的認知表現，以下分別就形成命題一與命題二的臆測，說明如後。

首先，預期形成命題一（外角定理）的臆測來看，無論學生所產生的案例如何變異，都是命題一的正例，也就是任何拖曳出的三角形均符合外角定理，因此，利用拖曳產生案例對學生來說並不困難，困難在於學生如何在這些案例觀察出外角定理三個角度之間的定量關係。分析結果發現，完成外角定理學習單的 5 位學生無法從拖曳圖形改變過程中臆測外角定理三個角度之間的關係。學生必須藉由表格測量值的觀察與歸納才能臆測外角定理。經教學介入後，5 位學生最後都成功臆測出外角定理。

其次，預期學生在動態幾何環境拖曳產生符合原錯誤命題前提但不符合結論的反例並不困難。分析結果顯示學生很容易造出反例。學生的困難反倒是造出符合命題條件的正例，亦即拖曳產生出$\angle 2 = \angle B$ 的三角形特例。學生無法成功建構出符合命題條件正例的主要原因是學習單給定錯誤命題的結論是三個角度的代數關係式（$\angle 1 = \angle 2 + \angle A$）。此代數關係式涵蓋三個角，其對應在幾何圖形上是三個不同位置，這三個位置的空間關係不容易被觀察、辨識出來。從學生先備知識的角度來看，七年級國中生之前的學習經驗並沒有一個圖形概念心像可延拓銜接到此關係式。學生即便能辨識出給定圖形子圖有一個三角形，也能擷取辨識一些跟三角形有關的幾何知識與圖形心像，但由先備知識與圖形心像到需臆測關係式的認知需求（cognitive demand）過大（Stein, Grover, & Henningsen, 1996），學生很難順利臆測外角定理。另一個可能的理由是原給定錯誤命題所附幾何圖形為三角形，且其底邊線段延長，延長線段形成另外一個角，線段與新增的角可能干擾學生連結與擷取三角形有關的幾何知識；同時也干擾學生在圖形案例上辨識出等長度的兩個邊長，也就是等腰三角形的性質。

由於臆測外角定理的代數關係式對學生產生高認知需求，學生無法單從觀察圖形案例臆測此代數關係。且質性資料分析發現，學生在動態幾何環境拖曳圖形造案例過程中，有不同的認知行為以及對應的學習困難，分項說明於後。

認知行為類型一：隨意拖曳產生案例

就命題一來說，任何案例都是正例，因此，圖表的觀察是臆測正確命題一（外角定理）的關鍵。但就命題二來說，研究者發現學生操作與外角定理有關的圖形來臆測命題二時，學生在拖曳的過程中，表現出沒有目標或隨機的移動頂點或線段，而且學生從拖曳開始到拖曳停止所決定的幾何圖形案例都是隨機的（Arzarello et al., 2002）。因為於學生不知道拖曳改變或產生圖形的目的，所以，即使學生能夠觀察到拖曳產生圖形案例外觀的改變，但學生也不知道拖曳產生的案例與學習單上呈現的原錯誤命題之間的關係。尤其是學生亦沒有辦法藉由視覺化圖形資訊或關係的幫助，觀察出圖形案例與原命題結論之間可能的關係，因此，學生無法根據原命題結論的關係來產生案例。學生難以產生符合原命題的正例的情況下，拖曳所產生的案例都是反例，尤其是無法單就視覺資訊就判斷拖曳的圖形案例是反例或反例。顯見，學生拖曳產生案例的過程其時是與原命題正確與否的判斷的分離的，可視為是兩條沒有交集的思考路徑。

就程序性反駁模式來看，產生的正例與反例是後續形成臆測的基石，學生必須藉由觀察自己所產生的正例或反例的通性，才能夠有機會形成臆測，進而修改原命題的前提或結論成為新的臆測命題。據此，本研究採用兩種不同教學介入，其目的是提供學生自己找到符合原命題結論的正例，而不是只是隨機地產生都是反例的案例。第一種教學介入是鷹架學生在圖形案例上只關注與命題有關的角或是邊。以外角定理為例，研究者將動態幾何軟體顯示的圖形只標示出與原命題有關的三個角度測量值其餘角度及邊長測量值都加以隱藏。如圖 9 所示，左邊是動態幾何環境原提供學生拖曳的圖形，其圖形上四個角度和三個邊長測量值均標示出來。圖 9 右邊圖則是保留與原命題有關的三個角度測量值（原命題的結論為∠1＝∠2+∠A），讓學生能專注於這三個角度，並觀察拖曳對於這三個角度關係的影響。這項介入主要是引導學生視覺上專注在與原命題結論有關的三個角度，目的是讓學生利用拖曳產生符合原命題結論的正例並加以記錄下來。學生才能接續觀察表格的正反例，歸納並臆測出三個角度之間的關係式，及相關的幾何性質。

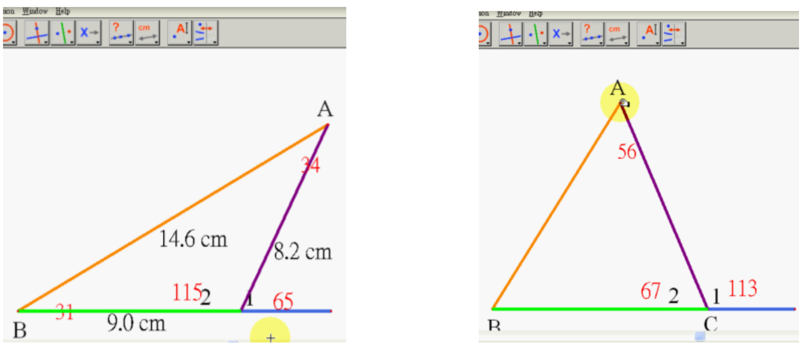


圖 9　左為原動態幾何環境提供標示所有測量值的附圖，右為只標示與命題有關測量值的附圖

第二種教學介入策略則是將原命題結論相關的數值（∠1 與∠2+∠A），顯示在動態幾何軟體圖形案例旁邊（如圖 10）。此策略是幫助學生聚焦呈現在圖形案例的旁邊，以便讓學生拖曳改變或產生圖形時，可以觀察到結論涉及的三個角度特定關係的變化。如，觀察的三角形為正三角形時，學生便可以看到到∠1 為 120°，同時觀察到∠2＋∠A 的角度和也是 120°。藉由此方式幫助學生建構符合原命題的正例。參與 5 位學生，只有 1 位學生可以自己找到正反例，另外 4 位則是在這兩種教學介入後，才得以找到正反例，完成臆測學習單的其他問題。

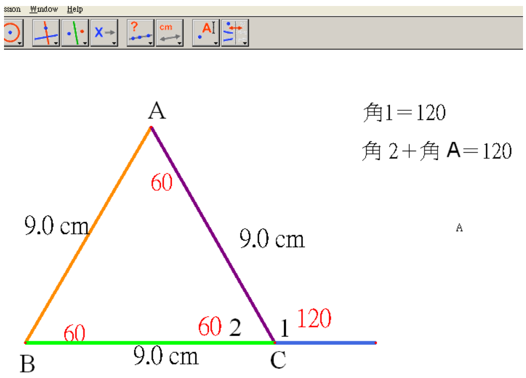


圖 10　測量值關係呈現在動態幾何軟體圖形旁邊

認知行為類型二：拖曳圖形而造出角度關係的困難

質性資料分析發現另外一個操作動態幾何軟體進行造例與臆測的困難，是學生無法有系統地拖曳幾何圖形，以觀察圖形角度或邊長關係的變化。學生在拖曳圖形時沒有意識到拖曳改變圖形特定點的同時亦改變圖形內各角度、邊長及其關係。以「外角定理」為例，當學生意圖拖曳三角形的頂點 A，建構出∠A＝∠B 等腰三角形時（如圖 11），學生會試圖拖曳頂點 A，改變頂點 A 的位置，觀察頂點改變對角度的影響。但學生拖曳幾次後發現，改變頂點 A 位置，會同時影響標示的角度數值都隨之改變。學生必須在拖曳頂點 A 的同時，觀察∠A 與∠B 的角度測量值的變化，才得以順利建構出意圖產生的圖形案例。

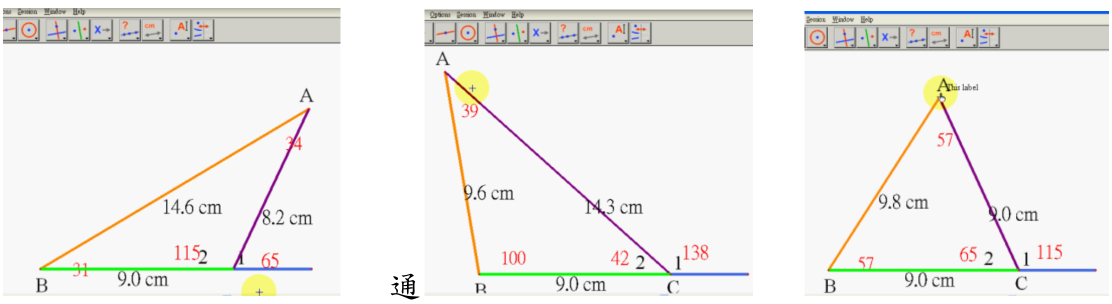


圖 11　動態幾何軟體下學生無法拖曳出預想的特例

如學生意圖拖曳產生的圖形特徵較為簡單，如拖曳一般三角形拖曳出直角三角形。其拖曳過程僅需關注圖形變化或單一角或邊的數值變化，其認知需求會比較低些。然而，若學生拖曳的目的是觀察出圖形角與邊之間的複雜關係，如，將任意三角形拖曳形成符合∠1＝∠2+∠A 關係的圖形時，認知需求就會增加許多。質性分析也發現，學生對於理解關係式與拖曳的移動軌跡作對應是有困難的，學生無法辨識軌跡移動所帶來的幾何意義。例如，當學生拖曳三角形頂點 A 點往右邊平移時，三角形內的∠B 會變小且∠C 會變大。相反的，如頂點 A 往左平移時，三角形內的∠B 會變大且∠C 會變小。若頂點 A 往上移動時，三角形內的∠A 會變小而∠B 和∠C 都會變大。質性分析發現，學生拖曳的認知焦點會放在上述的變化關係上。因為焦點關注於三角形三個角度的變化關係，學生反而沒有意識到學習單預期的臆測目標，亦即命題敘述一（外角定理）和命題敘述二：當 AB＝AC 時，∠1＝∠2+∠A。5 位學生都無法同時關注三角形拖曳軌跡變化與上述兩命題敘述之間的對應關係，順利的在動態幾何環境中臆測正確的幾何性質。

學生無目標的隨機拖曳，即為文獻提到的徘徊拖曳（wondering dragging），通常拖曳是沒有特定方向或規律可言的。因拖曳產生的圖形心像反而增加學生辨識拖曳對於角度改變影響的認知複雜度。學者 Arzarello 等人（2002）論述學生的各種不同拖曳表現時，強調拖曳本身的分類是根據知覺判斷或是幾何理論為基礎的差異性。另學者 Olivero 與 Robutti（2007）也強調測量值如何幫助學生形成臆測想法與後續澄清與論證。但這些研究者並未指出學生利用拖曳形成不同測量值之間的複雜關係式的歷程，拖曳本身引發的複雜性以及學生的認知困難，而這些都將影響學生後續臆測與論證的表現。

認知行為類型三：根據幾何性質進行造例

5 位學生中，其中有 2 位會根據特定圖形屬性或類型當為基礎，利用拖曳產出這些特定的圖形案例。這與學者 Arzarello 等人（2002）所提出引導拖曳類似，也就是學生會從給定圖形資訊聯結或猜測可能的圖形屬性或類型，然後再根據這些屬性來拖曳產出圖形，以符合學生意圖的圖形案例，不過，學生利用此方式拖曳產生圖形案例，並不一定保證就能夠順利產生符合原命題結論的正例，或是根據圖形屬性的差異化產出不同類型的案例。

以其中 1 位學生在動態幾何環境的拖曳行為分析為例，此學生首先拖曳產生的第一個圖形案例是等腰直角三角形（如圖 12）。這位學生建構的圖形案例內蘊三角形的兩個性質：直角與等腰。而這個圖形案例剛好是符合給定命題敘述的正例。雖然，這個正例對於後續修改給定錯誤命題並形成合理的正確臆測相當重要，但分析結果發現，這位學生並沒有系統地利用幾何性質來產生各種不同圖形案例。事後訪談時，學生說：

……拉出這個圖形（等腰直角三角形）只是剛好而已。我覺得這樣的例子不好找，我好像只是運氣好而已………我後來就沒有辦法找到其他像這樣的例子了

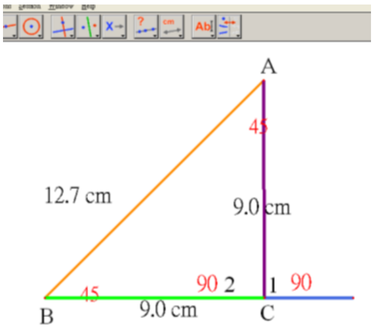


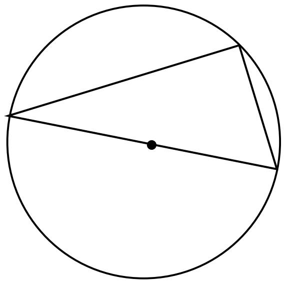
圖 12　學生利用直角三角形性質拖曳出的圖形案例

訪談資料顯示學生只是剛好聯想到等腰直角三角形，並以此造出一個例子。換句話說，這個學生即使利用某些幾何性質在動態幾何環境拖曳建構圖形案例，這幾何性質也只是圖形所引發的心像對應而已（Fischbein, 1993; Fischbein & Nachlieli, 1998）。這些幾何性質的心像通常都是視覺導向的心像表徵，因此，幾何物件旋轉或翻轉之後都可能影響影響學生對此性質心像的認知。此外，視覺建構的幾何心像通常都不可拆解，所以學生無法從幾何物件或心像中抽取出關鍵屬性，以關鍵屬性建構其他不同的幾何案例（鄭英豪，2010）。另一個學生無法造出更多等腰直角三角形案例的原因是這個造例需同時考慮兩個幾何性質：等腰和直角。學生必須理解每一個性質分別對應的概念空間及案例空間（Michener, 1978），同時找到交集。具體來說，當學生建構的直角三角形案例需符合等腰性質時，學生必須思考直角三角形的哪兩個邊可以是等腰。若從學生從等腰三角形來思考直角時，學生必須推論等大的兩底角有沒有可能是直角。若學生無法跳脫直角三角形的典型心像或者是等腰三角形的典型心像，學生就無法建構出各種不同的等腰直角三角形。

總結來說，外角定理提供了研究者瞭解學生在建構較複雜角度關係時，操作動態幾何軟體以建構案例、形成臆測的認知行為及可能的學習困難。

（二）學生臆測單一定量關係式的幾何性質的認知行為分析

本研究另一學習單設計是在動態幾何環境中臆測單一定量的幾何性質。以三角形外接圓學習單為例。此份學習單的工作任務包括：



- 拖曳給定三角形頂點獲得新三角形，依據三角形各邊長測量值，以最長邊為直徑，使用造圓工具鈕造圓，觀察圓與三角形的關係，判斷圓是否通過三角形的第三個頂點。
- 記錄所造三角形的邊長、角度以及圓與三角形關係在表格內，觀察表格內符合命題的三角形邊長與角度值，猜測其共同的特殊性質，也就是「直角」三角形。

這份學習單剛好與外角定理相反，學生在拖曳動態幾何圖形時，可以藉助視覺的幫助來產生正例（Hegarty, 2004）。學生不需要像外角定理學習單一樣推論角度之間的關係。從訪談的案例中，研究者區分幾種不同學生的拖曳圖形的認知表現，而這些認知表現背後存在著學生的在拖曳圖形中可能面臨的困難與挑戰。

認知行為類型一：隨意拖曳產生案例

學生在三角形外接圓學習單利用拖曳產生圖形案例的方式與外角定理學習單一樣，在動態幾何環境下，容易採取隨意拖曳圖形產生圖形案例。對學生來說，拖曳並沒有特定目標，只是為了產生圖形案例。學生拖曳過程通常相當快速，且通常獲得的是反例。在外角定理學習單時，學生並不清楚建構的圖形案例是正例還是反例。但在三角形外接圓活動時，完成這份學習單的 6 位學生均可以從觀察動態幾何軟體所呈現的圖形案例，得知建構的案例是反例。因此，隨機的拖曳幫助學生瞭解並非所有三角形圖形案例都是符合原命題結論，亦即並非所有三角形都剛好三點會在圓上（如圖 13）。學生可以藉由視覺判斷得知三角形的其中一個頂點並不在圓上。但即使學生能隨意拖曳產生圖形案例，卻無助於產出符合原命題結論的正例，就因為如此，學生便沒有機會去進行利用程序性反駁模式所產出的學生區辨正例與反例的認知活動。

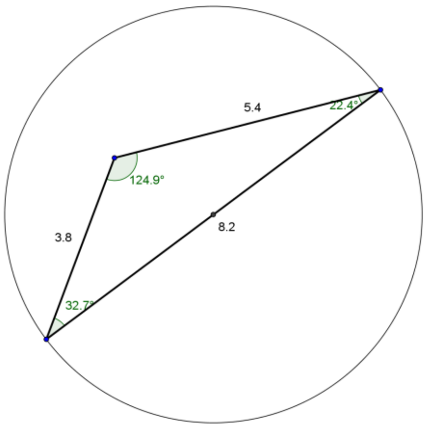


圖 13　學生拖曳後形成三角形與外接圓所形成的反例

認知行為類型二：拖曳調整反例成正例

研究者預設學生先利用拖曳產生特定的三角形案例，再使用造圓按鍵產出圓並判斷關係後，如圖 13，便不再使用該圖形案例，然而，此類型的學生並非依照研究者預設方式，學生會繼續使用該圖形案例，再利用拖曳改變不在圓直徑上的三角形第三個頂點，藉此將不符合原命題的反例調整成為符合命題的正例，因此，學生有了這樣的經驗後，利用拖曳產生正例的意圖並不是如何產出特定三角形，而是聚焦在利用拖曳調整圖形關係成為正例。例如，學生利用拖曳給定三角形而產生一個鈍角三角形（拖曳產出特定三角形），並以最長邊為直徑造圓（如圖 13），但當學生觀察到圓並沒有通過三角形的第三頂點時，接著使用拖曳將第三頂點移動到圓上（拖曳調整圖形關係成正例）（如圖 14）。研究者發現這樣的學生，其拖曳的意圖在於將圖形關係調整成符合命題的正例，然而是否符合命題的判斷卻是藉由視覺，因此，視覺判斷的誤差容許程度將導致測量數值亦有誤差可能（Olivero & Robutti, 2007），如下圖 14，三角形的第三頂點被學生認為在圓上，不過，而定點的內角測量值顯示為 90.9 度，這誤差卻導致學生無法從測量值的記錄表中觀察出「直角」的特殊屬性。

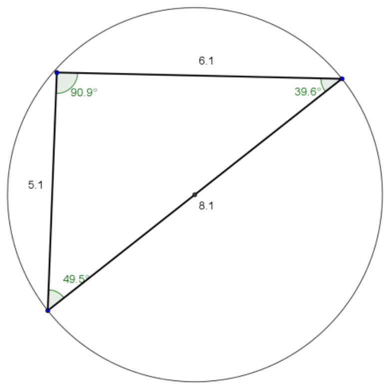


圖 14　學生意圖調整反例成正例

認知行為類型三：拖曳成想像正例

就這類的學生來說，利用軟體拖曳圖形的意圖是為了產生合乎原命題結論的正例，因此，學生利用拖曳產生特定的圖形案例後，並不會立即將其視為圖形案例，這與認知類型一的學生是不同的（立即當案例），學生會在經由想像來判斷是否符合圖形關係，也就是說，學生會先想像最長邊為直徑造出圓的樣子以及該圓是否通過三角形的第三個頂點，因此，這類型的學生經常需要多次的「拖曳造例-想像判斷」行為後，才會將拖曳產生的圖形案例當成要進行造圓檢驗的案例。然而，學生想像的圖形關係（圓通過三角形三個頂點）通常都沒有確實產生，而且沒有如同認知類型二的學生一樣，再利用拖曳調整圖形案例成為符合圖形關係的正例，因此，這類型學生利用拖曳所產生的圖形案例亦缺乏正例，就與認知類型一的學生相同，沒有機會進行程序性反駁中區辨正反例的認知活動。

認知行為類型四：拖曳成特定屬性的案例

就這類的學生來說，學生在利用拖曳產生圖形案例前，就會先觀察正例的圖形、正例的測量值或圖形分類的特徵，臆測正例可能具有的特定屬性（Cañadas, et al., 2007），並將圖形拖曳成具有此屬性的圖形案例，再用造圓產生圖形關係來檢驗猜測是否正確，這時學生拖曳產生圖形案例所關注的便是三角形的特定屬性，亦即具有特定邊長關係或角度測量值的三角形。例如，學生從學習單給定命題所附加的圖形案例（圓通過三角形三頂點的圖形）觀察該三角形的特徵，或觀察自己隨意拖曳產出的正例記錄的測量值，或是因三角形名稱欄位所引動的三角形分類觀點等，進而猜測出三角形須具備「直角」的屬性才是正例，因此，學生利用拖曳產生圖形案例時，會關注三角形的特定內角角度值的變化，使其成為具有內角 90 度的三角形。不過，當學生利用已經產出的圖形正例猜測出某個符合正例的特定屬性時，便容易局限在此屬性下而無法轉向其他屬性，例如，有位學生產出的正例是等腰直角三角形，他從記錄表的邊長與角度測量值發現此三角形的某個兩邊長相等，因此，猜測「等腰」是正例具備的屬性，其後並以屬性拖曳產生圖形案例，然而，學生仍因執著於此邊長特徵而無法轉向角度特徵，即使造出許多不符合命題結論的反例。另外，學生利用拖曳產生特定三角形案例時，由於拖曳特定頂點會造成三角形兩個邊長測量值的同時變動，而且變動的可能性包含兩邊同時變長、同時變短或一邊變長與一邊變短，當然，拖曳特定頂點也會造成三角形三個內角測量值的同時變動，而且變動的可能性包含拖曳點的角度增加與其他兩角度減少，或是拖曳頂的角度減少而其他兩角度增加，因此，當學生無法同時掌握兩個邊長或三角角度的變化關係時，就無法拖曳出正三角形，也就無法拖曳出所想要的「正三角形」。

二、藉由動態幾何軟體與圖表鷹架下的臆測類型

學者 Cañadas 等人（2007）提出五種臆測類型，包括有限離散案例歸納、動態案例歸納、類比、回溯、知覺經驗所得臆測。其中，學者 Cañadas 等人說明動態案例歸納的特質是學生從無限、連續的動態案例觀察中臆測數學。動態幾何軟體是引發此種臆測類型的重要環境。本研究則是探究當學生無法在動態幾何環境中，直接臆測動態案例背後的數學時，藉由將動態幾何環境當成「例子產生器」的觀點，結合表格使用之下，學生形成哪些臆測策略。整合上述學生在動態幾何環境中的認知行為及學習困難，本研究提出學生三種不同臆測策略的類型，分別為有限隨機離散案例臆測、系統性調整案例臆測及動態性調整案例臆測。

臆測歷程一：有限隨機離散案例歸納

15 位學生中，有 4 位學生無法臆測出正確的幾何命題。進一步分析其主要原因則是這些學生只仰賴表格上紀錄的幾何圖形案例對應的測量值，並試圖以這些測量值來進行臆測。而由於

這些測量值來自於徘徊拖曳（wondering dragging），所以幾何圖形案例與案例所帶來的測量值也是隨機的。因此，不一定能夠同時找到符合命題的正例與反例。有的時候也會找到非例。正如前述的分析中，案例的屬性與幾何命題本身有重要的關係。如：三角形外接圓，學生容易找到的是反例，而非正例。若學生無法找到正例，學生就無法臆測不同正例之間的不變性，進而以此不變性來修改給定的錯誤命題。

臆測歷程二：系統性調整案例臆測

系統性調整案例臆測指的是學生先隨機建構幾何圖形案例，然後將圖形案例的測量值記錄在圖表中，藉由圖表的觀測，慢慢形成臆測想法。然後學生再度回到動態幾何環境中檢測自己的臆測想法。學生在動態幾何環境中會改變測量值（如圖形的邊長或角度），並系統性的觀測圖形的變化歷程直到學生有足夠的訊息能夠形成新的命題想法。通常學生能夠建構出正例與反例，並以此來臆測正確的幾何命題。15 位學生中，有 6 位學生是以此策略臆測正確命題的。

臆測歷程三：動態性調整案例臆測

剩餘的 5 位學生則是藉由在動態幾何環境中拖曳給定的圖形歷程中形成自己的臆測。這些學生會來來回回拖曳圖形的某一個點。由拖曳過程中逐漸形成自己的臆測想法。對這些學生來說，他們會慢慢的拖曳某一個點直到某一個位置以觀察測量值之間的對應關係。同樣的，他們也會建構反例來再次驗證自己的臆測是否正確。此歷程有助於學生對於「若且唯若」（if and only if）與命題判斷之間的理解。

伍、結論與討論

本研究藉由文獻分析與支持提出動態幾何軟體的新論述，將其視為「例子產生器」來幫助學生幾何學習。研究以程序性反駁模式為中介理論架構，選擇錯誤命題為起點，藉由動態幾何環境中拖曳認知行為產生不同的圖形案例，讓學生得以區辨正反例，尋找其共通性，並進一步臆測正確的幾何性質。利用質性分析為主，量化資料為輔，深入探究國中生在動態幾何環境中的認知行為以及學習困難。

首先本研究呈現學生在動態幾何環境下拖曳圖形、形成臆測想法的不同認知行為及發生的學習困難。參與學生都能在動態幾何環境中拖曳形成幾何圖形案例，然而學生利用拖曳產生圖形有不同的認知行為和對應的學習困難，其亦影響後續形成臆測的策略。這些結果不同於紙筆情境下學生臆測幾何性質的表現，可以提供八、九年級融入動態幾何軟體進行幾何教學的參考，特別是將動態幾何軟體視為例子產生器的教學設計。其次，學生具備良好的幾何物件分類系統（de Villiers, 1994）並能夠用來產生不同類型的案例是相當重要的：儘管學生意圖利用軟體產生符合命題的正例，而且有些學生能夠使用某些特徵產生特定類型案例，如等腰與直角的屬性，

但是，如果學生不清楚那些特徵對應的分類系統，僅能固著該特徵並產生特定圖形案例，便無法產出其他類別案例進而探索出符合命題的正例類型，相反的，如果學生清楚特徵對應的分類系統，就有機會產出不同類別案例進而獲得正例與反例，有助於學生對於該命題的瞭解及後續臆測歷程的進行。因此，培養學生有系統的幾何物件分類概念，並能夠用來產出不同類別案例，在教學設計中就顯得相當重要。這也是國中小幾何課程設計與教學必須關注的重點之一。

另外，學生對圖形進行分解（decomposition）和重組（recomposition）的操作有助於他們察覺圖形中蘊含的特徵或關係（Gal & Linchevski, 2010）：儘管學生會利用軟體產生圖形案例並得到其測量值，然而多數學生無法聚焦在數個特定測量值的可能關係上，因此，研究者就某些個案研究會改變軟體顯示的測量資訊，協助學生聚焦在拖曳產生圖形的特定角度或邊長測量值上，進而探索這些測量值的可能關係。這樣的介入確實成功引導學生形成可能關係的臆測，而研究者猜測此項介入能夠成功的主要原因是，學生有機會對自己拖曳產生的圖形案例，進行有目標的分解與重構的認知操作，進而激發（activate）學生對該圖形案例有關的幾何特徵或關係的提取與應用，不過，此項猜測仍需要再檢驗。

研究同時顯示學生能使用一次拖曳產生一系列的圖形案例，並不意味著學生能夠同時察覺不符合與符合命題結論的反例與正例：儘管學生可以利用拖曳產生一系列的圖形案例，然而，這些動態的圖形案例不見得都可以成為學生檢驗命題的案例，有些情形可以，特別是命題結論是可以視覺化的圖形關係，例如，圓通過三角形三個頂點，學生拖曳產生一系列圖形案例時，便可從視覺化的圖形關係立即判斷是否符合命題結論；但有些情形不可以，特別是命題結論是不容易視覺化的測量值關係，例如，特定三個角的代數關係式，學生拖曳產生一系列圖形案例時，這些角度測量值隨之快速變動且幾乎都不符合該代數關係式，若不是靜止狀態，亦即有特定的測量值顯示，就無法判斷代數關係是否成立，因此，學生無法就一次拖曳產生正例與反例，需要累積出多個靜止案例後，才能夠從這些案例的數值資料進行關係的探索。

學者 Healy 與 Hoyles（2001）指出科技媒體融入教學的可能性與限制性。本研究進一步提出學生利用動態幾何軟體產生的圖形案例與學生原本意圖產生的案例之間會仍有落差；儘管學生有動態幾何軟體輔助來產生圖形案例，然而，他們仍無法利用軟體產出意圖中的圖形案例，造成認知想像的與實際產出的圖形落差原因主要來自於：（1）拖曳動作的限制，學生可能無法確實地拖曳圖形頂點到特定的位置或特定的數值上，例如，學生想要將三角形第三頂點拖曳到特定的圓上，但無法精確地協調手部的拖曳動作達到特定的位置；（2）視覺判斷的限制，學生如可能無法精確地看出圖形的特定關係，例如，學生想要判斷產出的圓是否通過三角形三頂點時，因為軟體預設圓與點均有寬度，再加上相對的螢幕解析程度，雖然不重疊的兩者，卻在某個視覺容許的範圍內便被看成是重合；（3）測量值的限制，學生可能誤以為軟體呈現的測量值

是精確無誤的值，例如，學生利用拖曳產生三角形案例，三角形內角值分別為 68.6, 47, 64.5 度，學生通常相信這些數值，並沒有察覺內角總和超過 180 度，以及認識到這是因為軟體以四捨五入取到小數第一位所造成的。當然，學生拖曳產生圖形案例時，這些限制會交互持續地出現，若學生沒有察覺這些限制及相互帶來的影響時，就光是判別案例是否符合命題結論時便會產生問題，當然就會影響到後續形成臆測的認知表現。

不同於學者 Cañadas 等人（2007）提出的五種臆測認知歷程，研究者從學生在動態幾何環境下的臆測歷程區分三種認知路徑，包括有限隨機離散案例歸納、系統性調整案例臆測及動態性調整案例臆測。研究結果論述提供將動態幾何軟體視為「例子產生器」，並融入案例記錄表格教學設計與課室教學互動的重要依據。

目前臺灣國中階段的幾何課程規劃在八和九年級。八年級主要教學目的之一是培養學生能理解幾何性質，並利用性質進行幾何推理，銜接幾何論證。九年級則是進一步預期學生能具備建構幾何證明的素養能力。而本研究以七年級學生為研究對象，提出尚未進入八年級幾何課程可能面臨的學習困難，尤其強調在臆測、圖形分解與重組、動態幾何軟體使用可能產生的學習限制上，具體描述這些學習困難。這些觀點可以提供八、九年級進行幾何教學，尤其採用動態幾何軟體為教學媒介的參考依據。其中，無論是八年級幾何推理與論證初始學習階段還是九年級正式進入論證課程，其學習的根基之一是學生必須對架基幾何論證基礎的幾何性質必須有相當的瞭解。本研究清楚描述幾何性質概念的建構，尤其藉由動態幾何環境中，學生如何能夠正確的建構幾何性質。雖然，本研究提出使用動態幾何進行教學可能面臨的教學限制，但其軟體工具提供學生由特定性質衍生的多樣圖形，建構學生思考同一性質下，圖形的多樣性，以及此例子空間的擴張對後續幾何學習的重要性，具有實質上的意涵。

在教學介入方面，原本研究者只界定於幫助學生順利建構正反案例，以觀察案例之間的共通性，得以順利進行幾何臆測。在研究的目標及分析架構下，描述學生的認知行為以及這些教學介入對於學生在動態幾何環境中進行臆測的影響。學生如何造例、造例的困難與學生形成臆測想法則是可進一步研究探究的主題之一。

參考文獻

林福來（2010）。數學臆測活動的設計、教學與評量：總計畫。載於楊德清（主編），**行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告-數學教育學門專題研究成果討論會**（B 冊，89－100 頁）。嘉義：國立嘉義大學。【Lin, Fou-Lai (2010). Designing, teaching, and assessing mathematical conjecturing activity: Leading project. In Der-Ching Yang (Ed.), *Conference proceedings for research reports in mathematics education discipline: National Science Council research project report* (Volume B, pp. 89-100). Chiayi: National Chiayi University. (in Chinese)】

陳英娥、林福來（1998）。數學臆測的思維模式。**科學教育學刊**，**6**（2），192-218。【Chen, Ing-Er, & Lin, Fou-Lai (1998). A thinking model of mathematical conjecturing. *Chinese Journal of Science Education*, *6*(2), 192-218. (in Chinese)】

鄭英豪（2010）。數學臆測與證明學習連續性的教與學研究。載於林福來（主編），**數學臆測活動的設計、教學與評量**（27-52 頁）。臺北：國立臺灣師範大學。【Cheng, Ying-Hao (2010). Coherence of mathematical conjecturing and proving: A study of teaching and learning. In Fou-Lai Lin (Ed.), *Designing, teaching, and assessing mathematical conjecturing activity* (pp. 27-52). Taipei: National Taiwan Normal Univeristy. (in Chinese)】

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A congnitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *34*(3), 66-72. doi: 10.1007/BF02655708

Baccaglini-Frank, A., Mariotti, M. A., & Antonini, S. (2009). Different perceptions of invariants and generality of proof in dynamic geometry. In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, H. (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp.89-96). Thessaloniki, Greece: PME.

Ball, D., & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principals and standards for school mathematics* (pp. 27-44). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Boero, P. (2006). Habermas' theory of rationality as a comprehensive frame for conjecturing and proving in school. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M., & Stehlíková, N. (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp.185-192). Prague, Czech Republic: PME.

Cañadas, M. C., Deulofeu, J., Figueiras, L., Reid, D., & Yevdokimov, O. (2007). The conjecturing process: Perspectives in theory and implications in practice. *Journal of Teaching and Learning*, *5*(1), 55-72.

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(4), 359-387. doi: 10.1007/BF01273371

Cheng, Y. H., & Lin, F. L. (2006). Using reading and coloring to enhance incomplete prover's performance in geometry proof. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M., & Stehlíková, N. (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp.289-296). Prague, Czech Republic: PME.

Cheng, Y. H., & Lin, F. L. (2007). The effectiveness and limitation of reading and coloring strategy in learning geometry proof. In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 113-120). Seoul, Korea: PME.

Cheng, Y. H., & Lin, F. L. (2008). A study on left behind students for enhancing their competence of geometry argumentation. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and PME-NA XXX* (Vol. 2, pp. 305-312). Morelia, Mexico: PME.

de Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, *14*(1), 11-18.

de Villiers, M. (1999). A sketchpad discovery involving areas of inscribed polygons. *Mathematics in School*, *28*(2), 18-21.

de Villiers, M. (2004). Using dynamic geometry to expand mathematics teachers' understanding of proof. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *35*(5), 703-724. doi: 10.1080/0020739042000232556

Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 142-157). Berlin, Germany: Springer. doi: 10.1007/978-3-642-57771-0_10

Erez, M. M., & Yerushalmy, M. (2006). If you can turn a rectangle into a square, you can turn a square into a rectangle..." Young students experience the dragging tool. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *11*(3), 271-299. doi: 10.1007/s10758-006-9106-7

Erickson, F. (2006). Definition and analysis of data from videotape: Some research procedures and their rationales. In J. L. Green, G. Camilli, & P. B. Ellmore (Eds.), *Handbook of complimentary methods in education research* (pp. 177-191). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(2), 139-162. doi: 10.1007/BF01273689

Fischbein, E., & Nachlieli, T. (1998). Concepts and figures in geometrical reasoning. *International Journal of Science Education*, *20*(10), 1193-1211. doi: 10.1080/0950069980201003

Gal, H., & Linchevski, L. (2010). To see or not to see: Analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational Studies in Mathematics*, *74*(2), 163-183. doi: 10.1007/s10649-010-9232-y

González, G., & Herbst, P. (2009). Students' conceptions of congruency through the use of dynamic geometry software. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *14*(2), 153-182. doi: 10.1007/s10758-009-9152-z

Greeno, J. G. (1980). Some examples of cognitive task analysis with instructional implications. In R. E. Snow, P. Federico, & W. E. Montague (Eds.), *Aptitude, learning, and instruction, Vol. 2: Cognitive process analyses of learning and problem solving* (pp. 1-21). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Haspekian, M. (2005). An "instrumental approach" to study the integration of a computer tool into mathematic teaching: The case of spreadsheets. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *10*(2), 109-141. doi: 10.1007/s10758-005-0395-z

Healy, L., & Hoyles, C. (2001). Software tools for geometrical problem solving: Potential and pitfalls. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *6*(3), 235-256. doi: 10.1023/A:1013305627916

Hegarty, M. (2004). Diagrams in the mind and in the world: Relations between internal and external visualizations. In A. Blackwell, K. Marriott, & A. Shimojima (Eds.), *Diagrammatic representation and inference: Third international conference, diagrams 2004, Cambridge, UK, March 2004 proceedings* (pp. 1-13). Berlin, Germany: Springer-Verlag. doi: 10.1007/978-3-540-25931-2_1

Hsu, H. Y. (2008). *Learning opportunity of reasoning: The interplay between gestures and diagrammatic properties.* Paper presented at the 11th International Congress on Mathematical Education, Monterrey, Mexico.

Hsu, H. Y. (2010). *The study of Taiwanese students' experiences with geometric calculation with number (GCN) and their performance on GCN and geometric proof (GP).* (Unpublished doctoral dissertation). University of Michigan, Ann Arbor, MI.

Klaczynski, P. A., & Narasimham, G. (1998). Representations as mediators of adolescent deductive reasoning. *Developmental Psychology*, *34*(5), 865-881. doi: 10.1037/0012-1649.34.5.865

Koedinger, K. R., & Anderson, J. R. (1990). Abstract planning and perceptual chunks: Elements of expertise in geometry. *Cognitive Science*, *14*(4), 511-550. doi: 10.1207/s15516709cog1404_2

Koehler, M., & Mishra, P. (2009). What is technological pedagogical content knowledge? *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, *9*(1), 60-70.

Laborde, C. (2000). Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics*, *44*, 151-161. doi: 10.1023/A:1012793121648

Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *6*(3), 283-317. doi: 10.1023/A:1013309728825

Laborde, C. (2005). The hidden role of diagrams in students' construction of meaning in geometry. In J. Kilpatrick, C. Hoyles, O. Skovsmose, & P. Valero (Eds.), *Meaning in mathematics education* (pp. 159-179). New York, NY: Springer. doi: 10.1007/0-387-24040-3_11

Lakatos, I. (1976). *Proof and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge, UK: The Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9781139171472

Leung, A. (2008). Dragging in a dynamic geometry environment through the lens of variation. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *13*(2), 135-157. doi: 10.1007/s10758-008-9130-x

Lin, F. L., & Wu Yu, J. Y. (2005). *False proposition - As a means for making conjectures in mathematics classrooms.* Paper presented at the Invited speech in Asian Mathematical Conference, Singapore.

Mariotti, M. A. (2001). Justifying and proving in the Cabri environment. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *6*(3), 257-281. doi: 10.1023/A:1013357611987

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically.* London, UK: Addison-Wesley Pub. Co.

Merriam, S. B. (1998). *Qualitative research and case study applications in education*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Michener, E. R. (1978). Understanding understanding mathematics. *Cognitive Science*, *2*, 361-383. doi: 10.1016/S0364-0213(78)80052-4

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Olivero, F., & Robutti, O. (2007). Measuring in dynamic geometry environments as a tool for conjecturing and proving. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *12*(2), 135-156. doi: 10.1007/s10758-007-9115-1

Reid, D. (2002). Conjectures and refutations in grade 5 mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(1), 5-29. doi: 10.2307/749867

Resnick, L. B. (1975). *Task analysis in instructional design: Some cases from mathematics*. Pittsburgh, PA: Learning Research and Development Center. Retrieved from ERIC database. (ED 115486)

Ruthven, K., Laborde, C., Leach, J., & Tiberghien, A. (2009). Design tools in didactical research: Instrumenting the epistemological and cognitive aspects of the design of teaching sequences. *Educational Researcher*, *38*(5), 329-342. doi: 10.3102/0013189X09338513

Selden, J., & Selden, A. (1995). Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics*, *29*(2), 123-151. doi: 10.1007/BF01274210

Stein, M. K., Grover, B. W., & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal*, *33*(2), 455-488. doi: 10.3102/00028312033002455

Strauss, A., & Corbin, J. (1998). *Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 151-169. doi: 10.1007/BF00305619

Wu Yu, J. Y., Hsu, H. Y., Lin, C. J., & Chin, E. C. (2009). *Validating a conditional statement: The role of empirical examples.* In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, H. (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, p. 492). Thesalloniki, Greece: PME.

Yerushalmy, M., & Chazan, D. (1990). Overcoming visual obstacles with the aid of the Supposer. *Educational Studies in Mathematics, 21*(3), 199-219. doi: 10.1007/BF00305090

連文宏、洪儷瑜（2017）。
數學學障與數學合併閱讀障礙國中生計算能力表現之特徵及其差異分析。
臺灣數學教育期刊，4（1），35-62。
doi: 10.6278/tjme.20170317.002

數學學障與數學合併閱讀障礙國中生計算能力表現之特徵及其差異分析

連文宏[1,2]　洪儷瑜[2,3]
[1]臺北市立大理高級中學
[2]國立臺灣師範大學特殊教育系
[3]國家教育研究院

數感和基本計算一直被認為是數學學障的核心缺陷，國中的數學學障學生在小學接受補救教學之後，其在基本數學技巧上表現是否可以被補救？本研究擬以 4 位國中數學學障生，探討單純數學學障與數學合併閱讀障礙國中生在個位數、多位數計算及其對應之文字題解題能力的表現特徵，並比較彼此的差異。以單純數學學障和數學合併閱讀障礙各 2 人為研究對象，實施二套計時性質之標準化數學診斷測驗，據以進行計算正確性與計算速度之量化分析，在施測過程中蒐集個案的計算策略與錯誤類型資料，據以進行個位數、多位數計算與文字題解題能力發展之質性分析。研究結果發現，個位數加法和減法數學事實自動化提取的困難，是數學學障的核心能力缺陷，此特徵反映在個位數計算速度的緩慢，並不影響其正確性，計算策略分析顯示兩組學生的數數策略發展有所差異。多位數計算能力方面，不管是否合併閱讀障礙，數學學障主要的核心缺陷仍為數學事實提取困難，均呈現計算速度緩慢的問題，遇到大數字或更複雜的題型時，數學合併閱讀障礙的學生，其計算速度更為緩慢，也開始出現計算正確性的問題。加法和減法文字題解題能力方面，單純數學學障的解題速度不受影響，偶而出現運算符號錯誤，合併閱讀障礙後，其計算正確性與計算速度則明顯受到影響，據此，文字題解題能力可能不是數學學障的核心能力缺陷。

關鍵詞：計算能力、數學事實提取能力、數學學障、閱讀障礙

通訊作者：洪儷瑜，e-mail：t14010@ntnu.edu.tw
收稿：2016 年 5 月 31 日；
接受刊登：2017 年 3 月 17 日。

Lien, W. H., & Hung, L. Y. (2017).
Profile of arithmetic knowledge of junior high school students with mathematics learning disabilities with/without reading disabilities.
Taiwan Journal of Mathematics Education, *4*(1), 35-62.
doi: 10.6278/tjme.20170317.002

Profile of Arithmetic Knowledge of Junior High School Students with Mathematics Learning Disabilities with/without Reading Disabilities

Wen-Hung Lien [1,2]　　Li-Yu Hung [2,3]
[1] Taipei Municipal Dali High School
[2] Department of Special Education, National Taiwan Normal University
[3] National Academy for Educational Research

Number sense and arithmetic are considered the core deficit of mathematics learning disabilities (MLD). Can these basic skills of the junior high school students with MLD be remediated after receiving remediation from the elementary school to junior high school? This study aims to investigate the single- and multi-digit arithmetical abilities of junior-high-school students with mathematics learning disabilities (MLD-only) and those comorbid reading disabilities (MLD-RD). The subjects, two MLD-only and two MLD-RD students, were administered two standardized and timed diagnostic tests, and with observations made and interviews conducted during or after the test. Both quantitative and qualitative data were analyzed, including the arithmetic accuracy, speed, strategies and error-patterns. The results revealed that single-digit addition and subtraction and math-fact retrieval are the core deficits in students with MLD. The deficit in math-fact retrieval affects their arithmetical speed. An analysis of their arithmetical strategies showed that development of counting strategies differed between MLD-only and MLD-RD students. In multi-digit arithmetic, MLD students, whether comorbid RD or not, performed poorly with low arithmetical speed, especially when encountering problems with large numbers and complex procedures for calculations. Furthermore, the arithmetical speed of MLD-RD students was found to be slower than that of MLD-only students. When solving word problems, the speed of MLD students was not affected, but among MLD comorbid RD students, speed was significantly affected. Therefore, word problems are not considered the core deficit of students with MLD.

Keywords: arithmetic, math fact retrieval, mathematics learning disabilities, reading disabilities

Corresponding author：Li-Yu Hung，e-mail：t14010@ntnu.edu.tw
Received：31 May 2016;
Accepted：17 March 2017.

壹、緒論

數學學障（mathematical learning disability，簡稱 MLD）是學習障礙的亞型之一，相較於閱讀障礙（reading disability，簡稱 RD）研究發展之豐富，MLD 研究相對不足（Gersten, Jordan, & Flojo, 2005; Jordan & Hanich, 2003）。往年，國內 MLD 之鑑定多採學習潛能和數學表現之間的差距標準（林秀柔，1989；蕭金土，1995），因此鑑定工具就需要標準化數學成就測驗作為數學表現之判斷依據，再與智力測驗所測得之學習潛能進行差距評估。直到民國 89 年柯華葳以核心能力的構念編製《基礎數學概念評量》，才把鑑定 MLD 之重點轉到核心能力之缺陷（柯華葳，2005）。這個改變與美國精神醫學會（American Psychiatry Association）的心理疾患統計診斷手冊（The Diagnostic and Statistical Manual of Mental Disorders，簡稱 DSM）演變一致，2013 年新出版的 DSM-5 不再採用 2004 年 DSM-IV 及更早版本強調能力與成就之差距標準，改以核心缺陷的特徵作為 MLD 之診斷標準，並提出兩種困難類型，一是難以學會數感、數學事實提取或計算，此與傳統醫學名稱「失算症」或「計算障礙」（dyscalculia）之概念接近（Butterworth, 2005; Chiappe, 2005）；另一種是難以進行數學推理，亦即運用數學概念、數學事實和計算程序進行推理與解題出現困難，前後版本之標準如表 1。

綜觀國外文獻以 MLD 作為研究對象時，在操作上多由標準化個位數和多位數計算能力測驗之表現所界定（Geary, Hoard, Byrd-Craven, & DeSoto, 2004；Geary, Hoard, Byrd-Craven, Nugent, & Numtee, 2007; Jordan, Hanich, & Kaplan, 2003；Raghubar, et al., 2009），而研究指出 MLD 和 RD 會有共病情形，所謂共病是指個體同時符合兩種以上障礙診斷或疾病之情形，且二者沒有因果關係（Noyes, 2001; Wittchen, 1996）。MLD 合併 RD 的出現率從 2.3％到 7.6％之間（Badian, 1999; Dirks, Spyer, van Lieshout, & de Sonneville, 2008; Lewis, Hitch, & Walker, 1994），而兩者的共病率則高達 57％至 64％之間，視 MLD 的診斷標準而定（Barbaresi, Katusic, Colligan, Weaver, & Jacobsen, 2005）。很多探討 MLD 的研究會採用是否合併 RD 的共病設計，目的在於釐清哪些數學表現困難的特徵是 MLD 的核心缺陷（當此困難特徵在兩者均出現時），合併 RD 後是否加重此核心缺陷的嚴重程度，以及哪些困難特徵是合併 RD 後才浮現，據以推論該困難特徵非 MLD 的核心缺陷。

據此，近年的研究多關注單純 MLD（以下簡稱 MLD-only）和 MLD 合併 RD（以下簡稱 MLD-RD）之不同亞型，彼此在計算能力表現的特徵與差異，計算能力的範疇包括個位數計算，又稱數學事實提取能力（math facts retrieval）（Geary, et al., 2004; Jordan, et al., 2003）、多位數計算能力（Raghubar, et al., 2009）和文字題解題能力（Fuchs & Fuchs, 2002; Hanich, Jordan, Kaplan, & Dick, 2001; Jordan & Hanich, 2000; Jordan & Montani, 1997; Pellegrino & Goldman, 1987）等。

然而，國外文獻在計算能力的研究議題上多是分開探討，而且研究對象也集中在小學階段且尚未經過補救教學者，因此，他們在小學階段經過身心障礙資源班的數學科小組補救教學後，到了國中階段，彼此在計算能力上的整體表現特徵及其差異為何，是一個值得探討的議題。

綜合上述，本研究目的為以國小階段經過數學科補救教學迄今之 MLD-only 和 MLD-RD 國中生為對象進行個案研究，探討 MLD-only 和 MLD-RD 這兩種不同亞型之 MLD 個案在個位數計算、多位數計算及文字題解題能力之表現特徵及彼此的差異。

表 1

DSM-IV 和 DSM-5 數學障礙之診斷標準

版本	標準內容
DSM-IV（American Psychiatric Association, 2004）	A：在標準化個人測驗中，數學能力顯著低於預期應有程度。此預期依據其生理年齡、測量得到的智能，以及與其年齡相稱之教育而判定。 B：準則 A 之障礙顯著妨害其學業成就或日常生活需要閱讀技能的活動。 C：若有任何感覺能力缺陷，此數學困難也遠超過此缺陷通常影響所及。
DSM-5（American Psychiatric Association, 2013）	A：學習學業技能有困難，出現如下任一症狀超過六個月，即使對這些困難有提供介入： 5. 難以學會數感、數學事實或計算 6. 難以數學推理，利用數學概念、事實、程序去解決問題[註一] B：這些困難顯著低於其就讀年級所有之水準，且顯著影響其學校學業和工作相關活動的表現。

註一：僅列數學學習障礙，未列出的 1-4 是閱讀和書寫障礙。

貳、文獻探討

為支持本研究目的之重要概念，以下依據數學計算有關的數學事實自動化提取、多位數計算和文字題等能力發展之文獻，與其在數學學障學生相關研究結果分述如下。

一、數學事實自動化提取能力之發展

數學事實自動化提取能力是指，學生能自動化地將個位數計算的答案直接從記憶庫中提取出來，要達到如此流暢的計算能力，不少文獻已指出大致可分為三個發展階段，第一階段稱為數數階段，或稱為建立數學事實的程序性知識（procedural knowledge）階段；第二階段則是將已知的數學事實與未知的數學事實建立關係，據以記住未知數學事實的階段；第三階段則是直接提取數學事實，或是知道數學事實的陳述性知識（declarative knowledge）階段（Ando & Ikeda, 1971; Ashlock, 1971; Bezuk & Cegelka, 1995; Carnine & Stein, 1981; Garnett, 1992; Garnett &

Fleischner, 1983）。Hopkins 與 Lawson（2002）則進一步將數數階段再加以細分成二個階段，兒童能夠直接提取數學事實之前，他必須先習得數字的概念知識，並建構出越來越精緻而有效率的數數策略，據此指出數數策略的發展是從「全部數（counting-all）」進展到「數上去（counting-on）」策略，其中「全部數策略」又細分為長數數加總（long-sum）和數數加總（sum-counting）程序等二個發展階段，這二者均是從 1 開始數，只是前者在「加數」從 1 數一次，「被加數」也從 1 數一次，最後二個數字合起來從 1 再數一次，而後者是二個數字合起來從 1 開始數直到結束。至於「數上去策略」也細分為二個發展階段，分別為以第一個數字為基礎數上去（count-from-first）和以大數字為基礎數上去（min-counting）程序，前者是以第一個數字（亦即加數）為基礎數上去，而後者是以大的數字（可能是加數或被加數）為基礎數上去。此外，Hopkins 與 Lawson 將上述文獻的第二階段和第三階段分別稱為分解與重組（decomposition and regrouping）和數學事實提取（math facts retrieval）階段（Hopkins & Lawson, 2002），其中分解與重組能力是一種彈性運用能力的展現，透過已建立的數學事實導出另一個數學事實，如「6+7」先提取已知的「6+6=12」這個事實，然後這個「部份的合」再加上 1 就導出答案，當孩童的計算能力進展到數學事實提取階段，表示他們遇到任何的個位數算式（如 3＋5＝、8＋5＝、9－6＝、14－5＝、6×7＝、...）都可以直接從記憶庫中提取出答案，研究指出學童從數數策略轉換到數學事實提取策略，大致發生在小學二年級到三年級之間（Ashcraft, Fierman, & Bartolotta, 1984），到了小學四年級，數學事實直接提取已成為其主要的加法策略（Ashcraft, 1982）。Hopkins 與 Lawson 四個發展階段整理如表 2，並與之前文獻所指出的三個階段進行對照。

表 2

Hopkins與Lawson的四個發展階段與之前文獻的三個發展階段對照表

之前文獻的三階段論	Hopkins 與 Lawson 的四階段論	次階段
數數（程序性知識）階段	全部數階段	long-sum
		sum-counting
	數上去階段	count-from-first
		min-counting
已知與未知事實建立關係階段	分解與重組階段	
數學事實提取（陳述性知識）階段	數學事實提取階段	

當計算策略發展到以記憶為基礎時，在解題歷程中，由於運用快速且精熟的自動化數學事實提取策略而降低工作記憶的負荷，就可以讓出更多的認知資源以解決複雜的問題，如多位數計算或文字題，甚至理解更抽象的數學概念（Dehaene, 1997; Geary & Widaman, 1992）。而且，

學童如果能運用數學事實的自動化提取能力，快速地完成數學習題，那麼他將有更多的機會也能更輕鬆地練習其他的題目，而這些經驗會進一步強化其計算的正確性、流暢性和彈性運用能力（Ivarie, 1986; Skinner, Bamberg, Smith, & Powell, 1993; Skinner, Belfiore, Mace, Williams, & Johns, 1997; Skinner, Pappas, & Davis, 2005）。

二、多位數計算能力之發展

一般學生在多位數計算能力的表現，可以從計算錯誤的訊息中加以探討其計算程序與概念知識的發展（Resnick, 1984），例如，孩童開始學習多位數減法計算時，會忽略每個位值之被減數與減數的大小，常犯一律以大的數字減小的數字之錯誤類型（如 624－461＝243），此計算程序的錯誤可能反映孩童仍缺乏十進位（base 10 system）的數學概念（Fuson & Kwon, 1992）。van Lehn（1982）指出多位數計算除了缺乏數學概念導致穩定而一致的錯誤外（如上述缺乏十進位概念），也會因為缺乏穩固的計算程序或數學事實提取錯誤而導致偶發性的錯誤，反映出學童從長期記憶中提取數學事實有困難或錯誤使用數數程序等。其他型態的多位數計算錯誤，包括直式轉換時的數字空間欄位對位有誤、誤讀或誤寫數字等，此現象可能與視覺-空間（visual-spatial）或視覺-監控（visual-monitoring）能力不佳有關（Russell & Ginsburg, 1984）。到目前為止，針對 MLD 學生在多位數計算能力的研究仍是相當不足，Russell 與 Ginsburg（1984）利用聽寫多位數計算題目，並將寫下的題目加以計算的方式進行研究，發現國小四年級的 MLD 學生，相較於同齡的控制組而言，較無法辨識出他人計算程序的錯誤，包括數字空間欄位對位的錯誤、誤寫數字等，而且有較高比例的數學事實提取錯誤，據此指出數學事實提取的錯誤和視覺-監控能力不佳是 MLD 學童進行多位數計算的主要特徵。

Raghubar 等人（2009）則進一步以國小三、四年級的 MLD-only、MLD-RD、RD-only 學生和正常發展的控制組等為對象，進行多位數加法和減法計算能力的研究，並依據下列的錯誤類型加以編碼，包括數學事實提取錯誤、計算程序錯誤、視覺-空間錯誤和計算題型轉換錯誤等。數學事實提取錯誤是指計算時將個位數加法或減法的結果算錯；計算程序錯誤包括借位時忽略需要在借位的位值減掉 1、一律以大數字減小數字的錯誤、進位時未在下一個位值加 1 等；視覺-空間錯誤包括誤認或誤寫數字、空間位值欄位對位錯誤或數字在空間上的書寫相當擁擠不整齊等；計算題型轉換錯誤是指從一個題型（如減法）轉換到另一個題型（如加法）有困難，應該轉換到加法計算，但仍進行減法計算。研究結果指出 MLD-only 和 MLD-RD 學生，在多位數計算的錯誤型態上沒有明顯差異，其中數學事實提取錯誤和 MLD 有關，和 RD 無關；RD 學生，不管是否合併 MLD，則會犯較多的視覺-空間錯誤的類型，此現象和研究的預期不一致（Raghubar, et al., 2009）。

三、數學文字題解題能力的發展

數學文字題的解題能力牽涉到相當複雜的認知能力，根據 Mayer（1985）的觀點，數學文字題的解題歷程包括四個階段，分別為問題轉譯（problem translation）、問題整合（problem integration）、解題計畫（solution planning）與解題執行（solution execution）等，而且每個歷程底下都牽涉到特定的知識和技巧與之對應。問題轉譯是指解題者發現一些關鍵語句並將它們轉譯成此文字題的內在表徵，此階段牽涉了基本語言和生活經驗的事實知識，透過這些知識在文字題內選出與解題可能有關的數字，此稱為數字選擇技巧；問題整合是指解題者能以符合邏輯的方式，整合前一階段所形成的數個內在表徵或基模，此階段涉及了基模知識，透過基模知識的整合加以判斷算式符號，此稱為決定算式符號的技巧；解題計畫是指解題者能利用策略知識擬定解題方案，此時需要運用選定數字並做出解題步驟及其順序的技巧；解題執行是指解題者能運用算則知識，執行每個步驟所列出算式的計算，此稱為完成計算的技巧（Mayer, 1985）。此外，數學文字題的難度與複雜度會隨著解題步驟、運算符號及無關訊息的增加而提高（Powell, 2011）。

Fuchs 與 Fuchs（2002）將數學文字題利用總字數、總句數、平均每句字數、動詞數、出現的數字大小及個數、解題需要的步驟量（一步驟到三步驟）以及是否出現不相關數字等向度，列出三種難度的文字題，分別為算術故事題（arithmetic story problem）、複雜故事題（complex story problem）和真實情境題（real-world problem solving）。算術故事題只需一步驟解題，只出現 2 個數字，且加法總和或被減數在 9 以下；複雜故事題則需 1-3 步驟解題，出現 2 個數字以上（但不出現無關數字），數字大小則包括 1 位數和 2 位數；真實情境題則是 2 步驟以上的解題，出現 3 個數字以上，包括與解題無關的數字，數字為多位數。這三種難度文字題的總字數、總句數和平均每句字數、出現的動詞數等，彼此之間均有顯著差異。研究者利用這三種難度的文字題，以國小四年級 MLD-only、MLD-RD 和一般發展的學童為對象進行研究，結果發現 MLD 學生，不管是否合併 RD，在三種難度的文字題，其列式正確性與計算正確性均顯著低於一般學生的表現，就 MLD 不同亞型的比較而言，在算術故事題方面，MLD-only 和 MLD-RD 學生的列式正確性和計算正確性的表現無顯著差異，但是在複雜故事題和真實情境題方面，MLD-only 學生的列式正確性顯著高於 MLD-RD 學生，至於計算正確性方面則無顯著差異。

Kingsdorf 與 Krawec（2014）以 Mayer 的模式為基礎，建立了 4 種文字題解題的錯誤類型分析，包括數字選擇錯誤（number selection error）、運算符號錯誤（operation error）、缺漏步驟錯誤（missing step error）和計算結果錯誤（computation error）等，該研究以國中七、八年級的學習障礙（未進一步細分學習障礙的亞型）和同齡的一般發展學生為對象進行分析，結果顯示學習障礙學生產生數字選擇錯誤和運算符號錯誤的比例顯著高於一般發展學生，而產生計算結果

錯誤的比例則是邊緣顯著高於一般發展學生（Kingsdorf & Krawec, 2014）。

基於上述計算能力與文字題解題能力發展的文獻，而且研究 MLD 學生的表現時是分開探討，有些文獻也並未針對 MLD 的亞型進一步討論，因此，研究 MLD 是否合併 RD 之不同亞型在計算能力的差異時，宜整合個位數、多位數計算能力及其相對應的文字題解題能力之向度，進行完整的分析，如此才能對 MLD 不同亞型學生之計算能力有全面性的瞭解。本研究擬蒐集個案在標準化個位數計算、多位數計算及相對應的文字題解題之測驗表現，以及利用答題過程中，學生計算策略的觀察與訪談及錯誤類型分析等質性資料，據以推論其數學事實提取、多位數計算和文字題解題能力的發展，經由上述整合量化與質性資料的分析方式，探討他們在經過小學補救教學後至國中階段，計算能力的表現特徵及彼此之間的差異。據此，本研究針對計算能力提出整體性的分析架構，包括個位數計算能力（含基本和複雜題型）、多位數計算能力（含基本和複雜題型）、及其相對應的文字題解題能力，如圖 1 所示，相關細節於研究方法章節詳述。

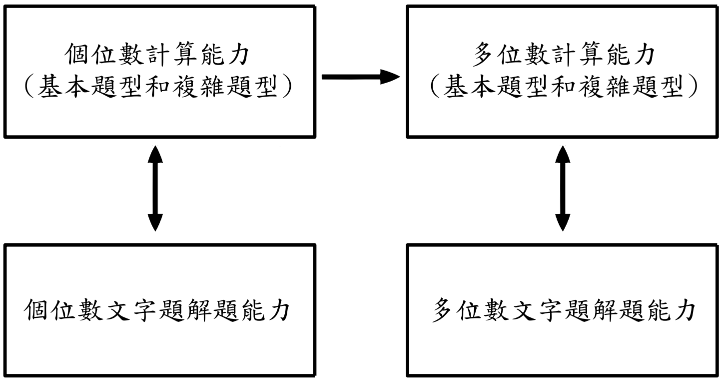


圖 1　本研究之計算能力分析架構圖

參、研究方法

一、研究對象

以國中階段 8 年級或 9 年級已被鑑定為 MLD-only 和 MLD-RD，且於國小階段接受身心障礙資源班數學科小組補救教學迄今，各二位臺北市的學生為研究對象，分別命名為 MLD-only1、MLD-only2、MLD-RD1 和 MLD-RD2。臺北市學習障礙學生的鑑定乃依據身心障礙及資賦優異學生鑑定辦法（教育部，2012），其鑑定基準如下：

（一）智力正常或在正常程度以上。

（二）個人內在能力有顯著差異。

（三）聽覺理解、口語表達、識字、閱讀理解、書寫、數學運算等學習表現有顯著困難，且經確定一般教育所提供之介入，仍難有效改善。

因此進行學習障礙學生的資格鑑定時，除了相關學習困難的質性觀察外，會實施魏氏兒童

智力測驗以釐清智力水準，以及與聽覺理解、口語表達、識字、閱讀理解、書寫、數學運算等學習表現有關的診斷測驗，並以百分等級 15 以下做為是否顯著困難的切截分數。本研究樣本的數學運算能力運用柯華葳（1999）所編製「基礎數學概念評量」之「借位減法」、「空格計算」和「三則計算」，其中三則運算是柯華葳（1999）編製的數學基本概念評量之分測驗之一，該測驗僅設計加、減、乘三種計算，未包括除法，故稱為三則運算。而閱讀能力的標準化測驗則包括「中文年級認字量表」和「國中閱讀推理測驗」，所以兩組個案都是在數學運算能力之標準化測驗低於切截點，但是單純 MLD 在識字和閱讀理解之得分高於切截點，而合併 RD 的則是識字或閱讀理解之得分低於切截點。

為考慮其他能力的影響，本研究二組學生另控制智力（取自魏氏兒童智力測驗第三版的全量表智商）與工作記憶（取自魏氏兒童智力測驗第三版的記憶廣度分測驗之量表分數）的能力變項，如表 3 所示。他們在 MLD 和 RD 診斷測驗的結果如表 4 所示，結果顯示 MLD-only1 和 MLD-only2 在借位減法、空格和三則等計算能力上有顯著困難，MLD-RD1 除了計算能力有顯著困難外，合併有識字和閱讀理解能力的顯著困難，至於 MLD-RD2 除了計算能力有顯著困難外，合併有識字困難，但沒有明顯的閱讀理解困難，因此，MLD-RD1 和 MLD-RD2 所呈現的閱讀障礙亞型是不同的。

表 3

MLD-only和MLD-RD個案在智力與工作記憶能力測驗之得分

個案 認知能力	MLD-only1	MLD-only2	MLD-RD1	MLD-RD2
智力（魏氏智力測驗第三版之全量表智商）	96	95	88	94
工作記憶（記憶廣度分測驗之量表分數）	7	4	7	4

表 4

MLD-only和MLD-RD個案在數學與語文標準化診斷測驗的成績表現

診斷內容	診斷測驗	診斷標準	MLD-only1	MLD-only2	MLD-RD1	MLD-RD2
數學計算能力	借位減法	正確指標低於切截分數				✓
		速度指標低於切截分數	✓	✓	✓	✓
	未知數空格計算	正確指標低於切截分數			✓	✓
		速度指標低於切截分數	✓	✓	✓	✓
	三則運算	正確指標低於切截分數	✓	✓	✓	✓
		速度指標低於切截分數	✓	✓	✓	✓
語文能力	識字量	得分低於切截分數			✓	✓
	閱讀理解	得分低於切截分數			✓	

註：數學計算能力診斷測驗摘自「基礎數學概念評量表」之後三項分測驗；語文能力診斷分別摘自「中文年級認字量表」及「國中閱讀推理測驗」。

二、研究工具

本研究的個位數和多位數計算又分為基本和複雜題型，利用標準化且計時的「基礎數學概念評量」（柯華葳，1999）和「基本數學核心能力測驗」（洪儷瑜、連文宏，2015）作為研究工具，所有的題目均以橫式計算的方式呈現，各分測驗得分可以轉換為「正確指標（答對題數除以做完題數）」和「速度指標（答對題數除以全部題數）」，這兩套測驗均提供常模參照百分等級 15 以下作為有無顯著困難之篩選標準。此外，在個案計算或文字題解題過程中，觀察（必要時進行訪談）其使用的計算策略並分析錯誤類型為何，透過量化的正確指標和速度指標的常模參照及觀察與訪談的質性資料進行整體計算能力發展之分析。底下將計算與文字題解題能力的測量工具及其題型分別進行描述，並整理如表 5 所示：

表 5

不同計算能力之分析架構表

範疇	題型	測驗工具	分測驗名稱	例題
個位數計算	基本	基礎數學概念評量表	個位數不進位加法	1＋4、5＋2、3＋3
			個位數進位加法	7＋5、8＋3、7＋7
			個位數不借位減法	9－2、6－3、8－5
			個位數乘法	3×9、5×5、7×4
	複雜	基本數學核心能力測驗	二位數與二位數不進位加法和不借位減法	14＋33、76－54
			二位數與個位數不進位乘法	13×3、24×2
			三位數與二位數不進位加法和不借位減法	314＋33、776－54
多位數計算	基本	基礎數學概念評量表	二位數減個位數借位減法（十位數為 1）	10－3、12－7
			二位數減個位數借位減法（十位數為 2）	20－7、24－6
			二位數減個位數借位減法（十位數為 6）	65－8、63－9
	複雜	基本數學核心能力測驗	三位數與二位數進位加法和借位減法	329＋34、743－19
			二位數需進位乘法	54×7、54×28
文字題	個位數	基礎數學概念評量表	應用題	小明有 5 顆糖，小華又給小明 3 顆，請問小明現在有幾顆糖？
	多位數	基本數學核心能力測驗	應用題	桌子上有 51 枝筆，16 枝是紅筆，19 枝是藍筆，其他都是黑筆，請問桌子上有幾枝黑筆？

（一）個位數計算能力

利用「基礎數學概念評量」的個位數不進位加法、個位數進位加法、個位數不借位減法和個位數乘法等四個分測驗，以及「基本數學核心能力測驗」的二位數與二位數不進位加法和不借位減法、二位數與個位數不進位乘法、三位數與二位數不進位加法和不借位減法等三個分測驗，共計七個分測驗進行施測與計算策略分析。「基礎數學概念評量」的四個分測驗稱為『基本題型的個位數計算』;「基本數學核心能力測驗」的三個分測驗則稱為『複雜題型的個位數計算』,雖是多位數所組成的加法、減法和乘法，然而計算過程不涉及進位或借位，因此在計算上，每個位值可以分開計算，仍是測量個位數的計算能力。

（二）多位數計算能力

利用「基礎數學概念評量」的十位數分別為 1、2 和 6 減個位數之借位減法等三個分測驗，以及「基本數學核心能力測驗」的三位數與二位數進位加法與借位減法、二位數乘個位數和二位數乘二位數之進位乘法等二個分測驗，共計五個分測驗進行施測與計算策略或錯誤類型分析。「基礎數學概念評量」的三個分測驗稱為『基本題型的多位數計算』，因為這是多位數借位減法最基本的形式，借位後，十位數僅需減掉 1 即可；「基本數學核心能力測驗」的二個分測驗則稱為『複雜題型的多位數計算』，在執行進位或借位程序後，數字位值的空間欄位對位須正確，且每個位值須再進行計算，可以說是多步驟的複雜計算程序。

（三）文字題解題能力

利用「基礎數學概念評量」的文字題以及「基本數學核心能力測驗」的文字題，共計二個測驗做為評量工具並分析其計算策略與錯誤類型。「基礎數學概念評量」的文字題稱為『個位數題型的文字題』，因為題目中只出現二個個位數且只需一步驟解題，因此符合 Fuchs 與 Fuchs（2002）所指稱的『算術故事題』；「基本數學核心能力測驗」的文字題稱為『多位數題型的文字題』，因為題目中出現二至三個數字（不出現無關數字），所使用的數字均為二位數，而且需 1-2 步驟解題，符合 Fuchs 與 Fuchs 所指稱的『複雜故事題』。

三、分析方法

（一）量化分析

本研究利用計時的標準化測驗可以獲得正確指標和速度指標兩個數據，依序進行以下的分析：（1）個案的正確指標和速度指標是否低於常模百分等級 15 以下的顯著困難標準；（2）個案的計算或解題速度是否緩慢之分析，可以分為二個程度，如果「速度指標低於正確指標」，表示個案在時限內未能完成全部的題目，據以推論其計算或解題速度緩慢，若速度指標進一步低於常模百分等級 15 以下，表示該個案的計算或解題速度有顯著困難；（3）由於樣本數僅四人，無法進行組間的統計考驗，僅能根據組內二人在速度或正確指標所構成的數值區間，和另外一組的組內二人之數值區間是否有所重疊，來進行初步的可能差異趨勢之比較，亦即 MLD 不同亞型的兩組在這兩種指標的數值區間未重疊，表示兩組在計算/解題正確性或速度可能呈現有所差異之趨勢。

（二）質性分析

本研究針對個案在個位數計算、多位數計算及文字題解題過程中，進行其計算策略與錯誤類型分析，分別描述如下：

1.個位數計算策略分析

以 Hopkins 與 Lawson（2002）所提出數學事實自動化提取能力之發展階段，包括「全部數」、「數上去（再細分為 count-from-first 和 min-counting 策略）」、「分解與重組」及「自動化提取」作為觀察指標，個案在計算時沒有明顯的停頓且直接把答案寫出來，則視為使用自動化提取策略，如果在計算過程中有停頓且明顯使用可觀察之手指或口語數數，則進一步分析是使用全部數或數上去策略；如果在計算過程中有停頓，但沒有明顯數數行為，則在分測驗結束後，針對這些題目進行訪談，詢問個案：「我剛剛看到你在算這一題時有停了一下，請告訴我這一題你是怎麼算的？」依據個案的回答進行計算策略的分析，等個案回答後，再進一步追問：「有哪幾題也是這樣算的？」，藉以評估計算過程中，使用全部數策略、數上去策略之 count-from-first 或 min-counting 程序，以及拆解與重組或數學事實提取等策略之使用情形。

2.多位數計算策略與錯誤類型分析

計算策略的分析方式如前項所述，錯誤類型分析則依據 Raghubar 等人（2009）所提出的「數學事實提取錯誤」、「計算程序錯誤」、「視覺-空間錯誤」和「計算題型轉換錯誤」等四項類型作為觀察指標。

3.文字題解題計算策略與錯誤類型分析

計算策略的分析方式如前項所述，錯誤類型分析則依據 Kingsdorf 與 Krawec（2014）所提出的「數字選擇錯誤」、「運算符號錯誤」、「缺漏步驟錯誤」和「計算結果錯誤」等四項類型作為觀察指標。

肆、結果與討論

一、個位數計算能力方面

正確與速度指標整理如圖 2，重要結果整理如表 6 所示。

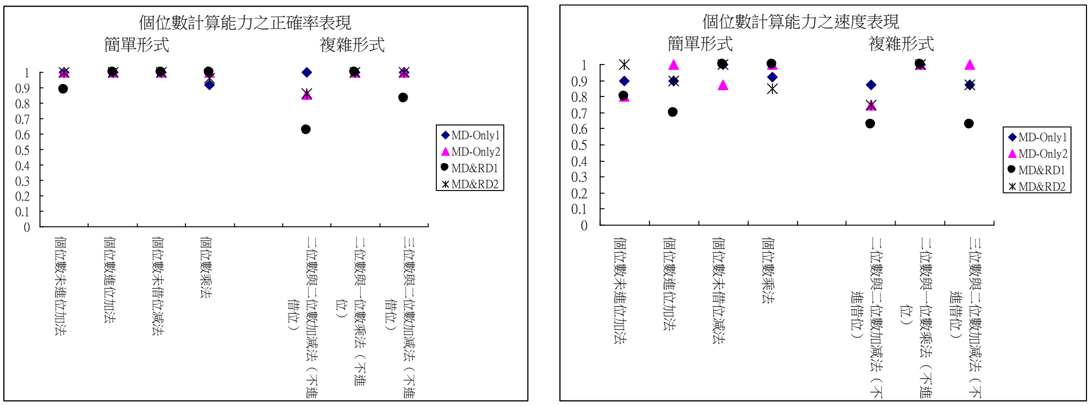


圖 2　四位個案在個位數計算能力之正確和速度指標表現

表 6

MLD-only和MLD-RD組在個位數計算能力之表現特徵及其差異

範疇		分析項目		正確與速度指標差異[註一]	組間表現差異[註二]
個位數計算	加法與減法	基本題型	正確指標	速度指標低於正確指標	無
			速度指標		無
		複雜題型	正確指標	速度指標低於正確指標	MLD-only＞MLD-RD
			速度指標		MLD-only＞MLD-RD
		計算策略		MLD-only 組使用數上去 min-counting 程序 MLD-RD 組使用數上去 count-from-first 程序	
	乘法	基本題型	正確指標	無	無
			速度指標		無
		複雜題型	正確指標	無	無
			速度指標		無
		計算策略		MLD-only 組使用乘法事實提取策略 MLD-RD 組部分 5 以上的乘法使用從中間背誦九九乘法表的策略	

註一：「速度指標低於正確指標」表示時限內未能完成所有的題目，有計算緩慢的問題。

註二：「＞」僅表示可能趨勢，並非統計考驗結果。

（一）基本題型的個位數不進位加法與不借位減法

四位個案的正確指標在.90 至 1 之間，而速度指標則在.83 至.97 之間，兩組的指標區間有所重疊，推論 MLD-only 和 MLD-RD 二組個案在這些題目的計算正確性和計算速度沒有明顯的差異。然而，四位個案均出現速度指標低於正確指標（在時限內未能完成所有的題目），因此有計算速度緩慢的情形。觀察及訪談其計算策略運用顯示，四位個案都會使用手指、口語或敲手指輔助等不成熟的數數策略進行計算。進一步依據 Hopkins 與 Lawson 的觀點分析發現，兩位 MLD-only 組個案均已發展至「數上去的 min-counting 程序」，亦即以大的數字為基礎去數小的數字，而兩位 MLD-RD 組個案則仍處於「數上去的 count-from-first 程序」之發展階段，以第一個數字為基礎去數第二個數字，因此，MLD-only 組比 MLD-RD 組的學生在數數策略的發展較為成熟。

（二）複雜題型的個位數不進位加法與不借位減法

四位個案在進行這些題目的計算時，MLD-only1 和 MLD-only2 的正確指標分別為 1 和.93，MLD-RD1 和 MLD-RD2 分別為.71 和.93，兩組正確指標的區間未重疊，顯示 MLD-only 組比 MLD-RD 組在正確率表現上呈現比較好之趨勢。速度指標方面，MLD-only1 和 MLD-only2 均

為.88，MLD-RD1 和 MLD-RD2 則分別為.63 和.81，速度指標的區間未重疊，顯示 MLD-only 組比 MLD-RD 組在速度表現上有比較好之趨勢。此外，四位個案的速度指標均低於正確指標，因此在這些題目的計算速度緩慢。觀察及訪談其計算策略顯示，四位個案在計算時均使用數數策略，其中 MLD-only 組個案已發展至「數上去的 min-counting 程序」，而 MLD-RD 組個案僅發展至「數上去的 count-from-first 程序」。

為進一步分析學生進行「個位數的加法和減法」與「大數字但未涉及進位與借位之加法和減法」的計算速度是否有差異，在大數字的「答對題數」與「全部題數」依個位數型式進行計分調整，如「14＋33＝」計分時視為「1＋3」和「4＋3」兩題並分開計算其答對題數，如果學生寫出答案為 47，則為答對 2 題，如果學生寫出答案為 46，則為答對 1 題；又如「69－16＝」亦視為「6－1」和「9－6」兩題，答對題數亦分開計算。結果發現，MLD-only1 的「個位數加法和減法」的計算速度指標為.96，「大數字但未涉及進位與借位之加法和減法」的計算速度指標為.875；MLD-only2 的「個位數加法和減法」的計算速度指標為.90，「大數字但未涉及進位與借位之加法和減法」的計算速度指標為.85；MLD-RD1 的「個位數加法和減法」的計算速度指標為.92，「大數字但未涉及進位與借位之加法和減法」的計算速度指標為.69；MLD-RD2 的「個位數加法和減法」的計算速度指標為.97，「大數字但未涉及進位與借位之加法和減法」的計算速度指標為.84。因此，四位個案在複雜題型，比起基本題型而言，其速度指標有下降趨勢，其中 MLD-RD 組更為明顯，速度指標從.92 和.97 分別下降至.69 和.84。雖然兩種題型都是測量不進位加法和不借位減法的數學事實提取能力，但是四位個案遇到大數字的複雜題型時，數數策略的使用頻率均明顯地增加，導致他們在計算速度比基本題型更為緩慢。

（三）基本與複雜題型的個位數乘法

四位個案在時限內均能完成所有的題目，正確指標和速度指標在.92 至 1 之間，二組之間沒有明顯的差異。觀察及訪談其計算策略運用顯示，MLD-only 組個案均以乘法事實直接提取的方式作答，但是 MLD-RD 組個案在部分「乘數」大於 5 的題目有停頓現象，伴隨口語默唸的行為，進一步訪談發現他們在這些題目運用了從中間背誦九九乘法表的方式來作答，如「9×7＝」的題目，會默唸「9、5、45」、「9、6、54」、「9、7、63」，然後寫出答案是 63。

上述個位數計算研究結果指出，MLD 學生，不管是否合併 RD，經過小學階段身心障礙資源班數學科小組補救教學迄今，到了國中階段依然存在加法和減法事實提取困難之特徵，此特徵不僅只是發展遲緩的問題，而可能是 MLD 的核心缺陷。然而，乘法事實提取困難的特徵到了國中階段則不明顯，可能已經跟上一般同儕的水準，因此，MLD 學生的乘法事實提取困難可能是發展上的遲緩而非核心缺陷，文獻指出乘法事實可以經由背誦乘法表的方式進入長期記憶系統，而且乘法表本身是以一串口語文字來進行心理表徵（Dehaene, 1997; Dehaene & Cohen, 1995,

1997），既然乘法事實可以透過乘法表的口語文字表徵來進行記憶的儲存與提取，較不涉及數字數量的表徵形式，因此，MLD-only 學生經過補救教學後，乘法事實的自動化提取能力可以跟上一般同儕的水準是可以預期的。就個位數加法和減法的計算能力而言，不管是基本題型或複雜題型，四位個案均顯示計算速度緩慢的情形。兩組的差異分析顯示，MLD-only 組在大數字不進位和不借位的複雜題型，其正確率和計算速度的表現均優於 MLD-RD 組，而兩組在基本題型的計算則無明顯差異。

上述兩組在基本題型的個位數計算能力之差異分析，和過去的研究結果並不完全一致，文獻指出國小 MLD-only 比 MLD-RD 學童在正確率表現上較好，但是速度表現則彼此沒有差異（Barnes et al., 2006; Geary, Hamson, & Hoard, 2000; Jordan & Montani, 1997），造成研究結果差異的原因可能是國小 MLD-only 和 MLD-RD 學童，經過補救教學後，彼此在個位數加法和減法計算的正確率上已趨於一致。

本研究新的發現在於，當兩組學生面對大數字但未涉及進位或借位的複雜題型時，正確率和速度表現都有下降，其中速度表現下降的趨勢更為明顯，造成兩組學生計算速度表現下降且組間差異更為明顯的原因，可能是當他們面對大數字時，相較於基本題型的個位數數字，呈現較高的計算焦慮或負擔，因此依賴不成熟的數數策略之頻率大幅提高，加上 MLD-only 學生已發展且穩定使用較有效率的 min-counting 程序，而 MLD-RD 學生則仍停留在 counting-from-first 程序，此一數數發展上的差異讓兩組之間的速度表現差異更為明顯。兩組學生在數數策略發展上的差異，和 Geary、Hoard 與 Hamson（1999）與 Geary 等人（2000）的研究結果一致。

二、多位數計算能力方面

正確與速度指標的測驗結果整理如圖 3，重要結果則整理如表 7 所示。

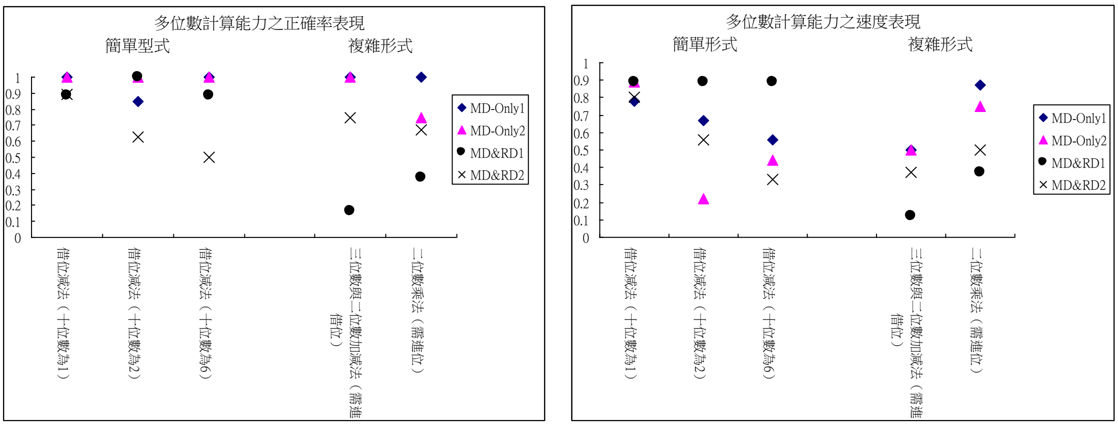


圖 3　四位個案在多位數計算之正確和速度指標表現

表 7

MLD-only和MLD-RD組在多位數計算能力之表現特徵及其差異

<table>
<tr><th colspan="2">範疇</th><th colspan="2">分析項目</th><th>正確與速度指標差異[註一]</th><th>組間表現差異[註二]</th></tr>
<tr><td rowspan="9">多位數計算</td><td rowspan="5">加法與減法</td><td rowspan="2">基本題型</td><td>正確指標</td><td rowspan="2">速度指標低於正確指標</td><td>無</td></tr>
<tr><td>速度指標</td><td>無</td></tr>
<tr><td rowspan="2">複雜題型</td><td>正確指標</td><td rowspan="2">速度指標低於正確指標</td><td>MLD-only＞MLD-RD</td></tr>
<tr><td>速度指標</td><td>MLD-only＞MLD-RD</td></tr>
<tr><td colspan="2">計算策略</td><td colspan="2">兩組個案均無法使用加法和減法事實提取策略進行計算，使用數數策略，搭配心算進位或借位之計算程序進行解題，其它僵化的計算程序、受大數字影響及無法利用數學概念穩定執行計算程序等，則有個別差異，不受是否合併 RD 的影響。</td></tr>
<tr><td rowspan="3">乘法</td><td rowspan="2">複雜題型</td><td>正確指標</td><td rowspan="2">速度指標低於正確指標</td><td>MLD-only＞MLD-RD</td></tr>
<tr><td>速度指標</td><td>MLD-only＞MLD-RD</td></tr>
<tr><td colspan="2">計算策略</td><td colspan="2">兩組個案會使用乘法事實提取策略進行乘法計算，乘法後的進位加法則使用數數策略，轉直式計算時的數字空間對位沒有問題。兩組個案的計算程序雖無明顯差異，但兩組在正確率和計算速度有差異。</td></tr>
</table>

註一：「速度指標低於正確指標」表示時限內未能完成所有的題目，有計算緩慢的問題。

註二：「＞」僅表示可能趨勢，並非統計考驗結果。

（一）基本題型的二位數減個位數之借位減法計算

四位個案在進行這些題目（如 10－3、20－7、65－8、…）的計算時，正確指標在.67-1 之間，速度指標在.52-.89 之間，兩組的正確和速度指標區間有所重疊，推論組間沒有明顯差異。然而四位個案均出現速度指標低於正確指標的情形，顯示計算速度緩慢。觀察與訪談四位個案的計算策略顯示，幾乎所有的題目都使用數數策略進行作答，然而在細部的計算執行程序上呈現個別差異，以 23－8 為例，將個案的訪談與觀察記錄整理如下：

1. MLD-only1

直接以手指比 10 作為借位的表徵，倒數扣掉 8，再用手指數數加 3 得到個位數為 5，然後心裡加 10 作為十位數的數值，最後得到答案為 15；至於十位數為 6 的題目，則全部用筆轉成直式，再用手指數數進行直式計算程序，沒有辦法用上述以手指比 10 搭配心算的借位程序進行作答，導致計算速度下降。個案寫完的題目只錯 1 題，錯誤類型為「數學事實提取錯誤」，個案轉直式計算的題目，並未出現「視覺-空間錯誤」。

2. MLD-only2

會在心裡先將 23－8 想成 13－8＋10，然後用手指數數來執行 10－8＋3 得到 5 的借位程序，最後再加 10 得到答案為 15；至於十位數為 6 的題目，也是利用相同的策略進行解題。個案做完的題目全部都算對，沒有錯誤可供分析。

3. MLD-RD1

發現題目的十位數只要減掉 1 就可以，因此他先將題目的答案欄位先寫下十位數為 1，然後專心地用手指數數來執行 10－8＋3 得到 5 的借位程序；十位數為 6 的題目也是用相同的程序，先將答案的十位數為 5 寫下來，再進行手指借位的計算。個案做完的題目總共錯了 2 題，錯誤類型都是屬於「數學事實提取錯誤」。

4. MLD-RD2

利用某種捷思（heuristic）的程序進行計算，表示會在心裡想 8－3，搭配手指數數算出 5，然後在心裡想 20－5，用倒數的數數策略，最後得到答案為 15。此程序之所以被視為捷思是因為，透過這個程序可以將「被減數」化簡為整十的數字，將「被減數 23」減去 3 剩下「被減數為 20」的整數，同時「減數 8」也要相對應地減去 3 得到「減數為 5」，最後再以「20－5」的簡化式子得到答案為 15，然而 MLD-RD2 可能不了解這個捷思程序背後的數學概念，只是將此程序背下來且不穩定地執行此計算程序，因此正確率（正確指標為.67）比起其他三位個案都低，此現象驗證了數學概念和計算程序執行之間是有交互影響的觀點（Rittle-Johnson, Siegler, & Alibali, 2001）。個案做完的題目總共錯了 7 題，因為不穩定使用捷思法則，錯誤類型都是屬於「數學事實提取錯誤」。

另外值得注意的現象是，除了 MLD-RD1 之外，其餘三位個案隨著十位數數字增加（從 1 到 6），其速度表現越來越差，表示他們在計算時，雖然都是「二位數減個位數」的借位題型，其中被減數的十位數只要減掉 1 即可，但他們無法判斷出這樣的規則，不同的題目用不同的計算程序，或者一種題型只能僵化地使用一種計算程序，而且數字越大所造成的計算焦慮或負擔就越大，導致十位數的數值越大，計算速度就會越緩慢。

整體而言，MLD 學生，不管是否合併 RD，在進行簡單題型的借位減法時，無法使用「十位數為 1 的二位數減個位數的借位減法事實直接提取」策略，並搭配心算的借位程序來進行計算，錯誤類型分析顯示四位個案都是屬於「數學事實提取錯誤」，因此，「借位減法事實提取困難」是共同的核心缺陷，其它僵化的計算程序、受大數字影響及無法利用數學概念穩定執行捷思程序等計算策略特徵，則視個別差異而定。

（二）複雜題型的多位數進位加法與借位減法

前四題為進位加法，後四題為借位減法，由於是計時測驗的關係，四位個案在完成了前四題的多位數進位加法後均已達時限，沒有完成後面四題的借位減法，因此無法評估複雜題型的借位減法之表現。MLD-only 組的個案在多位數進位加法未顯示正確率的問題（二者正確指標均為 1），但是 MLD-RD 組的個案則有正確率的問題（MLD-RD1 為.17，MLD-RD2 為.75）。四位個案的速度指標都低於正確指標，顯示計算速度緩慢，其中 MLD-only1 和 MLD-only2 的速度指標均為.50，MLD-RD1 和 MLD-RD2 則分別為.125 和.375，MLD-only 組的速度表現有高於 MLD-RD 組之趨勢。觀察其策略運用顯示，四位個案均運用數數策略進行解題，即使如此，MLD-RD 組的個案在答題的正確性上較容易出現錯誤，速度也較為緩慢，進一步分析 MLD-RD 組個案的錯誤類型顯示，都是屬於「數學事實提取錯誤」。

（三）複雜題型的多位數乘法

複雜題型的多位數乘法計算，前四題為二位數乘以一位數（如 54×7），後四題為二位數乘以二位數（如 54×28），MLD-only1 的正確指標為 1，MLD-only2 為.75，MLD-RD1 為.375，MLD-RD2 為.67，指標區間未重疊，MLD-only 組的正確率有高於 MLD-RD 組的趨勢。四位個案均出現速度指標低於正確指標的情形，顯示計算速度緩慢，其中 MLD-only1 的速度指標為.875，MLD-only2 為.75，MLD-RD1 為.375，MLD-RD2 為.5，推論 MLD-only 組的計算速度有高於 MLD-RD 組的趨勢。觀察其策略運用顯示，四位個案在二位數乘以一位數時，會以直接提取的方式進行乘法計算，然後運用手指數數、口語數數等方式進行乘法後之進位加法計算，到了二位數乘以二位數時，除了 MLD-RD1 以亂猜的方式直接寫出答案外，其餘三位個案均先將題目轉成直式，再以直接提取的方式進行乘法計算，最後以數數策略進行乘法後的進位加法計算。MLD-only1 做完的題目全數答對，未進行錯誤分析，MLD-only2、MLD-RD1 和 MLD-RD2 的錯誤類型則均是屬於「數學事實提取錯誤」。MLD-only1、MLD-only2 和 MLD-RD2 在轉直式計算後，並未出現空間欄位對位錯誤的「視覺-空間錯誤」，茲將三位個案的直式計算樣本整理如圖 4。

整體而言，進行複雜題型的多位數加、減和乘法計算時，MLD-only 和 MLD-RD 學生均顯示計算速度緩慢的困難，MLD-only 學生的正確率不受影響，但 MLD 合併 RD 的學生，除了計算速度比單純 MLD 學生更加嚴重外，也會進一步影響其計算的正確性，尤其當遇到大數字的進、借位計算時，其計算正確性則更受影響，表現也比 MLD-only 學生更為嚴重，錯誤類型主要是「數學事實提取錯誤」。

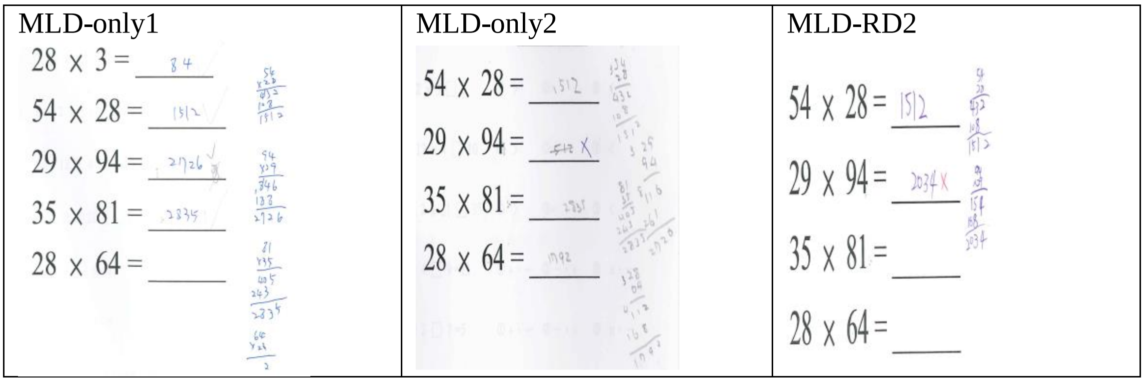


圖 4　MLD-only1、MLD-only2 和 MLD-RD2 等三位個案轉直式計算的樣本

三、文字題解題能力方面

正確與速度指標的測驗結果整理如圖 5，重要結果則整理如表 8 所示。

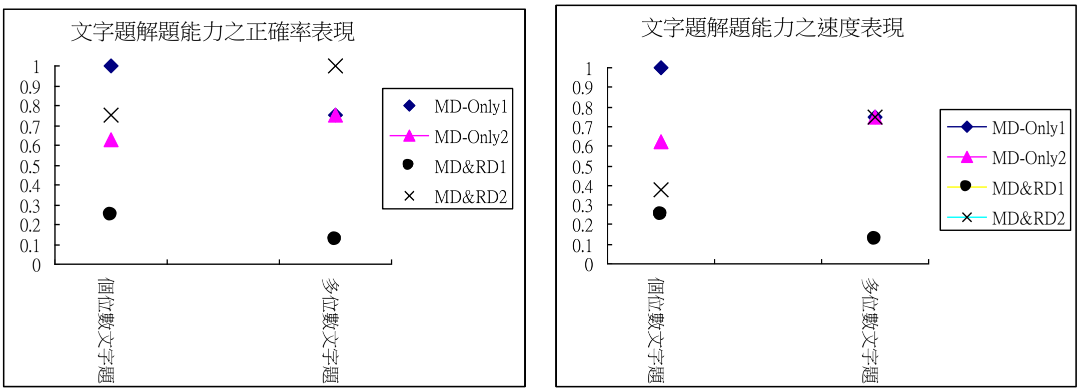


圖 5　四位個案在文字題解題能力之正確率和速度表現結果

表 8

MLD-only和MLD-RD組在文字題解題能力之表現特徵及其差異

範疇	分析項目		正確與速度指標差異[註一]	組間表現差異[註二]
文字題解題	個位數題型	正確指標	MLD-only 組之速度指標等於正確指標；MLD-RD 組之速度指標低於正確指標	無
		速度指標		MLD-only＞MLD-RD
	多位數題型	正確指標		無
		速度指標		MLD-only＞MLD-RD
	計算策略		四位個案在列出算式後，仍會使用數數策略進行計算，主要的錯誤類型是依據題意錯誤判斷加法或減法。	

註一：「速度指標等於正確指標」表示時限內完成所有的題目，無計算緩慢的問題；「速度指標低於正確指標」表示時限內未完成所有的題目，有計算緩慢的問題。

註二：「＞」僅表示可能趨勢，並非統計考驗結果。

（一）個位數題型

本研究的個位數題型符合 Fuchs 與 Fuchs（2002）所指稱的一步驟個位數的「算術故事題」，MLD-only1 的正確指標為 1、MLD-only2 為.625、MLD-RD1 為.25（低於常模百分等級 15 以下）、MLD-RD2 為.75，二組之間的指標區間有所重疊，因此沒有明顯的差異存在，但 MLD-RD1 有顯著的解題正確性之困難。速度表現方面，MLD-only1 和 MLD-only2 的速度指標分別為 1 和.625，與正確指標相同，表示在時限內完成所有的題目，沒有明顯的文字題解題速度問題；MLD-RD1 的速度指標為.25，而 MLD-RD2 的速度指標為.375，均低於常模的百分等級 15 以下，因此 MLD-RD 組的個案有顯著的文字題解題速度緩慢問題。觀察其解題策略時發現，四位個案在列出算式之後仍會使用數數策略進行計算。依據 Kingsdorf 與 Krawec（2014）所提出的「數字選擇錯誤」、「運算符號錯誤」、「缺漏步驟錯誤」和「計算結果錯誤」等四項錯誤類型分析發現，MLD-only1 全部答對，無錯誤類型，然 MLD-only2、MLD-RD1 和 MLD-RD2 都出現依據題意錯誤判斷加法或減法的「運算符號錯誤」，而 MLD-RD1 則進一步會出現 4－9＝5 的「數字選擇錯誤」。

（二）多位數題型

本研究的多位數題型符合 Fuchs 與 Fuchs（2002）所指稱的二至三步驟多位數的「複雜故事題」，MLD-only1 的正確指標為.75、MLD-only2 為.875、MLD-RD1 為.125（低於常模切截分數）、MLD-RD2 為 1，二組之間沒有明顯的差異存在，但 MLD-RD1 有顯著的解題正確性之困難。速度表現方面，MLD-only1 的速度指標為.75、MLD-only2 為.875，在時限內完成所有的題目，因此沒有明顯的解題速度問題；MLD-RD1 的速度指標為.125，低於常模百分等級 15 以下，而 MLD-RD2 的速度指標為.625，低於正確指標，在時限內未完成所有的題目，因此二者均有解題速度緩慢的問題。觀察其策略運用顯示，四位個案在列出算式後，仍會使用數數策略進行計算。錯誤分析發現，主要的錯誤類型是依據題意錯誤判斷加法或減法的「運算符號錯誤」，其中 MLD-RD1 最為嚴重，8 題中錯誤判斷 7 題，MLD-only1 和 MLD-only2 則是錯誤判斷 2 題以內，兩組均未出現其他的錯誤類型。

文獻指出小學階段的 MLD-only 和 MLD-RD 學生在文字題的解題上都會面臨挑戰，而 MLD-RD 學生在正確率表現比 MLD-only 學生更差（Fuchs, & Fuchs, 2002; Hanich, et al., 2001; Jordan & Hanich, 2000），但是在有時間限制的情境下，兩組學生的正確率表現沒有差異（Jordan & Montani, 1997）。本研究是在有時限的條件下來進行文字題解題能力的分析，結果指出，經過補救教學進到國中階段之 MLD-only 和 MLD-RD 學生，在個位數或多位數文字題解題的正確率方面仍會面臨挑戰，但兩組之間沒有明顯的差異，和文獻結果一致，但其中在語文方面有識字和閱讀理解困難之 MLD-RD1，其文字題解題能力有顯著困難。至於解題速度的表現，不管是個位數或多位數題型，MLD-only 學生均優於 MLD-RD 學生，MLD-only 學生在時限內能完成所有的

文字題，沒有解題速度的問題，而 MLD-RD 學生則無法完成所有的題目，有明顯解題速度的問題。策略觀察顯示兩組學生在列出算式後，均會以數數策略進行計算，而且四位個案在解文字題中有三個數字的題型時，均採二階段列式的方式進行解題，無法完整地進行一次列式並進行解題，錯誤類型主要都是「運算符號錯誤」，MLD-only 組學生在兩種文字題題型共解 32 題，其中 6 題出現此錯誤，犯「運算符號錯誤」的比例為 18.75％，MLD-RD 組學生共解 24 題，其中 17 題出現此錯誤，犯「運算符號錯誤」的比例為 70.83％。據此推論，雖然 MLD-only 學生仍然會在「運算符號錯誤」有所掙扎，但 MLD 學生合併 RD 後，犯此錯誤類型的比例明顯增加，因此文字題解題出現「運算符號錯誤」可能和 RD 的關係較為明顯，文字題解題能力似乎不是 MLD 的核心缺陷。進一步分析 MLD 學生合併 RD 後，除主要影響其解題速度的表現外，如果 RD 除了識字困難，也包括閱讀理解的困難，如 MLD-RD1 學生，則會進一步影響其解題的正確性，因此 MLD-RD1 和 MLD-RD2 在文字題解題能力上所呈現的正確率差異，可能在於 RD 亞型之不同。

伍、結論與建議

本研究因樣本數受限，量化資料難以區辨差異，只能初步形成組間差異的趨勢，然就質性資料而言，依據文獻探討，針對「個位數計算策略」、「多位數計算策略與錯誤類型」及「文字題解題計算策略與錯誤類型」等向度進行分析，整合量化與質性資料分析後，分別可以看到 MLD 學生在「個位數計算能力」、「多位數計算能力」出現數學事實提取的困難，其計算發展較一般學生落後，但是 MLD-RD 學生在計算發展上又顯得更差。文字題解題方面，因本研究所使用的工具已經控制文字難度，MLD 學生雖然計算速度緩慢，但 MLD-only 學生在文字題的解題速度並不受影響，而且其解題速度與正確性也優於有閱讀困難的 MLD-RD 學生，以下就這些結果進行深入的討論並提出建議。

本研究指出「加法和減法數學事實自動化提取的困難」是 MLD 學生的核心能力缺陷，而非只是能力發展上的遲緩而已，因為這些學生在經過了小學階段的補救教學迄今，到了國中階段仍存在加法和減法事實提取困難的特徵，此特徵主要是反映在計算速度的緩慢，而非計算的正確性。因為本研究的 MLD-only 和 MLD-RD 學生，亦即 MLD 不管是否合併 RD，均呈現加法和減法事實提取困難的特徵，此研究結果似乎和 Robinson、Menchetti 與 Torgesen（2002）所指出，數學事實直接取困難的缺陷和語意或聲韻處理的困難有關之看法不一致。

個位數的計算策略有一定的發展階段，是從數數策略進展到數學事實提取，而數數策略本身又有其發展階段（Hopkins & Lawson, 2002），不同階段的策略發展會影響計算速度，但不影響計算正確性，因為這些不同的策略都有助於將答案正確地算出來，研究指出國小一、二年級的

MLD 幼童比正常的同儕在數數時犯錯的機率高（Bull & Johnston, 1997; Geary, 1990; Geary, Widaman, Little, & Cormier, 1987; Jordan & Hanich, 2000），原因可能在於 MLD 孩童對數數原則的概念不了解所致（Geary, et al., 2000），但是這種和正常的同儕所產生的數數犯錯機率之差異，到了國小二年級結束時就消失了（Geary, et al., 2000）。

一般成就水準的學童到了國小二年級結束時，數學事實提取就成為他們主要的計算策略，但是 MLD 學生到了國小六年級，甚至國中七年級，數學事實的提取仍未成為他們主要的策略，而且持續運用與不斷練習 min-counting 程序，也無助於強化 MLD 學生能以記憶的方式直接提取數學事實做為他們主要的策略（Goldman, Pellegrino, & Mertz, 1988; Ostad, 1997），本研究支持上述文獻的結果與觀點，經過國小的補救教學持續至國中階段的 MLD-only 和 MLD-RD 學生，在個位數加法和減法的計算上，依然未採取最有效率的數學事實提取策略來進行計算，仍相當程度地依賴數數策略，並將個案的年級延伸至九年級的 MLD 國中生。MLD-only 和 MLD-RD 學生的個位數加法和減法的正確率高，但主要使用數數策略進行計算，導致計算速度緩慢。此外，兩組學生的數數策略發展呈現了 min-counting 和 count-from-first 程序的差異，由於 min-counting 程序可以說是數數策略的最高發展階段，因此讓 MLD-RD 學生從 count-from-first 進展到 min-counting 程序是教學上重要的課題。

本研究利用大數字，以二位數或三位數的加法和減法，但未涉及進、借位的複雜題型進一步探討數學事實提取能力，在控制大數字的「答對題數」與「全部題數」依個位數型式進行調整計分後發現，兩組學生的計算速度均有下降趨勢，而且 MLD-RD 學生比 MLD-only 學生的計算速度緩慢問題更顯嚴重，原因之一可能在於兩組學生遇到大數字時，導致計算負擔加重而在心理上產生焦慮感，因此觀察到回到使用較熟悉且有把握的數數策略之頻率相對提高，加上兩組學生在數數策略的發展階段之不同，MLD-RD 學生使用 count-from-first 的數上去策略，一定比 MLD-only 學生之 min-counting 的數上去策略，在計算速度上更為緩慢。然而，這種大數字複雜題型的正確率也產生組間差異，為何 MLD 學生合併 RD 後，在二位數以上的大數字但未涉及進、借位的計算，其正確率會下降，仍需進一步研究加以探討。

到目前為止，探討 MLD-only 和 MLD-RD 兩組學生在多位數計算和文字題解題能力差異之研究仍是相當有限，本研究指出單純 MLD 學生到了國中階段，他們在多位數計算能力的主要困難是在計算速度的緩慢，並不影響其計算正確性，而且越複雜或大數字的題型，計算速度就越緩慢，在合併 RD 後，除了會加重他們在計算速度問題之嚴重性，也會影響其計算正確性，錯誤類型主要是「數學事實提取錯誤」。觀察與訪談兩組學生在多位數計算策略運用的情形時發現，核心缺陷仍是在數學事實自動化提取的困難，兩組之間計算策略的運用沒有明顯的差異，因此造成此種組間正確率差異的原因，須進一步地研究加以釐清。

文字題解題能力方面，本研究指出在國中階段核心缺陷仍為加法和減法事實自動化提取困難之 MLD-only 學生，在解題速度方面不受影響，至於正確性方面則偶而會出現「運算符號錯誤」；MLD 合併 RD 後，解題速度明顯下降，至於正確率是否受到影響可能視 RD 亞型而定，「識字兼閱讀理解困難」亞型的 RD 學生會進一步影響其解題正確率，錯誤類型主要也是「運算符號錯誤」，因此文字題解題能力可能不是 MLD 的核心缺陷，建議在 MLD 的鑑定實務上可予以排除，僅作為判斷可能合併 RD 之參考。到目前為止，文獻上在探討 MLD 是否合併 RD 的研究時，尚未進一步將 RD 做更細部的亞型區分，本研究以 MLD 合併不同的 RD 亞型（亦即「識字困難」亞型與「識字兼閱讀理解困難」亞型）的方式進行分析時，發現他們在文字題解題的正確性、速度與錯誤型態上可能有所差異，此議題亦值得進一步地探討。

最後，本研究最大的限制在於個案研究的樣本數問題，這些研究結果是建立在四位個案所進行的標準化測驗量化分析與深入的觀察與訪談資料之質性分析與比較所獲得，因此只能得到初步的計算能力特徵與差異的可能趨勢，上述研究結果有待進一步地增加大樣本數的實徵研究加以驗證。

誌謝

本文承科技部專案補助（專案編號 NSC 98-2511-S-003-010-M），特此致謝。

參考文獻

林秀柔（1989）。**國小數學學習障礙兒童鑑定方式之研究**（未出版之碩士論文）。國立彰化師範大學，彰化市。【Lin, Xiu-Rou (1989). *The study of identification method of mathematics learning-disabled elementary students*. (Unpublished master's thesis). National Changhua University of Education, Changhua. (in Chinese)】

柯華葳（1999）。**基礎數學概念評量－四、五、六年級題本**。臺北：行政院國家科學委員會。【Ko, Hwa-Wei (1999). *The basic arithmetic skill test－Grade 4 to 6 version*. Taipei: National Science Council. (in Chinese)】

柯華葳（2005）。數學學習障礙學生診斷與確認。**特殊教育研究學刊**，**29**，113-126。doi: 10.6172/BSE200509.2901006【Ko, Hwa-Wei (2015). The diagnosis of arithmetic learning disabilities. *Bulletin of Special Education*, *29*, 113-126. doi: 10.6172/BSE200509.2901006 (in Chinese)】

洪儷瑜、連文宏（2015）。**基本數學核心能力測驗**。臺北：中國行為科學社。【Hung, Li-Yu, & Lien, Wen-Hung (2015). *The basic arithmetic core competency test*. Taipei: Chinese Behavioral Science Corporation. (in Chinese)】

教育部（2012）。**身心障礙暨資賦優異鑑定辦法**。臺北：作者。【Taiwan Ministry of Education (2012). *The identification method of students with physical and mental disabilities or giftedness*. Taipei: Author. (in Chinese)】

蕭金土（1995）。**國小數學學習障礙學生的鑑定、學習問題診斷及學習策略教學效果之研究**（未出版之博士論文）。國立政治大學，臺北市。【Hsiao, Chin-Tu (1995). *The study of identification, the diagnosis of learning problems and the effects of learning strategies on mathematics learning-disabled elementary students* (Unpublished Doctoral Thesis). National Chengchi University, Taipei. (in Chinese)】

American Psychiatric Association. (2004). *Diagnostic and statistical manual of mental disorders* (4th ed., text rev.). Washington, DC: American Psychiatric Publishing.

American Psychiatric Association. (2013). *Diagnostic and statistical manual of mental disorders* (5th ed.). Arlington, VA: American Psychiatric Publishing. doi: 10.1176/appi.books.9780890425596.dsm20

Ando, M. & Ikeda, H. (1971). Learning multiplication facts—More than a drill. *The Arithmetic Teacher, 18*(6), 366-369.

Ashcraft, M. H. (1982). The development of mental arithmetic: A chronometric approach. *Developmental Review*, *2*(3), 213-236. doi: 10.1016/0273-2297(82)90012-0

Ashcraft, M. H., Fierman, B. A., & Bartolotta, R. (1984). The production and verification tasks in mental addition: An empirical comparison. *Developmental Review*, *4*(2), 157-170. doi: 10.1016/0273-2297(84)90005-4

Ashlock, R. B. (1971). Teaching the basic facts: Three classes of activities. *The Arithmetic Teacher*, *18*(6), 359-364.

Badian, N. A. (1999). Persistent arithmetic, reading, or arithmetic and reading disability. *Annals of Dyslexia*, *49*, 45-70. doi: 10.1007/s11881-999-0019-8

Barbaresi, W. J., Katusic, S. K., Colligan, R. C., Weaver, A. L., & Jacobsen, S. J. (2005). Math learning disorder: Incidence in a population-based birth cohort, 1976-82, Rochester, Minn. *Ambulatory Pediatrics*, *5*(5), 281-289. doi: 10.1367/A04-209R.1

Barnes, M. A., Wilkinson, M., Khemani, E., Boudesquie, A., Dennis, M., & Fletcher, J. M. (2006). Arithmetic processing in children with spina bifida: Calculation accuracy, strategy use, and fact retrieval fluency. *Journal of Learning Disabilities*, *39*(2), 174-187. doi: 10.1177/00222194060390020601

Bezuk, N. S., & Cegelka, P. T. (1995). Effective mathematics instruction for all students. In P. T. Cegelka & W. H. Berdine (Eds.), *Effective instruction for students with learning difficulties* (pp. 345-384). Needham Heights, MA: Allyn and Bacon.

Bull, R., & Johnston, R. S. (1997). Children’s arithmetical difficulties: Contributions from processing speed, item identification, and short-term memory. *Journal of Experimental Child Psychology*, *65*, 1-24. doi: 10.1006/jecp.1996.2358

Butterworth, B. (2005). The development of arithmetical abilities. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, *46*(1), 3-18. doi: 10.1111/j.1469-7610.2004.00374.x

Carnine, D. W., & Stein, M. (1981). Organizational strategies and practice procedures for teaching basic facts. *Journal for Research in Mathematics Education*, *12*(1), 65-69. doi: 10.2307/748659

Chiappe, P. (2005). How reading research can inform mathematics difficulties: The search for the core deficit. *Journal of Learning Disabilities*, *38*(4), 313-317. doi: 10.1177/00222194050380040601

Dehaene, S. (1997). *The number sense: How the mind creates mathematics*. New York, NY: Oxford University Press.

Dehaene, S., & Cohen, L. (1995). Towards an anatomical and functional model of number processing. *Mathematical Cognition*, *1*, 83-120.

Dehaene, S., & Cohen, L. (1997). Cerebral pathways for calculation: Double dissociation between rote verbal and quantitative knowledge of arithmetic. *Cortex*, *33*(2), 219-250. doi: 10.1016/S0010-9452(08)70002-9

Dirks, E., Spyer, G., van Lieshout, E. C. D. M., & de Sonneville, L. (2008). Prevalence of combined reading and arithmetic disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, *41*(5), 460-473. doi: 10.1177/0022219408321128

Fuchs, L. S., & Fuchs, D. (2002). Mathematical problem-solving profiles of students with mathematics disabilities with and without comorbid reading disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, *35*(6), 564-574. doi: 10.1177/00222194020350060701

Fuson, K. C., & Kwon, Y. (1992). Korean children's understanding of multidigit addition and subtraction. *Child Development*, *63*(2), 491-506. doi: 10.2307/1131494

Garnett, K. (1992). Developing fluency with basic number facts: Intervention for students with learning disabilities. *Learning Disabilities Research and Practice*, *7*(4), 210-216.

Garnett, K., & Fleischner, J. E. (1983). Automatization and basic fact performance of normal and learning disabled children. *Learning Disability Quarterly*, *6*(2), 223-230. doi: 10.2307/1510801

Geary, D. C. (1990). A componential analysis of an early learning deficit in mathematics. *Journal of Experimental Child Psychology*, *49*(3), 363-383. doi: 10.1016/0022-0965(90)90065-G

Geary, D. C., Hamson, C. O., & Hoard, M. K. (2000). Numerical and arithmetical cognition: A longitudinal study of process and concept deficits in learning disabled children. *Journal of Experimental Child Psychology*, *77*, 236-263. doi: 10.1006/jecp.2000.2561

Geary, D. C., Hoard, M. K., Byrd-Craven, J., & DeSoto, M. C. (2004). Strategy choices in simple and complex addition: Contributions of working memory and counting knowledge for children with mathematical disability. *Journal of Experimental Child Psychology*, *88*, 121-151. doi: 10.1016/j.jecp.2004.03.002

Geary, D. C., Hoard, M. K., Byrd-Craven, J., Nugent, L., & Numtee, C. (2007). Cognitive mechanisms underlying achievement deficits in children with mathematical learning disability. *Child Development*, *78*(4), 1343-1359. doi: 10.1111/j.1467-8624.2007.01069.x

Geary, D. C., Hoard, M. K., & Hamson, C. O. (1999). Numerical and arithmetical cognition: Patterns of functions and deficits in children at risk for a mathematical disability. *Journal of Experimental Child Psychology*, *74*(3), 213-239. doi: 10.1006/jecp.1999.2515

Geary, D. C., & Widaman, K. F. (1992). Numerical cognition: On the convergence of componential and psychometric models. *Intelligence*, *16*(1), 47-80. doi: 10.1016/0160-2896(92)90025-M

Geary, D. C., Widaman, K. F., Little, T. D., & Cormier, P. (1987). Cognitive addition: Comparison of learning disabled and academically normal elementary school children. *Cognitive Development*, *2*(3), 249-269. doi: 10.1016/S0885-2014(87)90075-X

Goldman, S. R., Pellegrino, J. W., & Mertz, D. L. (1988). Extended practice of basic addition facts: Strategy changes in learning-disabled students. *Cognition and Instruction*, *5*(3), 223-265. doi: 10.1207/s1532690xci0503_2

Gersten, R., Jordan, N. C., & Flojo, J. R. (2005). Early identification and interventions for students with mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, *38*(4), 293-304. doi: 10.1177/00222194050380040301

Hanich, L. B., Jordan, N. C., Kaplan, D., & Dick, J. (2001). Performance across different areas of mathematical cognition in children with learning difficulties. *Journal of Educational Psychology*, *93*(3), 615-626. doi: 10.1037//0022-0663.93.3.615

Hopkins, S. L., & Lawson, M. J. (2002). Explaining the acquisition of a complex skill: Methodological and theoretical considerations uncovered in the study of simple addition and the moving-on process. *Educational Psychology Review*, *14*(2), 121-154. doi: 10.1023/A:1014629604663

Ivarie, J. J. (1986). Effects of proficiency rates on later performance of a recall and writing behavior. *Remedial and Special Education*, *7*(5), 25-30. doi: 10.1177/074193258600700506

Jordan, N. C., & Hanich, L. B. (2000). Mathematical thinking second-grade children with different forms of LD. *Journal of Learning Disabilities*, *33*(6), 567-579. doi: 10.1177/002221940003300605

Jordan, N. C., & Hanich, L. B. (2003). Characteristics of children with severe mathematics deficiencies: A longitudinal perspective. *Learning Disabilities Research & Practice*, *18*(4), 213-221. doi: 10.1111/1540-5826.00076

Jordan, N. C., Hanich, L. B., & Kaplan, D. (2003). A longitudinal study of mathematical competencies in children with specific mathematics difficulties versus children with comorbid mathematics and reading difficulties. *Child Development*, *74*(3), 834-850. doi: 10.1111/1467-8624.00571

Jordan, N. C., & Montani, T. O. (1997). Cognitive arithmetic and problem solving: A comparison of children with specific and general mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, *30*(6), 624-634. doi: 10.1177/002221949703000606

Kingsdorf, S., & Krawec, J. (2014). Error analysis of mathematical word problem solving across students with and without learning disabilities. *Learning Disability Research & Practice*, *29*(2), 66-74. doi: 10.1111/ldrp.12029

Lewis, C., Hitch, G. J., & Walker, P. (1994). The prevalence of specific arithmetic difficulties and specific reading difficulties in 9- to 10-year-old boys and girls. *Journal of Child Psychology and Psychiatry and Allied Disciplines*, *35*(2), 283-292. doi: 10.1111/j.1469-7610.1994.tb01162.x

Mayer, R. E. (1985). Implications of cognitive psychology for instruction in mathematical problem solving. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 123-138). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Noyes, R. Jr. (2001). Comorbidity in generalized anxiety disorder. *Psychiatric Clinics of North America*, *24*(1), 41-55. doi: 10.1016/S0193-953X(05)70205-7

Ostad, S. A. (1997). Developmental differences in addition strategies: A comparison of mathematically disabled and mathematically normal children. *British Journal of Educational Psychology*, *67*(3), 345-357. doi: 10.1111/j.2044-8279.1997.tb01249.x

Pellegrino, J. W., & Goldman, S. R. (1987). Information processing and elementary mathematics. *Journal of Learning Disabilities*, *20*(1), 23-32. doi: 10.1177/002221948702000105

Raghubar, K., Cirino, P., Barnes, M., Ewing-Cobbs, L., Fletcher, J., & Fuchs, L. (2009). Errors in multi-digit arithmetic and behavioral inattention in children with math difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, *42*(4), 356-371. doi: 10.1177/0022219409335211

Resnick, L. B. (1984). Beyond error analysis: The role of understanding in elementary school arithmetic. In H. N. Cheek (Ed.), *Diagnostic and prescriptive mathematics: Issues, ideas and insights* (pp. 2-14). Kent, OH: Research Council for Diagnosis and Prescriptive Mathematics Research.

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An interactive process. *Journal of Educational Psychology*, *93*(2), 346-362. doi: 10.1037//0022-0663.93.2.346

Robinson, C. S., Menchetti, B. M., & Torgesen, J. K. (2002). Toward a two-factor theory of one type of mathematics disabilities. *Learning Disabilities Research and Practice*, *17*(2), 81-89. doi: 10.1111/1540-5826.00035

Russell, R. L., & Ginsburg, H. P. (1984). Cognitive analysis of children's mathematical difficulties. *Cognition and Instruction*, *1*(2), 217-244. doi: 10.1207/s1532690xci0102_3

Skinner, C. H., Bamberg, H. W., Smith, E. S., & Powell, S. S. (1993). Cognitive, cover, copy, and compare: Subvocal responding to increase rates of accurate division responding. *Remedial and Special Education*, *14*(1), 49-56. doi: 10.1177/074193259301400107

Skinner, C. H., Belfiore, P. J., Mace, H. W., Williams-Wilson, S., & Johns, G. A. (1997). Altering response topography to increase response efficiency and learning rates. *School Psychology Quarterly*, *12*(1), 54-64. doi: 10.1037/h0088947

Skinner, C. H., Pappas, D. N., & Davis, K. A. (2005). Enhancing academic engagement: Providing opportunities for responding and influencing students to choose to respond. *Psychology in the Schools*, *42*(4), 389-403. doi: 10.1002/pits.20065

van Lehn, K. (1982). Bugs are not enough: Empirical studies of bugs, impasses, and repairs in procedural skills. *Journal of Mathematical Behavior*, *3*(2), 3-71.

Wittchen, H. U. (1996). Critical issues in the evaluation of comorbidity of psychiatric disorders. *British Journal of Psychiatry*, *168*, 9-16.

陳埩淑（2017）。
幼童重複樣式教學之探索性研究。
臺灣數學教育期刊，**4**（1），63-92。
doi: 10.6278/tjme.20170317.003

幼童重複樣式教學之探索性研究

陳埩淑
臺南應用科技大學師培中心

本研究為提升幼童樣式推理能力設計樣式教學模式，從尋找樣式、辨識樣式單位、標示單位、延伸單位、臆測單位到驗證樣式，教導幼童會複雜重複樣式推理。本研究採探索性研究，以南部一所大學附設幼兒園兩班大班實施樣式推理教學，每班各三十名，平均年齡約 6 歲。其中一班實施樣式教學模式為實驗組；另一班維持原來樣式教學方式即為控制組。為瞭解樣式教學模式的成效，教學前後兩組接受樣式作業評量。資料蒐集包括觀察、攝影教師樣式教學，以及對研究對象訪談，之後進行量化分析與質性分析，以瞭解樣式教學成效及教師如何進行樣式教學。研究結果發現兩組經教學後，後測成績皆有提升，且實驗組的後測成績顯著優於控制組。顯然，樣式教學模式介入明顯提升幼童的推理能力。另一方面，教師在教導幼童樣式推理時會循序漸進以故事、遊戲引導幼童，再透過操作增進幼童的樣式概念。實驗組進行複雜重複樣式教學時，分解複雜重複樣式結構為簡單重複樣式，幫助幼童掌握核心單位及延伸樣式，擴展幼童複雜重複樣式推理能力。

關鍵詞：幼兒數學、重複樣式、樣式教學

通訊作者：陳埩淑，e-mail：tg0002@mail.tut.edu.tw
收稿：2016 年 9 月 27 日；
接受刊登：2017 年 3 月 17 日。

Journal homepage: tame.tw/forum.php?mod=forumdisplay&fid=56

Chen, C. S. (2017).
Exploratory study of instruction of repeating patterns for young children.
Taiwan Journal of Mathematics Education, *4*(1), 63-92.
doi: 10.6278/tjme.20170317.003

Exploratory Study of Instruction of Repeating Patterns for Young Children

Ching-Shu Chen

Teacher Education Center, Tainan University of Technology

This study experimentally explored the effectiveness of a designed teaching model for promoting young children's pattern reasoning. The model of teaching sequences included exploring patterns, identifying the unit of repeated patterns, labeling the unit of repeated patterns, extending pattern units, predicting pattern units, and proving the patterns. Two groups were involved in the pattern-reasoning experiment: an experimental group, which adapted the pattern-teaching model, and the control group, which used the original teaching methods. Sixty subjects with a mean age of 6 years were recruited from two classes of a private kindergarten. They were subject to pattern-task testing before and after teaching. Observations for data collection involved taking pictures, recording videos, and interviewing participants after teaching. The experimental group outperformed the control group in the pattern-reasoning task. Evidently, implementing pattern instruction was effective for promoting pattern reasoning among young children. Additionally, during pattern instruction, the teacher taught using storytelling and games and then provided hands-on materials to strengthen pattern cognition. During the pattern-teaching process, the teacher deconstructed a complex pattern concept into a simple pattern, prompted recognition of the core unit of the pattern, and extended the pattern that facilitated children's competence in reasoning.

Keywords: childhood mathematics, repeating pattern, pattern teaching

Corresponding author：Ching-Shu Chen，e-mail：tg0002@mail.tut.edu.tw
Received：27 September 2016;
Accepted：17 March 2017.

壹、緒論

近年來各國重視學童提前學習代數，特別看重幼童數學樣式推理教學與相關議題的研究，澳洲 Mulligan 等學者多年的學前樣式研究及德國跨三個年級重複樣式推理研究，都發現幼童樣式推理能力會影響小學數學成就的表現，他們主張數學教育需具前瞻性的學習觀點及關聯性，以建立幼童問題解題的技能（Lüken, Peter-Koop, & Kollhoff, 2014; Mulligan, Mitchelmore, English, & Robertson, 2010; Vale, Pimentel, Cabrita, Barbosa, & Fonseca, 2012）。由於數學的本質在尋找規律與規律之間的關係（Mulligan, Mitchelmore, English, & Crevensten, 2012），數學有效的推理需注意到真實世界脈絡中的樣式與符號，而習得如何察覺事物中數量形的規律，透過樣式探究與經驗的累積，形成一般化，並進一步歸納樣式解決問題（Mulligan et al., 2012）。樣式被描述為一種規則、重複的型式（Orton & Orton, 1999），也是一種延伸的規律，可以臆測的規則，以樣式引入幼童數學學習有助於數學概念和關係的抽象化，發展出推理能力（Mulligan & Mitchelmore, 2009; Papic, Mulligan, & Mitchelmore, 2011）。

樣式在幼童的生活中處處可見，如牆壁、地毯、天花板及窗戶都有樣式，每天的生活作息穿衣擺桌椅和預備簡單的食物（Lynn, 2013）都存在著樣式。在他們的生活脈絡中能經驗到各種樣式。據 Clements 與 Sarama（2009）的研究指出五歲的幼童已能延伸簡單重複樣式如 ABBABB，六歲的幼童能轉化直線的 ABBABB 樣式為樣式的核心單位 ABB，但如果擴大樣式單位，幼童是否也能掌握樣式單位從事複雜重複樣式的推理？研究者觀看一所幼兒園進行「葉子」相關的主題教學時，幼童會以搜集到的葉子排列出重複增長樣式 ABCDABCDDDABCDDDDD。故而，引發研究者擬設計複雜重複樣式作業與教學引導幼兒從中學習，並瞭解幼兒的樣式推理表現與教學成效。本研究問題如下：

（一）教師如何實施樣式推理教學提升幼童樣式推理能力？

（二）經樣式教學後幼童學習表現為何？

貳、理論架構

一、樣式種類

樣式的種類在數學教育文獻中多半指出有三類，分別是重複樣式（repeating pattern）、增長樣式（growing pattern）和結構樣式（structural pattern）（Copley, 1998/2003; Owen, 1995）。

（一）重複樣式

重複樣式指有一個可以辨認的重複單位，例如春-夏-秋-冬-春-夏-秋-冬-…及有一個循環的結構，至少有兩個重複單位。重複樣式重點在於循環（cycle）或重複（Owen, 1995; Tsamir, Tirosh, Barkai, Levenson, & Tabach, 2015），重複樣式意指一系列特定的物件或事件重複出現，像顏色、形狀、方向、大小、聲音、數字或其他元素（Owen, 1995；吳昭容、嚴雅筑，2008）。另外，Threlfall（1999）提出循環重複樣式不只在單一向度上變化，也可以多個向度變化以增加樣式的複雜度成為複雜重複樣式，並在樣式延伸時，除了直線延伸外，也可以將元素排列的方向改變，排列成非直線型（蛇形）的樣式。本研究將增加樣式複雜度，探討幼兒是否能在教學之後，掌握複雜重複樣式的結構並提升樣式推理能力？

（二）增長樣式

增長樣式也稱為數列（sequence），是指由一個法則產生的一系列、非重複的項目，例如等差數列 1-3-5-7-9…及費氏數列 1-1-2-3-5-8-13-21…。增長樣式是用可預測的方式來改變某個數值的型式。其內涵指在 Owen（1995）的分類中稱為序列（sequences），也就是指一系列非重複的數值，隨著一種規則延伸所組成，在正式課程活動中，此類型以數字序列（簡稱數列）最為典型，如等差數列、等比數列、巴斯卡三角形數，例如：「5、10、15、20…」，是開始於 5，每項為前一項加 5 的數列。

（三）結構樣式

結構樣式強調結構的存在（Owen, 1995），結構指概念之間的連結，即從一組有關聯性的事物中發現一些特質，例如：「5 可以用多少方式來組成？」會有 4＋1＝5、3＋2＝5、2＋3＝5、1＋4＝5 的答案出現。如數學乘法中的交換律、結合律和乘法對加法的分配律，都是屬於結構樣式的議題。

另一種結構樣式是指空間結構樣式（spatial structure patterns）。在幾何圖形變項的特徵中有不變的特質。如三角形、正方式、積木。常見如三角形數或正方形數之類的樣式，若從其數量的變化看來，與增長樣式有關，但因其具備空間結構的視覺特性，Papic 等人（2011）稱之為空間結構樣式，國內研究者則常採用「數形」來指稱（洪明賢，2003；趙曉燕、鍾靜，2010）。

上述三種樣式中，Threlfall（1999）認為重複樣式相較於數列等其他的樣式，是一種線性的型式較適合幼童學習，有助於數學思考能力的培養，加上多數的學者認為三種樣式中，幼童適合學習重複樣式（Clements & Sarama, 2009）。本研究認為重複樣式是學習其他樣式的基礎，引導幼兒進入複雜重複樣式學習，將有助於提升幼童多種數學概念及進深數學推理能力。

二、樣式推理相關研究

（一）掌握樣式單位推理

5-6 歲的幼童在自然遊戲中會堆積木完成簡單的 ABAB 重複樣式（Clements & Sarama, 2009; Seo & Ginsburg, 2004）；澳洲 Papic 等人研究（2011）發現有些幼童憑著記憶可以畫出 ABAB 樣

式，但讓幼童複製 ABBC 樣式就有困難。另外，Rittle-Johnson、Fyfe、McLean 與 McEldoon（2013）發現幼兒進入正式學校教育前已有重複樣式的概念，但仍有些幼童無法複製 ABB，反而會把 ABB 變成 ABAB 的樣式排列，幼兒需運用策略發現關係才能作樣式推理。吳昭容與嚴雅筑（2008）以四歲多和五歲多的幼兒為對象，採用單位內無重複（abcdabcdabcd…）、單位內有重複元素且相鄰（aabcaabcaabc…）、單位內有重複元素且不相鄰（abacabacabac…），以三種複雜度的樣式測試幼兒，發現單位內沒有重複元素的簡單樣式，幼兒有可能僅以一一對應的方式作推理，但未能掌握樣式的規律，幼兒必須學會掌握較大的單位才能提升解題的正確率。再就幼兒是如何掌握重複樣式？吳昭容與徐千惠（2010）指出五歲幼兒樣式推理受到重複樣式單位一定等長及前面作業出現過的單位元素影響解題。而 Mulligan 等人（2012）探討幼兒以樣式學習數量形的關係及發展推理能力時，發現幼兒會以不同方法發展出數量形結構的理解，注意到樣式單位重複及空間結構，並在過程中能覺知、記憶並複製排列數量及幾何圖案。

（二）引導樣式推理

幼兒雖然尚未能進一步發展出辨識既有規律，找出樣式結構的能力，但成人能引導他們學習樣式推理。Papic 等人（2011）以實驗介入探討樣式教學對於幼童樣式能力的影響，以及瞭解樣式能力測驗題組能否反映幼兒推理表現的變化。教學實驗歷經一年，以 53 名三歲多到五歲不等的幼兒為研究對象，分實驗組與對照組各半。在教學前、中、後各施測一次樣式能力評量。研究內容包含複雜度不一的重複樣式與數形樣式，一開始兩組幼兒樣式能力的表現相近，但教學中、後的評量發現實驗組得分顯著地較佳，而質性資料顯示實驗組比控制組能掌握重複樣式的單位與結構。研究結果顯示成人有系統地引入樣式活動對幼童察覺樣式單位與結構發展出乘法推理能力。

（三）有效介入樣式教學

樣式學習對幼童未來數學成就會有影響。德國以五歲、幼稚園到小學 1、2 年級共有 2250 名幼童為研究對象，從事四年的長期追蹤研究，調查幼童樣式推理能力是否影響小學的數學表現？研究結果發現學前樣式推理能力影響到小學一、二年級的數學成就，包括加減的運算能力（Lüken et al., 2014）。因此，教育學者認為早年有效介入可以建立幼童的數學思考與推理。再者，Klein、Starkey 與 Wakeley（2000）以數學知識介入 163 位學前幼兒（3 歲 9 個月到 4 歲 9 個月）數學教學研究，實驗組幼兒接受介入教學，而對照組未介入教學，介入教學前後幼兒接受兒童數學量表（Child Math Assessment）評量，檢驗介入教學成效。研究發現介入教學使得低社經的幼兒比未接受介入教學的幼兒表現好（Starkey, Klein, & Wakeley, 2004）。另外，Papic 與 Mulligan（2005）以 53 名幼童為研究對象發展樣式策略的實驗研究，其中一所學前學校實施 6

個月以重複樣式及空間樣式介入教學；另一所學校實施一般教學。研究發現介入教學組的後測樣式作業成績表現較優異，幼童能理解重複單位及空間關係。相對地，控制組的幼童卻看不到重複單位，而且介入的幼童能判斷出樣式的變化，並能在不同媒介使用下作樣式轉換。再經一年的調查，發現介入教學的幼童在增長樣式與算術評量分數優於控制組。次年，以兩所幼教機構的 64 名幼兒及 9 位幼教師為研究對象，比較原住民（實驗組）與主流學校從事 10 週樣式介入教學成效。研究結果發現幼教師能理解不同類型樣式，且提升學童代數思考的能力。從上述的兩個研究瞭解介入教學有助於幼兒發展出複雜樣式理解和技巧，幼兒在進入小學前，因接受介入教學已有抽象化、一般化及解釋樣式或分析樣式結構的能力（Papic, 2013）。可知，若從事介入教學也能提升幼童複雜重複樣式推理能力。

（四）複雜重複樣式及其重要性

複雜重複樣式由簡單重複樣式擴展而來，其樣式結構中組成單位元素比簡單重複樣式的單位元素變化多，幼童學習複雜樣式有助於未來數學進階的學習。以下分列說明複雜樣式結構與其重要性。

1.複雜重複樣式結構

就樣式單位元素組合而言，單位內含有不相鄰與相鄰的元素，且相鄰元素增多時，樣式的結構較複雜，如例一，○○□□△○○○○□□△○○○○□□△○○，其樣式單位是○○□□△○○。

就樣式單位元素排列方向而言，樣式單位元素排列方向一致者稱為直線樣式，而非直線樣式指單位元素排列的方向會改變。如例二

○○□□△○○○○□□△○○○○□

○○○○△□□○○○○△□□○○○○△□□○○○○△□□○○○○△□□○○○○△□

□□△○○○○□□△

因樣式蜿蜒排列又稱為「蛇形（或 S 型）」樣式，辨識此樣式時需注意到元素轉換方向的排列次序與前面的單位排列不同。

就延伸單位完整性而言，可分完整樣式與不完整樣式。完整樣式指單位的延伸到最後一個核心單位時仍完整重複出現，如例一。若延伸單位到結束時，最後的一個核心單仍不完整出現，稱為不完整樣式結構如例二。

就核心單位的複雜度而言，除單位元素量增加且單位重複出現外，單位與單位之間是否銜接，可分成切割單位與非切割單位兩種的複雜重複樣式。切割核心單位如 AABCABBCABCC-AABCABBCABCC，而非切割單位的重複樣式在延伸樣式時，樣式單位之間未加以分割如 5175117517751751175177，加上非直線排列難度最高。上述複雜重複樣式的不同結構，本研究在設計評量與教學皆加以應用。

2.複雜重複樣式重要性

由於數學樣式與結構推理發展是代數與函數推理的前置經驗（National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000），能辨識複雜重複樣式的結構，瞭解數形量的關係有利於解題、預測及一般化。根據 Threlfall（1999）探討 119 名 3-9 歲幼兒完成三色（紅綠黃）蛇形樣式延伸作業的表現，發現有 60%的幼兒能完成作業，更有六名幼兒挑戰更複雜的樣式（顏色、大小及形狀排列），而研究建議應發展幼兒複雜樣式推理，並探討他們如何看到這類的重複樣式及覺知這類核心單位而完成作業？因此，在教學上他建議循環重複樣式不只在單一向度上變化，也可以多個向度改變，他提出幼童掌握重複樣式的歷程，發展出兩種途徑；一個是樣式的複雜度，另一個是兒童如何發展掌握樣式，他認為當幼童能掌握樣式的單位就能掌握樣式，同時能發展出數學相關的多種概念，如等量、倍數、加減法的概念。例如，從樣式單位項目作累加而能發展出總量的概念，以及在測量的脈絡中，可使用相同長度為重複單位測量面積。

Warren 與 Copper（2006）利用重複樣式導入函數推理，在他們教學設計樣式活動時，從簡單 ABABAB 樣式開始，讓幼童認識樣式具有循環及延續性的特性以及辨識樣式單位的組成元素，再讓幼童臆測下一組樣式元素的出現，以操作方式延伸樣式。在第二階段教學加入函數概念，以不同材料與活動作樣式驗證，如呈現二組樣式單位再讓幼童延伸樣式，再遮蓋第三組，讓幼童臆測第三組的組成元素，然後讓幼童推論出三組共有幾個物件，若繼續延伸，並使用表格整理樣式元素增加情形，可供幼童看到物件倍數的增加，也從表格統理數字對照出樣式物件數量成比例的成長如右圖（Warren & Copper, 2008, p.118）。 ■□□■□□

可知變化重複樣式的單位元素可提升幼兒函數與比例的思維能力，而重複樣式學習不只支持學童具有一般化的能力外，變化重複樣式也能提升函數與比例關係的推理能力。

另外，Tsamir 等人（2015）認為幼童未入進入小學之前，先有重複樣式的基礎則有利於進入小學學習小數，特別是有機會遇到解決小數循環的問題，小數循環屬複雜重複樣式，而本研究設計未切割核心單位的複雜樣式較屬於大核心單位的重複樣式，幼童學習未切割核心單位的複雜重複樣式可為學小數循環奠基。因此，學習複雜重複樣式對幼童未來數學學習有效益。

總之，大多數的幼童可以辨識及延伸簡單重複樣式，雖有少數的幼童仍無法完成，但經介入樣式教學能提升幼童樣式推理能力，他們不只會簡單重複樣式，還會延伸增長樣式、轉換樣式，及發展複雜樣式理解與解題技巧。更有研究者以複雜重複樣式挑戰幼童推理能力，因此，本研究認為從簡單重複樣式開始學習，再進入複雜重複樣式學習，可透過引導提升幼童樣式推理能力。

三、樣式教學模式

本研究為促進幼兒樣式推理能力成長，提出樣式教學模式，從尋找樣式、辨識樣式單位、

標示單位、臆測單位、延伸單位到驗證樣式，幫助幼兒發展出複雜重複樣式的推理能力。教學模式如圖 1：

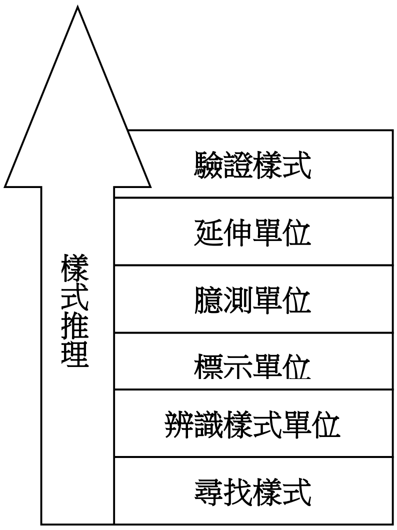


圖 1　本研究樣式教學模式

（一）尋找樣式

帶領幼童發現樣式，先引導學生注意所呈列的物件具有循環重複出現的特性。Lynn（2013）發現幼兒在樣式推理中，以重複出現作為確認樣式的特性，不忽略掉規律探索，若要提升幼童的推理，幼童必須先學會以重複單位為判斷樣式的標準，再延伸樣式及增長樣式。

（二）辨識樣式單位

樣式推理教學的初始任務在引導學童確認是否重複樣式？吳昭容與徐千惠（2010）認為幼童能完成樣式解題在於先辨識樣式中的單位。辨識樣式單位指能看出樣式排列中重複出現元素組成的單位。Cooper 與 Warren（2008）建構作業讓學生能覺察重複樣式與增長樣式之間的差異，例如 RB、RBB、RBBB、RBBBB 的樣式裡，R 每次都重複，但 B 實際上不斷發展，學生若能注意此兩種樣式的差異，察覺到何者增長？何者是保持一樣？則可以促使他們合宜反映到更複雜的樣式上。

（三）標示單位

Threlfall（1999）認為尋找樣式的核心單位是樣式推理關鍵；Sophian（2007）也提出尋找核心單位是學習數學概念基本要件，在幼童階段引入單位可作為發展銜接數概念及程序知識與進階數學的一座橋樑。因此，樣式推理或一般化最基本要掌握是樣式的核心單位，如 ABABAB 核心單位是 AB，較複雜單位內有相鄰的元素如 ABBCABBC，核心單位為 ABBC；因此，辨識樣式後標示單位很重要。

（四）臆測單位

臆測單位指在標示單位後，臆測下一個核心單位是否會重複或循環出現。臆測被界定為一種合理的假設，陳英娥與林福來（1998）認為臆測是個體面對問題時，提出一個合理猜測的過程。本研究的臆測指幼童經樣式觀察後，根據前面出現過的樣式單位作下一個單位出現的合理推測。臆測與辨識樣式單位有密切的關係，因為在既定的資料中對既定的事實提出質疑，主要功能在根據樣式的結構能形成一般化。而樣式推理發展出的臆測能讓學生有機會在樣式推理下，進而判斷樣式是否能延伸？然後再驗證推論結果（Stylianides, 2009）。因此，Stylianides（2008）認為樣式－臆測－驗證存有線性關係，臆測必須經過辨識樣式單位而來。

（五）延伸單位

延伸單位是在持續延伸核心單位，無論是往直線或非直線的方向延續下去，核心單位會重複出現。Warren 與 Cooper（2008）認為延伸樣式能看出學生樣式推理一般化的理解程度。延伸樣式的重要性在幫助學習者能辨識樣式的規則與變化情形。

（六）驗證樣式

驗證主要功能是對接受的事實作有效的論證或拒絕數學的宣稱（Stylianides, 2008, p. 11）。驗證樣式是指檢驗樣式在延伸單位時，是否與前面單位有循環、重複或增長的關係？驗證的目的在於解釋、校正（verification），及形成新知識（Stylianides, 2009）。當幼童對延續排列的樣式單位對照前面出現過的核心單位，若核對成功則接受原先的臆測，再進行延伸樣式，發展出複雜重複樣式關係的新理解形成一般化，因而提升複雜重複樣式推理能力。從事樣式推理一開始會先排列重要事實成為有意義的樣式，使用樣式形成臆測及驗證，並以新的例證、修正臆測及提出可能的反例，再瞭解所提供的論證是否正確，並測試這些臆測即驗證。

因此，教學模式的教學流程，先由教師帶領幼童尋找樣式，再進入辨識樣式單位、標示單位、臆測單位與延伸單位，最後驗證樣式。樣式教學模式是讓幼童以循序漸進的方式學習樣式概念，若幼童在學習過程中遇到困難，教師則先在該階段停留，直等待幼童在該階段熟練後，再邁入下階段學習。

參、研究方法

本研究探討幼童經由樣式教學之後的學習表現為何？教師如何實施樣式教學提升幼童樣式推理能力？為此，本研究進行實驗教學及發展樣式作業以瞭解樣式教學的成效。

一、研究設計

本研究為探索性研究，以南部一所大學附設幼兒園兩班大班實施樣式推理教學，每班各三

十名，平均年齡約 6 歲。其中一班為實驗組實施樣式教學模式；另一班為控制組維持原來樣式教學的方式。兩班依據幼兒園的數學教學目標與提供的坊間教材進行教學。實驗組參考幼兒園的數學教材設計樣式教學內容，並以符合幼兒認知發展的學習軌道設計樣式教學活動完成樣式教學目標。兩班同時進行樣式教學，樣式教學期間從 104 年 1 月 2 日，每週一堂約五十分鐘實施八堂課，期間因遇放假兩週，教學延至 104 年 3 月 9 日，兩組的教學，如表 1。兩班幼童在實驗教學前後接受前後測，並實施延後測；延後測與後測時間隔約二個月（6 月）施測。

二、研究對象與情境

兩班六十名幼童，每班各三十名，實驗組有 18 位男童及 12 位女童；控制組 17 位男童及 13 位女童，平均年齡 6 歲，皆來自中社經地位家庭。兩班教師年資相當，畢業於教育大學幼教系。在兩班教師成員中，實驗組除主教教師外，另有教保員協助教學。由於研究者曾在幼兒園進行臨床教學過熟識主教老師，實驗組主教老師也曾向研究者反應過她的數學教學困擾。爾後，彼此常有交換心得與教法機會。因此，實施實驗教學時研究者邀請她從事教學，而研究者負責提供樣式教學理論與教學活動，教學前後研究者與主教老師共同討論教案及教學；控制組有兩位教師，一位主教老師，另一位教師協助教學（主要記錄學習檔及保育工作）。因為兩班的教學目標相同，研究者會與兩班主教老師討論教學進度及教材。

三、教學內容

兩班實驗教學以重複樣式為主，教學內容包括直線與非直線，簡單及複雜重複樣式，而樣式教學配合幼兒園數學教材的學習目標設計教學。在實驗教學之前，兩班的教師先討論教學進度及教學方式，兩班的教學活動相似：1.以故事帶入教學，控制組以故事（教材）帶入樣式教學；實驗組自編故事（生活議題、繪本）帶入樣式教學；2.以遊戲增強概念，控制組課堂以個別遊戲，如桌遊加強數學概念，實驗組以團體遊戲加強數學概念；3.教材操作練習，控制組操作坊間提供的數學材料，而實驗組除使用幼兒園提供教材外也自製教具如圖片輔助教學。實驗組與控制組不同在於依樣式教學模式將概念加以細分（依照教學模式），引導幼童學習。

至於樣式教學方式，兩班的教法相似，引導幼童辨識樣式單位時，先以背誦口訣（如糖果糖果餅干御飯糰-糖果餅干餅干御飯糰）的方式幫助幼童熟練單位元素的變化；樣式排列都採逆方向延伸樣式（蛇形）的型式，每當幼童完成樣式排列後，教師會要求幼童計數樣式組合物件共有幾個，例如不同形狀或同類的物件共有幾個。至於實驗組一開始也會在簡單重複樣式教學時，複誦樣式單位元素（如綠紅藍綠紅藍），然而在複雜重複樣式教學時，因樣式單位元素多，加強幼兒發現樣式關係，先尋找樣式、辨識樣式單位、標示樣式單位等步驟，掌握單位元素的變化，兩組教學方法與內容，如表 1。

表 1

兩組教學方法與內容

	實驗組		控制組	
樣式種類	樣式結構	教學方法 & 內容	樣式結構	教學方法 & 內容
簡單重複樣式	1.ABC 元素不重複	「籃球比賽」排三色球-探索樣式	1.ABC 元素不重複	玩「購衣物」排三種衣物認-識樣式
	2.ABCD 元素不重複	「聖誕裝飾」用☆○△◇（色紙）-辨識單位	2.ABCD 元素不重複	「選帽子」擺四種帽子-辨識樣式
	3.ABCCD 元素相鄰	「大家來修橋」比賽貼色紙-標示單位	3.ABCCD 元素相鄰	輪流「進學習區」（語文角兩次）練習-分辨相鄰元素
複雜重複樣式	4.直線複雜重複樣式 AABC-ABBC-AB CC 切割單位	「下午茶」操作茶品-臆測樣式及延伸樣式	4.直線複雜重樣式 AABC-ABBC-ABCC	「早餐店點餐」漢堡薯條三明治-練習分割樣式
複雜重複樣式非直線 AABC-ABBC-ABCC	5.非直線複雜重複樣式 AABC-ABBC-ABCC 切割單位	「阿平菜單」排圖練習-臆測樣式	5.AABC-ABBC-ABCC 切割單位	「整理零食盒」糖果餅干御飯糰-練習認識核心單位
	6.AABCABBCABCC 未切割單位	「白鵝農莊」排圖卡△□○△□□○△□○○-臆測、延伸樣式	6.AABC-ABBC-ABCC 切割單位	「圖形排序」操作△△□○-△□□○-△□○○-（復誦單位）
非直線 AABC ABBC ABCC	7.AABCABBCABCC 未切割單位	「青青草原」表徵動物-延伸、驗證樣式	7.AABCABBCABCC 未切割單位	「彩色火車」積木排火車車箱-（復誦單位）
	8.AABCABBCABCC 未切割單位	「照顧」操作圖卡-延伸、驗證樣式	8.AABCABBCABCC 未切割單位	「旋轉木馬」排圖形木馬座椅（復誦單位）

四、評量工具

評量工具分兩種，一種是「幼童樣式推理作業」，使用在實驗教學前、後測及延後測，目的在瞭解樣式教學的成效；另一種是「課堂樣式推理作業」，於課堂教學後使用，目的在瞭解幼童當週樣式學習情形，並作為下次教學及修正教學參考。

（一）評量工具設計原則

1.每一種作業樣式單位延續三個以上

根據 Tsamir 等人（2015）的研究發現，樣式的單位完整性及延續性會影響幼童推理表現。故本研究評量工具的樣式至少連續三個單位以上，而且每一個單位至少由四個以上的元素組成，目的在於瞭解幼童經由介入教學之後，推理表現是否能超越過去的研究—幼童只會辨識 ABCABC 樣式（Clements & Sarama, 2009）？因此，研究工具的樣式作業難度較高，每個樣式作業都是三個單位以上連續排列的樣式。

2.以非直線性樣式為主

Mouhayar（2014）認為學童會直線性樣式推理，在樣式一般化的表現比非直線的樣式表現好，而且不一定會非直線性的樣式推理。本研究設計非直線的複雜樣式作業，探討幼童是否經由樣式教學能克服非直線樣式推理的難度完成作業。

3.實作評量

本研究設計的兩種樣式作業都採實作評量。施測的過程中，「課堂樣式推理作業」由幼童操作擺放物件或畫圖或著色完成作業。「幼童樣式推理作業」以物件填充空缺或空白部分的方式完成作業，物件包括移動式的圖片或圖形。

（二）評量作業編製與實施

1.幼童樣式推理作業

「幼童樣式推理作業」有四個重複樣式作業，供教學前、後測及延後測的評量使用（施測時與增長樣式及數形同時施測）。作業先經過預試，將初步預測的結果編製 8 個重複樣式作業，再針對 4.1 歲至 6.4 歲的 62 名幼童施測，從中篩選出適合六歲兒童樣式推理的作業，並修正與刪除不適合的題型，例如將原本設計 ABC 簡單重複樣式作業加以刪除（共四題），保留四個至少有四個元素以上的重複樣式作業（除四個元素外，並增加樣式元素及排列方向）。預測的 α 值為.70，作業如圖 2 至圖 5（陳埩淑，2017）。作業計分方式是正確完成者得 1 分，錯誤或未完成以零分計，答對四題共 4 分。

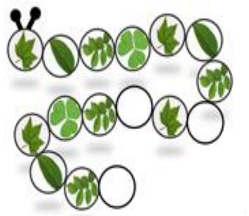


圖 2　簡單重複樣式

圖 3　簡單重複樣式

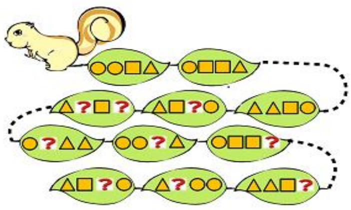


圖 4　切割單位複雜重複樣式

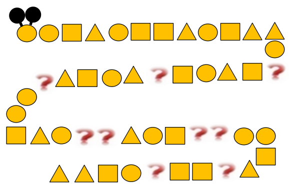


圖 5　未切割單位複雜重複樣式

正式樣式作業編製完成後，為使作業能吸引幼童投入解題，請幼教師提供施測的方式及指導語的建議。施測時，對幼童說明是玩益智遊戲，也說明作答方式，並告知仔細審題、思考及作判斷，再拿取合適的物件排列樣式或補足樣式單位中的空缺，以完成作業解題。施測採一對一的方式進行，由幼童逐一完成。在完成每一項作業後，施測者訪談受試者：「你怎麼知道要這麼做？」受試者可以動作、言語說明使用解題的策略，每位幼童約 15 分鐘完成四個作業，評量過程中拍照攝影。

2.課堂樣式推理作業

為瞭解實驗組重複樣式教學後幼兒學習情形，設計八堂課的「課堂樣式推理作業」，實施時間在課堂結束前十分鐘，由幼童個別完成。作業作答的方式由幼兒畫圖、粘貼物件或著色完成，並由教師校正作答的正確性，研究者並於課後統計全班正確完成作業人數，再計算出全班答對的平均數，如表 2。

（三）評分

本研究以量化與質性資料建構評分一致性。本研究評幼童樣式推理表現，會針對幼兒答題加以歸納分類。量化資料方面，答對者以一分計，答錯及答一半者以零分計，計算出六十名幼童接受前、後及延後測樣式評量成績。在質性資料方面，幼童在前、後測及延後者施測過程中，施測者針對每一題幼童作答後，訪談、錄音及記錄解題使用的策略，問:「你怎麼知道要這麼做？」，再將資料比對及分類：完成樣式作業、完成一半及未完成（答錯）的三類，分類後可提供建立評量原則，並瞭解幼童對樣式單位的理解程度。如完成一半的幼童說：「用算的」（C3）、「我已經數過了」（C4）、「因為看前面的」（C5）。完成者會說：「因為是重複樣式」（C20、23）或「看到單位」（C28）；未完成的會說：「不知道」（C31）及「就是這樣」（C38）。研究者將這些質性資料與量化資料作對比，完成評分者一致性之建構。

五、資料蒐集與分析

資料蒐集包括觀察、攝影教師樣式教學，以及對研究對象訪談。之後進行量化分析與質性分析，質性分析以質性描述幼童學習樣式推理的歷程；量化資料以評量來分析教學成效。資料

分析在量的方面，因為幼童樣式推理表現評量分兩種。首先對「幼童樣式推理作業」前、後測的結果加以整理，並將資料進行統計分析，如使用共變數分析兩組之間的教學效果。同時，以 *t* 考驗瞭解實驗組前、後測的表現。另外，在幼童課堂樣式作業表現方面，本研究將每一堂課幼童學習成效，以正確完成作業作為指標，並計分統計，再以全班平均數呈現每堂課的教學成效。在質性資料方面，將拍攝影片及訪談錄音內容經轉譯後作資料分析，分析時先將觀察、訪談的資料加以編碼，如 O：教學觀察；T：教師；C：幼童；I：訪談。檢視蒐集到的樣式教學錄影、訪談教師的觀點及幼童反應的一致性。

肆、研究結果與討論

回應本研究研究目的分二部分說明，第一部分敘述在教學歷程中教師如何進行樣式教學提升幼童樣式推理能力；第二部分由樣式作業評量結果顯示教師樣式教學成效。

一、樣式教學實施

教師實施重複樣式推理教學，先瞭解幼童樣式概念發展及學習動機，並配合活動引導幼童學習。由於 Klein 與 Starkey（2004）提出幼兒理解抽象的樣式概念是逐漸發展出來的，主張應在幼童樣式學習階段提供愉快的經驗，將有助於學童發展出樣式推理能力，甚至後來學習代數都能具有積極正面的態度。實驗組教師為引起幼童學習興趣透過故事、遊戲及操作帶入樣式概念。引用的故事內容包括生活紀律（阿平菜單）、品格教導（大象班下午茶、白鵝農莊、照顧）及認識大自然現象（青青草原），再藉由故事情節的轉化幫助幼童發現樣式，進而學習複雜樣式的推理，也將故事作為樣式解題的背景，讓幼童探索樣式，尋找辨識樣式核心單位、練習標示單位、臆測單位、延伸樣式及驗證樣式，完成樣式推理任務。

（一）以遊戲尋找樣式

遊戲能激發概念發展與問題解決的能力（Bodrova & Leong, 2007）。教師以投籃遊戲帶領幼童探索及辨識樣式。教師先將幼童分成三組（綠、紅、藍）玩投籃比賽，幼童玩兩三回後，教師以綠紅藍（ABC）圖卡表徵三種顏色的球，請幼童將投擲結果依比賽的名次。第一、二、三依序貼圖卡在白板上加以排序，也請幼童排列時要唸出圖卡顏色的順序：綠-紅-藍-綠-紅-藍，幼童發現籃球是有規律的排列著，這時教師適時帶入「樣式」的定義。

T：那我們要利用第一名和第二、三名的排名來排一個樣式喔！要怎麼排呢？譬如說，綠、紅、藍，那下面就還要？綠、紅、藍，再來接下去呢？就是要排一個重複，像排隊那樣有重複的、有秩序、有規則的排喔！這就是樣式，排了以後要反覆喔！綠、紅、藍，下去是？

C：綠、紅、藍，綠、紅、藍。

T：所以，樣式就是要這樣排！如 

C：好漂亮喔！

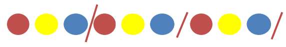
幼童看著規則排出來的顏色驚呼！

教師利用遊戲比賽幫助幼童理解「樣式」的定義，讓幼童認識由綠、紅、藍三種顏色重複出現所排列的組合稱之為「樣式」，也是由 ABC 三個不同元素構成的簡單重複樣式，因而教師對「樣式」下定義就是有重複的、有秩序、有規則的排列出現的組合，幼童得知綠-紅-藍三種顏色重複出現的現象，就是「樣式」。這如 Lynn（2013）所提幼童要在樣式推理中，找到規律確認樣式有重複出現的特性，幼童學會以重複單位為判斷樣式的標準，再發展出延伸的樣式。

（二）辨識及標示樣式單位

教師掌握樣式結構是由核心單位排列形成，在設計的遊戲情境中，讓幼童認識「樣式」之後，還要幼童在樣式中發現一組一直持續出現的重複單位－「核心單位」。幼童除認識樣式外，也需獨自尋找樣式中的單位，而核心單位的概念必需由教師加以說明。

T：大家要來找出單位！什麼是單位呢？就是紅、黃、藍一組完了以後，還要再一組紅、黃、藍，而紅、黃、藍這就是一個單位。所以請你們要找到單位，在哪裡？畫看看！

老師請一位男生來畫在兩組紅黃藍之間用“/”隔開，再畫第三組單位，如 

因為在多種變項元素組成的樣式中，能順利解題需要單位化（歸納、組織元素為一個單位）的能力。核心單位在樣式中是持續出現，Tsamir 等人（2015）認為在延續的重複樣式中，幼童才能辨識並標示單位。而 Orton 與 Orton（1999）提出為加強幼童樣式循環概念應由幼童去延伸樣式，而一次只增加一個元素，並標示樣式單位。

1.標示不相鄰元素樣式單位

教師安排幼童創作樣式瞭解他們辨識樣式單位的理解程度。教師提供四種不同顏色與圖形（☆○△◇）的彩色紙，幼童把這些圖形當吊飾黏在一長條的緞帶上，掛在牆壁上佈置教室，而各組都能正確排列出 ABCD 四個元素不相鄰的樣式。

因此，教學一開始教師以遊戲帶領幼兒探索樣式，把樣式概念蘊含在遊戲中，幼童從遊戲瞭解數量形關係，而學會辨識樣式及標示出單位。

2.標示相鄰元素樣式單位

為使幼童能從不同的樣式結構中探索、辨識單位及擴展樣式規則，進而作臆測推理。教師引導幼童在有結構且多向度的樣式中找核心單位。樣式教學活動從簡單的重複樣式 ABC 的結構，改變為增加兩個元素且有相鄰的 ABCCD 重複樣式結構。

教師以「大家來修橋」的故事作為學習脈絡─從東村到西村要經過一座橋，橋面上缺一個洞，村民一直不理會，直到有一天刮颱風，橋斷了，帶給兩村村民生活物資供給及交通不便，村長才叫大家來修橋，他規定橋面要以四種顏色的木頭舖地板，舖的樣式需有顏色相鄰如 ABCCD，使修好的橋成為一座彩色橋。教師拿出一張畫有一座四色橋的大海報，請幼童站在這座橋前面先辨識 ABCCD 樣式，再標出單位。全班分成兩隊比賽在教室的地板上造橋，在幼童合作下用四種色紙排列出 ABCCD 樣式，造出兩座彩虹橋，如圖 6。

活動結束後，教師也發下四種顏色的色紙剪成長條形，分給每一位幼童自由創作造彩虹橋，幼童把色紙依序黏貼在畫好的吊橋上（圖畫紙），再由教師檢查學習活動的成果。但在個別造橋時，全班有四分之一的幼童必須撕掉色紙重貼，因為幼童貼錯樣式。由於這個作業增加了相鄰的元素，且師生之間的使用表徵方式不同所致。

教師教學時遇到與幼童會使用符號表徵的差異影響教學成效。如教師在呈現樣式單位時會使用數字表徵代表樣式的「序列」。以 12345 代表「數量」，如 1 代表 1 個；2 代表 2 個；3 代表 3 個。教師在「大家來修橋」活動中，標示單位內重複相鄰的元素時，以口訣提示幼童四種顏色排列的變化，以 1121 表徵四種顏色排列方式，也當作拆解樣式結構的密碼。如 1121 的 1 表示一種顏色出現一次，2 表示顏色出現兩次，所以五條色紙出現的數量為 1121，但與幼童的表徵方式大不相同。因為幼童標示物件排列為 12334，1 代表綠色，2 代表橘色，3 代表黑色，而 33 表示黑色出現兩次，4 代表咖啡色。因此，師生之間不同的表徵方式，致使幼童在學習這類樣式標示單位時，形成認知衝突，故有四分之一的幼童無法完成課堂的樣式作業，但經解說後，幼童全部完成作業。

圖 6　ABCCD 樣式

由此活動顯示幼童能以符號表徵從事相鄰元素樣式推理。同時，幼童也能完成 ABCCD 樣式推理，克服 Rittle-Johnson 等人（2013）的研究所提有些幼童無法複製 ABB，反而會把 ABB 變成 ABAB 的樣式排列的困難。另外，大部分幼童能掌握樣式規律完成單位內有重複元素且相鄰的樣式作業，未如吳昭容與嚴雅筑（2008）研究發現在解樣式題時幼童只用一一對應的方式解題，反而是大部份的幼童會運用數字表徵解題。

（三）臆測樣式單位

幼童能從 ABCCD 樣式學會掌握單位中變化的規律，在辨識大單位樣式後，幼童要進入複雜重複樣式的臆測。教師先帶領幼童學習臆測完整單位重複樣式，再臆測不完整單位重複樣式，從直線複雜重複樣式深入非直線複雜重複樣式解題，並能類推單位及臆測單位形成一般化。

1.複雜重複樣式完整單位臆測

樣式核心單位的長度會影響幼童樣式推理。由於幼童在臆測樣式之前，要先找到樣式變化規則才能臆測樣式。在直線樣式中為協助幼童尋找核心大單位，教師先把大單位細分成幾個次單位，並配合故事引導幼童看到單位元素變化的規律。

教師先回到第一步驟讓幼童學習尋找樣式，從排列的物件中找出第一個樣式單位。幼童由「下午茶」的故事進入複雜樣式概念學習。故事描述：大象邀請青蛙、大熊及小白兔來他的家喝下午茶，大象準備他們愛喝的飲料分別是青蛙愛喝的綠茶、大熊的紅茶及小白兔的奶茶。倒飲料時，青蛙說他太渴了，要先喝兩杯綠茶，而大熊只要一杯紅茶、小白兔一杯奶茶，排列出「綠茶-綠茶-紅茶-奶茶」。大家喝了飲料之後，大熊突然說他也要喝兩杯紅茶，所以大象就倒給青蛙綠茶一杯、大熊紅茶兩杯，小白兔奶茶一杯即「綠茶-紅茶-紅茶-奶茶」。倒完之後，這時小白兔也叫著說他也要兩杯奶茶才公平「綠茶-紅茶-奶茶-奶茶」。

C：啊！每一種茶都有人喝兩杯，三種茶，就每一種都喝掉四杯！輪三次共 12 杯，很公平！所以大象這一回就倒了十二杯茶給大家，再一回合也是十二杯！

T：每次都會重複出現就是核心大單位，也是樣式推理中要掌握的。

為讓幼童能理解核心單位元素變化，教師安排讓幼童在真實經驗中學習樣式，除提供預備好的三種茶讓幼童品嚐外，教師把三種茶的圖卡排在白板上，讓幼童排出核心單位，再由幼童在白板上標示出單位，如圖 7。

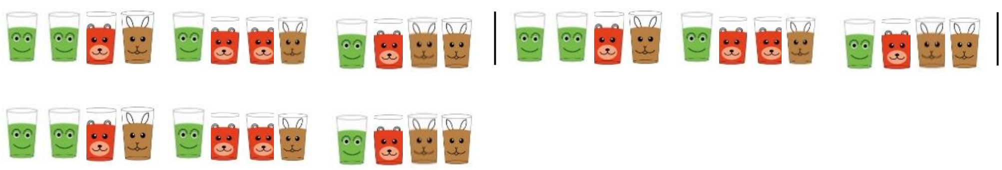


圖 7　直線複雜重複樣式

幼童能從這個活動中領悟到樣式的變化，瞭解一個大的核心單位是由三個元素變化增長重複組成。同時，在教師的帶領下，幼童在標示單位時有大單位的概念。幼童從「下午茶」的活動中，能看到三種飲料數量的變化，得知樣式元素變化的規則及樣式結構。

2.不完整單位重複樣式臆測

教師為讓幼童能在樣式結構中臆測單位，設計不完整單位的樣式結構，先讓幼童辨識完整樣式的單位之後，再讓幼童發現不完整單位欠缺的元素，而補足合適的單位元素，進而瞭解樣式的深層結構。再以「下午茶」情境為複雜重複樣式學習的脈絡，以三種飲料作為單位元素設計不完整單位的樣式供幼童推理。

教師先以遊戲方式讓每位幼童持有三種飲料的卡片，排成一行，再把指揮棒交給一位志願當領袖的幼童，依照三種元素（綠茶、紅茶、奶茶）每輪一次增加一個元素為原則排成重複樣式，再由領袖以指揮棒切割單位，找出大的核心單位，而元素排列可由領導者決定從那一種飲料開始排起，但必須排出三個單位以上的重複樣式，而其中最後的單位要不完整。在練習活動結束後，教師讓幼童練習不完整單位的樣式臆測，提供的樣式作業如下圖 8：

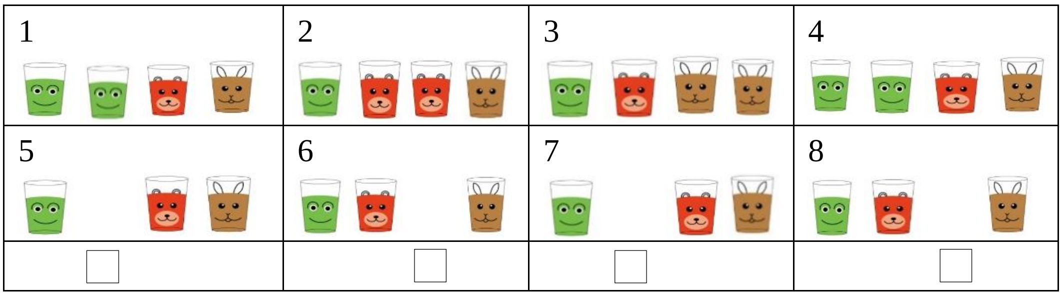


圖 8　不完整樣式單位作業

在圖 8 的作業中，教師把樣式的核心單位分成三個次單位，先讓幼童明白每個單位元素變化的情形，再讓他們推測出下一個延續單位的變化，並補齊單位中欠缺的元素。幼童以符號表徵單位元素，可用繪畫、數字、語言，圖表表徵數學概念和關係（Greenes, 1999; Owen, 1995）。這個作業需要幼童先確認單位後，再把空缺處以顏色表徵飲料。幼童以綠紅棕三色塗滿圖 8 的正方形空格完成作業。如在 5 的格子裡應補上綠茶，故正方形的框框要塗綠色。

整體而言，這個作業有 88%幼童完成，其餘未完成的幼童大都在表徵符號轉換上有困難，因為這個作業需要幼兒調整他們的認知結構，和記憶飲料的表徵顏色與樣式結構，並克服在不完整單位結構中完成任務。依 Tsamir 等人（2015）的研究發現，幼童較習慣在線性且完整結束單位的樣式結構中解題，若在延續的樣式中，給予不完整的單位，幼童無法正確的臆測這類樣式及瞭解樣式的結構，幼童更無法延伸這類樣式。而依本研究進行不完整單位複雜重複樣式的教學下，有 88%幼童能完成這類的作業。

（四）延伸及驗證非直線複雜重複樣式

幼童在辨識簡單重複樣式時會參照前面出現過的單位，以左右手對應的方式尋找單位，左手指著前面單位的元素，右手搜尋下一個單位的元素，以一一對應的方式依序找尋相對應的元

素，如左手食指按著 A，右手手指跟著找下一個單位中的 A，依此方式來回搜尋，直到每一單位中的每個元素都對應到為止，才完成樣式辨識任務。由於本研究設計的複雜重複樣式結構，樣式單位是由三個元素變化數量及方向而成，元素的排列依序輪流加 1 且相鄰，核心單位共有十二元素，樣式的結構較為複雜。幼童必須掌握樣式排列的規則才能臆測及延伸樣式。因此，若幼童仍固著心智解複雜重複樣式作業時（吳昭容、徐千惠，2010），以一一對應的策略辨識核心單位，在延伸樣式時就會失敗，因為應用一一對應策略在視覺廣度受限之下，無法掌握樣式大單位元素的變化。

另外，在複雜重複樣式的排列上加上方向的變異，難度高將挑戰幼童樣式推理的能力。前述幼童已熟悉直線單位元素同方向排列方式，當複雜重複樣式的排列方向改變，延伸樣式時須注意到單位中元素的排列方向是否一致？因此，幼童要能掌握單位元素數量的改變及方向變換發展出新的解題策略因應。

1.切割核心單位延伸與驗證樣式

為幫助幼童克服非直線複雜重複樣式的難度，教師的教學策略是先將核心大單位切割成三個小單位，讓幼童先掌握以一個小單位中元素的變化，如 AABC，再檢查第二小單位 ABBC，最後再查看第三個小單位 ABCC 的排列。當幼童理解三個元素各輪流增長一次後，再結合三小單位為一個大的核心單位，然後，再找出下一個核心單位延伸樣式。

在延伸非直線複雜重複樣式教學活動中，教師仍以故事引入樣式推理，以幼童生活紀律為主題，以「阿平菜單」故事為脈絡，描述阿平愛吃零食，不吃正餐導致肚子痛，為幫助阿平建立良好飲食習慣，請幼童幫忙設計菜單，教師問他們建議阿平應吃哪種食物最健康？教師用圖形讓幼童聯想食物種類、表徵食物及排列食物，如圖 9，媽媽的菜單。

老師拿出圓形、正方式及三角形，分別問這三種圖形可以代表什麼食物，拿出圓形時，

C：荷包蛋、蘋果、西瓜、...

老師把幼童所說的食物圖片排列在圓形圖片的下方，如圖 9。

T：接著我們要來比賽，排兩排，這是媽媽的菜單喔！

教師畫出餐桌擺放盤子的順序，先讓幼童瞭解每一盤食物擺放的原則，一天三餐有三個盤子，由幼童分兩組排列食物樣式，並標示單位。老師在白板上各貼了 9 個盤子，第一個盤子放 2 個圓、1 個三角形跟 1 個方形，第二盤放 1 個圓、2 個三角形與 1 個方形，第三盤放 1 個圓、1 個三角形跟 2 個方形。 老師指著盤子

T：是從左邊開始，你們要注意方向喔！這是媽媽的菜，請看上面的圖形早餐中餐晚餐為一個單位，所以是一天，那上面總共有幾天呢？

C：3 天

T：那我現在請一位小朋友們上來幫我畫單位，一天為一個單位喔！一天結束之後這樣才會重新開始。

接著小朋友開始輪流上台貼上每天不同的圖形變化。

T:眼睛睜大一點來看看喔！早餐午餐晚餐，為一個單位喔！之後每位小朋友輪流上去貼圖形，比賽結束之後作驗證。

T：我們來看看左邊的對不對？左邊的小朋友在早餐貼上 2 個圓、1 個三角形跟 1 個長方形，在午餐貼上 1 個圓、2 個三角形跟 1 個長方形在晚餐貼上，1 個圓、1 個三角形跟 2 個長方形（各重複 3 次）。

T：左邊的答對了！我們來看看右邊的小朋友在早餐畫上 2 個圓、1 個三角形跟 1 個長方形，午餐畫上 1 個圓、2 個三角形跟 1 個長方形，在晚餐畫上 1 個圓、1 個三角形跟 2 個長方形（各重複 3 次）。

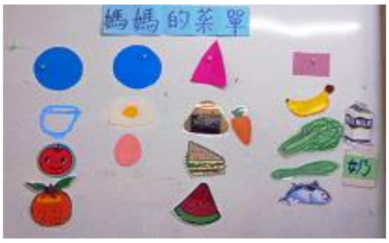


圖 9　以圖形表徵食物

當幼童瞭解核心單位方向不同及單位元素之間的變化，再經教師的提示與帶領驗證以及在全班幼童共同監控下，幼童正確完成切割單位重複樣式。活動結束後，幼童以個別練習方式完成非直線切割單位樣式作業，如圖 10，是其中的一名幼童在盤子上面依數量的變化畫三種幾何圖形的排列方式，並在連結線上以藍色線標示單位所在。全班的幼童 100%能完成非直線切割單位重複樣式的作業。

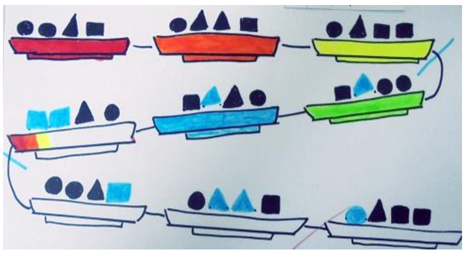


圖 10　切割單位的複雜重複樣式

2.延伸與驗證未切割核心單位重複樣式

未切割核心單位是指樣式核心單位由三個元素各增長一個元素，且元素之間是連續相連，如 AABCABBCABCC 組成，加上延伸時排列方向會改變。幼童學習這類樣式的先備經驗須熟練已切割的核心單位複雜重複樣式。

這類的樣式安排「白鵝農莊」、「青青草原」及「照顧」三堂課進行教學。教師仍帶領幼兒先辨識樣式、標示單位、臆測單位及延伸單位。至於，未切割核心單位重複樣式的第一堂課「白鵝農莊」教學後，只有 51%幼童完成樣式作業。因為這是幼童初次接觸這類的樣式，再加上課堂作業要求幼童標示單位後，畫出多延伸一個單位，如圖 11。因為幼童遇到標示核心單位的困難，為克服難題，教師再設計「青青草原」活動。在進入非直線切割單位及切割單位的解題中，教師幫助幼童先學習樣式表徵。教學活動由幼童以分組合作競賽方式練習這類的樣式，幼童扮演小動物玩類似母雞帶小雞的遊戲，組員戴幾何圖形頭套表徵動物如三角形表徵豹、正方形表徵象、圓形表徵熊。為抵抗怪獸侵襲，隊員排成核心單位組成守護團隊，由隊長帶領討論標示單位，每組為一個核心單位，連續排三組核心單位，並蜿蜒排列形成堡壘，再由隊長校正每組樣式排列的正確性。這次活動由幼童自發性排列樣式，以分組的方式組成核心單位，並在討論中延伸樣式與校正樣式，在標示單位及校正樣式時由兩隊隊員自行討論老師未介入，有 64%幼童能完成樣式作業。

圖 11　「白鵝農莊」複雜重複樣式作業

教師再安排第三次未切割核心單位複雜重複樣式的學習-「照顧」。「照顧」的故事由「老樹上的小鳥」繪本改編而來，描述樹上一隻母鳥除了照顧兩隻雛鳥外，還要特別去照顧鄰近一棵樹上的老鳥，母鳥每天不停在兩棵樹之間來回餵食雛鳥及老鳥。教師以■●▲圖卡表徵三種食物，以圖形讓幼童聯想食物。幼童討論後以圖形表徵鳥兒愛吃的食物。母鳥一天要餵三餐，每天來回的餵，連續餵食好幾天。幼童依序排列出老鳥、雛鳥及母鳥所需的食物，老師拿圖卡給幼童排列樣式，延伸及驗證樣式，如圖 12 所列。

T：請小朋友上來排母鳥餵食的情形，再由大家來驗證排得對不對？	
C1 在白板上排 1 個方形 1 個圓形 1 個三角形	排列樣式
C：錯了！	
T：錯在哪裡？	校正
C：要 2 個正方形。	
T：我們讓他重新排排看。	
C1 排 1 個方形 2 個圓形 1 個三角形，1 個方形 1 個圓形 2 個三角形。	重排樣式
T：大單位到底在哪裡呢？我們請一位小朋友上來畫畫看。	辨識單位
C2：2 個三角形那邊畫一條線。	
T：那第 2 天呢？	延伸樣式
C2：在 2 個三角形那邊畫一條線。	標示單位
T：為什麼知道大單位在哪裡？	臆測
C2：因為看清楚了！	
T：那是怎樣看清楚？	
C2：因為到 2 個三角形之後又重複了。	延伸
T：喔，原來是一直再重複阿！	驗證
T：那怎樣的變化？	
C2：1 個長方形變成 2 個又變成 1 個。	
T：那圓形呢？	
C2：小朋友說：1 個圓形變成 2 個又變成 1 個。	
T：那三角形呢？	
C2：是 1.1.2.。	以符號表徵作驗證

圖 12 「照顧」延伸與驗證樣式範例

在這個活動中，幼童瞭解單位元素變化的關係，從辨識樣式、標示單位，並修正樣式的延伸樣式。幼童在驗證樣式時，會使用數字符號表徵作驗證。顯示，在高階複雜重複樣式推理的過程中，幼童練習圖示及符號的表徵。圖示的表徵主要是先讓幼童聯想幾何圖形可表徵的食物及動物，同時加入脈絡化的解題的背景，幼童較能理解這類複雜的樣式。教師並讓幼童有個別解題及加入「驗證」樣式練習的機會，過程中教師引導幼童校正，不斷的澄清元素變化的部份。同時，課堂樣式作業也簡化複雜度，如圖 13，列與列之間的距離拉開後，教學結果是幼童可以 90%完成作業。經驗證樣式後，幼童能掌握概念排列出正確樣式核心單位是■■●▲■●●▲■●▲▲。

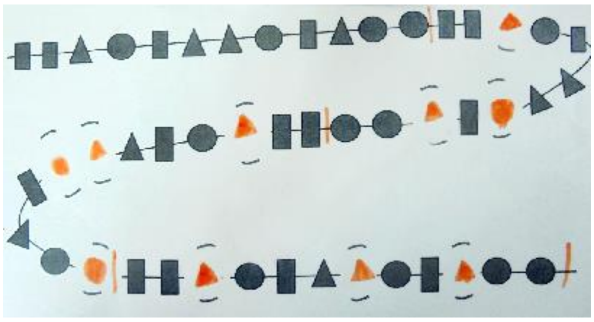


圖 13　「照顧」複雜重複樣式作業

教師為讓幼童能臆測之後正確延伸樣式，改變樣式評量作業的方式，而以移動式的作業讓幼童驗證完成任務，教師用類似 S 型的紙條貼在白板上，紙條上面貼有長方形、三角形及圓形不同數量變化的樣式，讓幼兒辨識單位。作業的目的為讓幼童學習自我驗證，確定所臆測的是否正確？教師在長條型的紙條貼上圖形，且█ ▲●圖形排列成不完整單位，讓幼兒以黏貼的方式填滿空缺處。S 型紙條先出現 AABCABBCABCC 樣式，再出現 AABCABBCAB__、AABCAB__CABC__，讓幼童臆測下一個單位空白處應出現的圖形，再由幼童拿取正方形、三角形及圓形圖卡放入空白處。幼童在過程中學會審視排列的樣式，因為單位要一直延伸下去至少有三個以上的樣式單位，而且在這類似 S 型的曲線中還要瞭解重複樣式是由大單位 AABCABBCABCC 組成，也要明白因為樣式方向的改變單位元素排列也隨之更動。

在這非直線樣式的學習中，幼童學會核心單位的臆測及延伸樣式，因核心單位元素數目及方向改變，推理教學方式也要變化，而這類的樣式需擴展視覺廣度，且要掌握單位元素變化情形。幼童在這次「照顧」課堂上有 90%可以完成的樣式作業。幼童在「照顧」的學習表現上，因為這堂課已是幼童第三次學習未切割核心單位複雜重複樣式，所以他們比較能掌握核心單位，並在驗證中確認排列樣式的正確性。

幼童在學習複雜重複樣式的過程中，對切割單位樣式的推理比未切割單位的表現好，而非切割單位複雜樣式經過三堂課學習之後表現才有提升。顯然，非直線未切割的複雜重複樣式對幼童而言是一大挑戰，經過教師多次的引導讓幼童發現樣式單位元素的變化與樣式方向的改變，幼童才會複雜重複樣式推理。在 Krebs（2005）的研究中發現學生能完成直線樣式解題，但不一定能完成非直線樣式作業，然而本研究設計 S 型的複雜重複樣式經教學引導後，90%的幼童能完成這類的樣式，也回應 Threlfall（1999）以蛇形樣式延伸作業發展幼童樣式推理能力的可行性。本研究更從 S 型複雜樣式設計中提供幼童延伸樣式的機會，幼童的表現也如 Warren 與 Cooper（2008）所提在延伸樣式能看出學童在樣式推理一般化的理解程度。

綜合上述，本研究的複雜重複樣式類型包括直線複雜重複樣式、非直線複雜重複樣式，而教學模式將複雜重複樣式結構藉由尋找樣式-辨識樣式-標示樣式-臆測樣式-延伸樣式-驗證樣式，

先讓幼童瞭解樣式結構進而從事樣式推理。樣式學習軌道也因幼童學習反應而修正，如簡單重複樣式教學線性逐步前進，對於複雜重複樣式的教學則採間接循環的方式，等幼童辨識樣式結構之後再進入下一個階段，同時，在教未切割單位複雜重複樣式時，先將核心單位元素隔開幫助幼童辨識樣式與臆測樣式再延伸。因此，本研究發現幼童經過樣式教學後能提升複雜重複樣式推理能力。

二、樣式教學成效

這一部分回應研究問題二，經樣式教學後幼童學習表現為何？這部分藉由兩種評量來檢驗：一種是「課堂樣式推理作業」，即幼童在每一堂樣式教學後的學習表現，另一種為「幼童樣式推理作業」就是在介入教學前後實施的評量。

（一）幼童課堂樣式推理表現

「課堂樣式推理作業」有八個作業，包括簡單重複樣式的推理 ABC、ABCD、ABCCD 以及直線複雜重複樣式，教師以故事、遊戲、操作的方式幫助幼童理解樣式概念後 完成作業。經教學後幼童的推理表現能超越過去研究的發現，幼童不只會 AB 和 ABB 的樣式推理，還會更複雜的 ABCCD 和 AABCABBCABCC 複雜重複樣式推理。表 2 可看出幼童學習簡單重複樣式時，樣式推理正確率可達百分之百，而在複雜重複樣式學習，尤其在非直線未切割複雜重複樣式表現上，正確完成第 5 至第 8 的「課堂樣式推理作業」平均數從「白鵝農莊」的.52 進步到「青青草原」的.64，最後可以達到「照顧」的.90，顯示他們複雜重複樣式推理能力逐漸提升。

表2

實驗組課堂樣式教學的幼童表現

教學活動	樣式種類	人數	平均數	標準差
1.籃球比賽	簡單重複樣式 ABCABC	27	1.00	.000
2.聖誕吊飾	簡單重複樣式 ABCDABCD	27	1.00	.000
3.大家來修橋	相鄰元素重複樣式 ABCCDABCCD	27	1.00	.000
4.下午茶	直線複雜重複樣式 AABC-ABBC-ABCC	26	.88	.326
5.阿平菜單	非直線性切割單位重複樣式 AABC-ABBC-ABCC	26	1.00	.000
6.白鵝農莊	非直線未切割單位重複樣式 AABCABBCABCC	27	.52	.509
7.青青草原	非直線未切割單位複雜重複樣 AABCABBCABCC	28	.64	.488
8.照顧	非直線未切割單位複雜重複樣式 AABCABBCABCC	30	.90	.305

註：每一作業正確完成計 1 分；未完成及錯誤為 0 分。

綜合上述的資料分析，本研究結果顯示幼童經樣式教學不只會簡單樣式推理，且會在擴大樣式核心單位下，掌握複雜重複樣式的規律變化作推理。複雜樣式的複雜度包括單位元素的數

目增加及非直線樣式排列。本研究六歲幼童經樣式教學後的表現，如 Mulligan 等人（2012）所提幼童會以不同的方法發展出數量形結構的理解，並注意到樣式單位重複及空間結構；也如 Papic 等人（2011）發現在幼童發展樣式過程中會覺知、記憶並複製排列數量及幾何圖案。同時，本研究更發現實驗組幼童的表現已超越 Papic 等人的研究，幼童能尋找到複雜重複樣式的規律，並進一步能辨識出複雜重複樣式結構找到核心單位解題。再者，過去的研究指出樣式介入教學有成效（Papic, 2013; Papic & Mulligan, 2005; Starkey, et al., 2004），本研究設計教學模式在成人的引導下幼童的樣式推理能力提升，也證實樣式介入教學有效。

（二）樣式教學成效

1.兩組幼童樣式推理表現

為比較實驗組與控制組學生在不同教學模式下其學習成效的差異，研究者採用單變量共變數分析。為滿足單變量共變異數分析的條件，先進行組內迴歸係數同質性檢定。兩組迴歸線斜率相同，符合共變數迴歸係數同質性假定，接著進行第二步驟共變數分析。以「幼童樣式推理作業」四個測驗的後測成績為依變量，前測成績為共變量，藉以排除兩班前測成績之差異，進行共變數分析。共變數分析結果之 $F(1, 58) = 48.90$，$p = .000$，達顯著水準。由此可知，在不同教學模式下，幼童後測成績進步的幅度達顯著差異，亦即兩組不同教學下，樣式教學模式能提升幼兒的推理能力。

2.實驗組學習成效

根據表 3 的數據資料，實驗組學生在樣式教學後，表現在「幼童樣式推理作業」四個測驗的後測平均數比前測平均數進步 2.63 分。經統計考驗 $t(58) = 10.61$；$p = .000$，前後測的分數有顯著差異。而且幼童在延後測的成績仍保持學習成效，延後測的成績平均數 3.77，標準差.57。

表3

實驗組與控制組樣式推理表現

	組別	平均數	標準差	調節平均數
前測分數	實驗組	.87	1.17	
	控制組	.67	.88	
後測分數	實驗組	3.63	.81	3.62
	控制組	1.90	1.06	1.92
延後測	實驗組	3.77	.57	3.85
	控制組	2.43	.94	2.45

註：每一作業正確完成計 1 分；未完成及錯誤為 0 分。

從表 4 的數據資料得知，幼童在未接受樣式教學模式教學前，在切割單位非直線複雜重複樣式 AABC-ABBC-ABCC 與未切割單位非直線複雜重複樣式 AABCABBCABCC 的作業表現不佳，因為他們不太會解這類樣式，甚至沒有幼童能解未切割單位非直線複雜重複樣式的作業，因為這題前測平均分數為零，但經教學後，後測平均數可達到.87。又從表 4 的資料顯示，當幼童會解切割單位非直線複雜重複樣式的作業時，也會解未切割非直線複雜重複樣式的作業，實驗組幼童經樣式教學複雜重複樣式推理能力提升。

「幼童樣式推理作業」的解題的表現，在樣式教學前幼童大都無法找到樣式單位正確作答，幼童解第一題簡單重複樣式時，會用計數的策略答題，但經過樣式教學後幼童會以尋找樣式辨識單位的方式作答。當問幼童「你是怎麼知道的？」幼童（C1）會說：「因為有看到樣式」，在延後測時更能快速的作答。

表4

實驗組前後測的表現

	前測		後測	
幼童樣式推理作業	平均數	標準差	平均數	標準差
1.ABCABC	.40	.498	.97	.183
2.ABBCABBC	.40	.498	1.00	.000
3.AABC-ABBC-ABCC	.13	.346	.87	.346
4.AABCABBCABCC	.00	.000	.87	.346

總結，幼童樣式推理透過成人的引導，能掌握較大單位的樣式規律，進而提升複雜樣式推理能力，證實 Papic 等人（2011）以實驗介入樣式教學對於幼童樣式能力有影響，即成人有系統地引入樣式活動對幼童察覺樣式的單位與結構具有明顯的效果。

伍、結論與建議

一、結論

本研究樣式教學以分解樣式單位結構的方式逐步引導幼兒漸進的學習。先從直線簡單重複樣式再到非直線複雜重複樣式，並依循樣式教學模式步驟實施。樣式教學模式的教學步驟：先帶領幼童尋找樣式、辨識樣式單位、標示單位、臆測單位及延伸單位，最後驗證樣式。在樣式教學過程中，教師以故事及遊戲引導幼童學習樣式推理，以操作練習增強幼童的樣式概念。

由於相關的研究認為學習樣式對學童數學概念的發展有益處，且透過樣式教學能提升幼童的樣式推理能力。本研究以樣式教學模式介入教學提升幼童複雜重複樣式推理能力，研究結果發現實驗組介入教學後，有 90%幼童能完成複雜重複樣式的作業，也說明實驗組六歲幼童能進

行複雜重複樣式推理，而經樣式教學的實驗組幼童在後測成績的表現上，比控制組的幼童表現佳。可知，樣式教學模式實施有其成效，而成人樣式介入教學可以提升幼童樣式推理表現。

二、建議

本研究以介入教學協助幼童重複樣式的推理能力，在樣式學習的類型中強調樣式結構變化，增加元素數量及改變樣式排列方向為操弄變項，探究幼童的複雜重複樣式推理能力表現，並施予介入教學瞭解其成效。而本研究認為未來可進一步作相關研究探討，提出建議如下：

（一）增加變項

本研究的複雜重複樣式的教學，只改變兩個變項即單位元素的增加及方向的改變。未來研究可以多增加其他變項，因為樣式推理需要符號表徵的能力，樣式作業可以加入圖形顏色或數字等因素，探測幼童多變項樣式推理能力。

（二）研究對象往下延伸

本研究對象以幼兒園大班幼童為主，在認知發展上這階段幼童在數學推理上已具有較成熟的判斷力，經二個月的實驗教學，控制組與實驗組在樣式推理能力上都有增長，顯見樣式教學有成效，但學前六歲以下幼兒是否也可依此教學模式獲得相同的結果，可作進一步的探討。

（三）研究評量內容

本研究以四個重複樣式作業來探究樣式教學模式的成效，未來可針對不同的樣式結構、增加作業數量及評量的方式作進一步幼童樣式推理能力的探討。

（四）研究內在效度

本研究設計實驗教學，兩組教學者參與實驗教學，其成員背景仍存有差異，未來研究設計應再控制相同教學背景，避免衍生內在效度問題。

（五）研究推論

實驗組與控制組的教法從簡單重複樣式至複雜重複樣式，使用材料以幼兒園的教材為主，但實驗組依循樣式教學模式逐步教學，用設計活動與自編材料輔助教學，是否影響到實驗教學成效應再進一步探討，在推論上免有偏誤之慮。

參考文獻

吳昭容、徐千惠（2010）。兒童如何在重複中找到規律？重複樣式的程序性與概念性知識。**教育科學研究期刊**，**55**（1），1-25。doi: 10.3966/2073753X2010035501001【Wu, Chao-Jung, & Hsu, Chien-Hui (2010). How do children find patterns in reiteration? Procedural knowledge and conceptual knowledge in identifying repeating patterns. *Journal of Research in Education Sciences*, *55*(1), 1-25. doi: 10.3966/2073753X2010035501001 (in Chinese)】

吳昭容、嚴雅筑（2008）。樣式結構與回饋對幼兒發現重複樣式的影響。**科學教育學刊**，**16**（3），303-324。doi: 10.6173/CJSE.2008.1603.04【Wu, Chao-Jung, & Yen Ya-Chu (2008). The effects of pattern structure and feedback on repeating pattern finding in kindergarten students. *Chinese Journal of Science Education*, *16*(3), 303-324. doi: 10.6173/CJSE.2008.1603.04 (in Chinese)】

洪明賢（2003）。**國中生察覺數形規律的現象初探**（未出版之碩士論文）。國立臺灣師範大學，臺北市。【Hong, Ming-Xian (2003). *The exploration of number and shape of the pattern for middle school students* (Unpublished master's thesis). National Taiwan Normal University, Taipei. (in Chinese)】

陳英娥、林福來（1998）。數學臆測的思維模式。**科學教育學刊**，**6**（2），192-218。【Chen, Ing-Er, & Lin, Fou-Lai (1998). A thinking model of mathematical conjecturing. *Chinese Journal of Science Education*, *6*(2), 192-218. (in Chinese)】

陳埩淑（2017）。**中華民國專利第 1564046 號**。臺北：中華民國經濟部智慧財產局。【Chen, Ching-Shu (2017). *Taiwan Patent No. 1564046*. Taipei: Intellectual Property Office, Ministry of Economic Affairs, R. O. C. (in Chinese)】

趙曉燕、鍾靜（2010）。國小六年級學童對圖形樣式問題之解題探究。**台灣數學教師電子期刊**，**24**，1-23。doi: 10.6610/ETJMT.20101201.01【Chao, Hsiao-Yen, & Chung, Jing (2010). The exploration of solving problems on shape pattern for sixth grade. *Taiwan Journal of Mathematics Teachers*, *24*, 1-23. doi: 10.6610/ETJMT.20101201.01 (in Chinese)】

Copley, J. V.（2003）。幼兒數學教材教法（何雪芳、陳彥文譯）。臺北：華騰文化。（原著出版於 1998 年）【Copley, J. V. (2003). *The young child and mathematics* (Xue-Fang Hu & Yan-Wen Chen, Trans.). Taipei: Far Terng Culture. (Original work published 1998) (in Chinese)】

Bodrova, E., & Leong, D. J. (2007). *Tool of the mind: The Vygotskian approach to early childhood education* (2nd ed.) Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. New York, NY: Routledge.

Cooper, T. J., & Warren, E. (2008). The effect of different representations on years 3 to 5 students' ability to generalize. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education*, *40*(1), 23-37. doi: 10.1007/s11858-007-0066-8

Greenes, C. (1999). Ready to learn: Developing young children's mathematical powers. In J. V. Copley (Ed.), *Mathematics in the early years* (pp.39-47). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Klein, A., & Starkey, P. (2004). Fostering preschool children's mathematical knowledge: Findings from the Berkeley Math Readiness Project. In D. H. Clements, J. Sarama, & A. M. DiBiase (Eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 343-360). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Klein, A., Starkey, P., & Wakeley, A. (2000). *Child math assessment: Preschool battery* (CMA). Berkeley, CA: University of California.

Krebs, A. S. (2005). Take time for action: Studying students' reasoning in writhing generalizations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *10*(6), 284-287.

Lüken, M. M., Peter-Koop, A., & Kollhoff, S. (2014). Influence of early repeating patterning ability on school mathematics learning. In P. Liljedahl, S. Oesterle, C. Nicol, & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 138-145). Vancouver, Canada: PME.

Lynn, M. M. (2013). Is it a pattern? *Teaching Children Mathematics*, *19*(9), 564-571. doi: 10.5951/teacchilmath.19.9.0564

Mouhayar, R. E. (2014). Teachers' ability to explanin student reaponing in pattern generalization tasks. In P. Liljedahl, S. Oesterle, C. Nicol, & D. Allan (Eds.), *Proceedings of 38th Psychology of Mathematics Education conference and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 258-265). Vancouver, Canada: PME.

Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 33-49. doi: 10.1007/BF03217544

Mulligan. J. T., Mitchelmore, M. C., English, L. D., & Robertson, G., (2010). Implementing a Pattern and Structure Mathematics Awareness Program (PASMAP) in kindergarten. In L. Sparrow, B. Kissane, & C. Hurst (Eds.), *Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 796-803). Freemantle, UK: MERGA.

Mulligan, J. T., Mitchelmore, M. C., English, L. D., & Crevensten, N. (2012). Evaluation of the 'reconceptualising early mathematics learning' project. In J. Wright (Ed.), *AARE 2012 Conference Proceedings*. Sydney, Australia: Australian Association for Research in Education. Retrieved from http://www.aare.edu.au/data/publications/2012/Mulligan12.pdf

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Orton, A., & Orton, J. (1999). Pattern and the approach to algebra. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 104-120). London, UK: Continuum.

Owen, A. (1995). In search of the unknown: A review of primary algebra. In J. Anghileri (Ed.), *Children's mathematical thinking in the primary years: Perspectives on children's learning* (pp. 124-147). London, UK: Cassell.

Papic, M., & Mulligan, J. (2005). Preschoolers' mathematical patterning. In P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce, & A. Roche (Eds.), *Proceedings of the 28th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 2, pp. 609-616). Sydney, Australia: MERGA.

Papic, M. M., Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (2011). Assessing the development of preschoolers' mathematical patterning. J*ournal for Research in Mathematics Education*, *42*(3), 237-269.

Papic, M. M. (2013). Improving numeracy outcomes for young Australian Indigenous children. In L. D. English & J. T. Mulligan (Eds.), *Reconceptualizing early mathematics learning* (pp. 253-281). New York, NY: Springer. doi: 10.1007/978-94-007-6440-8_13

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., McLean, L. E., & McEldoon, K. L. (2013). Emerging understanding of patterning in 4-year-olds. *Journal of Cognition and Development*, *14*(3), 376-396. doi: 10.1080/15248372.2012.689897

Seo, K. H., & Ginsburg, H. P. (2004). What is developmentally appropriate in early childhood mathematics education? Lessons from new research. In D. H. Clements, J. Sarama, & A. M. DiBiase (Eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 91-104). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Sophian, C. (2007). *The origins of mathematical knowledge in childhood*. New York, NY: Erlbaum.

Starkey, P., Klein, A., & Wakeley, A. (2004). Enhancing young children's mathematical knowledge through a pre-kindergarten mathematics intervention. *Early Childhood Research Quarterly*, *19*(1), 99-120. doi: 10.1016/j.ecresq.2004.01.002

Stylianides, G. J. (2008). An analytic framework of reasoning-and-proving. *For the Learning of Mathematics*, *28*(1), 9-16.

Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical Thinking and Learning*, *11*(4), 258-288. doi: 10.1080/10986060903253954

Threlfall, J. (1999). Repeating patterns in the early primary years. In A. Orton (Ed.). *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 18-30). London, UK: Continuum.

Tsamir, P., Tirosh, D., Barkai, R., Levenson, E., & Tabach, M. (2015). Which continuation is appropriate? Kindergarten children's knowledge of repeating patterns. In K. Beswich, T. Muir, & J. Fielding-Wells (Eds.), *Proceedings of 39th Psychology of Mathematics Education conference* (Vol. 4, pp. 249-256). Hobart, Australia: PME.

Vale, I., Pimentel, T., Cabrita, I., Barbosa, A. & Fonseca, L. (2012). Pattern problem solving tasks as a mean to foster creativity in mathematics. In Tso, T. Y. (Ed), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 171-178). Taipei, Taiwan: PME.

Warren, E., & Cooper, T. (2006). Using repeating patterns to explore functional thinking. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *11*(1), 9-14.

Warren, E., & Cooper, T. (2008). Patterns that support early algebraic thinking in the elementary school. In C. E. Greenes & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics: Seventieth Yearbook* (pp. 113-126). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

《臺灣數學教育期刊》稿約

2013.04.03 編審委員會會議通過
2013.09.27 編審委員會會議修訂通過
2014.09.04 編審委員會會議修訂通過
2017.03.17 編審委員會會議修訂通過

壹、《臺灣數學教育期刊》（Taiwan Journal of Mathematics Education）（以下簡稱本刊）是國立臺灣師範大學數學系及台灣數學教育學會共同發行之期刊，內容以出版數學教育領域相關議題的原創性論文為宗旨。本刊徵求符合宗旨的文稿，且以實徵性研究成果為主，回顧性論文需能整合相關之實徵研究，提出批判性或創發思考的評析。

貳、本刊每年發行兩期，分別於四月、十月出刊，並採電子方式發行。全年徵稿，隨到隨審。

參、本刊所刊之文稿須為原創性的學術論文之文稿，即未曾投遞或以全論文形式刊登於其他期刊、研討會彙編或書籍。若文稿在送審後自行撤稿，或出現一稿多投、修正稿回覆逾期、侵犯著作權等違反學術倫理等情況，將依下列規則處理：

一、來稿一經送審，不得撤稿。因特殊理由而提出撤稿申請者，案送主編決定；非特殊理由而自行撤稿者，一年內將不再接受該作者的投稿。

二、若文稿被發現一稿多投、侵犯著作權或違反學術倫理等情況，除文稿隨即被拒絕刊登外，一切責任由作者自負，且本刊於三年內不接受該作者來稿，並視情節嚴重程度求償。

三、作者應於發出文稿修正通知的三週內回傳修正稿及修正回覆說明書，逾期視同撤稿。若有特殊情況請先與本刊聯絡。

肆、未經本刊同意，已發表之文章不得再於他處發表。投遞本刊之學術論文須經編審委員會送請專家學者審查通過後予以刊登，被刊登文章之著作財產權歸國立臺灣師範大學數學系及台灣數學教育學會共同擁有，文責由作者自負。投稿至《臺灣數學教育期刊》之文章，若經編輯委員推薦且經作者同意，可轉稿至《臺灣數學教師》。

伍、文稿經初審結果為修訂後再審時，本期刊責任編輯將協助引導作者進行文稿修訂。

陸、文稿可以中文或英文撰寫，中文稿件字數以20,000字（英文10,000字）為上限（包含論文全文、中英文摘要、圖表、附註、參考文獻、附錄等），特殊邀稿不在此限。文稿請使用Microsoft Word 98以上之繁體中文文書軟體處理，中英文稿均請用單行間距之12級字新細明體或Times New Roman字體，以橫書方式於A4規格紙張上，文稿上下左右各留2.5公分空白。

柒、中文文稿格式請參考本期刊論文撰寫體例的說明或已發行之文稿，若為英文撰寫之文稿、引用英文文獻以及數學符號、公式等請參考APA第六版出版手冊。投稿時應注意下列事項：

一、提交投稿基本資料表

(一) 文稿基本資料。

(二) 通訊作者之姓名、服務單位、職稱、通訊地址、聯絡電話和電子郵件地址。一位以上作者時，非通訊作者只需填寫姓名、服務單位和職稱。

(三) 任職機構及單位：請寫正式名稱，分別就每位作者寫明所屬系所或單位。

(四) 頁首短題（running head）：中文以不超過15個字、英文以不超過40個字元為原則。

(五) 作者註（author note）：說明與本篇研究相關的資訊。

二、提交已簽署的《臺灣數學教育期刊》著作財產權讓與同意書。

三、除文稿正文外，還需包含中英文摘要，相關規定如下：

(一)中文文稿的中文摘要在前，英文文稿則英文摘要在前。

(二)中文文稿之中文摘要頁內容包括論文題目（粗體20級字、置中）、摘要（不分段，限500字以內）及關鍵詞（以五個為上限，並依**筆畫**順序由少到多排列）；英文摘要頁內容包括 Title（bold, 20 pt, central）、Abstract（不分段，限300字以內）及 Keywords（字詞及順序須與中文關鍵詞相對應）。

(三)英文文稿之英文摘要頁內容包括 Title（bold, 20 pt, central），Abstract（不分段，限300字以內）及 Keywords（以五個為上限，並依**字母**順序排列）；中文摘要頁內容包括論文題目（粗體20級字、置中）、中文摘要（不分段，限500字以內）及中文關鍵詞（字詞及順序須與英文關鍵詞相對應）。

(四)內文格式詳見《臺灣數學教育期刊》論文撰寫體例。

四、若為修正稿，遞交修正的文稿（上述第三點之資料）上請以色字標示修改處，並需提交「修正回覆說明書」，依審查意見逐項說明修改內容或提出答辯。

捌、本刊審查流程分為預審與正式審查兩個階段：

一、預審：不符合本刊宗旨、品質要求，或撰寫體例者，逕行退稿或退回請作者修改後再上傳。

二、正式審查：為雙向匿名審查，除基本資料表外，不得出現作者姓名或任何足以辨識作者身份之資料，包括請先省略誌謝。匿名的參考格式為：

(一) 若本文引用作者已發表之文章，須以「（作者，西元年）」或“(Author, Year)”；若引用作者已發表之文章不只一篇，則以「（作者，西元年a）、（作者，西元年b）、……」或“(Author, Year a)、(Author, Year b) 、……”的中文作者姓氏筆畫順序以及外文作者姓氏字母順序排列。

(二) 若在參考文獻中則以「作者（西元年），**期刊刊名**。」或「作者（西元年），**書名**。」、「作者（西元年）。編者，**書名**。」或“Author (Year). *Title of Periodical*.”表示。

引用文獻中包含一位以上的投稿文章作者，其所有著作皆須遵守上述規範。

範例1：「林妙鞠、楊德清（2011）。故事融入小一弱勢學生之補救教學研究。**台灣數學教師(電子)期刊**，**25**，1-16。」一文的作者欲引用該文，文中應以「（作者，西元年）」表示，參考文獻則以「作者（西元年）。**台灣數學教師(電子)期刊**。」表示。

範例2：「李源順（2009）。三階段輔導模式 - 以數學學習領域為例。收錄於鍾靜和楊志強（主編），**優質實習輔導教師的增知賦能**（pp.141-157）。臺北市：國立臺北教育大學。」一文的作者欲引用該文，文中應以「（作者，西元年）」表示，參考文獻則以「作者（西元年）。收錄於鍾靜和楊志強（主編），**優質實習輔導教師的增知賦能**。」

範例3：“Chang S. L., & Lin, F. L. (2006). Investigations into an elementary school teacher's strategies of advancing children’s mathematical thinking. *Taiwan Journal of Mathematics Teachers*. *5*, 21-34.”的作者應以“(Author, Year)”引用該文，參考文獻則以“Author (Year). *Taiwan Journal of Mathematics Teachers*.”表示。

玖、文稿以電子郵件方式投遞，包括作者基本資料表、著作財產權讓與同意書與全文共三份資料。作者應負論文排版完成後的校對之責，而被接受刊登的英文文稿，作者需自行負責檢查文稿中的用詞、語法、拼寫、含意和邏輯的正確性，並另提供中文參考文獻之英譯資料，編輯委員僅負責格式上之校對。

壹拾、　投稿電子郵箱：tjmeassistant@gmail.com

《臺灣數學教育期刊》研究論文撰寫體例

2013.04.03 編審委員會會議通過

2013.09.27 編審委員會會議修訂通過

2014.09.04 編審委員會會議修訂通過

2017.03.17 編審委員會會議修訂通過

本期刊原則上依循美國心理學會（American Psychological Association）的撰寫格式，中文文稿請參考下面的說明或本刊已發表的文稿，若為英文撰寫之文稿、引用英文文獻以及數學符號、公式等請參考 APA 第六版出版手冊。文稿請使用 Microsoft Word 98 以上之繁體中文文書軟體處理。除另有規定外，中文字型一律採用新細明體，英文字型一律為 Times New Roman。

壹、撰稿格式

一、投稿除需要附上作者基本資料表檔案外，中文稿件內容依序為中文摘要頁（含關鍵字）、英文摘要頁（含關鍵字）、正文（包括圖、表、附註、誌謝、參考文獻）以及附錄（若無必要可省略）；英文稿件之撰寫順序相同，唯中英文摘要頁位置對調。

二、稿件版面以單欄版面橫向印列的A4規格紙張，上下左右各留2.5公分空白，除基本資料表頁外每頁需加註頁碼。文稿字數（包含摘要、正文、圖表、附註、參考文獻、附錄等）中文以20,000字為上限，英文以10,000字為上限。

三、中文摘要頁內容包括論文題目（粗體20級字、置中）、摘要（不分段，限500字以內）、與關鍵字（以五個為上限，並依筆畫順序由少到多排列）。

四、英文摘要頁內容包括論文題目（bold, 20 pt, central），並附英文摘要（不分段，限300字以內）及英文關鍵字（字詞及順序須與中文關鍵字相對應）。

五、除各項標題、表之註記與另起一段之引文外，內文不分中英文均為12級字，單行行距。

六、除另有規定外，中文字型一律採用新細明體，標點符號及空白字為全形字；英文字型一律為Times New Roman。

　一、本期刊為雙向匿名審查，除基本資料表外，不得出現作者姓名或任何足以辯識作者身份之資料。匿名的參考格式為：

　　(一) 若本文引用作者已發表之文章，須以「（作者，西元年）」或“(Author, Year)”；若引用作者已發表之文章不只一篇，則以「（作者，西元年a）、（作者，西元年b）、……」或“(Author, Year a)、(Author, Year b) 、……”的中文作者姓氏筆畫順序以及外文作者姓氏字母順序排列。

　　(二) 若在參考文獻中則以「作者（西元年），**期刊刊名**。」或「作者（西元年），**書名**。」、「作者（西元年）。編者，**書名**。」或“Author (Year). *Title of*

Periodical.”表示。

引用文獻中包含一位以上的投稿文章作者，其所有著作皆須遵守上述規範。

範例1：「林妙鞠、楊德清（2011）。故事融入小一弱勢學生之補救教學研究。**台灣數學教師(電子)期刊**，**25**，1-16。」一文的作者欲引用該文，文中應以「（作者，西元年）」表示，參考文獻則以「作者（西元年）。**台灣數學教師(電子)期刊**。」表示。

範例2：「李源順（2009）。三階段輔導模式 - 以數學學習領域為例。收錄於鍾靜和楊志強（主編），優質實習輔導教師的增知賦能（pp.141-157）。臺北市：國立臺北教育大學。」一文的作者欲引用該文，文中應以「（作者，西元年）」表示，參考文獻則以「作者（西元年）。收錄於鍾靜和楊志強（主編），優質實習輔導教師的增知賦能。」

範例3：“Chang S. L., & Lin, F. L. (2006). Investigations into an elementary school teacher's strategies of advancing children’s mathematical thinking. *Taiwan Journal of Mathematics Teachers*. *5*, 21-34.”的作者應以“(Author, Year)”引用該文，參考文獻則以“Author (Year). *Taiwan Journal of Mathematics Teachers*.”表示。

貳、正文

一、正文原則上包括「緒論」、「文獻探討」、「方法」、「結果」、「討論」與「參考文獻」等六部分，「緒論」含研究動機與目的、假設或研究問題等內容。前述格式為原則性規定，作者可依論文性質斟酌改變。

二、標題的層次、選用次序與字體為：

壹、16級字、粗體、置中

一、14級字、粗體、靠左對齊

(一)12級字、粗體、靠左對齊

1. 12級字、粗體、靠左對齊

(1)內縮1.5字元、12級字、粗體、靠左對齊

A.<u>內縮1.5字元、12級字、底線、靠左對齊</u>

1. 第一級標題為「緒論」、「文獻探討」、「方法」、「結果」、「討論」與「參考文獻」等，各層次標題選用次序為：壹、一、(一)、1、(1)、A 最多以六個層次為原則。
2. 第一、二、三、四、五層次標題請使用粗體。
3. 第一層次標題使用 16 級字，第二層次標題使用 14 級字，其餘 12 級字。
4. 第一層次標題置中，其餘靠左對齊。
5. 第一、二、三層次標題為單行間距，並與前後段距離均為 1 行；第四、五、六層次標題為 12 點最小行高，並與前後段距離均為 0.5 行。
6. 第五、六層次標題內縮 1.5 字元，而第六層次標題加上底線。
7. 標題請用字簡明，勿用句號或冒號。若逢頁尾最後一行，應移至次頁首行。

三、英文統計符號須用斜體字，例如$F(1, 53) = 10.03$, t, F, M, SD, N, r, p等。希臘字母則不要斜體，例如：α, β, ε, η。

四、資料分析結果的有效位數須全文一致。恆小於「1」的數值，例如*KR20*, α, *p*等統計數值的個位數字「0」請省略。

五、文獻資料的引用一律採取文內註釋。引用文獻時，必須有作者姓名（中文作者姓名全列，英文作者僅列姓氏）及論文年份（中文文獻及英文文獻均使用西元年份）。相同作者在同一段中重複被引用時，第一次須寫出年代，第二次以後，在不造成混淆的情況下年代可省略。若在不同段落中重複引用時，則仍須完整註明。本文中引用之文獻必須在參考文獻中列出。文獻引用格式於下：

1. 當作者為一人時，格式為作者（年代）或（作者，年代）、Author (Year)或(Author, Year)。
2. 當作者為二人時，每次引用均須列出全部作者，在行文中，以「與」連接；在括號和參考文獻中，中文以頓號「、」，西文以“&”連接。格式為作者 1 與作者 2（年代）或（作者 1、作者 2，年代）、Author 1 與 Author 2 (Year)或(Author 1 & Author 2, Year)。
3. 當作者為三至五人時，第一次引用時所有作者均須列出，第二次以後僅需寫出第一位作者並加「等」字或“et al.”。在同一段落中重複引用時，第一次須完整註明，第二次以後僅需寫出第一位作者再加「等」字或“et al.”，可省略年代。若在不同段落中重複引用，則僅需寫出第一位作者再加「等」字或“et al.”，但仍需註明年代。
4. 當作者為六人以上時，每次引用都只列第一位作者並加「等」字或“et al.”。
5. 當作者或作者之一為機構時，第一次引用應寫出機構全名，並以中括號註明慣用之簡稱，第二次之後即可使用簡稱替代，並依上述一至四點處理。例如：行政院國家科學委員會（國科會，2011）或（行政院國家科學委員會[國科會]，2011）、National Science Council (NSC, 2011)或(National Science Council [NSC], 2011)。

6. 當文獻為翻譯作品時，以原作者為主要作者，中文翻譯的文獻須註明原著出版年代，接續註明譯者姓名與譯本出版年代，作者與譯者之人數及其引用格式的規範與一般作者相同。英文翻譯文獻則僅須註明原著出版年代和譯本之出版年代，中間以斜線區隔，不須註明譯者姓名，作者人數及其引用格式的規範與一般作者相同。例如：Skemp (1987/1995)。
7. 當西文作者同姓時，須引用全名，且採「名在前姓在後」方式書寫。例如：A. J. Bishop (1985)和 E. Bishop (1970) 都認為……。
8. 在同一括號內同時引用多位作者的文獻時，依作者姓名筆畫（英文用字母）排序；若同時有中英文作者，則先列中文作者。不同作者之間用分號分開，相同作者不同年代之文獻用逗號隔開年代。
9. 在文章中引用同一作者在同一年的多篇著作時，應在年代後加註 a, b, c……以茲區別。
10. 當引用文獻需標出頁數時，西文單頁為“p.”、兩頁以上為“pp.”，中文則以「頁」表示。例如：（洪萬生，2006，頁 167）、(Dubinsky, 1991, p. 102)、(Heath, 1956, pp. 251-252)。
11. 當引用之觀念或陳述，來自第二手資料時，應將原始資料和第二手資料同時註明。在括號中首先列出原始作者與年代，接續中文以「引自」，西文以“as cited in”註明第二手資料之作者與年代，並說明出處頁碼。例如：（Garner, 1988，引自蘇宜芬、林清山，1992，頁 246）、Peirce (1968, as cited in Sáenz-Ludlow, 2002, p. 289)
12. 引文超過中文 80 字（西文 40 字），則須另起一段，並改為標楷體 10 級字，左右縮排 2 字元，與正文間前後空一行，且在引文前後無需用引號。例如：

Schoendfeld (1992, p.335) 有一段話可以用來討論：

> 數學從其創生之始就是一種社會活動，在此活動中一群訓練有素的實踐者（數學科學家）從事組型的科學──基於觀察、研究和實驗，有系統地試圖要決定一個公理化或理論化之系統中的規律的性質和原理（此為純數學），或者從實在世界物體中抽象出來之系統的模式（此為應用數學）。數學的工具是抽象、符號表徵、和符號操作。然而學會運用這些工具，其意義乃謂一個人以數學方式思考而非如一個工匠使用工具。以數學的方式思考就是：（1）形成數學觀點──珍視數學與抽象的歷程，並偏愛其應用，（2）發展此學科的工具的能力，並應用這些工具以協助我們理解結構──數學的建構意義（mathematical sense-making）。

六、圖與表格：

1. 圖下方應置中書明圖序及圖之標題；表格上方應置中書明表序及表名，圖表序號均使用阿拉伯數字，且圖表序與圖名之間空一個中文字（或 2 個英文字母）。各圖表之標題及說明宜精簡，但不宜精簡至看正文才能知此圖的訊息。
2. 表格之製作以簡明清楚、方便閱讀為原則，頂端與底端採用粗線(1.5pt)繪製，中間與兩邊不必畫線。表序須配合正文以阿拉伯數字加以編號，並書明表之標題。
3. 每一個圖表的大小以不超過一頁為原則，如超過時，須在續表之表序後加上（續）/ (continued)，但無須重現標題，如：表 1（續）或 Table 1 (continued).。
4. 圖與表格應配合正文出現，與前後段空一行間距。圖及表格內容若有解釋的必要，可作註記。註記與圖表之左邊界切齊，列在圖、表之下方，每註另起一行，按編號順序排列。

七、誌謝與附註：

1. 誌謝應力求簡短扼要，置於正文之後。誌謝二字為 16 級字、粗體、置中。誌謝文另行起、第一行內縮 2 字元、12 級字。
2. 附註應置於參考文獻之前，每項附註均另起一行，並以阿拉伯數字編號，依順序排列。

參、參考文獻

一、正文中引用過之文獻，必須全部列舉在參考文獻內，且不得列出未引用之文獻，接受刊登之論文，作者應另提供中文參考文獻之英譯資料。

二、每個作者第一行由第一格開始寫，第二行中文內縮三個字；英文內縮六個字母。中文參考文獻先寫作者姓名（年代），再用「。」接續「篇名」，「。」後再寫「期刊名稱」或「書名」以及「頁碼」。中文參考文獻「書名」或「期刊名及卷數」以粗體表示，其餘（含期數）維持標準樣式。英文參考文獻先寫作者姓名（年代），再用「.」接續「篇名」，「.」後再寫「期刊名稱」或「書名」以及「頁碼」。英文參考文獻「書名」或「期刊名及卷數」以斜體表示，其餘（含期數）維持標準樣式。即：

作者（年代）。文章篇名。**期刊刊名**粗體，**卷**粗體 (期若無則可省略)，xxx-xxx。

Author, A. A. (Year). Title of article. *Title of Periodical*斜體, *volume*斜體 (issue若無則可省略), xxx-xxx.

三、各種不同形式的中英文參考文獻的格式如下：

1. 期刊

   中文格式：作者（年代）。文章篇名。**期刊刊名，卷** (期)，xxx-xxx。

   英文格式：Author, A. A. (Year). Title of article. *Title of Periodical*, *volume*(issue), xxx-xxx.

2. 書籍

   中文格式：作者（年代）。**書名**（版次若有須註記）。出版地：出版者。

   英文格式：Author, A. A. (Year). *Title of book* (Edition). Location: Publisher.

3. 編輯著作：中文編輯著作以編者之姓名起始，其後以「編」、「編著」等標示其著作方式，以資區別。英文編輯著作以編者之姓氏起始，其後則為編者名字的縮寫，再加上“Ed.”、“Eds.”、或“Comp.”，以資區別其著作方式。

   中文格式：編者編（年代）。**書名**（冊次若無則可省略）。出版地：出版者。

   英文格式：Editor, A. A. (Ed.). (Year). *Title* (Volume若無則可省略). Location: Publisher.

4. 翻譯作品

   中文格式：原作者（譯本出版年）。**翻譯書名**（譯者譯）。出版地：出版者。（原作出版於xxxx年）

   英文格式：Author, A. A. (Year). *Title* (B. B. Translator, Trans.). Location: Publisher. (Original work published Year).

5. 書中的文章

   中文格式：作者（年代）。文章名稱。收錄於編著姓名（編著），**書名**（冊次若無則可省略，頁xx-xx）。出版地：出版者。

   英文格式：Author, A. A. (Year). Title of article. In B. B. Editor (Ed.), *Title of Book* (Edition若無則可省略, pp. xx-xx). Location: Publisher.

6. 研究計畫報告：若引述的報告是取自 ERIC (the Educational Resources Information Center)或 NTIS (the National Technical Information Service)，則在最後須以括號註明 ERIC 或 NTIS 的編號。

   中文格式：作者（年代）。**報告名稱**（報告編號若無則可省略）。出版地：出版者。

   英文格式：Author, A. A. (Year). *Title of report* (Report No.若無則可省略). Location: Publisher.

7. 研討會發表之論文（未出版）

   中文格式：作者（年，月）。**論文標題**。發表於會議名稱。會議地點：舉辦單位若無則可省略。

   英文格式：Author, A. A. (Year, month). *Title of paper*. Paper presented at the Title of the Symposium. Location, Country.

8. 未出版之學位論文

   中文格式：作者（年代）。**論文名稱**。未出版之博／碩士論文，學校暨研究所名稱，大學所在地。

   英文格式：Author, A. A. (Year). *Title of doctoral dissertation/master thesis*. Unpublished doctoral dissertation/master thesis, Name of University, Location.

9. 網路資源

中文格式：作者若無則可省略（年月日若無則可省略）。**網頁標題**。檢自URL。

英文格式：Author, A. A. (Year, month day若無則可省略). *Title of webpage*. Retrieved from URL.

《臺灣數學教育期刊》投稿基本資料表

<table>
<tr><td rowspan="2" colspan="2">篇名</td><td colspan="4">(中文)</td></tr>
<tr><td colspan="4">(英文)</td></tr>
<tr><td colspan="2">總字數</td><td colspan="4">稿件全文 (含中英文摘要、正文、參考文獻、附錄等) 共＿＿＿＿＿字。</td></tr>
<tr><td rowspan="2" colspan="2">關鍵詞(最多五個)</td><td colspan="4">(中文)</td></tr>
<tr><td colspan="4">(英文)</td></tr>
<tr><td colspan="2">頁首短題
(running head)</td><td colspan="4">(請以不超過15個中文字或40個英文字元為原則。)</td></tr>
<tr><td rowspan="8">通訊作者資料</td><td>姓名</td><td colspan="2">(中文)</td><td colspan="2">(英文)</td></tr>
<tr><td>職稱</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">服務單位
(或就讀校系)</td><td colspan="4">(中文)</td></tr>
<tr><td colspan="4">(英文)</td></tr>
<tr><td>E-mail</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>通訊地址</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">電話</td><td colspan="4">辦公室：(　　)　　　　　　分機</td></tr>
<tr><td colspan="4">行動電話：</td></tr>
<tr><td colspan="6">如為共同著作，請詳填以下共同著作人欄位，非共同著作則不需填寫。(以下欄位不敷填寫時請自行增加)</td></tr>
<tr><td colspan="2">共同著作人</td><td>姓名</td><td colspan="2">服務單位(或就讀校系)</td><td>職稱</td></tr>
<tr><td rowspan="2" colspan="2">第一作者
(☐通訊作者)</td><td>(中文)</td><td colspan="2">(中文)</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>(英文)</td><td colspan="2">(英文)</td></tr>
<tr><td rowspan="2" colspan="2">第二作者
(☐通訊作者)</td><td>(中文)</td><td colspan="2">(中文)</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>(英文)</td><td colspan="2">(英文)</td></tr>
<tr><td rowspan="2" colspan="2">第三作者
(☐通訊作者)</td><td>(中文)</td><td colspan="2">(中文)</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>(英文)</td><td colspan="2">(英文)</td></tr>
<tr><td colspan="2">作者註
(可複選)</td><td colspan="4">☐ 本篇論文為碩、博士論文改寫，指導教授為＿＿＿＿＿＿＿。
☐ 本篇論文曾於＿＿＿＿＿＿＿發表。
☐ 本篇論文獲國科會補助，計劃編號：＿＿＿＿＿＿＿。</td></tr>
<tr><td colspan="6">1.茲保證本論文符合研究倫理。
2.茲保證所填基本資料正確，文稿未曾以任何方式出版或發行，且無一稿多投、違反學術倫理，或違反著作權相關法令等事情。
3.茲瞭解並同意貴刊著作權授權規範，並保證有權依此規範進行相關授權。
4.茲保證文稿已經所有作者同意投稿至《臺灣數學教育期刊》。
填表人：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　　　填表日期：＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日</td></tr>
</table>

《臺灣數學教育期刊》著作財產權讓與同意書

茲同意投稿至國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會共同發行的《臺灣數學教育期刊》之一文，名稱為：

____

立書人聲明及保證本著作為從未出版之原創性著作，所引用之文字、圖表及照片均符合著作權法及相關學術倫理規範，如果本著作之內容有使用他人以具有著作權之資料，皆已獲得著作權所有者之（書面）同意，並於本著作中註明其來源出處。著作人並擔保本著作未含有毀謗或不法之內容，且絕未侵害他人之智慧財產權，並同意無償授權國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會於本著作通過審查後，以論文集、期刊、網路電子資料庫等各種不同方法形式，不限地域、時間、次數及內容利用本著作，並得進行格式之變更，且得將本著作透過各種公開傳輸方式供公眾檢索、瀏覽、下載、傳輸及列印等各項服務。國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會並得再授權他人行使上述發行之權利。惟著作人保有下列之權利：

1.本著作相關之商標權及專利權。

2.本著作之全部或部份著作人教學用之重製權。

3.出版後，本著作之全部或部份用於著作人之書中或論文集中之使用權。

4.本著作用於著作人受僱機關內部分送之重製權或推銷用之使用權。

5.本著作及其所含資料之公開口述權。

著作人同意上述任何情形下之重製品應註明著作財產權所屬，以及引自《臺灣數學教育期刊》。

如果本著作為二人以上之共同著作，下列簽署之著作人已通知其他共同著作人本同意書之條款，並經各共同著作人全體同意，且獲得授權代為簽署本同意書。如果本著作係著作人於受僱期間為雇用機構所作，而著作權為讓機構所有，則該機構亦同意上述條款，並在下面簽署。

本著作之著作財產權係屬（請勾選一項）

☐ 著作人所有

☐ 著作人之僱用機構所有

立同意書人（著作人或僱用機構代表人）簽章：____________________

著作人姓名或僱用機構名稱：____________________

（正楷書寫）

中華民國　　年　　月　　日

《臺灣數學教育期刊》編審辦法

2013.04.03 編審委員會會議通過

壹、《臺灣數學教育期刊》（以下簡稱本刊）之審查包括預審、正式審查兩個階段：

一、預審：檢視來稿是否符合本刊稿約之宗旨、論文品質以及進行論文格式之審查；

二、正式審查：審查委員與投稿者採雙向匿名方式進行。主編就審查委員的回覆意見及論文品質決定接受或拒絕文稿，或是需要作者修改後再進行審查或檢核。需要「修正後再審」之稿件，交原審查委員或委由主編委任進行再審。所有文稿最後須經編輯委員會審查通過後，方能刊出。

稿件之最終審查決定以投稿後六個月內完成並通知作者。

貳、審查委員針對稿件之學術原創性、正確性及價值等條件從嚴審查，以確保所刊文稿的品質。審查委員可提供作者具建設性的修改建議，以利文稿的修正及品質提昇，並以下列其中一種的刊登建議回覆：

一、「同意刊登」：論文不需要修改可作原稿刊登。

二、「修正後刊登」：通知作者依審查意見修改或答辯後刊登。

三、「修正後再審」：要求作者依審查意見修改或答辯，修正稿由編輯委員會送原審查委員或委由主編委任進行再審。

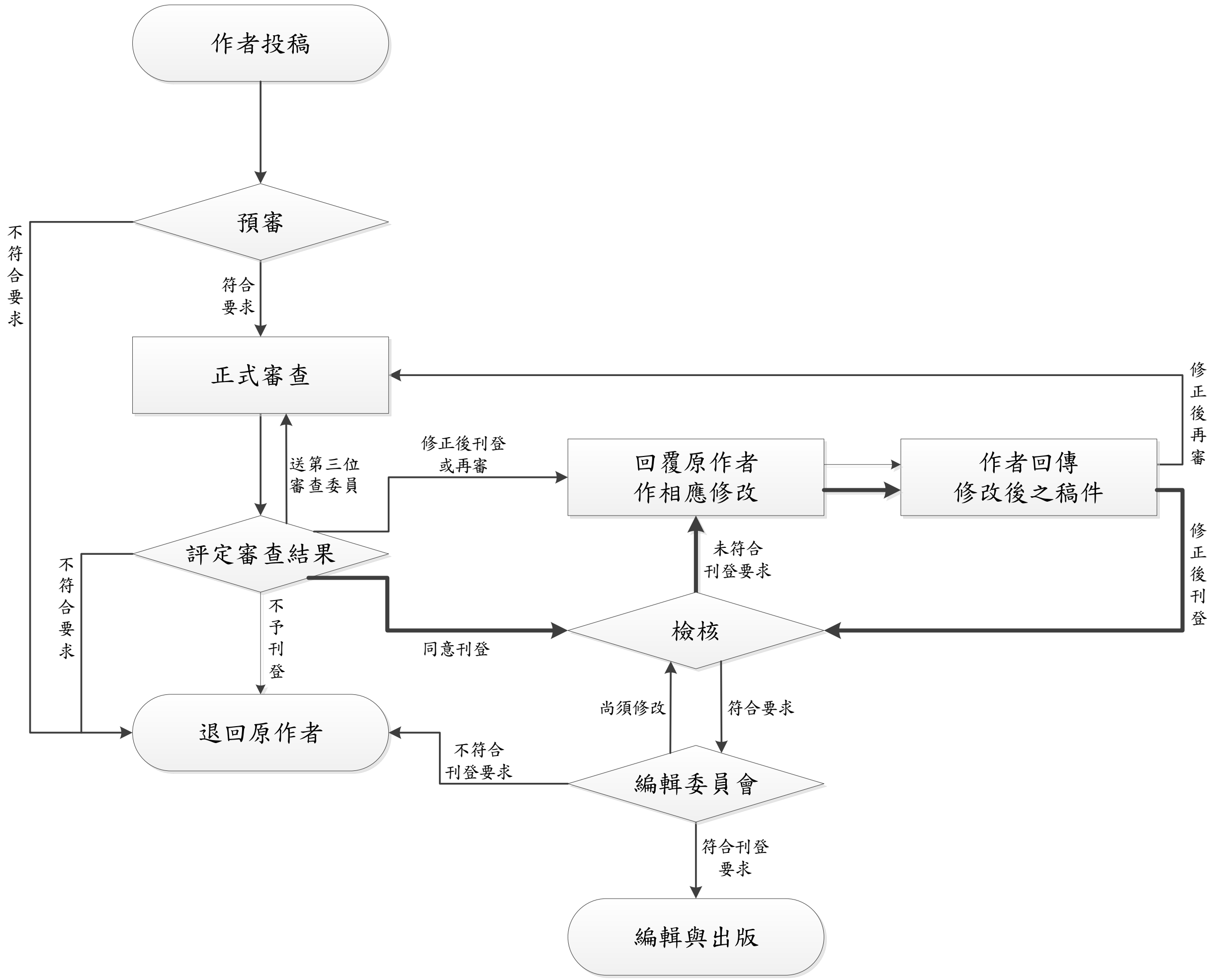
四、「不宜刊登」：通知作者退稿。

稿件審查的時間以三週為限，若超過期限，編輯委員會將去函提醒審查委員儘速審查，若逾六週審查者仍未寄回審查意見，則編輯委員會得再聘請另一位審查者取代之。每位審查者皆為無償審查，但會在每年第二期期刊中列名致謝。

參、本刊主編、副主編或編輯委員如投稿本刊，該委員應迴避推薦審查委員名單、參與審查結果決定之討論或經手處理與個人稿件有關的資料(包括審稿者資料、推薦審查委員名單、審稿意見等)。

肆、本刊預計每年四月和十月出版，稿件刊登順序由主編原則上依文稿性質與投稿時間之先後次序決定之，而第一作者的文稿以一篇為限，超過篇數之稿件留至下期刊登。

伍、本刊稿件之編審流程如下圖所示：


作者投稿
預審
不符合要求
符合要求
正式審查
送第三位審查委員
修正後刊登或再審
回覆原作者作相應修改
作者回傳修改後之稿件
修正後再審
評定審查結果
不符合要求
不予刊登
同意刊登
未符合刊登要求
修正後刊登
檢核
退回原作者
尚須修改
符合要求
不符合刊登要求
編輯委員會
符合刊登要求
編輯與出版

Taiwan Journal of Mathematics Education Vol. 4, No. 1 April, 2017

Publisher | Department of Mathematics, National Taiwan Normal University
Taiwan Association for Mathematics Education

Address | No.88 Sec. 4, Ting-Chou Rd., Taipei City, Taiwan, R.O.C.
Department of Mathematics, National Taiwan Normal University
"*Taiwan Journal of Mathematics Education*"

TEL | 886-2-7734-6576

FAX | 886-2-2933-2342

E-mail | tjmeassistant@gmail.com

Website | tame.tw/forum.php?mod=forumdisplay&fid=56