教科書設計對國小高年級學童四則混合運算解題的影響

施佳君[1]、譚寧君[2]

[1]新北市中和區中和國民小學

[2]國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系兼任副教授

摘要

國小階段培養學生數學的演算能力佔有重要的地位；演算能力應包括概念理解與計算應用的能力，也就是表示有流暢的計算能力。本研究旨在探討教科書設計對國小高年級學童四則混合運算解題的影響；研究採調查研究法；研究程序包括分析不同版本教科書內容，設計綜合各版本的試卷，對國小高年級學童進行施測，再分析學童解題策略；研究施測對象包括使用不同版本教科書五年級學生共有 3 個班級計 86 位。透過試卷分析學童的解題策略，以瞭解教科書的設計對學童解題的影響。A 版本的教科書著重簡捷的彈性解題策略；B 版本的教科書著重四則混合運算性質和計算的步驟化呈現；C 版本的教科書比較著重加減、乘除運算規則的學習與應用。研究結果顯示使用不同版本的教科書，學童的解題表現呈現不同的特色。根據研究結果提供給教師瞭解學童的解題表現並作為自編教材的依據。

關鍵詞：四則混合運算、計算的流暢性、解題策略

通訊作者：施佳君　chunjs@gmail.com

壹、緒論

一、研究背景

2011 年 5 月 4 日新聞媒體播報一則非常聳動的新聞，一題簡單的數學算式 6÷2（1+2），竟難倒許多人，結果有 192 萬多人答 9，149 萬多人認為是 1。為什麼會有這麼多人答錯呢？究竟是因為對運算規則的不了解，還是對於乘號是否省略的概念不清楚？由這則新聞可得知，數字的運算是非常重要的。學童在國小四年級時已經學會了整數四則運算的約定：「括號內先算」、「先乘除後加減」、「由左而右計算」，並且將此三個運算規則奉為圭臬。職場上的教師不難發現學生在做四則混合計算時，腦海中會立刻浮現出三個四則運算的約定，並直接採取標準算則解題的現象。究竟這三個運算規則是要學生記憶背誦後做機械式的反覆練習，還是先察覺數字和運算的關係與省略符號的使用時機，再來應用運算規則呢？由於在整數算式中，一般「×」號是不宜省略的；當文字符號引入代數概念時，如 4 × X時代表X+X+X+X ，即X的 4 倍簡記成 4X時才會省略「×」號，且視 4X為一個特定數故須先算，6÷2（1+2）的算式中 2（1+2）均為個別數值，故應記為 6÷2×（1+2），題目陳述才算清楚，此時 6÷2（1+2）=6÷2（3）=6÷6=1 的答案即比較不可能發生，可見題目清楚陳述的重要性，而辨識試題的能力更不可缺。

Hindy(2003)認為具有數字常識及會察覺數字間的關係，並能檢視整個數學問題，以多種方式進行數字的分解與合成才能發展出流暢的計算能力；Sowder(1992)也提到，數感是指能夠分解或合成一個數，能流暢地在不同表徵間轉換，並知道哪一種表徵是在何時較為有效的，因此強調指導學生在運算時，應能將數字分解或察覺數字關係以便於增進解題的流暢性，國內研究者楊德清教授分析台灣學生數字常識表現情形即呈現了學生的數感由學者們的陳述，清楚說明了要學生展現計算的流暢性是現今學數學的趨勢，可見培養學童的數感能力有其重要性。

反思現今的教學情形，學生是否具備數感，又目前教科書內容設計是否注重學生數感的培養是值得關注的。研究者曾對兩個五年級的班級進行小考發現，兩個班級用不同版本教科書表現有別，一個班級有 29 位學童有 62%能彈性解題，展現了計算的流暢性，

但只有 14%學童能使用「括號內先算」解題；和另一個班級有 30 位學童只有 10%學童能彈性解題但有 63%學童使用「括號內先算」解題，展現了計算規則應用。這是教科書對學童的解題策略產生了影響？或是其他因素的影響?可見教科書的設計對學生學習的影響是值得探究的，也引起研究者想對目前國小教科書佔有率較高的三個版本進行分析與探究。

二、研究目的

本研究旨在探討不同教科書設計是否對國小高年級學童四則混合運算解題策略形成的影響。

貳、文獻探討

一、計算的流暢性

近年來在數的運算教學上，非常注重概念的理解與程序性的熟練，與傳統教學較著重機械式的運算與強調記憶的方法迥然不同，從我國與美國課程綱要可以了解在數的運算上強調計算的流暢性。我國九年一貫數學領域綱要說明了培養流暢的計算能力的重要性；其中要能運用四則運算的性質，協助心算與估算，簡化計算、驗算與解題。強調了計算更要以數字常識當作基礎，先察覺數字的關聯性再進行數字的分解與合成(教育部，2003；2008)。美國課程標準(2000)明確的說明「計算的流暢性」包括概念的理解與計算的精熟。Russell(2000)則表示具有計算流暢性的學生應該能以心算解決問題，並能注意到數字之間的關係。越來越多的證據顯示，學生若未理解而僅是記憶或練習程序，他們便很難將學習意義化(Hiebert,1999)。根據文獻具有流暢的運算能力應包含概念的理解和計算精熟兩大部分，概念理解分成位值概念、數字的分解與合成和數字與運算的關係，計算精熟包含有效性、正確性和彈性。例如解 555555-99995-9995，先將 99995 視為 100000，9995 視為 10000，原式=555555-100000-10000+10=440045，此為有效的解題策略會使用彈性變化的方法解題，但若能察覺數字關係，但將 99995-9995 先算，則產生錯誤的答案。故在教學上，應打破傳統機械式運算法，著重數字與符號關係的連結，強調解題策略的有效應用，以提升學童的數學能力。

二、四則混合運算教材分析

本研究分析現行教科書 A、B、C 三個版本。A 版本的教科書著重簡捷彈性解題策略，強調巧妙的運算，著重數字的分析，如 999+9999 會轉換成 1000-1 與 10000-1；B 版版本的教科書著重四則混合運算性質和計算步驟化，將性質的運用透過一步一步的引導，認是先算的數須以括號表之，進而了解括號先算的運算規則；C 版本的教科書著重加減、乘除運算規則的說明，故先教導括號先算的運算規則，再應用於四則運算中。內容呈現方式，A 版本計算題多於情境題，題目的計算亦僅列出一個做法，出現的引導句多為「想一想，有沒有比較快的算法？」；B 版本多為情境題，題目的計算會列出兩種做法，出現的引導句多為「下列兩種做法的答案會一樣嗎？」、「想一想，誰的算法比較好算？」等；C 版本多為計算題，且比較重視程序性算式，較少有引導句。分析發現 A 版本和 C 版本比較以教師為中心設計，由教師指導解題策略，B 版本比較以學生為中心設計，能提供學生觀察、分析、比較的提問設計。

參、研究方法

研究者擬進行四則運算的數位教材設計，故教科書分析與國小高年級學童四則混合運算解題策略的了解是研究者教學設計的第一階段研究。為了解高年級學童對於四則混合運算的解題策略，因此本研究之研究法採開放式試卷的調查研究法；研究程序包括分析教科書內容，綜合各版本教材編製試卷進行施測，再分析學童解題策略；透過試卷分析瞭解教科書的設計對學童解題的影響。

一、 研究對象

本研究施測的對象是五年級學童。參與的班級有 3 個班，共有 86 位學童。這 3 個班級包括 1 個班級用 A 版本教科書、1 個班級用 B 版本教科書、1 個班級用 C 版本教科書。

二、研究工具

本研究的施測題本是為研究者自編。施測之四則混合運算題目是參考 A 版、B 版、C

版三種教科書版本，再加以小幅度改變數字後的計算題，並無文字題，試題為整數四則問題，主要為估算的應用與括號的認識與應用，試卷中估算的應用包括連加、連減與加減混合，試題類型分別來自 A、B、C 版本教材，共有 12 題，以三題為例說明；括號的認識與應用則含四種類型，即(1)a+(b+c)=a+b+c、(2) a+(b-c)=a+b-c、(3)a-(b+c)=a-b-c、(4)a-(b-c)=a-b+c，試題共 8 題，各以兩題為例，經共同研發數位教材的研究團隊與學校同儕共同討論確定，主要探討學生數字常識的應用或括號先算的運算規則使用情形。

三、資料蒐集與分析

本研究是研究者教學設計的第一階段研究，在分析教科書與了解教科書的設計對高年級學童四則運算解題的影響，因此蒐集紙筆測驗的表現進行解題類型分類，並加以分析。

肆、研究結果

本研究分析了學童解題表現，並依學生通過率與解題策略來探討版本對學童解題策略的影響。研究結果主要有以下二項：

一、不同版本的教科書，學童解題表現呈現不同的通過率

本研究對五年級 3 個班級的學童進行紙筆測驗，研究者將紙筆測驗的結果進行解題表現進行分類如表一。學生紙筆測驗中正確的解題策略分類為彈性解題即能察覺數字關係進行有效率的計算、算則即依據記憶的運算規則計算，其他即為錯誤解題共三項。簡捷彈性解題意能表現計算的流暢性；算則解題表示學童在沒有察覺怎麼算比較簡便的情況之下，依照四則混合運算的括號內先算、先乘除後加減、由左而右計算三個約定進行解題；選答錯誤解題包含錯誤的符號運用為典型的計算錯誤類型和無法解釋的計算。根據表一發現學生的解題表現依循著使用不同版本的教科書會有不同的解題方式，顯示教科書設計對學習的影響。

例如 735-85-115-22-78=(　　)，此題為類 B 版的連加或減的計算題。學生能察覺 85 與 115 及 22 與 78 的關係，很快計算出 435，此以 B 版學生表現最佳，高達 80%學生能以彈性解題表現最佳；C 版學生則有 55%採用算則方式即採取由左而右計算，只有 24%學生能以彈性解題，A 版中有 67%學生能察覺數字關係，但答錯率最高的也是 A 版達 30% ，反而只有 3%使用算則，顯示學生有數感但符號運用不足。此類四則運算部分整體而言，以 B 版表現較佳。從學生解題方式分析結果發現，B 版學生善於寫出正確的算式過程，相反的，A 版學生較不會操弄運算符號，以至於通過率較低；然而對於有明顯的數字關係，如 99999+9999+999+99+9＝(　　) 此題為類似 A 版的連加或減的計算題，則以 A 版學生表現最佳，高達 81%能彈性解題，通過率也較高，只有 4%採用算則；B 版學生善於寫出正確的算式過程，有 40%能彈性解題，但因課本無此類型題目，高達 50%使用算則；C 版則仍以算則居多高達 62%，只有 28%能彈性解題；如 854－199－97＝(　　) 此題為類 A 版的連加或減的計算題，此題表現採用簡捷解題以 A 版表現最佳為 22%，多數均採算則 B 版有 83% 、C 版有 45%，錯誤率最高者亦為 A 版達 59%，多數是運算符號因素影響；C 版學生錯誤率達 55%。

整體表現三版本皆差不多。從解題策略百分率顯示 B 版和 C 版沒有一個學生會用簡捷方式解題；進一步從學童解題過程分析發現 A 版錯誤率中有一半是想要彈性解題，卻不會操弄運算符號，以至於寫錯。C 版學生亦有半數會應用括號，但運算符號變號問題產生錯誤。

另一方面，如含括號算式 5891－(3726＋1891)=(　)，此題為類 C 版的括號計算題，此題 C 版學生採彈性解題高達 62%，能察覺 5891 與 1891 的關係，故未採用括號先算的規定，而採取直接去括號策略，由於括號內為加法，故去括號值不改變；A 版則為 56%，顯示學生能嘗試尋找比較有效率的方法解題，由於 B 版缺乏類似題型，故使用算則解題的學生達 63%，但錯誤率最高是 C 版有 24%，此題整體表現以 A 版為最好。進一步從學童解題過程分析結果發現 B 版和 C 版的錯誤類型中多為想要彈性解題，卻不會操弄運算符號，以至於寫錯。

又如含括號算式但涉及變號的問題 如 7546－(6546－881) ＝(　　)此題為類 C 版

的括號計算題，C 版採彈性解題達 62%，算則只有 3%，B 版採算則解題最多達 57%，錯誤率最高是 A 版達 70%。此題整體表現以 B 版為最好，顯示雖然去括號計算經驗不足但能用算則解題。進一步從學童解題過程分析結果發現 A 版的錯誤類型中有 17 位學童試著彈性解題，卻不會操弄去括號後的運算符號，以至於有很大的比率算錯。

二、不同版本的教科書，學童解題表現呈現不同的現象

從學童的解題過程分析，發現不同版的教科書會有不同的解題表現。

使用 A 版本教科書的班級，比較錯誤率會發現，A 版皆高於其他兩個版本，再從錯誤類型中去分析顯示，使用 A 版教科書的學生大部分都知道要觀察數字，進行數字的分解合成，以進行簡便的運算，卻不知道要如何在算式中正確操弄運算符號以進行解題，因而錯誤率極高。

使用 B 版教科書的班級，從數據顯示使用算則策略解題的百分率皆高於彈性解題策略，也是三個版本中比率最高；又從錯誤率來看，發現他們的錯誤率偏低。以上兩者資訊顯示 B 版學生解題策略大部分採取標準算則一步驟一步驟進行解題，較少去察覺數字的關係以進行彈性解題，因此，錯在運算符號操弄變號的比率較少。

使用 C 版教科書的班級，前面三題無括號題型的加減混合運算題，皆是採算則解題多於彈性解題，即採從左到右算；相反的，對於後面兩題有括號的加減混合運算題，由於教科書中有類似題型，則採彈性解題多於算則解題，且是三個版本中採彈性解題佔有的比率最高。顯然，學童對於四則混合運算題還不能完全去察覺數字的關係，但對於加減去括號規則卻是三個班級中表現最佳，此可能與該版本有類似題型有關，以下舉一例說明不同教科書對學生的影響。

以計算題 7546－(6546－881) ＝(　　)為例，說明了學童在解題表現和不同版本上的差異情形。如學童解題表現方面，彈性解題表示能發覺數字 7546 和 6546 都有相同的數字 546，透過去括號的規則，將 7546 和「－6546」配在一起算，如此計算較簡便(如圖 1)。算則解題表示括號內先計算 (如圖 2)。由錯誤類型的做法可看出學生有察覺 7546 和 6546 兩個數字間的關係，但去括號時，無法正確操弄運算符號，以至於算錯答案(如

圖 3)。如不同版本的解題表現差異方面，學生的學習經驗是影響解題策略的主要因素，如 99999+9999+999+99+9 為 A 版教材，學生即較能正確彈性解題，7546－(6546－881) 為 C 版教材，所以 C 版比率最高，顯示三個版本學童會受教科書影響採用不同的解題策略，若無法察覺關係則會採算則解題，而通過率亦會較高。

伍、結論與建議

本研究為研計者教學設計的第一階段研究，針對 3 個班級採試卷調查方式來探討教科書設計對學童的四則運算解題策略的影響。調查結果發現分成試題的通過率、學生的解題的策略兩方面分析：

從試題的通過率來看，三個版本的學生均顯示未能完整表現流暢的計算能力。若從答對率觀之，B 版在不同題型有較佳的表現，若從題型觀之則有區別，題型與 A 版相似，則 A 版 學生通過率優於 C 版，反之，若題型與 C 版相似，則 C 版 學生通過率優於 A 版，顯示學生學習題型多元的重要性。

若從解題策略來看，會因為使用不同版本教科書，學生的解題策略呈現不同的取向，一類學生若教學現場經驗彈性解題策略，但往往忽略四則運算的規則和性質而計算錯誤；另一類學生則是慣用標準算則解題，未被引導察覺數字的關係，採用有效的策略來解題，故只會記住規則「括號先算」、「從左到右算」、「先乘除後加減」，卻不會靈活運用。因此，顯示教科書的設計會影響學生的學習和教師的教學。

至於四則混合運算的解題策略更顯然與教科書的設計有相關。教育部(2003)說明了要注意培養學童流暢的計算能力，不僅可以內化學童的數字感，並且是日後學習抽象運算和形式推導的基礎。顯然培養學童流暢的計算能力至為重要，顯然，這樣的教學目標已隱含於教科書，但教師與學生是否能充分理解，使學童能做有效的計算呢？研究結果，三個版本的教科書的教學成效顯然未能達到全面性的整合計算概念和計算應用。本研究的計算概念包含運算的性質、規則、三個約定(先乘除後加減、括號內先計算和由左至右逐步計算)和數字的分解與合成等；計算應用即是靈活應用性質、規則和三個約

定，選擇能簡捷的彈性解題的策略進行計算。顯然，學童要展現計算的流暢性，勢必得讓計算概念和計算應用兩者達成平衡發展，缺一不可。但就學生解題表現顯示：A 版本學生企圖想要簡便地進行計算，但是，往往不完全了解數字關係與計算符號，如 999 能察覺是 1000-1，但 992 未必能應用 100-8，也就表示彈性計算的概念仍不足；B 版本的學生較傾向於採取算則解題，能依步驟解題，但彈性計算應用的能力較缺乏；C 版本的學生亦較常使用算則，唯有在去括號的題型表現較佳，即 7546－(6546－881)，不會採用括號先算，會觀察 7546 與 6546 的關係，但卻忽略去括號須變號的性質，也就表示未有完整的計算概念和計算應用的能力。因此，正如研究顯示，學生若僅有理解概念無法有效、正確地計算以得到答案，則會停滯不前並且阻礙解題的歷程(Thornton，1990)；算則的過分學習將妨礙學生思考與推理的能力，侷限了對數字的理解與彈性的應用，因此阻礙了學生數字常識的發展(楊德清，2000)。

因此，課程設計是重要的。三種版的教科書有三種不同的課程設計，然而目前從學生的測驗表現中，顯然會受版本題型的影響 ，故未達到理想的狀況。在只有計算題沒有情境題之下，若要學生理解後熟練運算，學生反覆機械式演練勢必容易產生厭倦感，且常常計算錯誤而失去自信心，故設計適切的教材是有其必要的。 因此建議教材設計應以兼顧概念的了解與計算的熟練兩種並重，當著重學生理解概念，即會選擇有效解題的歷程。教師若瞭解現今版本的差異和學生解題的取向，在教學時，就可以適當補充多元教材，以彌補教科書的不足。

參考文獻

教育部（2003）。國民中小學九年一貫課程正式綱要數學學習領域。臺北：教育部。

康軒文教事業股份有限公司(2010)。國民小學數學課本第九冊。臺北：康軒文教事業股份有限公司。

南一書局企業股份有限公司(2010)。國民小學數學課本第九冊。臺南：南一書局企業股份有限公司。

國家教育研究院籌備處(2010)。國民小學數學課本第九冊。臺南：翰林出版事業股份有限公司。

楊德清(2000)。國小六年級學生回答數字常識問題所使用之方法。科學教育學刊,8(4),379-394。

楊德清(2002)。從教學活動中幫助國小六年級學生發展數字常識之研究。科學教育學刊,10(3),233-359。

Hiebert, J. (1999). Relationships between research and the NCTM Standards. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(1), 3-19.

Hindy, Sandy. (2003, Sept.). Setting the stage for computation fluency with “Arithmetricks”. *Teaching Children Education*, *10*(1), 46-50.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Russell, Susan Jo. (2000, November). Developing computational fluency with whole numbers in the elementary grade. *Teaching Children Mathematics 7*: 154-48.

Sowder, J. T. (1992). Making sense of numbers in school mathematics. In G. Leinhardt, R. Putnam, & R. A. Hattrup (Eds.). *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 1-51). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Thornton, Carol A.(1990). Strategies for the Basic Facts. *In Mathematics for the Young Child, edited by Joseph N. Payne*, pp. 133-51. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

圖表附件

教科書版本	解題策略		
	彈性	算則	錯誤
735-85-115-22-78=(　　)			
A 版	67%	3%	30%
B 版	80%	13%	7%
C 版	24%	55%	21%
99999+9999+999+99+9＝(　)			
A 版	81%	4%	15%
B 版	40%	50%	10%
C 版	28%	62%	10%
854－199－97＝(　　)			
A 版	22%	19%	59%
B 版	0%	83%	17%
C 版	0%	45%	55%
5891－(3726＋1891) =(　　)			
A 版	56%	37%	7%
B 版	17%	63%	20%
C 版	62%	14%	24%
7546－(6546－881)　＝(　　)			
A 版	11%	19%	70%
B 版	10%	57%	33%
C 版	62%	3%	35%

表 1：學生解題策略統計表

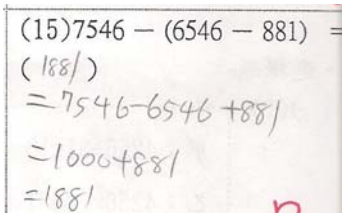

圖 1：彈性解題

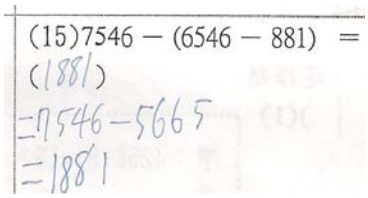

圖 2：算則解題

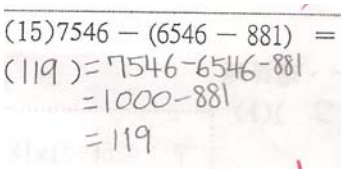

圖 3：錯誤類型