

ISSN 1815-6355

台灣數學教師(電子)期刊

Taiwan Journal of Mathematics Teachers

第27期

台灣數學教育學會

2011年09月

發行宗旨

台灣數學教師(電子)期刊 Taiwan Journal of Mathematics Teachers 2011年07月出版 NO.27 2011

發行人：林福來教授

主編：

楊德清 國立嘉義大學數學教育研究所

編輯委員

Editorial Panel

呂玉琴

國立台北教育大學數學教育研究所

李源順

台北市立教育大學數學資訊教育學系

林素微

國立東華大學數學系

金鈞

國立台灣師範大學數學系

梁淑坤

國立中山大學教育研究所

蔡文煥

國立新竹教育大學應用數學系

劉祥通

國立嘉義大學數學教育研究所

劉曼麗

國立屏東教育大學數理教育研究所

(依姓名筆劃順序排列)

封面設計：施乃文

出版者：台灣數學教育學會

地址：台北市 116 汀州路四段 88 號國立台灣師範大學數學系 M212

電話：02-29307151

電子郵件信箱：tame@math.ntnu.edu.tw

網址：

<http://www.math.ntnu.edu.tw/~tame/index.htm>

總編輯：楊德清 dcyang@mail.ncyu.edu.tw

地址：嘉義縣民雄鄉文隆村 85 號

國立嘉義大學數學教育研究所

電話：05-2263411-1924

一、本刊為一實務性的數學教育刊物，出版目的如下：

1. 積極發揚台灣數學教育學會之成立宗旨：研究、發展、推廣數學教育，使台灣學生快樂學好數學。
2. 提升數學教師教學品質、數學教育研究品質及促進數學教學策略與方法之交流。
3. 探討數學教育的學術理論與實務現況，以促進理論與實務之結合，進一步提升數學教學之內涵。
4. 提供數學教育課程、教材與教法等實務經驗，包括數學遊戲、DIY 教具之分享，以供未來之教學與研究參考之用。
5. 針對多數學生特定迷思概念之教學引導，如學生易有的錯誤型態及如何釐清觀念等。
6. 介紹國內外數學教育現況。

二、本刊內容以充實高中、國中與小學數學教學、課程與教材為主，以提供所有關心數學教育人士之教學資源與參考依據。

三、本期刊以季刊方式（3 個月一期，一年共 4 期）發行，分別於每一年的 3、6、9、12 月發行。

四、本期刊採電子與紙本方式同時發行。

ISSN 1815-6355

台灣數學教師（電子）期刊
Taiwan Journal of Mathematics
Teachers

第 27 期

2011 年 09 月

台灣數學教師（電子）期刊

目錄

第 27 期

2011 年 09 月

教科書設計對國小高年級學童四則混合運算解題的影響....	1
施佳君、譚寧君	
設計一般化活動促進學童乘法概念理解.....	12
陳嘉皇	
提升國小六年級學童數學文字題閱讀理解能力之個案研 究.....	31
陳碧祥、魏佐容	
活動報馬仔.....	57

ISSN 1815-6355

教科書設計對國小高年級學童四則混合運算解題的影響

施佳君¹、譚寧君²

¹新北市中和區中和國民小學

²國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系兼任副教授

摘要

國小階段培養學生數學的演算能力佔有重要的地位；演算能力應包括概念理解與計算應用的能力，也就是表示有流暢的計算能力。本研究旨在探討教科書設計對國小高年級學童四則混合運算解題的影響；研究採調查研究法；研究程序包括分析不同版本教科書內容，設計綜合各版本的試卷，對國小高年級學童進行施測，再分析學童解題策略；研究施測對象包括使用不同版本教科書五年級學生共有 3 個班級計 86 位。透過試卷分析學童的解題策略，以瞭解教科書的設計對學童解題的影響。A 版本的教科書著重簡捷的彈性解題策略；B 版本的教科書著重四則混合運算性質和計算的步驟化呈現；C 版本的教科書比較著重加減、乘除運算規則的學習與應用。研究結果顯示使用不同版本的教科書，學童的解題表現呈現不同的特色。根據研究結果提供給教師瞭解學童的解題表現並作為自編教材的依據。

關鍵詞：四則混合運算、計算的流暢性、解題策略

壹、緒論

一、研究背景

2011年5月4日新聞媒體播報一則非常聳動的新聞，一題簡單的數學算式 $6 \div 2(1+2)$ ，竟難倒許多人，結果有192萬多人答9，149萬多人認為是1。為什麼會有這麼多人答錯呢？究竟是因為對運算規則的不了解，還是對於乘號是否省略的概念不清楚？由這則新聞可得知，數字的運算是非常重要的。學童在國小四年級時已經學會了整數四則運算的約定：「括號內先算」、「先乘除後加減」、「由左而右計算」，並且將此三個運算規則奉為主臬。職場上的教師不難發現學生在做四則混合計算時，腦海中會立刻浮現出三個四則運算的約定，並直接採取標準算則解題的現象。究竟這三個運算規則是要學生記憶背誦後做機械式的反覆練習，還是先察覺數字和運算的關係與省略符號的使用時機，再來應用運算規則呢？由於在整數算式中，一般「 \times 」號是不宜省略的；當文字符號引入代數概念時，如 $4 \times X$ 時代表 $X+X+X+X$ ，即 X 的4倍簡記成 $4X$ 時才會省略「 \times 」號，且視 $4X$ 為一個特定數故須先算， $6 \div 2(1+2)$ 的算式中 $2(1+2)$ 均為個別數值，故應記為 $6 \div 2 \times (1+2)$ ，題目陳述才算清楚，此時 $6 \div 2(1+2) = 6 \div 2(3) = 6 \div 6 = 1$ 的答案即比較不可能發生，可見題目清楚陳述的重要性，而辨識試題的能力更不可缺。

Hindy(2003)認為具有數字常識及會察覺數字間的關係，並能檢視整個數學問題，以多種方式進行數字的分解與合成才能發展出流暢的計算能力；Sowder(1992)也提到，數感是指能夠分解或合成一個數，能流暢地在不同表徵間轉換，並知道哪一種表徵是在何時較為有效的，因此強調指導學生在運算時，應能將數字分解或察覺數字關係以便於增進解題的流暢性，國內研究者楊德清教授分析台灣學生數字常識表現情形即呈現了學生的數感由學者們的陳述，清楚說明了要學生展現計算的流暢性是現今學數學的趨勢，可見培養學童的數感能力有其重要性。

反思現今的教學情形，學生是否具備數感，又目前教科書內容設計是否注重學生數感的培養是值得關注的。研究者曾對兩個五年級的班級進行小考發現，兩個班級用不同版本教科書表現有別，一個班級有29位學童有62%能彈性解題，展現了計算的流暢性，

但只有 14% 學童能使用「括號內先算」解題；和另一個班級有 30 位學童只有 10% 學童能彈性解題但有 63% 學童使用「括號內先算」解題，展現了計算規則應用。這是教科書對學童的解題策略產生了影響？或是其他因素的影響？可見教科書的設計對學生學習的影響是值得探究的，也引起研究者想對目前國小教科書佔有率較高的三個版本進行分析與探究。

二、研究目的

本研究旨在探討不同教科書設計是否對國小高年級學童四則混合運算解題策略形成的影響。

貳、文獻探討

一、計算的流暢性

近年來在數的運算教學上，非常注重概念的理解與程序性的熟練，與傳統教學較著重機械式的運算與強調記憶的方法迥然不同，從我國與美國課程綱要可以了解在數的運算上強調計算的流暢性。我國九年一貫數學領域綱要說明了培養流暢的計算能力的重要性；其中要能運用四則運算的性質，協助心算與估算，簡化計算、驗算與解題。強調了計算更要以數字常識當作基礎，先察覺數字的關聯性再進行數字的分解與合成(教育部，2003；2008)。美國課程標準(2000)明確的說明「計算的流暢性」包括概念的理解與計算的精熟。Russell(2000)則表示具有計算流暢性的學生應該能以心算解決問題，並能注意到數字之間的關係。越來越多的證據顯示，學生若未理解而僅是記憶或練習程序，他們便很難將學習意義化(Hiebert, 1999)。根據文獻具有流暢的運算能力應包含概念的理解和計算精熟兩大部分，概念理解分成位值概念、數字的分解與合成和數字與運算的關係，計算精熟包含有效性、正確性和彈性。例如解 $555555-99995-9995$ ，先將 99995 視為 100000，9995 視為 10000，原式= $555555-100000-10000+10=440045$ ，此為有效的解題策略會使用彈性變化的方法解題，但若能察覺數字關係，但將 $99995-9995$ 先算，則產生錯誤的答案。故在教學上，應打破傳統機械式運算法，著重數字與符號關係的連結，強調解題策略的有效應用，以提升學童的數學能力。

二、四則混合運算教材分析

本研究分析現行教科書 A、B、C 三個版本。A 版本的教科書著重簡捷彈性解題策略，強調巧妙的運算，著重數字的分析，如 $999+9999$ 會轉換成 $1000-1$ 與 $10000-1$ ；B 版版本的教科書著重四則混合運算性質和計算步驟化，將性質的運用透過一步一步的引導，認是先算的數須以括號表之，進而了解括號先算的運算規則；C 版本的教科書著重加減、乘除運算規則的說明，故先教導括號先算的運算規則，再應用於四則運算中。內容呈現方式，A 版本計算題多於情境題，題目的計算亦僅列出一個做法，出現的引導句多為「想一想，有沒有比較快的算法？」；B 版本多為情境題，題目的計算會列出兩種做法，出現的引導句多為「下列兩種做法的答案會一樣嗎？」、「想一想，誰的算法比較好算？」等；C 版本多為計算題，且比較重視程序性算式，較少有引導句。分析發現 A 版本和 C 版本比較以教師為中心設計，由教師指導解題策略，B 版本比較以學生為中心設計，能提供學生觀察、分析、比較的提問設計。

參、研究方法

研究者擬進行四則運算的數位教材設計，故教科書分析與國小高年級學童四則混合運算解題策略的了解是研究者教學設計的第一階段研究。為了解高年級學童對於四則混合運算的解題策略，因此本研究之研究法採開放式試卷的調查研究法；研究程序包括分析教科書內容，綜合各版本教材編製試卷進行施測，再分析學童解題策略；透過試卷分析瞭解教科書的設計對學童解題的影響。

一、研究對象

本研究施測的對象是五年級學童。參與的班級有 3 個班，共有 86 位學童。這 3 個班級包括 1 個班級用 A 版本教科書、1 個班級用 B 版本教科書、1 個班級用 C 版本教科書。

二、研究工具

本研究的施測題本是為研究者自編。施測之四則混合運算題目是參考 A 版、B 版、C

版三種教科書版本，再加以小幅度改變數字後的計算題，並無文字題，試題為整數四則問題，主要為估算的應用與括號的認識與應用，試卷中估算的應用包括連加、連減與加減混合，試題類型分別來自 A、B、C 版本教材，共有 12 題，以三題為例說明；括號的認識與應用則含四種類型，即(1) $a+(b+c)=a+b+c$ 、(2) $a+(b-c)=a+b-c$ 、(3) $a-(b+c)=a-b-c$ 、(4) $a-(b-c)=a-b+c$ ，試題共 8 題，各以兩題為例，經共同研發數位教材的研究團隊與學校同儕共同討論確定，主要探討學生數字常識的應用或括號先算的運算規則使用情形。

三、資料蒐集與分析

本研究是研究者教學設計的第一階段研究，在分析教科書與了解教科書的設計對高年級學童四則運算解題的影響，因此蒐集紙筆測驗的表現進行解題類型分類，並加以分析。

肆、研究結果

本研究分析了學童解題表現，並依學生通過率與解題策略來探討版本對學童解題策略的影響。研究結果主要有以下二項：

一、不同版本的教科書，學童解題表現呈現不同的通過率

本研究對五年級 3 個班級的學童進行紙筆測驗，研究者將紙筆測驗的結果進行解題表現進行分類如表一。學生紙筆測驗中正確的解題策略分類為彈性解題即能察覺數字關係進行有效率的計算、算則即依據記憶的運算規則計算，其他即為錯誤解題共三項。簡捷彈性解題意能表現計算的流暢性；算則解題表示學童在沒有察覺怎麼算比較簡便的情況之下，依照四則混合運算的括號內先算、先乘除後加減、由左而右計算三個約定進行解題；選答錯誤解題包含錯誤的符號運用為典型的計算錯誤類型和無法解釋的計算。根據表一發現學生的解題表現依循著使用不同版本的教科書會有不同的解題方式，顯示教科書設計對學習的影響。

例如 $735-85-115-22-78=(\quad)$ ，此題為類 B 版的連加或減的計算題。學生能察覺 85 與 115 及 22 與 78 的關係，很快計算出 435，此以 B 版學生表現最佳，高達 80% 學生能以彈性解題表現最佳；C 版學生則有 55% 採用算則方式即採取由左而右計算，只有 24% 學生能以彈性解題，A 版中有 67% 學生能察覺數字關係，但答錯率最高的也是 A 版達 30%，反而只有 3% 使用算則，顯示學生有數感但符號運用不足。此類四則運算部分整體而言，以 B 版表現較佳。從學生解題方式分析結果發現，B 版學生善於寫出正確的算式過程，相反的，A 版學生較不會操弄運算符號，以至於通過率較低；然而對於有明顯的數字關係，如 $99999+9999+999+99+9=(\quad)$ 此題為類似 A 版的連加或減的計算題，則以 A 版學生表現最佳，高達 81% 能彈性解題，通過率也較高，只有 4% 採用算則；B 版學生善於寫出正確的算式過程，有 40% 能彈性解題，但因課本無此類型題目，高達 50% 使用算則；C 版則仍以算則居多高達 62%，只有 28% 能彈性解題；如 $854-199-97=(\quad)$ 此題為類 A 版的連加或減的計算題，此題表現採用簡捷解題以 A 版表現最佳為 22%，多數均採算則 B 版有 83%、C 版有 45%，錯誤率最高者亦為 A 版達 59%，多數是運算符號因素影響；C 版學生錯誤率達 55%。

整體表現三版本皆差不多。從解題策略百分率顯示 B 版和 C 版沒有一個學生會用簡捷方式解題；進一步從學童解題過程分析發現 A 版錯誤率中有一半是想要彈性解題，卻不會操弄運算符號，以至於寫錯。C 版學生亦有半數會應用括號，但運算符號變號問題產生錯誤。

另一方面，如含括號算式 $5891-(3726+1891)=(\quad)$ ，此題為類 C 版的括號計算題，此題 C 版學生採彈性解題高達 62%，能察覺 5891 與 1891 的關係，故未採用括號先算的規定，而採取直接去括號策略，由於括號內為加法，故去括號值不改變；A 版則為 56%，顯示學生能嘗試尋找比較有效率的方法解題，由於 B 版缺乏類似題型，故使用算則解題的學生達 63%，但錯誤率最高是 C 版有 24%，此題整體表現以 A 版為最好。進一步從學童解題過程分析結果發現 B 版和 C 版的錯誤類型中多為想要彈性解題，卻不會操弄運算符號，以至於寫錯。

又如含括號算式但涉及變號的問題 如 $7546-(6546-881)=(\quad)$ 此題為類 C 版

的括號計算題，C 版採彈性解題達 62%，算則只有 3%，B 版採算則解題最多達 57%，錯誤率最高是 A 版達 70%。此題整體表現以 B 版為最好，顯示雖然去括號計算經驗不足但能用算則解題。進一步從學童解題過程分析結果發現 A 版的錯誤類型中有 17 位學童試著彈性解題，卻不會操弄去括號後的運算符號，以至於有很大的比率算錯。

二、不同版本的教科書，學童解題表現呈現不同的現象

從學童的解題過程分析，發現不同版的教科書會有不同的解題表現。

使用 A 版本教科書的班級，比較錯誤率會發現，A 版皆高於其他兩個版本，再從錯誤類型中去分析顯示，使用 A 版教科書的學生大部分都知道要觀察數字，進行數字的分解合成，以進行簡便的運算，卻不知道要如何在算式中正確操弄運算符號以進行解題，因而錯誤率極高。

使用 B 版教科書的班級，從數據顯示使用算則策略解題的百分率皆高於彈性解題策略，也是三個版本中比率最高；又從錯誤率來看，發現他們的錯誤率偏低。以上兩者資訊顯示 B 版學生解題策略大部分採取標準算則一步驟一步驟進行解題，較少去察覺數字的關係以進行彈性解題，因此，錯在運算符號操弄變號的比率較少。

使用 C 版教科書的班級，前面三題無括號題型的加減混合運算題，皆是採算則解題多於彈性解題，即採從左到右算；相反的，對於後面兩題有括號的加減混合運算題，由於教科書中有類似題型，則採彈性解題多於算則解題，且是三個版本中採彈性解題佔有的比率最高。顯然，學童對於四則混合運算題還不能完全去察覺數字的關係，但對於加減去括號規則卻是三個班級中表現最佳，此可能與該版本有類似題型有關，以下舉一例說明不同教科書對學生的影響。

以計算題 $7546 - (6546 - 881) = (\quad)$ 為例，說明了學童在解題表現和不同版本上的差異情形。如學童解題表現方面，彈性解題表示能發覺數字 7546 和 6546 都有相同的數字 546，透過去括號的規則，將 7546 和「-6546」配在一起算，如此計算較簡便(如圖 1)。算則解題表示括號內先計算(如圖 2)。由錯誤類型的做法可看出學生有察覺 7546 和 6546 兩個數字間的關係，但去括號時，無法正確操弄運算符號，以至於算錯答案(如

圖 3)。如不同版本的解題表現差異方面，學生的學習經驗是影響解題策略的主要因素，如 $99999+9999+999+99+9$ 為 A 版教材，學生即較能正確彈性解題， $7546-(6546-881)$ 為 C 版教材，所以 C 版比率最高，顯示三個版本學童會受教科書影響採用不同的解題策略，若無法察覺關係則會採算則解題，而通過率亦會較高。

伍、結論與建議

本研究為研計者教學設計的第一階段研究，針對 3 個班級採試卷調查方式來探討教科書設計對學童的四則運算解題策略的影響。調查結果發現分成試題的通過率、學生的解題的策略兩方面分析：

從試題的通過率來看，三個版本的學生均顯示未能完整表現流暢的計算能力。若從答對率觀之，B 版在不同題型有較佳的表現，若從題型觀之則有區別，題型與 A 版相似，則 A 版 學生通過率優於 C 版，反之，若題型與 C 版相似，則 C 版 學生通過率優於 A 版，顯示學生學習題型多元的重要性。

若從解題策略來看，會因為使用不同版本教科書，學生的解題策略呈現不同的取向，一類學生若教學現場經驗彈性解題策略，但往往忽略四則運算的規則和性質而計算錯誤；另一類學生則是慣用標準算則解題，未被引導察覺數字的關係，採用有效的策略來解題，故只會記住規則「括號先算」、「從左到右算」、「先乘除後加減」，卻不會靈活運用。因此，顯示教科書的設計會影響學生的學習和教師的教學。

至於四則混合運算的解題策略更顯然與教科書的設計有相關。教育部(2003)說明了要注意培養學童流暢的計算能力，不僅可以內化學童的數字感，並且是日後學習抽象運算和形式推導的基礎。顯然培養學童流暢的計算能力至為重要，顯然，這樣的教學目標已隱含於教科書，但教師與學生是否能充分理解，使學童能做有效的計算呢？研究結果，三個版本的教科書的教學成效顯然未能達到全面性的整合計算概念和計算應用。本研究的計算概念包含運算的性質、規則、三個約定(先乘除後加減、括號內先計算和由左至右逐步計算)和數字的分解與合成等；計算應用即是靈活應用性質、規則和三個約

定，選擇能簡捷的彈性解題的策略進行計算。顯然，學童要展現計算的流暢性，勢必得讓計算概念和計算應用兩者達成平衡發展，缺一不可。但就學生解題表現顯示：A 版本學生企圖想要簡便地進行計算，但是，往往不完全了解數字關係與計算符號，如 999 能察覺是 $1000-1$ ，但 992 未必能應用 $100-8$ ，也就表示彈性計算的概念仍不足；B 版本的學生較傾向於採取算則解題，能依步驟解題，但彈性計算應用的能力較缺乏；C 版本的學生亦較常使用算則，唯有在去括號的題型表現較佳，即 $7546-(6546-881)$ ，不會採用括號先算，會觀察 7546 與 6546 的關係，但卻忽略去括號須變號的性質，也就表示未有完整的計算概念和計算應用的能力。因此，正如研究顯示，學生若僅有理解概念無法有效、正確地計算以得到答案，則會停滯不前並且阻礙解題的歷程(Thornton, 1990)；算則的過分學習將妨礙學生思考與推理的能力，侷限了對數字的理解與彈性的應用，因此阻礙了學生數字常識的發展(楊德清, 2000)。

因此，課程設計是重要的。三種版的教科書有三種不同的課程設計，然而目前從學生的測驗表現中，顯然會受版本題型的影響，故未達到理想的狀況。在只有計算題沒有情境題之下，若要學生理解後熟練運算，學生反覆機械式演練勢必容易產生厭倦感，且常常計算錯誤而失去自信心，故設計適切的教材是有其必要的。因此建議教材設計應以兼顧概念的了解與計算的熟練兩種並重，當著重學生理解概念，即會選擇有效解題的歷程。教師若瞭解現今版本的差異和學生解題的取向，在教學時，就可以適當補充多元教材，以彌補教科書的不足。

參考文獻

- 教育部 (2003)。國民中小學九年一貫課程正式綱要數學學習領域。臺北：教育部。
- 康軒文教事業股份有限公司(2010)。國民小學數學課本第九冊。臺北：康軒文教事業股份有限公司。
- 南一書局企業股份有限公司(2010)。國民小學數學課本第九冊。臺南：南一書局企業股份有限公司。
- 國家教育研究院籌備處(2010)。國民小學數學課本第九冊。臺南：翰林出版事業股份有限公司。
- 楊德清(2000)。國小六年級學生回答數字常識問題所使用之方法。科學教育學刊, 8(4), 379-394。
- 楊德清(2002)。從教學活動中幫助國小六年級學生發展數字常識之研究。科學教育學刊, 10(3), 233-359。
- Hiebert, J. (1999). Relationships between research and the NCTM Standards. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(1), 3-19.
- Hindy, Sandy. (2003, Sept.). Setting the stage for computation fluency with “Arithmetricks”. *Teaching Children Education*, 10(1), 46-50.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Russell, Susan Jo. (2000, November). Developing computational fluency with whole numbers in the elementary grade. *Teaching Children Mathematics* 7: 154-48.
- Sowder, J. T. (1992). Making sense of numbers in school mathematics. In G. Leinhardt, R. Putnam, & R. A. Hattrup (Eds.). *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 1-51). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Thornton, Carol A.(1990). Strategies for the Basic Facts. In *Mathematics for the Young Child*, edited by Joseph N. Payne, pp. 133-51. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

圖表附件

教科書 版本	解題策略		
	彈性	算則	錯誤
$735-85-115-22-78=()$			
A 版	67%	3%	30%
B 版	80%	13%	7%
C 版	24%	55%	21%
$99999+9999+999+99+9=()$			
A 版	81%	4%	15%
B 版	40%	50%	10%
C 版	28%	62%	10%
$854-199-97=()$			
A 版	22%	19%	59%
B 版	0%	83%	17%
C 版	0%	45%	55%
$5891-(3726+1891)=()$			
A 版	56%	37%	7%
B 版	17%	63%	20%
C 版	62%	14%	24%
$7546-(6546-881)=()$			
A 版	11%	19%	70%
B 版	10%	57%	33%
C 版	62%	3%	35%

表 1：學生解題策略統計表

$$\begin{aligned}
 (15)7546 - (6546 - 881) &= \\
 (1881) & \\
 &= 7546 - 6546 + 881 \\
 &= 1000 + 881 \\
 &= 1881
 \end{aligned}$$

圖 1：彈性解題

$$\begin{aligned}
 (15)7546 - (6546 - 881) &= \\
 (1881) & \\
 &= 7546 - 5665 \\
 &= 1881
 \end{aligned}$$

圖 2：算則解題

$$\begin{aligned}
 (15)7546 - (6546 - 881) &= \\
 (119) &= 7546 - 6546 - 881 \\
 &= 1000 - 881 \\
 &= 119
 \end{aligned}$$

圖 3：錯誤類型

設計一般化活動促進學童乘法概念理解

陳嘉皇

崑山科技大學 通識教育中心

摘要

本研究旨在利用數學一般化的活動設計，呈現創意教學技巧，以協助學生進行乘法表的學習，增進乘法概念之理解。在教學實務上，教科書的內容與教師採用的教學方式，大多利用傳統記憶背誦乘法表的方式教導學生學習乘法概念，學生則因認知負荷與表面的理解容易產生錯誤，致使在乘法學習的歷程喪失興趣、信心和自尊。因此有必要提供教師有趣及具效用之教學方式，利用數字理論的一般化活動，透過理解及運用乘法有關的律則像是交換律、結合律等，及肢體表徵與視覺感受，強化數字變化的關係而理解乘法概念。教師利用本文教學設計介紹之技巧與策略，可提升教學效果，增進教學信心，並在實際的操作過程，提升學生學習的興趣與數學成就。

關鍵字詞：一般化、乘法概念、教學設計

壹、緒論

能理解乘法的意義，使用運算符號(\times)和等於符號(=)做橫式紀錄，並解決生活中的問題，是小學二年級學生必須發展的基本數學能力(教育部，2003)，精熟與理解算術的樞紐九九乘法，才能作為日後所有計算的基礎。但審視教科書與教師提供給學生的作業安排，並不足以充分滿足學生的需求，例如課本提供文字題，要求學生呈現算式解題，精確且立即算出結果，強迫學生背誦九九乘法表，並未解說乘法之意義與功能，致使學生計算表現良好，但概念較為匱乏。因此需有合適的挑戰與高品質的作業，協助教師擴展數學教育的觀點，提升數學專業能力，包含活動設計、數學研究、概念的解析，以改變教室實務強調學生知識背誦的現象，藉由乘法推理活動的進行，提供更多概念發展的機會並運用於真實世界以解決面對的問題。鑑此，本研究之目的如下：

(一)提供乘法概念一般化活動設計範例，增進教師數學教學效能。

(二)分析學生乘法問題解題策略，提升學生乘法概念理解表現。

貳、文獻探討

乘法常被教師視為是「同數累加」的改寫，例如 8×3 是 $8+8+8$ 的改寫，這是從心理學的觀點來看，因為乘法只不過是同數累加的「較為簡單的記述方式」。學童被期望利用乘法的算式取代手續冗長的同數累加的加法關係。教學時，「倍」的意義則被提示成「同數累加的次數」(國立編譯館，1993)。此種處理會產生一些問題，例如：1. 認為產生乘法就是累加的錯覺，過度強調乘法就是累加的說法，容易造成小數或分數的乘法障礙，或認為「凡是乘的，其積不會小於被乘數」；2. 教材過度集中，學習的精熟建築在記憶，而非活動類型的內蘊化，此舉易造成學童面對問題時，往往不究其意，逕自以乘法方式加以解題；造成日後在指導整數四則運算時，認為乘法是較加法「高級」的運算的錯誤，從而使得先乘法後加減的算則成為必然(甯自強，1994)。

乘法算則為在合成性巢狀數概念之下，利用多單位系統來描述被乘數及乘數，並在心智操作一個單位量轉換的問題，也就是倍的問題(陳竹村，1997)。所謂單位量的轉換，

是指「將數個非 1 的單位量，轉化成以 1 為單位量」的活動。例如：3 個蘋果放 1 盤，五盤共有幾個蘋果？這是以 1 盤為單位，共有五個單位，每個單位是 3 個蘋果；然後以 1 個蘋果為單位，最後得到總數為 15 個蘋果。以上述為例，把以盤為單位的量，轉化乘以個為單位的量，就是單位量的轉換。從單位量轉換的觀點來看，被乘數是異於原初的單位量，乘數是新單位量的倍數，而積數則是以 1 為單位量的倍數。從心理學的觀點來看，可將乘法看成是單位量轉化活動類型的抽象。在學習乘法初始，學童需將新的單位量，按照他的倍數，加以表現，然後重新點數，以確定積是幾個新的單位量。在乘法問題解題的過程，教師若能思考單位量轉換的問題，協助學童紀錄解決單位量轉換的過程，並能用乘號敘寫解決單位量轉換問題的活動紀錄，那麼可促進學生對乘法概念的理解。

學生若理解乘法概念，那麼應能解釋與證明執行計算時所運用的算術推理。但根據教學現場的觀察，在學習乘法這方面，教師並未提供一個概念學習的基礎，常將乘法當成是一系列加法的運算，很少提供學生進行數學關係思考的機會與活動，因此，學童接觸較艱難的問題時，常無法洞察及運用數學關係，解決等式和簡單的代數問題(陳嘉皇，2010)。「美國數學教師協會」(National Council of Teachers of Mathematics, NCTM, 2000)認為有效的數學教學應該瞭解學童需學習與明白的事物是什麼，然後支持他們接受作業的挑戰。因此，教師需要選擇與設計讓學童可以進行推理與感覺乘法概念的作業，這些作業的安排可參照 NCTM(2000)提出的建議：讓學生都能：1. 理解樣式、關係，2. 使用數學的模式呈現與瞭解數量的關係，3. 分析不同情境的變化。這些建議可以透過一般化的活動予以設計，數學一般化活動是概念與不同表徵和它們之間關係的推理，及對一些概念實體有關事實宣稱的檢驗與探究(Carpenter, Franke., & Levi, 2003； Kieran, 2004)。一般化的作業可提供學童思考路徑及發現規則等實質效益，若能透過特殊案例的分析，進行資料系統的組織、臆測和歸納，將樣式裡的規則抽離出來，呈現知識結構化與數學物件間關係轉化的技巧，也可促進解題能力的發展(Sfard, 1991)。Dreyfus (1991)視一般化為：對特殊案例進行推理或化約，辨識出其間的共通性，並正確的擴展到更大的案例上。Kaput (1999)則將一般化定義為：對數學問題擴展的可能範圍加以推理與溝通，能明確

的辨識與說明不同樣式的共通性，轉移推理與溝通至更大層面的樣式或情境。因此，學校數學教學的重點，必須要能夠促進學生一般化的推理技巧，且能表達和論證一般化。

為協助教師教導學童對數學概念的推理，而發展最佳的乘法概念理解，本文擬藉由一般化的理念設計相關作業，提供教師有趣及具效用之教學方式，透過理解及運用乘法有關的律則像是交換律、結合律等，經由肢體表徵與視覺感受，強化數字變化的關係而理解乘法概念。設計之活動總計四個單元，分別為：串珠遊戲、百格板學乘法、雙手萬能、建構乘法表等。其教學目標、內容、實施方式與學生表現分析，如下所述。

參、研究設計與實施

本文目的在於深入理解二年級學生乘法推理的發展，設計的單元分四節教學時間進行，每節課程包含2至3個活動，教學活動後即讓學生練習，以組織與精熟其學習乘法概念的經驗。學習活動呈現的順序，主要以學生乘法概念的理解與解題作為考量，首先是有關集聚單位的辨識與轉換，其次是乘法等式中數字關係的探索，再者是透過身體姿勢的操弄以連結九九乘法，最後則透過九九乘法表之建構，讓學生精熟與彈性運用乘法表所習得的知識。如何測量學生是否深化其對乘法概念的理解？研究者以學生在作業歷程呈現的乘法解題說明與表徵策略作為分析的行為的要點，將活動內容與歷程，包含師生對話、解題進行的實物操作與各式表徵予以錄影，作為教學效果分析的項目。參與的學生為台灣南部某公立小學二年級學生26人，該班學生家長社經地位中上程度，職業多為公務人員或經商，提供多元學習經驗給予學生參與，例如課後安親班、各式才藝與競賽、參訪與觀摩。教師重視學生閱讀能力之培養，利用每日早修時間進行說故事、寫作等活動，因此學生發表能力佳。本文活動於2011年3月進行，歷時一週四節課完成，上課時間為星期一、三、四、五之第一節課，教學實驗階段該班課程進度為乘法(二)單元，內容主要為0與10、直式記錄、加減法與乘法關係，乘法(一)已於開學初(二月底)教授完畢，主要內容為九九乘法表的精熟。教學活動採小組(2人1組)合作學習方式進行，學生可利用口語、畫圖、肢體動作等各式表徵方式呈現其數學概念，教師則鼓勵學生進行樣

式觀察、推理與臆測乘法表各表列式之間的關係，進而瞭解數學乘法的結構概念。

肆、研究結果與討論

有關乘法概念設計範例與學生作業產出結果的分析，以單元設計方式呈現如下，各單元之教學目標、內容、實施方式與學生表現分析，如下所述：

一、單元一：串珠


(一)教學目標

1. 透過觀察物件，將具相似特徵的物件組合成一集聚單位，以明瞭被乘數意義。
2. 明瞭相同數量之物件可組合成不同的集聚單位，熟悉單位量的轉換。
3. 瞭解乘法交換律的意義

(二)內容

活動一、

小花利用不同顏色的積木練習串珠，串好的項鍊如桌上擺放的積木(呈現具體物)，他總共用了多少個積木呢？




1 2 3 4 5 6 25 26 27

1. 首先觀察桌上的積木，你發現幾個積木之後會再重複？()個
2. 這樣的情況重複了幾次？()
3. 所以可以用()個 \times ()次=()個，算出全部的積木。


活動二、

小花第二次串好的珠子項鍊如下圖，他總共用了多少珠子呢？



1. 首先觀察珠子項鍊，你發現幾個珠子之後會再重複？()個
2. 這樣的情況重複了幾次？()
3. 所以可以用()個 \times ()次=()個，算出全部的珠子。

活動三、
利用乘法的方式計算出下列圖形有幾個圓圈？



1. 將 4 個圈起來
第一種乘法
()×()=()

2. 將 6 個圈起來
第二種乘法
()×()=()

3. 將 8 個圈起來
第三種乘法
()×()=()

4. 將 3 個圈起來
第四種乘法
()×()=()

(三)實施方式

1. 教師於每組學生(2人一組)桌上，分配已經結合好的積木(表示串珠，分別為紅藍綠三種各9個)，要求學童不能採取計數方式求出串珠的數目，可以辨別排列的串珠，幾個之後會再重複，將他一組一組拆解，計數有幾組，然後列出乘法等式，並解釋此等式的意義。
2. 比較不同組合但相同數目之串珠，可以形成乘法交換律的關係。

(四)學生表現分析

以下從活動的歷程師生對話與學生的表徵，進行描述，呈現本教材設計產生的效果。

活動一、二：

師：說說看，你是用什麼方法算出答案的！

生：我看到紅色、藍色和綠色的積木可以一組，然後又一組(指出)，這裡總共有
1. 2. 3……9組。

師：有9組，每組有幾個積木？

生：有3個。

師：9組代表什麼意思？

生：每一組有3個積木，9組表示有3個積木的有9個。

師：要怎樣才能算出積木有幾個？

生： $3 \times 9 = 27$

師： 3 表示什麼？ 9 表示什麼？ 27 表示什麼？

生： 3 是這一組的積木有 3 個， 9 是有 9 組， 27 是總共 27 個積木。

師：哪一個數字表示被乘數？是 3 ？還是 9 ？為什麼？

生： 3 表示被乘數，因為現在是 3 個一組，有 9 個一樣的。

師：除了這種排列可以算出全部的積木？還有沒有其他方法可以算出！

生：可以用 $9 \times 3 = 27$ ！

師：說說看你的方法！

生：我把積木拆掉後，同樣顏色的組在一起，這裡有 3 種顏色，每種都一樣多，這是 9 個，

所示是 $9 \times 3 = 27$ 。

師：很好！大家把積木組成這種樣子（ 9×3 ）！看一看，剛才的 3×9 和 9×3 有一樣嗎？

生：直的看是 9×3 ，橫的看是 3×9 。

師：他們一樣嗎？

生：這樣看（直）有 3 種顏色（每種有 9 個），這樣看（橫）是 1 組（ 9 組），都是 27 個。

生：這樣是 $9 \times 3 = 27$ ，這樣是 $3 \times 9 = 27$ 。

師：這樣（指直的排列）是 9×3 ，從這樣看是 3×9 ， $9 \times 3 = 3 \times 9$ ，這表示從不同的位置看，

但數目都是 27 個。

從上述師生對話內容，可知學生透過觀察和實作可以藉由物件的特徵組合成集聚單位，並從「倍」的觀念，列出乘法等式，說明被乘數、乘數與積所表示集聚單位的意義，在單位量的轉換表現是成功的，且透過物件的排列、比對乘法記錄，而得到乘法交換律的概念。接著進行活動二的操作，大多數學生（ 21 人）能正確的觀察出 5 個物件可以組成 1 組（重複），列出 $5 \times 4 = 20$ ，但有 5 位學生無法辨識出重複物件的特質，並利用非乘法方式得到正確答案，經教師解說後，此 5 位學生於下次練習時可利用樣式的觀察而獲得正確答案。一般化的概念可以協助學生發現物件相同的特質，組成集聚單位，順利利用乘法等式解題。

活動三：

從本活動歷程，可發現學生能正確的將集聚單位用於乘法記錄的被乘數與乘數位置上(如圖1所示)，並適切的解釋其意義。且經教師將學生的乘法等式依照被乘數之大小排列，要求觀察比對後，有些學生發現：同樣的數量(積)，其組合的集聚單位越大(單位量)，那麼分配的組數會越小(乘數)；亦即積一樣時，被乘數越大，乘數越小的概念。

師：根據學習單的圖形，說說看， 4×6 和 6×4 有什麼不同？

生： 4×6 是把4個圈起來，總共有6個， 6×4 是把6個圈起來，有4個。

師：那麼 4×6 和 6×4 有什麼地方一樣？

生：都是24個！

師：都是24個，為什麼可以 4×6 、 6×4 、 3×8 、 8×3 ？

生：因為他們圈起來的圈圈不一樣，有的有4組，有的有8組。

生：我也可以2個2個圈起來，就有12組。

師：我把24個圈圈可以呈現的等式寫在黑板($2 \times 12 = 24$ ， $3 \times 8 = 24$ ， $4 \times 6 = 24$ ，...)你們發現什麼？

生：被乘數越來越大！

師：還有呢？

生：乘數越來越小。

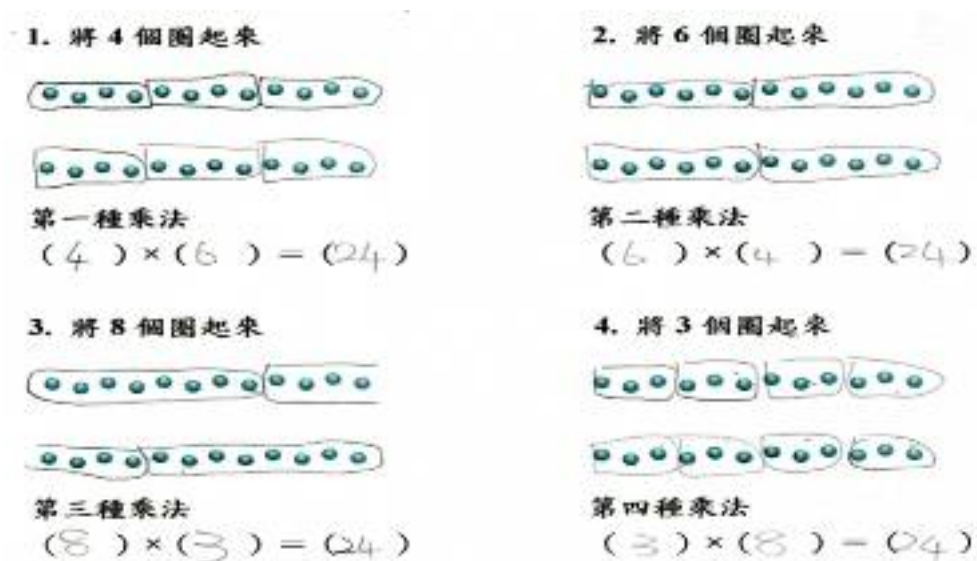


圖1：學生乘法表現

二、單元二：百格板學乘法

(一)教學目標

1. 明瞭可將乘法記錄之被乘數、乘數與積，透過百格板方式予以表徵。
2. 透過百格板的表徵瞭解不同乘法等式之間的關係。
3. 透過百格板的表徵瞭解乘法具有加法結合律的關係。

(二)內容

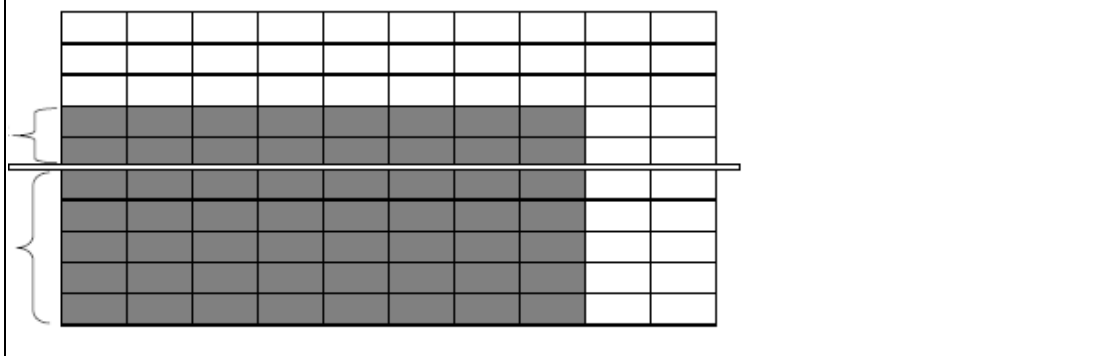
活動一、

在百格板上畫出 9×7 的範圍，想想看，總共有幾個方格？

1. 畫出 $8 \times 8 = ()$ ，總共有幾個方格？
2. 畫出 $6 \times 9 = ()$ ，總共有幾個方格？
3. 畫出 $4 \times 9 = ()$ ，總共有幾個方格？
4. 畫出 $9 \times 9 = ()$ ，總共有幾個方格？

活動二、

觀察百格板，臆測 8×7 比 8×6 多了幾個8？ 8×7 比 8×8 少了幾個8？



活動三、

觀察百格板，臆測 8×7 可否由 8×5 和 8×2 組成？

(三)實施方式

教師在黑板上呈現百格板，示範被乘數、乘數與積如何透過百格版橫、縱座標的數字顯示出積的關係，透過百格板表徵，明白 8×7 比 8×6 多1個8或 8×7 比 8×8 少1個8等數字的關係，且藉有百格板分割與組合的表徵，瞭解 $8 \times 7 = 8 \times (5 + 2)$ 結合律的概念。

(四)學生表現分析

活動一：

百格板表徵的方式可協助學生透過視覺方式，思考多元的解題策略，對於乘法推理具有正面的意義(如圖2所示)。

師：你把 4×9 用百格板畫出後，除了數數外，你想到還可以用什麼方法算出答案？

生：我把這一個地方(第四列)移到這個地方(將1格移到第一列讓其變成10)，這個再移到這裡(將1格移到第二列讓其變成10)，這個再移到這裡(將1格移到第三列讓其變成10)，這裡就剩下6個(指第四列)，這裡有3個10，有36個。

師：那麼 4×9 就是36了喔！還有沒有其他方法！

生：這4列都是9，比10少1、1、1、1(指10的位置)，所以40減4就是36。

師：這方法真好，可以把他想成是10，但要減1，這裡總共有40，要減掉4，就變成36了。

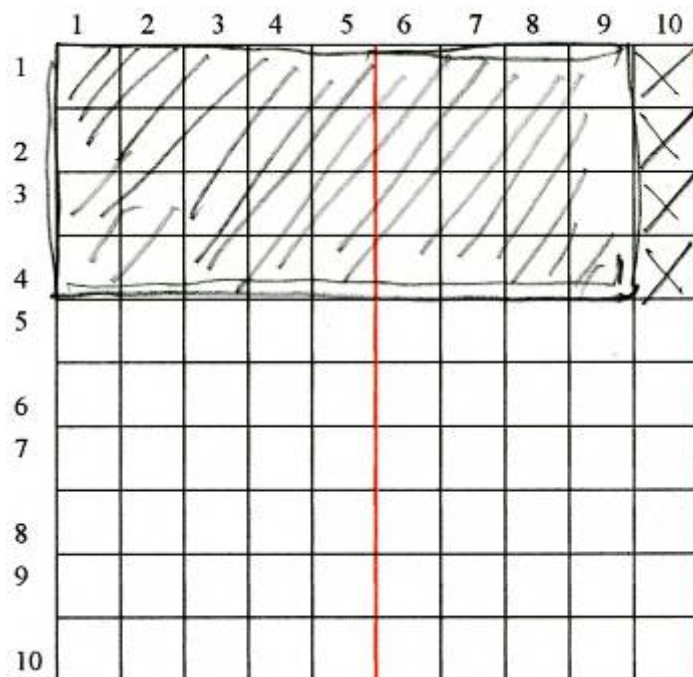


圖2：學生對於 4×9 之解題方法

活動二：

百格板呈現之表徵可讓學生透過視覺的比對與臆測，明白數字之間的關係。

師： 8×7 比 8×6 多幾個8？

生：多1個8，因為 8×8 比 8×7 多了這一個(指一列)，所以多1個8。

師：這個指一列(指示)，那麼 8×6 和 8×9 有什麼關係？

生： 8×6 比 8×9 少3個8(指著百格板)。

師：少3個8是少多少呢？

生：少24。

師：對！ 8×6 比 8×9 少3個8，也就是少24。

活動三：(如圖3所示)

師： 8×7 可否由 8×5 和 8×2 組成？

生：可以的！

師：說說看！你怎麼做！

生：8x5畫這樣！8x2畫這樣！

師：這樣畫和8x7的圖一樣嗎？

生：一樣啊！

師：你們看喔！這裡的7是不是分成5和2啊！這一塊是不是8x5？這一塊是不是8x2？可不可以！

生：可以！

師：那麼8x7裡的7可不可以寫成(5+2)？

生：可以！

師：那麼8x5和8x2合起來(指著百格板)和8x7一樣嗎？

生：一樣！

師：我們可以把8x7寫成8x(5+2)，(5+2)是代表那個數字？

生：是7

師：8x7和8x(5+2)一樣嗎

生：一樣。

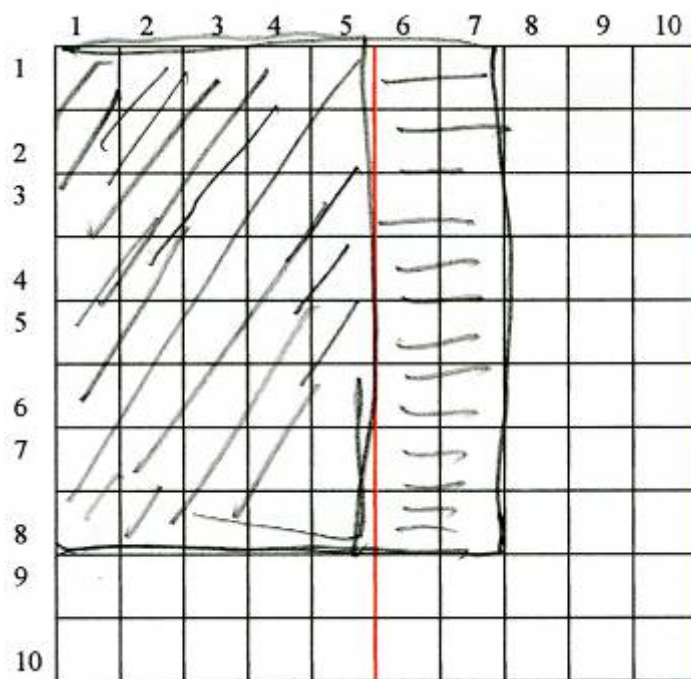


圖3：學生 $8 \times 7 = 8 \times (5 + 2)$ 之表現

本單元透過百格板之表徵，提供學生視覺比對與臆測推理的線索，順利協助學生理解乘法等式數字的關係，並激發出多元解題策略，可培養出學生彈性的乘法解題技巧，且透過引導，讓學生理解乘法之加法結合律的意義。

三、單元三：雙手萬能

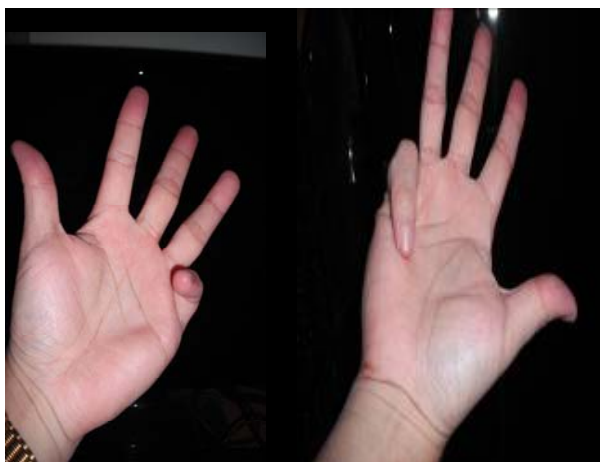
(一)教學目標

1. 利用雙手手指姿勢連結九九乘法的學習。

(二)內容

活動一、
利用兩手的手指，找出 4×9 是多少？

活動二、
利用兩手的手指，找出 9×9 是多少？



這個手勢可以寫成 () \times ()=()

(三)實施方式

1. 教師提供範例先說明 5×9 以內之手指遊戲(如圖4所示)：兩手張開有10隻手指，彎曲1指就成為9，但左手彎曲的手指代表不同的數字，彎左手大拇指表示 $1 \times 9 = 9$ (總計9個指頭)，彎左手食指表示 $2 \times 9 = 18$ ，左手大拇指代表10，另外左右手有8隻手指，所以表示18；彎左手中指表示 $3 \times 9 = 27$ ，左手拇指與食指表示20，另有7隻手指，所以為27；彎左手無名指時，表示 $4 \times 9 = 36$ ，因左手之拇指、食指與中指表示30，另有6隻手指，

所以是36；彎左手小指時，表示 $5 \times 9 = 45$ ，因左手張開拇指、食指、中指與無名指表示40，另右手有5隻手指，所以是45。學童瞭解姿勢規則後，教師出題提供學生示範。



圖4： $3 \times 9 = 27$ 之手指姿勢示範動作

2. 其次提供範例說明兩手姿勢學習九九乘法的規則(如圖5、6所示)：伸出大拇指、彎其他4指表示6；伸出大拇指、食指，彎其他3指表示7；伸出大拇指、食指與中指，彎其他2指表示8；伸出大拇指、食指、中指與無名指，彎小指表示9； 7×8 即左手伸出大拇指與食指，彎另3指；右手伸出大拇指、食指與中指，彎另2指；此時將伸出的手指視為10的數目，總計伸出5個手指，代表50；而彎曲的手指相乘， $3 \times 2 = 6$ ，所以總計為56。



圖5：手指姿勢表示6、7、8、9等數字之示範動作

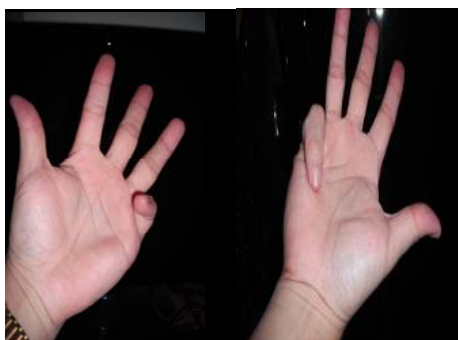


圖6： $9 \times 9 = 81$ 之示範動作

(四)學生表現分析

本單元活動由於透過學童自身的感官進行操作，學生興趣高昂，參與學習動機高，從操作歷程得知學習亦可透過身體動作而完成知識的習得，莫不驚奇與興奮(如圖7所示)。經過遊戲規則理解與動作熟練後，學童對於九九乘法表數字正確的展示，提供另一種表徵，配合記憶背誦，更容易正確解題。



圖7：學生利用手指姿勢學習九九乘法情形

四、單元四：建構乘法表

(一)教學目標

1. 熟記九九乘法表。
2. 瞭解被乘數、乘數與積之間數字的關係。

(二)內容

活動一、

將百格板空白的地方，填入適當的數字？

紅色空格是 ()×()=()

黃色空格是 ()×()=()

藍色空格是 ()×()=()

綠色空格是 ()×()=()

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

活動二、

找找看！百格板中的數字 24，可由那兩個數字相乘獲得答案？

()×()=(24)

()×()=(24)

()×()=(24)

(三)實施方式

教師提供橫、縱座標列有從1至10順序之百格板，說明與九九乘法表之間的關係後，鼓勵學生將適當的積填入對應的空格，以完成百格板中之數字。並藉由尋找相同之積，理解可由不同的被乘數與乘數相乘獲得。

(四)學生表現分析

透過本單元活動，學生可將理解乘法概念之各式表徵整合運用，正確的解題，且透過百格板對應位置數字的連結，深入理解等號代表兩邊具同樣運算結果的意義，並明白乘法具有交換律的關係。

師：紅色空格是多少？

生：7×8是56(並將兩手手指呈現7與8的姿勢)，沒錯是56！50+6=56。

師：從百格板裡找一找24可以由哪2個數字相乘獲得？

生： 3×8 、 4×6 、 6×4 和 8×3

師：可以寫成 $3 \times 8 = 6 \times 4$ ？

生：可以！乘起來都是24！

師：還可以怎麼寫？

生：也可以寫成 $3 \times 8 = 4 \times 6$ ， $8 \times 3 = 6 \times 4 \dots 3 \times 8 = 8 \times 3$

師： $3 \times 8 = 8 \times 3$ 就是乘法的交換律。

伍、結論

本文從一般化理念設計活動執行的表現，可以發現學童乘法概念學習成效頗佳，不僅參與的動機高昂，透過活動精巧的設計，更可激發產生乘法多元解題的策略，協助學生在推理與解題表現更加流暢。推理、臆測、概念理解與解釋要從教室的情境予以引發，並非是件易事，除非可為學生提供參與產出意義的機會，為學生設計富挑戰性的非例行性問題，最重要的是需要創造學生可分享其利用口語或寫作表達解題策略的環境，協助學生將這些文字與符號的策略予以連結。本研究設計提升學童數量推理的問題，協助他們練習探索乘法數字有意義的關係，如Thompson、Philipp、Thompson與Boyd (1994)等人提示的：學生需要明白解題過程中呈現的數字，問題與解題的技巧這過程是非常重要的。本研究結果是足以提供教師問題設計的參考範例，亦可鼓勵教師透過活動的參與，激發與促動學生有效解題策略的產出。

參考文獻

- 教育部(2003)。國民中小學九年一貫課程綱要：數學學習領域。台北：教育部。
- 陳竹村(1997)。數與計算教材設計對於乘法算則的一些看法。台灣省國民學校教師研習會主編：國民小學數學科新課程概說(中年級)－協助兒童認知發展的數學課程，95－118。台北縣：台灣省國民學校教師研習會。
- 陳嘉皇(2010)。國小四年級學生對乘法算則理解之研究。教育科學研究期刊，55(2)，207-231。
- 國立編譯館(1993)。國民小學數學教學指引第四冊。改編本初版。
- 甯自強(1994)。新課程對乘法啟蒙教材的處理。台灣省國民學校教師研習會主編：國民小學數學科新課程概說(低年級)－協助兒童認知發展的數學課程，77－85。台北縣：台灣省國民學校教師研習會。
- Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. W. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth: Heinemann.
- Dreyfus, T. (1991). On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th International Conference for Psychology of Mathematics Education*. (Vol. 1, pp. 33-48). Genova, Italy.
- Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, 8(1), 139-151.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical concepts: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1),

191-228.

Thompson, A. G., Philipp, R. A., Thompson, P. W., & Boyd, B. A. (1994). Computational and conceptual orientations in teaching mathematics. In *Professional development for teachers of mathematics*(pp. 79-92). Reston, VA: NCTM.

提升國小六年級學童數學文字題閱讀理解能力之研究

陳碧祥、魏佐容

國立台北教育大學、金門縣中正國小

摘要

一般人認為學生具有語文能力，因此對於簡單情境數學文字題的描述，必能夠理解其意(張景媛，1994)。但是學生解題錯誤大多是因為對題意不了解，沒有弄清楚題目，僅對題目表面訊息尤其是關鍵字進行運算(林麗華，2006)，所以如何協助他們突破此困境，藉由閱讀理解能力的培養，提升學生數學文字題解題能力，並從解題過程中分析高中低成就學生解題習慣，了解其盲點並針對個別差異補救教學，將是本研究的目標。教學內容根據數學解題理論、交互教學法以及 Gagn'e 閱讀認知歷程，採用循環性理解、簡化、擬題、澄清、回顧五個階段，將數學解題及閱讀理論結合，使數學與閱讀融合於一體，形成特有的教學方法，彼此截長補短，讓教學不再因為科目而有所限制。本研究發現如下：

實施數學文字題閱讀理解策略教學實驗組數學文字題閱讀理解測驗結果優於控制組13.49分，達到顯著差異。且根據學習單中發現：高成就學童解題較有策略，設計題目較有創造力；中成就學童解題容易粗心，設計題目較保守；低成就學童解題抓不到核心，無法理解題意。所以教學者要能先了解學生本質，尊重個別差異，教學設計多元，以提升學童學習興趣。理解、簡化、擬題、澄清、回顧五階段各階段都有其重點，若能針對學生弱處補強，將可提升其數學文字題閱讀理解力。

關鍵詞：閱讀理解力、數學文字題、數學解題

本研究針對國小六年級高中低成就學童數學文字題的解題習慣加以歸類，設計數學文字題閱讀理解策略教學法~融合 polya 數學解題理論、交互教學法、Gagné 閱讀認知歷程設計特有的教學方法，突破傳統數學及語文教學毫無交集平行兩道線，期許學童在學習過程中，能提升自己數學文字題解題能力，讓學童不再懼怕數學文字題；研究者也藉由數學文字題閱讀理解策略教學法的實施，更清楚了解學生數學文字題解題上的盲點，以便未來能更貼近學生解題問題，作為教學上的修正改進。

壹、研究動機

傳統數學題目言簡意賅，但現今數學題目敘述如同一篇短文，期許學生能從短文閱讀中了解題意建構所需的數學概念，而許多學生往往在冗長的文字敘述中模糊題意的焦點，因此教導學生合宜的數學文字題閱讀理解的技巧是迫切的需要(陳慧姿，2009)。身為現職國小老師，在教學現場中發現很多學生能熟練數學基本運算，卻無法靈活運用於數學文字題，一般人認為學生具有語文能力，因此對於簡單情境數學文字題的描述，必能夠理解其意(張景媛，1994)。但是學生解題錯誤大多是因為對題意不了解，沒有弄清楚題目，僅對題目表面訊息尤其是關鍵字進行運算(林麗華，2006)，以致數學的解題表現錯誤百出，甚至有人因此放棄學習，一再的失敗，造成許多的孩子視數學為燙手山芋的科目！

所以研究者有感於現今教育雖著重數學及閱讀理解力的培養，但缺乏聯繫溝通的橋樑，而在教學現場也發現，高達80%的學生懼怕數學文字題，所以研究者針對教學現場國小六年級學童數學文字題解題習慣加以歸類探討，設計數學文字題閱讀理解策略教學法，將傳統數學解題及閱讀理解力教學截然不同的教學方式，合而為一，運用特有的教學策略，以利學童能清楚了解題意，提高其解題意願，引起學生學習興趣，也幫助自己未來在教學上能更切合學生需要。

貳、研究目的

基於上述動機，期能達成下列具體目的：

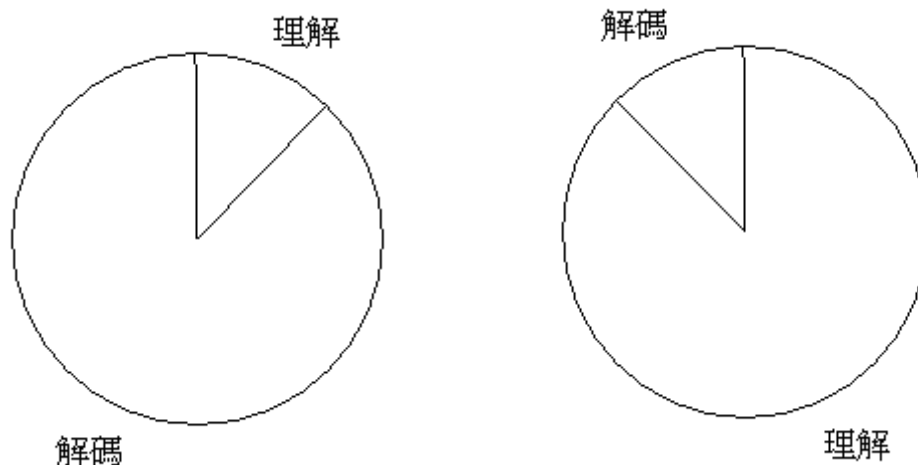
- 一、發展適合國小六年級學童數學文字題閱讀理解策略分析。
- 二、論述國小六年級高中低成就學童在數學文字題解題表現上的差異情形。
- 三、探討數學文字題閱讀理解策略於教學後對國小六年級學童在數學文字題解題表現上的改變。
- 四、綜合研究結果，提出具體可行之建議，以提供國民小學教師與學生在語文和數學教學與學習方面進一步研究的參考，方便教師進行補救教學。

參、本研究數學文字題閱讀理解策略

故研究者根據 Polya 的解題歷程模式，融合 Gagn'e 閱讀認知歷程及交互教學法發展出一套理解、簡化、擬題、澄清、回顧五階段數學文字題閱讀理解策略，希望藉由這五階段的螺旋開展，搭起學生對數學文字題理解的鷹架，強化學生的理解過程達到成功解題。研究者將這五階段分述如下：

一、理解：

Astrid (1994) 認為學生閱讀數學文字題主要困難之一是語法上的理解，尤其數學題目涉及多種操作性語言，學生若不能理解其語言內涵，則無法操作，無法操作自然不能衍生相對的經驗協助其理解。尤彥喬(2005)研究國小三年級學童文字題解題情形，提出影響學童解文字題的主要原因是因為沒有將題目的字句轉譯成自己的資訊。Polya提出缺乏效率解碼的認知資源分配理解只佔了少部份，真正成功解題需要自動化解碼的認知資源分配，也就是理解佔了非常重要的位置。故需要讓學生能夠真正理解整個題意，建構出自己的心理模式才能成功解題，這也回應了研究者欲發展一套數學文字題閱讀理解策略的重要性。



缺乏效率解碼的認知資源分配

自動化解碼的認知資源分配

圖 3-1

閱讀的自動化工論

資料來源：引自 *Educational psychology: Learning, instruction and assessment* (p. 275), by McCormick, C. B., & Pressley, M., 1997, New York: Longman.

二、簡化：

簡化問題即是將數學文字題中的數據變小或用方便計算的數字替代來計算，亦可將複雜的問題拆成幾個小問題來解決(鍾文淵，2005)。根據Muth(1991)指出，學生在數學文字題上的解題能力會因為文字題中無關訊息干擾而無法解決問題。大部分學生都認為文字題所有訊息都要被用到，因此造成問題整合上的困難。故研究者特把此階段獨立為一個步驟，主要是針對教學現場上發現學生往往無法針對繁冗的文字題上做取捨，看到數據便認為所有條件皆需用到，以致解題錯誤。此步驟主要是訓練學生能夠在理解題意後，將無關訊息刪除若遇到大數據題型可以先用較小數據去幫助自己理解進行運算。

三、擬題：

美國數學教師協會倡導若想培養學生有自學的數學家精神，擬題這啟發性活動是數學課程之不可缺少的活動 (Nation Council of Teachers of Mathematics ,

1989;1991), 林德宗(1999)亦認為, 透過擬題活動可以增進學生對數學概念的理解, 並將知識連結到日常生活經驗中。坪田耕三(1987)認為擬題可以培養學生的創造力, 適應現代激烈變化的社會, 除此之外, 與學生本身有關的問題做教學, 更可引起小孩子求知的慾望。因此研究者將擬題納入教學階段重要步驟之一, 藉由擬題培養學生自學, 並能藉此了解學生對於數學文字題閱讀理解之程度, 要能夠擬題, 勢必先對數學文字題理解透徹。本研究擬題著重在學生能針對數學文字題重新設計甚至改述題目, 藉此明白學生是否對數學文字題理解透徹並靈活運用。

四、澄清：

澄清策略即是採用交互教學法中的精粹~遇困難而無法理解時, 採取必要行動來了解文章的意義, 可採取補救的行動, 如繼續讀下去、重讀、對照前後文的脈絡關係、向他人求助或是查字典等策略, 以明確了解文章的意義, 來增進閱讀理解的程度。在過去教學法會忽視此項, 研究者之所以把它獨立出來主要是發現教學現場中有許多學生遇到困難就放棄, 不會自己先努力用方法尋求解答, 習慣使用「我不會」三個字就置身事外, 缺乏探求知識的策略及勇氣。澄清策略可以幫助學生在閱讀文本內容時, 幫助學生監控 (monitor) 他們是否理解文意(Oczkus, 2003)。

五、回顧：

此階段主要為回顧解題歷程, 對於整個步驟能有所掌握, 並能將解題過程內化, 得到新的體認, 進一步將方法應用在相似的題目之中; Mason也提到回顧主要檢驗答案的正確性, 針對解題過程的關鍵點進行反思的工作, 以便將來面對類似問題可以迎刃而解(引自李長柏, 2002)。在Lee(1982)的研究中發現很少有學生會去驗證其答案是否合理; Lester 等人認為學習者雖然學會了許多解題策略, 但遇到困難題目, 卻無法使用有效的解題策略, 主要是學生無法監控及調整解題過程。此階段最主要希望學生能對自己解題過程進行反思檢視, 評估自己是

否有通盤性的了解，也能藉此針對自己疑惑部分加以澄清自我監控，以便未來更能面對其他挑戰。

肆、研究對象與教學活動設計

本研究的研究樣本分為實驗組及控制組，皆為六年級學生，而四年級升五年級時，全學年學童是由電腦按照成績 S 型編班，所以各班素質落差不大，為求兩班起始點相似，先以五下數學、國語期末考成績來做比較，可參閱下列表格：

表4-1 實驗組與控制組五下數學、國語期末考成績摘要表

	數學期末考成績				國語期末考成績			
	平均數	標準差	t 值	顯著性	平均數	標準差	t 值	顯著性
實驗組 (N=34)	86.09	11.20	1.79	.07	90.48	7.49	1.53	.13
控制組 (N=36)	81.51	9.92			87.61	8.04		

*P<.05 **p<.01

由表4-1中可以發現，實驗組與控制組國語與數學成績 $P>.05$ ，未達顯著差異，可從中了解到兩班的國數兩科起點行為相似，故研究者以此班為控制組來做對照。控制組班級採用一般傳統教學方法，兩班教材統一皆為康軒版教材，且兩班的考試題目內容相同，不額外考其他教材。

本研究的「實驗組」為研究者所施教之班級，採數學文字題閱讀理解策略五步驟~理解、簡化、擬題、澄清、回顧教學，教材內容由研究者針對五步驟自編教材設計教案，教學日期 99/10/27 ~99/12/29，教學時間為 10 週，單數週為老師指導學生閱讀理解策略五步驟，雙數週由學生自我練習部分，老師針對學生困難疑惑部分加以澄清解惑。各階段重點如下：

表 4-2 數學文字題閱讀理解策略教學活動一覽表

數學文字題閱讀理解策略	單元名稱	學習單使用	節次	時間	教學重點
階段一 ~理解	數量關係	1-1	一	40 分	<ol style="list-style-type: none"> 1、能夠了解數學文字題題意，列出未知數、已知數、題目給的條件有哪些。 2、能夠使用自己的話把題目的意思重述一遍 3、能夠說出數學文字題所要求的重點為何。 4、能夠回想這個題目和生活中的哪些經驗相似。 5、能想像數學文字題情境，將情境畫下來。
階段二 理解、簡化	圓周長	2-1	三	40 分	<ol style="list-style-type: none"> 1、能夠了解數學文字題題意，列出未知數、已知數、題目給的條件有哪些。 2、能夠養成將數學文字題重點標記的習慣。 3、能夠將題目不相關的多餘訊息剔除，找出數學文字題的解題目標。 4、能夠和同學討論，使用自己的話把題目的意思重述一遍，並和同學分享。 5、能使用畫圖技巧，輔助自己明白數學文字題題意。
階段三 理解、簡化、擬題	圓面積	3-1	五	40 分	<ol style="list-style-type: none"> 1、能夠理解數學文字題題意，了解未知數、已知數、題目給的條件有哪些(內化)。 2、能夠養成將數學文字題重點標記的習慣。 3、能夠將題目不相關的多於訊息剔除，辨別數學文字題的解題目標。 4、能夠回想生活中的哪些相似問題，辨別出類似的解題技巧問題。

					<ul style="list-style-type: none"> 5、能針對數學文字題重新設計甚至改述題目。 6、能使用畫圖技巧，輔助自己明白數學文字題題意。 7、能夠獨立思考，用自己的話將題目的解答過程表達出來。
階段四~	比與 理解、 比值 簡化、 擬題、 澄清	4-1	七	40分	<ul style="list-style-type: none"> 1、能夠理解數學文字題題意，了解未知數、已知數、題目給的條件有哪些(內化)。 2、能夠養成將數學文字題重點標記的習慣。 3、在閱讀中遭遇困難無法理解時，能使用輔助技巧-重讀、對照前後脈絡、查詢資料、向他人求助來幫助自己理解。 4、能使用畫圖技巧，輔助自己明白數學文字題題意。
階段五	數量 理解、 關係 簡化、 圓周 擬題、 長 澄清、 回顧	5-1	九	40分	<ul style="list-style-type: none"> 1、能夠理解數學文字題題意，了解未知數、已知數、題目給的條件有哪些(內化)。 2、能夠養成將數學文字題重點標記的習慣。 3、能夠將題目不相關的多於訊息踢除，找出數學文字題的解題目標。 4、能使用畫圖技巧，輔助自己明白數學文字題題意。 5、數學文字題解答完成後，能夠驗算檢驗自己算法是否正確。 6、能夠自己設計出類似的題目和組員分享。
		5-2	九	40分	

表示與上一階段不同之重點

伍、研究工具

本研究為求研究更具效度和客觀性，因此本研究採多元的方式來蒐集資料，除了作量化統計資料外，也著重在質化分析部份，以下將針對本研究的資料來源

以及分析處理方式稍作說明：

一、自編最大公因數與最小公倍數數學文字題閱讀理解測驗

研究設計以最大公因數與最小公倍數進行測驗，最主要是因為此單元概念容易混淆，不像傳統數學文字題看到數字即可運算，是國小學童普遍感到困難的單元，需要理解題意將文字題內化成自己語言才可正確運算。研究者會先針對第一單元最大公因數及最小公倍數進行一般教學法教學，教學單元結束後針對實驗組及控制組班級進行此單元測驗前測了解兩班學生學習狀況，前測測驗完後再實施為期十週的數學文字題閱讀理解策略教學，期間將不再進行此單元教學，最主要避免傳統施測因為重複教學而造成學習成效提升的錯覺。

測驗工具為求嚴謹，研究者請9位專家審訂測驗的架構及試題的內容效度與表面效度，施測前先請同年段另一班國小六年級學童先行接受預測，刪除語意不清或過於艱澀的題目後，最後篩選後為本測驗之初稿，研究根據此班級進行難度及鑑別度分析，發現本測驗難度平均值為0.62，鑑別度平均有0.45，故本研究為良好試題。測驗工具分為前測和後測，而前測與後測的題型和題數相近，後測會針對題目的內容敘述與數目字稍作更改。

二、學生晤談：

學生解題過程中，有時並無法得知運算時真正的想法。單看解題結果或步驟有時會忽略到細微的徵象，錯失補救的機會，因此研究者會針對學生的書面解題過程，針對有所疑義或不解的地方進行晤談，了解學生真正的想法，並適時針對學生解題易犯題型進行澄清。

三、學生數學文字題閱讀理解之學習單

研究者針對每個學習階段——理解、簡化、擬題、澄清、回顧五個循環歷程，設計相關的數學文字題例題練習，讓學生藉由文字、圖形、符號傳遞相關數學的訊息，也可藉此練習使用精確的數學語言表達自己的意思，從中了解到高中低成就學童其解題差異狀況以利補救教學。教學進度如下表：

表 5-1 數學文字題閱讀理解學習單教學進度表

週次	單元	對應數學文字題閱讀技巧	對應學習單
第一週	數量關係	理解	學習單 1-1~1-2
第二~三週	圓周長	理解、簡化	學習單 2-1~2-2
第四~五週	圓面積	理解、簡化、擬題	學習單 3-1~3-3
第六~七週	比與比值	理解、簡化、擬題、澄清	學習單 4-1~4-2
第八~十週	數量關係、圓周長、 圓面積、比與比值	理解、簡化、擬題、澄清、 回顧	學習單 5-1~5-4

四、學生的學習週誌

研究者於每次階段性數學文字題教學課程結束後，請學生撰寫學習週誌，藉由學生學習上的回饋，瞭解學生的學習狀況和感受，也讓學生適時回想自己所學，將凌亂不整的學習板塊統整成較全面性的學習策略。藉由學生的學習週誌，可以找出研究者在課堂上並未觀察到的現象及問題，做為下階段教學改進參考的依據。

陸、研究結果與討論

本章旨在了解數學文字題閱讀理解策略對六年級學童「數學文字題」學習之適切性，研究分為質化以及量化分析兩方面。質化部份會以數學文字題學習單、學生的學習週誌以及學生晤談部份，了解學童在解數學文字題的思考邏輯及容易犯的謬誤；量化部份以研究者自編最大公因數與最小公倍數數學文字題閱讀理解測驗進行實驗組及控制組前後測比較進行變異數分析，了解數學文字題閱讀理解策略實施成效。

一、高中低成就的國小六年級學童其數學文字題解題表現之差異分析

不同數學成就的國小六年級學童在數學文字題閱讀理解及使用的解題策略是否有差異？在數學文字題解題表現的差異為何？為比較上述問題，研究者根據數學文字題閱讀理解測驗前測將其分成三組，每組成員各佔全班33%，用以比較高成就、中成就及低成就的國小學童在實施數學文字題閱讀理解策略教學後的改變。

表6-1 高中低成就學童實施數學文字題閱讀理解策略教學前後之成對樣本t檢定摘要表

A \ B	高成就 (N=11)			中成就 (N=12)			低成就 (N=11)		
	M	SD	t值	M	SD	t值	M	SD	t值
教學前	83.91	8.31		70.00	11.77		49.64	9.23	
教學後	87.36	3.80	1.4	73.17	5.45	1.81	68.82	6.37	5.48**

**P<.01

註：A表示「高中低數學成就的國小學童」，B表示「數學文字題閱讀理解力策略教學前後解題表現」

從上述表6-1可以發現，數學文字題閱讀理解策略教學教學前，高成就平均分數84.36分，中成就平均分數70.67分，低成就平均分數49.45分，高成就、中成就與低成就都有顯著差異。教學後，高成就平均分數86.18分，中成就平均分數70.82分，低成就平均分數68.82分，高成就與中成就、高成就與低成就有顯著差異。教學前後進步分數高成就進步3.45分，中成就進步3.17分，低成就進步19.18分，總成績進步8.44分。

二、實驗組與控制組前後測獨立樣本t檢定比較

實驗組與控制組先在同一時間進行前測，了解兩組在實驗處理前的差異狀況；讓實驗組進行「數學文字題閱讀理解策略教學」，控制組進行「一般常態教學」，

經過一段時間的實驗處理，再實施「數學文字題閱讀理解力後測」來比較兩組學童的學習成效。考驗結果如表6-2所示：

表6-2 實驗組與控制組學童數學文字題閱讀理解力測驗前後測獨立樣本t檢定摘要表

	前測				後測			
	平均數	標準差	t 值	顯著性	平均數	標準差	t 值	顯著性
實驗組	67.91	15.50	1.64	.105	76.35	11.73	3.71	.00**
控制組	60.67	18.24			62.86	16.13		

*P<.05 **p<.01

根據表6-2資料顯示，實驗組與控制組在實施數學文字題閱讀理解策略教學前，雖然實驗組比控制組平均分數高，但未達顯著差異。但後測兩組成績P<.01達顯著差異。

三、高中低成就的國小六年級學童其數學文字題解題策略分析

研究者根據數學文字題閱讀理解測驗前測將全班分為高中低成就三組進行研究，以下內容針對不同成就學童在數學文字題閱讀理解學習單所使用的解題策略搭配晤談方式，了解這三組學童策略上使用的差異。〈 〉內號碼為此學童編號，分析的部份主要是針對此階段學童使用的策略或犯錯的部份加以歸類探討：

(一)高成就的國小六年級學童其數學文字題解題策略分析

學習單 1-2：

小叮嚀在一個邊長是 12 公尺正方形花園種花，現在他想要另外開闢一個面積和正方形花園一樣大的長方形花園，已知長方形花園的寬是 8 公尺，請問長方形花園的長應該是多少公尺？

1、能理解題意，找出題目的重點及重要原理。(答對率：100%)

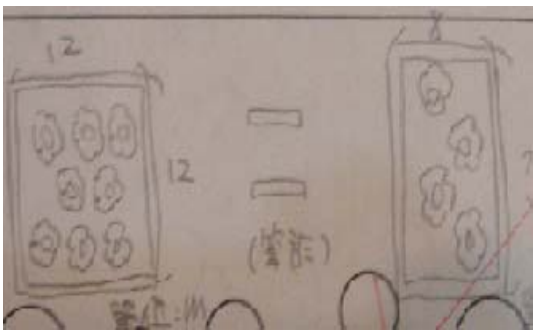
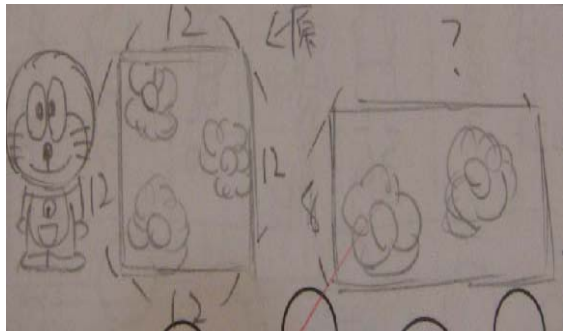
題目：你覺得這個題目的重點是什麼？

〈S26〉：長方形面積等於正方形面積，利用相同面積找出另一邊的長。

<S17> : 正方形花園面積÷8=長方形花園的長

<S9> : 長方形花園長是幾公尺?

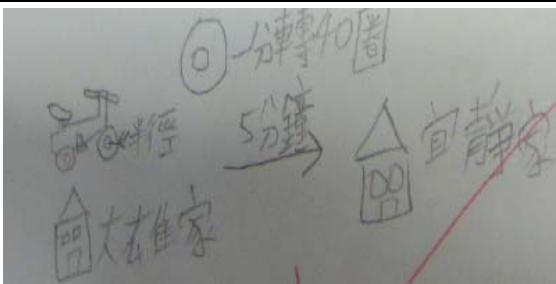
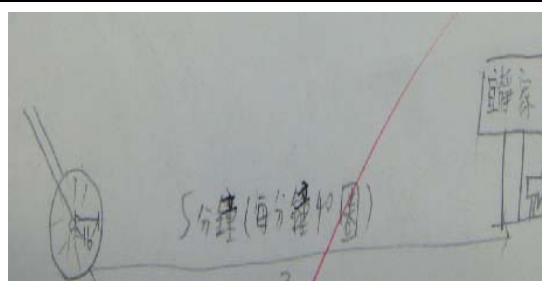
2、能使用圖示將題目所要表達的意境完成呈現。(答對率：100%)

	
<S9>	<S13>
<p>分析：長寬各為 12m 正方形花園面積和長方形花園面積相等，已知長方形花園長 8m，寬為多少 m？</p>	

學習單 2-2

<p>大雄想騎腳踏車去找宜靜玩，只知道大雄的腳踏車輪子半徑為 16 公分，他從家門口騎到宜靜家要花 5 分鐘，每分鐘輪子轉 40 圈，現在大雄在下午三點時出發，請問大雄家到宜靜家的距離是多少公尺？</p>
--

1、圖示每個重要條件都包含在其中，能夠完整呈現(答對率：90.9%)。

	
<S28>	<S20>
<p>分析：能夠將每個重要條件呈現，藉由圖示也可以猜測出題目。</p>	

學習單 3-2

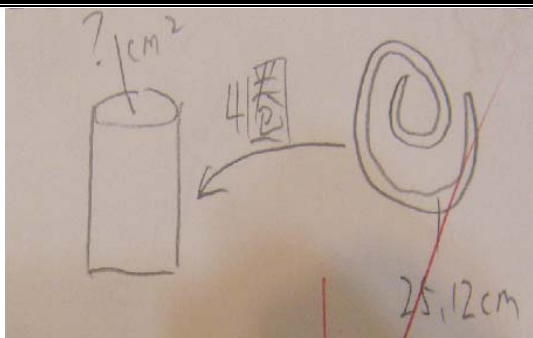
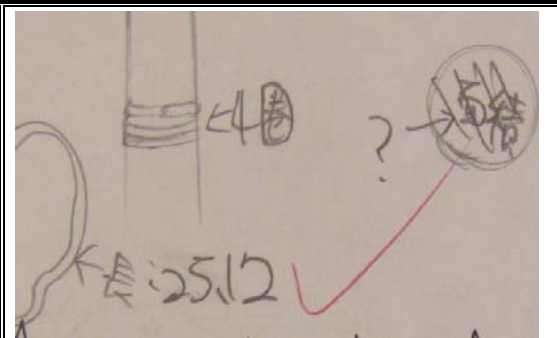
<p>宜靜將一條長 25.12 公分的繩子，繞一根圓柱 4 圈剛好可以繞完，圓柱的截面積是多少平方公分？</p>
--

1、理解題意，但有時容易粗心漏算(答對率：90.9%)。

題目：我能算出答案<S13>：

$25.12 \div 4 = 6.28$ $6.28 \div 3.14 = 2$ $2 \times 2 \times 3.14 = 12.56$ <p style="text-align: center;">Ans: 12.56m²</p>	<p>分析：圓周長$\div 3.14 =$直徑 圓面積：半徑\times半徑$\times 3.14$ (忘記將直徑$\div 2 =$半徑)</p>
--	---

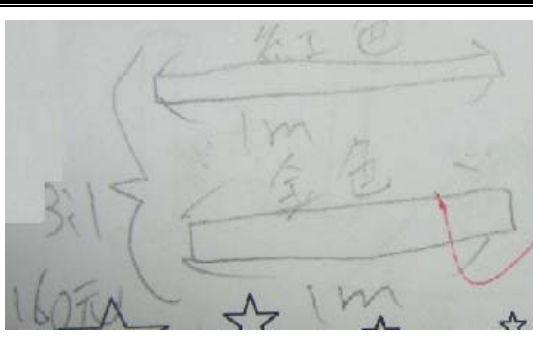
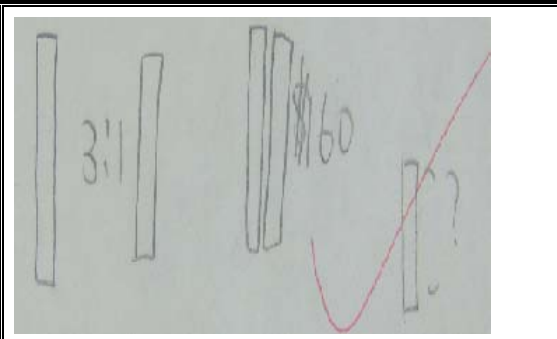
2、畫圖能夠使用較簡短的數字或文字來呈現(答對率：100%)。

	
<p>S8</p>	<p>S3</p>
<p>分析：使用較多圖示及簡短文字來幫助自己理解題意。</p>	

學習單 4-2：

宜靜和大雄2人到文具行買緞帶，1公尺金色緞帶和1公尺紅色緞帶的價錢比是3：1，宜靜兩種顏色各買2公尺，一共花了160元，請問金色緞帶1公尺是多少元？

1、圖示所使用畫圖技巧較能幫助自己理解(答對率：90.9%)。

	
<p>S11</p>	<p>S10</p>
<p>分析：圖示後較能夠幫助自己了解題意。</p>	

學習單 5-3:

小叮嚀想要把 2 條長 62.8 公尺的繩子，分別圍成正方形和圓形，請問哪一個面積比較大？大多少平方公尺？

1、能使用刪除法策略幫助解題(答對率：100%)。

題目：下列敘述何者「不正確」(單選題請勾選)：

- () 1、正方形的邊長為 $62.8 \div 4$ (公尺)。
- () 2、圓形的半徑為 $62.8 \div 3.14$ 。
- () 3、這個題目是想請問正方形或圓形哪一個面積比較大。
- () 4、圓形面積公式為半徑 \times 半徑 $\times 3.14$ 。

分析：<S13><S8><S17>都將不可能答案先刪除再來選題，以增加答對率。

2、解題過程連貫性佳，同一主題會放在一塊解題(答對率：90.9%)。

<p>(計算)</p> $62.8 \div 4 = 15.7$ $15.7 \times 15.7 = 246.49$ $62.8 \div 3.14 \div 2 = 10 \quad 10 \times 10 \times 3.14 = 314$ $246.49 > 314$ $314 - 246.49 = 67.51 \quad \text{Ans: 圓形, } 67.51\text{m}^2$	<p>分析：</p> <p><1>先就正方形來解題，算出正方形面積。</p> <p><2>再針對圓形解題，算出圓形面積。</p> <p><3>再來比較兩者面積大小。</p>
---	---

(二)中成就的國小六年級學童其數學文字題解題策略分析

學習單 1-2:

小叮嚀在一個邊長是 12 公尺正方形花圃種花，現在他想要另外開闢一個面積和正方形花圃一樣大的長方形花圃，已知長方形花圃的寬是 8 公尺，請問長方形花圃的長應該是多少公尺？

1、設計題目與現實差距較大，未抓到數學文字題關鍵字(答對率：75%)

問題：這個題目和生活中的哪些經驗相似？(舉一個例子即可，請書寫完整)

S16：我有長 20km 的正方形拼圖，弟弟有一塊 400km^2 的長方形拼圖，長 10km

請問寬是多少 km？

分析：<1>拼圖單位 km 過於大，不符合生活經驗。

<2>未掌握題目關鍵字，兩者之面積一樣大。

S25：王伯伯想要買一塊邊長 10 公尺的正方形地去種菜，想買寬 5 公尺的地去種花，請問種花的地長是多少公尺？

分析：未掌握題目關鍵字，兩者之面積一樣大

2、習慣看到數字就運算，容易省略重要步驟<S1><S25>(答對率：83.3%)

$12 \div 8 = 1.5$ <p>Ans: 1.5m</p>	<p>分析：省略了正方形面積為邊長×邊長，習慣看到數字即運算。</p>
------------------------------------	--

學習單 2-2

大雄想騎腳踏車去找宜靜玩，只知道大雄的腳踏車輪子半徑為 16 公分，他從家門口騎到宜靜家要花 5 分鐘，每分鐘輪子轉 40 圈，現在大雄在下午三點時出發，請問大雄家到宜靜家的距離是多少公尺？

1、對解題目標的定義不同(答對率：66.7%)

題目：我能找出這個題目的解題目標(請勾選)：


- 1、大雄家到宜靜家的距離有多遠？
- 2、大雄的腳踏車圓周長多少公分？
- 3、大雄幾點會到達宜靜家？
- 4、大雄的腳踏車總共轉了幾圈？

<S33><S16>：選 2、4


<S35>、<S12>：選 1、2、4

=>認為運算時需要用到這些條件。

2、畫圖使用多步驟呈現(觀念正確) (答對率：83.3%)



<S2>



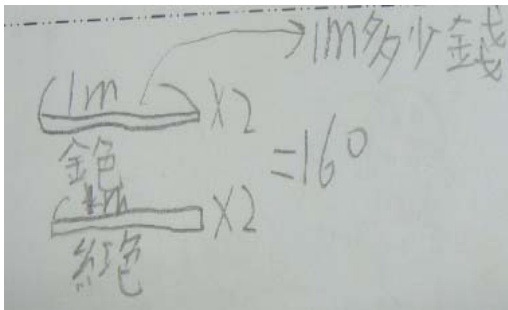
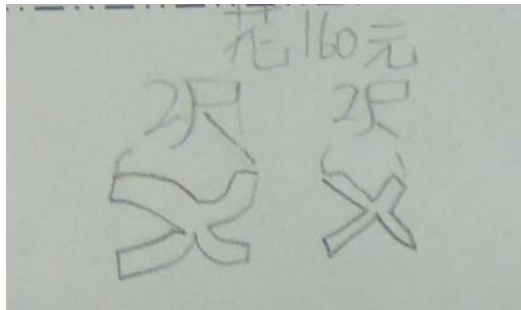
<S4>

分析：將文字敘述多步驟呈現。

學習單 4-2：

宜靜和大雄2人到文具行買緞帶,1公尺金色緞帶和1公尺紅色緞帶的價錢比是3:1,宜靜兩種顏色各買2公尺,一共花了160元,請問金色緞帶1公尺是多少元?

1、圖示所呈現的數據未包含所有重要概念(答對率:75%)。

	
<S11>	<S10>
<p>分析：未能將所有概念包含在內(如比例)。</p>	

2、未檢視題目數據,容易落入陷阱<S35><S33>(答對率:66.7%)。

$160 \div (3 + 1) = 40$ $40 \times 3 = 120$ <p style="text-align: center;">Ans: 120 元</p>	<p>分析：未發現題目為各買 2m, 而 1m 為多少錢?(少算$\div 2$)</p>
---	---

學習單 5-3

小叮嚀想要把2條長62.8公尺的繩子,分別圍成正方形和圓形,請問哪一個面積比較大?大多少平方公尺?

1、設計題目較為保守,多只是更改幾個關鍵字(答對率:91.7%)。

問題：我能自己設計出類似的題目

<S1>：妹妹想要把2條長314公尺的繩子,分別圍成正方形和圓形,請問哪一個面積比較大?大多少平方公尺?

<S31>：爸爸想要把2條長628公尺的繩子,分別圍成正方形和圓形,請問哪一個面積比較大?大多少平方公尺?

分析：題目設計較偏向安全,只替換幾個文字。

2、解題較屬於跳躍性思考，容易漏掉重要概念<S35><S31>(答對率：75%)。

<p>(計算)</p> $62.8 \div 4 = 15.7$ $62.8 \div 3.14 = 20$ $15.7 \times 15.7 = 246.49$ $20 \times 20 \times 3.14 = 1256$ $246.49 < 1256$ $1256 - 246.49 = 1009.51$ <p>Ans: 正方形, 1009.51m^2</p>	<p>分析：</p> <p><1>先算出正方形邊長 <2>再算出圓形直徑。 <3>接著算出正方形面積。 <4>算出圓形面積(省略了直徑未除以 2=半徑) (解題未具連貫性，容易解題錯誤)</p>
--	--

(三)低成就的國小六年級學童其數學文字題解題策略分析

學習單 1-2：

小叮噹在一個邊長是 12 公尺正方形花園種花，現在他想要另外開闢一個面積和正方形花園一樣大的長方形花園，已知長方形花園的寬是 8 公尺，請問長方形花園的長應該是多少公尺？

1、無法理解題意，單就所學習單元的算法去運算<S22><S23>(答對率：54.5%)

$2 \begin{array}{ l} 12 \text{、} 8 \\ 6 \text{、} 4 \\ 3 \text{、} 2 \end{array}$ $2 \times 2 \times 3 \times 2 = 24$ <p>Ans: 24m</p>	<p>分析：因之前在學習最小公倍數單元，故看到數字只知道固著使用公式，未理解題意。</p>
---	--

$12 \div 8 = 1.5$ <p>Ans: 1.5m</p>	<p>分析：看到數字未通盤理解題意就運算，正方形與長方形面積相同，應該先算出正方形面積。</p>
------------------------------------	---

2、無法正確掌握數學文字題給的已知條件及重要的關鍵文句(答對率：45.5%)

問題：這題問題已知的條件有哪些？

<S15><S23>：正方形花園的邊長、長方形花園的寬。

<S19><S22>：正方形花園的長 12m、長方形花園的寬 8m。

分析：<1>正方形花園和長方形花園面積一樣大未呈現。

<2>認為有數字呈現的才是重點。

3、無法藉由圖示來幫助自己理解題意(答對率：54.5%)。

<p><S14></p>	<p><S5></p>
<p>分析：無法弄清題意以致解題錯誤</p>	<p>分析：漏掉重要數據(正方形長寬各為 8m)</p>

學習單 2-2

大雄想騎腳踏車去找宜靜玩，只知道大雄的腳踏車輪子半徑為 16 公分，他從家門口騎到宜靜家要花 5 分鐘，每分鐘輪子轉 40 圈，現在大雄在下午三點時出發，請問大雄家到宜靜家的距離是多少公尺？

1、不清楚何謂解題目標(答對率：45.5%)

題目：我能找出這個題目的解題目標(請勾選)：

- () 1、大雄家到宜靜家的距離有多遠？
- () 2、大雄的腳踏車圓周長多少公分？
- () 3、大雄幾點會到達宜靜家？
- () 4、大雄的腳踏車總共轉了幾圈？

<S31>：選 1、2、3、4

<S23><S15>：選 1、2、4

<S14><S19>：選 1、2


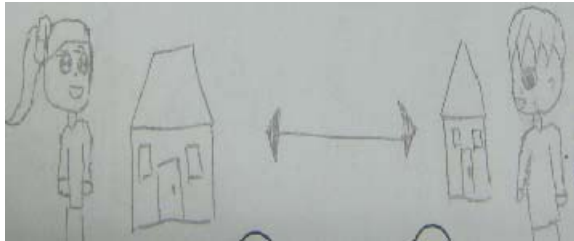
=> 不知道解題目標的意思，憑直覺勾選答案。

2、題目條件較多時，容易漏掉重要條件<S22><S23><S5>(答對率：54.5%)。

$16 \times 2 = 32$ $32 \times 3.14 = 100.48$ $100.48 \times 40 = 4019.2$ <p>Ans: 4019.2m</p>	<p>分析：省略了要花 5 分鐘，當條件較多時，因沒有養成將重要條件標示的習慣，容易漏掉。</p>
--	--

$16 \times 3.14 = 50.24$ $50.24 \times 5 = 251.2$ $251.2 \times 40 = 10048$ <p>Ans: 10048 m</p>	<p>分析：省略了求圓周長要先算出直徑，因沒有養成將重要條件標示的習慣，容易漏掉。</p>
---	--

3、使用畫圖技巧無法把重要概念呈現(呈現較籠統)(答對率：45.5%)

 <p style="text-align: right;"><S7></p>	 <p style="text-align: right;"><S5></p>
<p>分析：單純只是畫圖，未將重要概念呈現。</p>	

學習單 3-2

宜靜將一條長 25.12 公分的繩子，繞一根圓柱 4 圈剛好可以繞完，圓柱的截面積是多少平方公分？

1、單就關鍵字，未多思索就認為解題方式類似(答對率：54.5%)。

問題：這個題目和下列哪個解題方式類似(單選題請勾選)：

1、< S5><S14>選擇此選項：

一個 $\frac{1}{3}$ 圓的扇形，半徑 15 公分，面積是多少平方公分？

分析：看到題目問面積，就認為解題方式類似。



2、<S32><S34><S24>選擇此選項：

大雄在操場上跑步，已知操場一圈為 400 公尺，現在大雄跑了 3 圈，他總共跑了

多少公尺？

分析：看到題目有圈數，就認為解題方式類似。

2、使用較複雜的文句來呈現圖示(答對率：72.7%)。

	
<p><S15></p>	<p><S32></p>
<p>分析：使用較多文字敘述來呈現題意。</p>	

學習單 4-2：

宜靜和大雄2人到文具行買緞帶，1公尺金色緞帶和1公尺紅色緞帶的價錢比是3：1，宜靜兩種顏色各買2公尺，一共花了160元，請問金色緞帶1公尺是多少元？

1、圖示未把關鍵數據呈現，抓不到數學文字題重點(答對率：54.5%)。

	
<p><S15></p>	<p><S34></p>
<p>分析：圖示關鍵數據交代不明，無法幫助自己理解。</p>	

2、未理解題意，解題觀念錯誤<S34><S32>(答對率：54.5%)。

$160 \div 2 \div 2 = 40$ $40 \div (3 + 1) \times 3 = 30$ <p>Ans: 30 元</p>	<p>分析：認為各 2m 合起來即是 4m，故先$\div 4$，忽略兩者價錢不同(觀念錯誤)。</p>
---	--

$160 \div 2 \div 2 = 40$ Ans: 40 元	分析 ：忽略金色緞帶比例為 3 等分，且各買 2m 也未考慮進去（觀念錯誤）。
---	--

學習單 5-3

小叮嚀想要把 2 條長 62.8 公尺的繩子，分別圍成正方形和圓形，請問哪一個面積比較大？大多少平方公尺？

1、數學基本概念不足，以致運用到之前觀念變解題錯誤<S15>（答對率：45.5%）

(計算) $62.8 \times 62.8 = 3943.84$ $62.8 \div 3.14 \div 2 = 10$ $10 \times 10 \times 3.14 = 314$ $3943.84 - 314 = 3629.84$ Ans: 正方形, 3629.84m^2	分析 ： <1>未將正方形周長 $\div 4$ 算出正方形邊長。 <2>周長 $\div 4 =$ 邊長為過去數學基本概念。(舊的學習不佳影響新的學習)
--	--

2、運算僵化，看到 2 條就認為一條長度一定要除以 2，不清楚題意<S14>。

(計算) $62.8 \div 2 = 31.4$ $31.4 \times 4 = 125.6$ Ans: 正方形, 125.6m^2	分析 ： <1>學習數學仍停留在較基本的運算，無法清楚理解題意。 <2>基本概念不夠，看到數字就運算，未檢視題目意思。
--	--

柒、研究結論

本章主要藉由文獻探討、準實驗研究法、半結構式訪談與問卷等方式，了解「數學文字題閱讀理解策略教學」與「一般常態教學」之六年級學童數學文字題閱讀理解力之差異，以及低、中、高成就實驗組學童在學習數學文字題閱讀理解力的差異狀況。

一、實驗組數學文字題閱讀理解測驗結果優於控制組

研究者針對同質性較高的兩班施予數學文字題閱讀理解測驗前測~最大公因數與最小公倍數，了解實驗組及控制組在前測上無顯著差異，期間並不再針對此單元複習，為的是避免重複練習導致後測成績明顯進步；實施十週數學文字題閱讀理解策略教學後再進行後測，發現實驗組後測成績76.35分、控制組62.86分，實驗組學童在實施數學文字題閱讀理解策略教學後的得分優於控制組13.49分，達到顯著差異。

二、高成就學童解題較有策略，設計題目較有創造力；中成就學童解題容易粗心，設計題目較保守；低成就學童解題抓不到核心，無法理解題意

依據高中低分組的國小六年級學童數學文字題解題策略分析結果中發現，不同成就的學童習慣使用的理解方式不同、解題技巧策略不同，以致解題上有差異之分，將本研究結果整理如下：

(一)高成就學童解題較有策略，設計題目能抓出關鍵字句較為完整

研究者根據學童解題過程發現，高成就學童習慣會在數學文字題重要關鍵字作記號，解題過程同性質的會放置在一起計算，所以較不容易遺漏步驟。選擇題及勾選題會使用刪去法，先將最不可能答案剔除，再進行解題，所以答對機率便比較高。除此之外，高成就學童有時不只侷限在單改幾個文字，他們有時會腦力激盪出非常有趣的題目，讓人耳目一新，不禁讓人佩服他們的聯想力和創造力。

(二)中成就學童解題容易粗心，漏掉重要文字敘述，設計題目偏向保守

研究者根據學習單內容及晤談方式發現中成就學童並非不了解題意，而是，解題過程較沒有邏輯順序，容易跳著運算，以致漏掉解題幾個重要步驟。解題容易受到數字影響，習慣看到數字不加思索就計算，往往容易粗心算錯。請他們重複唸一次題目再計算一次，普遍都可以正確解題。使用畫圖策略習慣會多個步驟呈現，較無法融合成一體，而且畫圖策略中圖式敘述的文字占很大的部份，較無

法用簡單圖示來完整呈現，多傾向保守更換幾個文字敘述即可，缺乏挑戰設計新穎題目的勇氣。

(三)低成就學童解題抓不到核心，無法理解題意

研究者根據學習單內容及晤談方式發現低成就學童解題缺乏策略，學習容易產生固著性；若此單元多為除法，則解題大多以除法居多，更換題目就無法正確解題。對於文字敘述的敏感度不佳，需要不斷提醒數學文字題關鍵字句，用較淺顯的語句解釋題意，否則容易看到數字即運算，一問三不知，不清楚題意。予深入晤談發現低成就學童對於數學文字題題意模糊不清，題目為分數、小數的數據，習慣用大數除以小數，較無法變通。

三、高中低成就解題習慣不同，可針對其特點因材施教

藉由學習單分析及晤談結果，發現了每個小朋友對於數學文字題理解不同，所以解題上也有所差異。學童本身由於學習的方式不同，長期累積結果而有高中低成就的差異存在。有的人將原因歸咎於天份，有的人將其歸咎於不努力，但研究者發現還有幾個重要原因即是學習的態度、策略以及平時習慣的養成。對於高成就學童而言，本身理解能力足夠，可多鼓勵涉略更深的領域，並適時賦予小老師的榮譽心，將他所學知能有伸展的舞台；中成就學童並非不理解文字題，往往因為計算粗心、解題沒有邏輯性程序導致計算錯誤，可以針對此設計題將同類計算問題一起運算，養成劃線做記號的習慣，降低因為不夠細心而犯的錯誤；低成就學童由於本身對數學文字題閱讀理解能力就稍顯不足，所以在解題上習慣看不懂文意看到數字就計算，所以換一些題型便無法理解。在教學上應該著重其閱讀習慣的養成，增加語文字彙理解力，加強其對數學文字題的敏感度，再增進其計算能力。每個小朋友都有其獨特之處，身為現職老師更應該了解到個別差異，給予適性教學，因材施教，不是一味希望所有學生都能夠考滿分。每個小朋友都有其所長所短，一味揠苗助長適得其反。

參考文獻

- 尤彥喬(2005)。國小三年級學童除法文字題解題情形及策略轉變之研究(未出版之碩士論文)。國立屏東教育大學，屏東市。
- 李長柏(2002)。國小數學簡單機率解題實作評量與後設認知之相關研究(未出版之碩士論文)。國立台中教育大學，台中市。
- 坪田耕三(1987)。生動的算術。日本：國土社。
- 林德宗(1999)。擬題活動在國小五年級數學教室裡的應用。國科會大專學生參與專題研究計畫成果報告(NSC88-2815-C-023-001-S)
- 林麗華(2007)。國小數學不同成就學生對數學文字題的閱讀理解能力之探討(未出版之碩士論文)。國立臺南大學，台南市。
- 張景媛(1994)。數學文字題錯誤概念分析及學生建構數學概念的研究。師範大學教育心理學報，27，175-200。
- 陳慧姿(2009)。從基模理論談數學文字題閱讀理解及其對數學教學的啟示。教育研究，17，219-230。
- 鍾文淵(2005)。國小五年級學童數學解題能力提升之研究---以Polya之解題歷程理論為依據(未出版之碩士論文)。國立臺南大學，臺南市。
- Astrid, D. (1994). The readability of the mathematics textbook:with special reference to the mature student. UMIPro Quest Digital Dissertations. Retrieved December 9, 2010, from <http://www.lib.umi.com/dissertations/fullcit/MQ44873>.
- Lee, K.S.(1982). Fourth Graders Heuristic Problem-Solving Behavior. Journal for Research in Mathematics Education, 13(2),110-123.
- Lester, F. K.& Garofalo, J.(1982). *Mathematical problem solving : Issues in research*.The Franklin institute press.
- Muth, K. D. (1991). Effects of cuing on middle-school students'performance on arithmetic word problems containing extraneous information. *Journal of*

Educational Psychology, 83(1), 173-174.

Oczkus, L. D. (2003). *Reciprocal teaching at work: strategies for improving reading comprehension*. Newark, DE : International Reading Association, Inc.

活動報馬仔

一、 2011/12/15(四)~2011/12/18(日)

2011 台灣教育研究學會國際學術研討會

地點：國立中山大學

參考網址：http://www.education.nsysu.edu.tw/TICE2011_ch/

二、 2011/12/15(四)~2011/12/17(六)

中華民國第 27 屆科學教育學術研討會

地點：國立中山大學社會科學院

參考網址：<http://seminar2011.nknu.edu.tw/se27/>

三、 2012/07/08(日)~2012/07/15(日)

The 12th International Congress on Mathematical Education

地點：Seoul, Korea

參考網址：<http://www.icme12.org/>

四、 2012/07/18~2012/07/22

**The 36th Conference of the International Group for the
Psychology of Mathematics Education**

地點：國立台灣師範大學

參考網址：<http://www.tame.tw/pme36/index.html>

稿 約

一、本刊徵選之數學教育刊物為：

- (一) 本刊以徵選實務性的數學教育刊物為主，舉凡任何數學創新教學之方法或策略、數學教學實務經驗、數學課程設計與實踐之心得分享等皆為本刊之首要選擇標的；
- (二) 研究文章（包括以實驗、個案、調查或歷史等研究法所得之結果，和文獻評論、理論分析等）；
- (三) 短文（包括研究問題評析、數學教育之構想、書評、論文批判等）；以及
- (四) 其他符合本刊宗旨之文章。

二、本刊所刊之文章，需為報導原創性教學或研究成果之正式文章，且未曾於其他刊物或書籍發表者（在本刊發表之文章未經台灣數學教育學會同意，不得再於他處發表）。

(一) 來稿請注意下列事項：

1. 來稿請以中文撰寫，力求通俗易讀，須為電腦打字，每篇以不超過 6000 字為原則（特約稿不在此限），以電子郵件傳送。
2. 來稿請附中英文篇名、作者

姓名及服務機關，作者姓名中英文並列，若有一位以上者，請在作者姓名及服務機關處加註 (1)、(2)、(3) 等對應符號，以便識別，服務機關請寫正式名稱。

3. 來稿請附中英文摘要，並於摘要後列明關鍵詞彙 (key words)，依筆劃順序排序（以不超過五個為原則），英文關鍵詞彙則須與中文關鍵詞彙相對應。
4. 文稿若為譯文，請附原文影本及原作者同意函，並請註明原文出處、原作者姓名及出版年月。
5. 凡人名、專有名詞等若為外語者，第一次使用時，謂用 () 加註原文。外國人名若未有約定成俗之譯名，請選用原文。
6. 附圖與附釋請於文後，並編列號碼，並在正文中註明位置。
7. 文末參考文獻依作者姓氏分別編號排序：中、日文依筆劃多寡排列；西文（英、法、德...等）依字母順序排列；若中、日、西文並列時，則先中、日文後西文。至於參

考文獻之寫法如下：

- (1) 期刊論文，請依下列順序書寫：作者、出版年（西元）、論文篇名、期刊名稱、卷期、頁數。

例：張湘君（1993）。讀者反應理論及其對兒童文學教育的啟示。*東師語文學刊*，6，285-307。

- (2) 圖書單行本，請依下列順序書寫：作者、出版年（西元）、書名、版次、出版地、出版社、頁數。

例：張春興（1996）。*教育心理學*。台北：東華。頁64-104。

8. 稿件順序為：首頁資料（題目、作者真實姓名及服務機關、通訊地址及電話；若需以筆名發表，請註明）、中文摘要、正文（包括參考文獻或註釋）、末頁資料（以英文書明題目、作者姓名及服務機關、並附英文摘要）及圖表（編號須與正文中之編號一致）。

(二) 本刊對來稿有權刪改，不同意者請在稿件上註明。

(三) 來稿刊出，版權為台灣數學教育學會所有。

(四) 作者見解，文責自負，不代表本學會之意見。

(五) 來稿請e-mail

至：dcyang@mail.ncyu.edu.tw