

## 跨課題數學概念探究：不同形式的「帶餘數除法」

黃德華<sup>1</sup>，黎耀志<sup>2</sup>

1、2 香港教育學院，香港特別行政區

### 摘要

本研究之主要目的是透過評估小六學生對三類不同「帶餘數除法」的式題和應用題的運算表現，分析他們對不同「帶餘數除法」的認識，從而評價他們能否有系統歸納這三類除法的共通概念及找出「帶餘數除法」的關鍵特徵。本研究的對象為香港某小學的 40 位小六學生。評估工具為「帶餘數除法」式題和文字應用題各三題以及一新創的「分數除法」直式題。那三類「帶餘數除法」為整數除整數、小數除小數和帶分數除帶分數。此外，是次研究亦利用了學生訪談作認知分析。是次評估結果顯示，學生在式題和文字題的表現中，涉及帶「餘數」的「整數除法」，幾乎所有學生都能準確計算得「商」和「餘數」。但在求「小數」和「分數除法」的「商」和「餘數」時，答對「商」的仍有接近九成，但計算得式題「小數餘數」的則祇有四成。但奇怪的是，計算得小數文字題「餘數」，卻大增至八成；而於「分數除法」中，成績則極不理想；能計算得正確的式題和文字題的「餘數」的學生同樣只得半成。從與學生訪談及分析學生計算式題和文字題的解，發現學生較能掌握運算步驟，準確計算得運算結果，但大部份學生未能有效理解「帶分數商」與「餘數」的關係，學生亦未能清楚指出這三類除法的共通概念。

**關鍵詞：**帶餘數除法、共通概念、分數除法直式

## 壹、研究背景、動機與目的

### 一、研究背景

香港學生的數學能力在世界數學能力研究中算是很不錯。根據國際教育成就評價協會主辦的TIMSS (Trends in Mathematics and Science Studies) 的歷屆國際數學及科學趨勢研究, 香港學生大多能穩佔前三名。在第五屆TIMSS (2007) 的趨勢研究, 全球65個國家或地區超過42萬名小四及中二學生的比較中, 香港於小學四年級 (Grade 4) 比較, 成績排列全球第1, 中學二年級 (Grade 8) 則位列全球第4。負責是次研究的香港大學教育學院梁貫成教授認為香港小學生數學能力真的很不錯, 尤其數學綜合能力, 更是全球唯一一個地區全部學生能夠達標。單就數學分析能力也較其他64個國家或地區優勝。以往第三、四屆香港學生的數學能力, 一般祇強於運算及解決「常規應用題」(Knowing and Applying problems), 主要因為香港學生多做操練練習, 熟能生巧; 但相對處理「非常規推理題」(Reasoning Problems) 時, 表現每每較差, 這主要因為在學校欠缺「高層次思維」的培訓。但最近10年, 由於教學方法及教材的改變, 學生處理TIMSS的「非常規推理題」也有相當的進步。但若比較「常規應用題」和「非常規推理題」這兩類解題能力則仍明顯發覺香港學生的理解能力仍有很大的進步空間。香港小學生的數學問題也和台灣學生的雷同, 如楊德清 (2000) 的研究, 也清楚指出台灣數學教育長期偏重訓練學生計算技巧, 過份強調傳統解題模式, 導致學生思考不足。

因此在2000年出版的香港小學數學新課程, 其一目標便是強調培訓學生批判解難能力, 並把知識結合生活作經驗 (香港課程發展議會 2000)。香港教育局總課程發展主任 (數學) 吳少階 (2011) 曾於新聞紙上就「三三四」學制的新高中數學課程設計分享中表示「數學課程強調培養學生的批判性思考、數學推理能力、創意、懂得用數學去解難, 在日常生活和情景中, 能夠用數學知識解決問題。」此外, 他亦認為為了讓學生可活用數學, 課程內增設了「數學的進一步應用」和「探索與研究」兩類活動, 作為學生的延展學習活動, 也讓學生欣賞數學。這兩類活動大多以作業 (task) 形式, 進行一些探究性學習。目的是希望學生能在活動的過程中, 把知識應用於生活事情。吳少階更強調「數學的進一步應用」更應橫跨數個數

---

<sup>1</sup> 詳情見香港大學教育學院新聞稿: [http://web.edu.hku.hk/outreach/media/docs/media/081210\\_TIMSS\\_R\\_C.pdf](http://web.edu.hku.hk/outreach/media/docs/media/081210_TIMSS_R_C.pdf)

學課題，看學生是否能融合貫通。

## 二、研究動機

事實上，小學數學課程也有上述的類似要求，把橫跨數個數學課題的概念和技巧作進一步應用，例如四則運算的學習與應用，便是一具體例子。但對於分佈在不同年級，而具有「相同概念」的課題則未見課程有要求評估學生能否掌握及理解它們的「共通概念」及「運算技巧」。例如在初小和高小的課程中，都有教授「加法」、「減法」、「乘法」和「除法」。教學內容的分別主要是涉及不同的「數字」；如「整數乘法」、「小數乘法」、「分數乘法」便分佈在不同年級的課程中。此外，由於小學課程沒有要求老師透過「類比」的手法進行「不同數字」的加、減、乘、除的跨課題比較和綜合教學，也沒有要求學生分析及找出這些跨年級、跨課題的數學知識包含了什麼相同的概念及運算技巧。因此，對程度稍差的學生，他們學習高小的「小數」及「分數」的加、減、乘、除課題時，便出現了很多問題。

在涉及加、減、乘、除的不同數字的跨課題課程中，研究員於進行是次研究前，曾與研究學校的數學老師作了兩次教學成效反思會議。老師一致指出，高小學生大多未能計算及理解「小數」和「分數」涉及「帶餘數除法」求「餘數」的問題。因此，是次的跨課題數學概念探究，便以不同形式的「帶餘數除法」為研究主題。

## 三、研究目的

基於上述的情況，本研究目的在評估學生已學習了的三個分佈於小三、小五和小六的「帶餘數除法」的運算技巧及理解除法的「商」和「餘數」的能力。此外，是次研究亦透過和學生面談，分析他們對這三類「帶餘數除法」的認知，評估他們能否清楚指出這三類「帶餘數除法」的異同。因此，本研究的目的是可分為：

- (一) 透過三種「帶餘數除法」（整數除整數、小數除小數、帶分數除帶分數）的測驗，了解學生的運算能力。
- (二) 利用測驗，找出學生在這三類「帶餘數除法」的概念誤解。
- (三) 利用面談及引導性教學，評估學生能否融會貫通地比較出這三個橫跨不同年級的「帶餘數除法」包含的相同概念及關鍵特徵。

## 貳、研究設計

### 一、研究對象

研究者選取了香港新界區某一所小學 40 名小六學生為研究對象。該校的學生成績水平於香港而言屬中游水平，學生大多屬二級 (Band 2) 水平學生<sup>2</sup>。

### 二、評估測驗 (工作紙) 設計

小六學生已於小三、小五及小六的三個學年學習了整數除法、小數除法和分數除法。其中整數和小數的除法都有涉及求「餘數」的教學例子及練習，但於分數除法中，香港課程並沒有要求教授「帶餘數的分數除法」。但小量教科書的文字題中卻有提供這類除法的文字應用題。

測驗卷的第一頁是三條除法式題，目的是評估學生能否掌握計算出不同除法的「商」及「餘數」的技巧。

#### 第一部份，題目內容：

計算下列各題，找出它們的「商」和「餘數」。需列出計算步驟。

1.  $137 \div 11$

2.  $24.6 \div 1.5$

3.  $6\frac{3}{4} \div 2\frac{1}{8}$

(註，完成後，收回答題紙才派發第二部份三題文字應用題題目紙。)

測驗卷的第二頁為三題不同形式的「帶餘數除法」的文字應用題。目的在評估學生能否理解除法的包含概念，列出橫式及利用概念的情境，糾正前三題式題中「餘數」的錯誤概念，從而準確計算得不同「帶餘數除法」應用題的「餘數」。

#### 第二部份，題目內容：

計算下列文字題。需列出算式及計算步驟，有需要時請寫出直式。

4. 有糖 17 粒，每 5 粒包裝成一小袋。共可包裝得多少袋？餘下糖多少？

---

<sup>2</sup> 現時，香港一般把學生程度分為三個級別(Band 1-3)，Band 1 學生為最優良的，Band 3 學生則成績最差。



## 參、 資料蒐集及分析方法

本研究以研究者自己編寫的工作紙作為評估工具，搜集了 40 位小六學生對這三類不同「帶餘數除法」的概念認知及運算能力的結果。隨後研究員利用「試算表」先作簡單的成績統計（統計結果見附件 1）、答案數目統計及學生的答題對錯分析（見附件 2）。這些具體數據，其後用以分析學生掌握這三類不同「帶餘數除法」的運算能力。此外，就他們的運算錯處，作出歸類及統計，找出學生對這三類「帶餘數除法」的「餘數概念」的誤解。跟著再利用第三部份的問題及學生訪談的內容分析，為研究提供了充足的資料，用以評估學生能否透過比較這三個不同年級的「帶餘數除法」的認知，歸納得三者的相同概念和特徵；最後利用同類「帶餘數除法」的式題和文字題的成績作對比（分析結果見「肆、研究結果」中所有的「表」和「圖」），分析他們的錯對百分比，藉以評估文字題的情景作用。

## 肆、 研究結果

由於是次研究主要是評估學生求三種不同「帶餘數除法」的運算能力及概念認知，然後透過訪談分析他們的知識轉移及分析能力。因此，研究員先利用測驗卷評估及分析學生的運算及理解概念的能力。

### 不同類型的「帶餘數除法」研究結果分析

研究員根據三類不同的「帶餘數除法」的式題和應用題的運算表現作分析，分析結果如下：

#### 一、整數「帶餘數除法」（Q.1和Q.4）

Q.1和Q.4是整數除整數的式題和文字應用題。從40位學生的計算答案得知，幾乎所有學生都能掌握運算技巧及理解題意，找得正確的「商」和「餘數」。

#### 二、小數「帶餘數除法」（Q.2和Q.5）

從表1及圖1得知，88%和100%的學生能計算得式題（Q.2）和應用題（Q.5）的「商」，但奇怪的是，在找出「餘數」的部份，則有60%學生未能於式題（Q.2）計算得正確的「餘數」

答案；他們大多不明白為何要把直式的「餘數」除以10，使「餘數」變為0.6。但於應用題(Q.5)，求「餘數」中，則有80%學生能準確計算得「餘數」，只有20%學生未能把直式的「餘數」8改為0.8。

	Q.2			Q.5		
	Ans	Count	%	Ans	Count	%
正確答案 (商和餘數)	16...0.6	16	40%	3...0.8	32	80%
錯誤答案	16...6	18	45%	3...8	8	20%
	其他	6	15%			
求得正確的「商」	16	35	88%	3	40	100%

表 1：Q.2 和 Q.5 的答案分佈

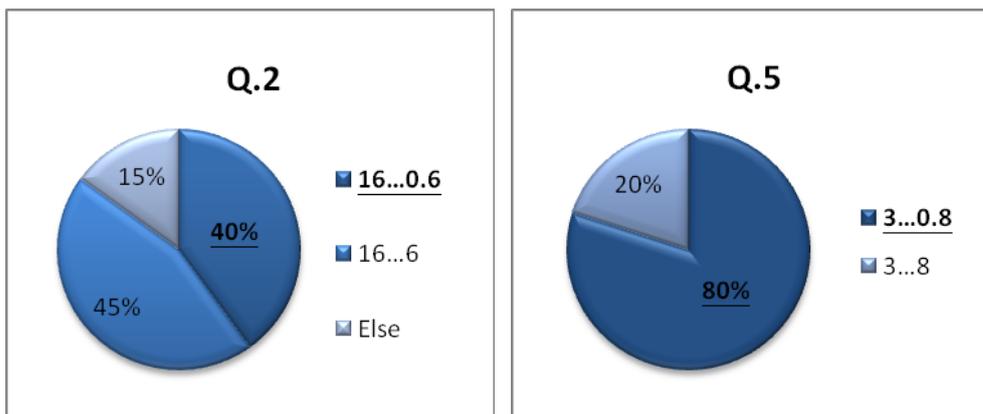


圖 1：有下劃線的為答對 Q.2 和 Q.5 「餘數」的百分比

圖 2 是一學生求「帶餘數小數除法」的誤算例子。

2.  $24.6 \div 1.5$

$= 246 \div 15$

$= 16 \dots 6$

商 = 16 ✓ 餘數 = 6 ✗

$$\begin{array}{r} 16 \\ 15 \overline{) 246} \\ \underline{15} \phantom{6} \\ 96 \\ \underline{90} \\ 6 \end{array}$$

5. 有絲帶長 5.3 厘米，每 1.5 厘米可製襟花一朵。共可製得襟花多少朵？餘下絲帶多少？

共可製得：  
 $5.3 \div 1.5$

$= 3(\text{朵}) \dots 0.8(\text{厘米})$  ✓

$$\begin{array}{r} 3 \\ 15 \overline{) 53} \\ \underline{45} \\ 8 \end{array}$$

圖 2：學生的求小數除法的「餘數」例子

由圖 2 的錯誤分析，得知此學生計算「帶餘數小數除法」式題(Q.2)時，「被除數」、「除數」都乘大了 10 倍，在求得「商」和「餘數」之後，卻沒有把「餘數」除以 10。而在

做應用題 (Q.5) 時, 此學生用相同的方法求得「商」和「餘數」, 不同的是, 他會在計算得「餘數」後, 將「餘數」除以 10。為什麼他能找得文字題的「餘數」, 而不能正確計算得式題的「餘數」? 研究員透過訪談, 與一位答對了應用題 Q.5 的「餘數」, 但答錯了式題 Q.2 的「餘數」的學生交談, 分析他為何會出現這不一致的結果。

### 訪談

研究員：在題 5，從直式中，「餘數」是 8，為何你的答案，餘下的絲帶是 0.8 厘米，而不是 8 厘米？

學生一：直式的「餘數」應改為 0.8，因為若是 8 厘米，這個長度足夠多做幾朵襟花，每做一朵只需用絲帶 1.5 厘米。

研究員：那為何 8 改為 0.8，不改為 0.08？

學生一：因為未計算直式時，「被除數」、「除數」都是乘大 10 倍，所以「餘數」要除以 10，所以 8 除以 10 等於 0.8。

研究員：那為何 Q.2 的「餘數」6，又不用改為 0.6？

學生一：老師沒說要改，從橫式看， $24.6 \div 1.5$  等於  $246 \div 15$ ，又等於 16 餘 6。既然它們是「等於」，所以最後直式計算得的「6」便是「餘數」。

研究員：你看「餘數」是 6，是否大於原本的「除數」1.5，那你覺得應否把求得的「餘數」除以 10？

學生一：不需要。因為  $24.6 \div 1.5$  已變成  $246 \div 15$ ，它們是「等於」的。

研究員：當  $24.6 \div 1.5$  寫成等於  $246 \div 15$  時，它們原本的單位已改寫為另一單位，這與 Q.5 文字題的一樣，由 cm 變為 mm。若我們以 6 作「餘數」，這「餘數」的單位，便與原本式題中的單位不一樣了。你明白嗎？

學生一：噢！那即是式題本身是有單位的，只是沒有寫出來。我現在明白了，若最初曾把「除數」乘大 10 倍，在求得直式的「餘數」後，應該還原，除以 10，使「餘數」不會大於原本的「除數」。

從上述交談中，很明顯大部份學生都是依從老師的教導，沒作深入推理分析；而幾乎所有教科書也沒有利用以下的除法式題單位變化分析，教授學生求「小數帶餘數除法」的「餘數」時，要注意隱藏了的「餘數單位」是否和原式的「被除數的單位」一樣。此外，大部份學生亦沒有進行：「被除數」=「除數」×「商」+「餘數」的驗算。正就是這些原因，便導致超過半數（60%）的學生未能求得式題的正確「餘數」。慶倖，近年香港的小學應用題教學，大部份老師都要求學生在求得答案後，要進行「合理性」的「判斷」。例如：題5的文字題，從直式中，學生算得「餘數」是8厘米，後經分析，覺得「餘數」8厘米較造一朵襟花的絲帶1.5厘米的「除數」長，故「餘數」應改為0.8厘米。這便是為何答對文字題的「餘數」的學生多至80%，遠較沒情景及被橫式的「=」等號誤導，僅得40%學生答對的式題「餘數」為多。

除法式題單位分析	
$24.6 \div 1.5$ (即 $24.6$ 單位 A + $1.5$ 單位 A)	若是包含概念，「被除數」和除數的單位是一樣的
$= 246 \div 15$ (它們的單位已改變了， $246$ 單位 B + $15$ 單位 B, 1 個單位 A = 10 個單位 B)	
$= 16 \dots 6$	這餘數 6 的單位是「B」，與原式「被除數」24.6 的單位「A」是不相同的。由於，原式題是單位「A」，所以餘數 6 要除以 10，使之變回單位「A」。
餘數 = $6 \div 10$	
$= 0.6$	
(註：無論除法概念是「均分」或「包含」，餘數的單位一定是和原式「被除數」的單位一樣。)	

圖 3

### 三、分數「帶餘數除法」(Q.3和Q.6)

學生計算這類除法的表現最差。從表 2 及圖 4 得知，只有 5% 的學生能答對 Q.3 (式題) 和 Q.6 (文字題) 的「餘數」。從他們的求「餘數」的錯誤計算中 (例子見圖 5)，我們不難發覺超過九成學生是不明白怎樣利用分數除法的運算步驟所計算得的「商」去找得所需的「餘數」。原因主要是學生不明白計算得的「帶分數商」，實際是「除數」的「倍數」，他們也未能利用 Q.6 的文字題情境作分析，知道「帶分數」中的「分數部份」與「除數」的「關係」——

不足一倍，故不足夠釀一瓶米酒。

	Q.3			Q.6		
	Ans	Count	%	Ans	Count	%
正確答案 (商和餘數)	4...1/4	2	5%	5...3/4	2	5%
錯誤答案	4...2	16	40%	5...0.15	6	15%
	4...2/17	7	17%	5...15/52	5	12%
	4+2/17	6	15%	5...1.5	4	10%
	其他	9	23%	5...15	2	5%
				5+15/52	2	5%
				Else	19	48%
求得正確的「商」	4 or 4+2/17	31	78%	5 or 5+15/52	29	73%

表2：Q.3和Q.6的答案分佈

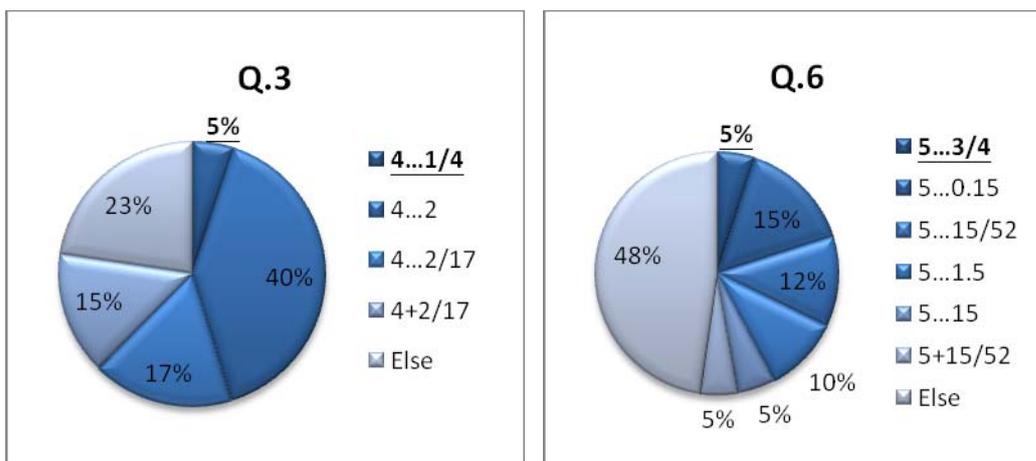


圖4：有下劃線為答對Q.3和Q.6的「餘數」的百分比

3.  $8\frac{3}{4} \div 2\frac{1}{8}$

$= \frac{35}{4} \div \frac{17}{8}$

$= \frac{35}{4} \times \frac{8}{17}$

$= \frac{70}{17}$

$= 4\frac{2}{17}$

商 = 4 餘數 =  $\frac{2}{17}$

6. 有糯米  $13\frac{3}{4}$  公斤，釀一瓶米酒需用糯米  $2\frac{3}{5}$  公斤。共可釀得米酒多少瓶？餘下糯米多少？

共可西裏得米酒

$13\frac{3}{4} \div 2\frac{3}{5}$

$= 5$  (瓶)

$\frac{15}{52}$  (公斤)

這是他數。這瓶米酒  
多少公斤糯米？

$\frac{15}{4} \times \frac{5}{17} = \frac{75}{68}$

$\frac{275}{52}$

$5\frac{15}{52}$

圖5：學生求分數除法中的「餘數」的例子

由圖5的錯誤分析，得知此學生計算「帶餘數分數除法」式題 (Q.3) 時，求得的「商」為「帶分數」，他便直觀認為：「帶分數」的「整數部份」是「商數」，而剩下的「分數部份」便是「餘數」。此學生在做應用題 (Q.6) 時，則犯了同樣的錯誤。後經過與學生交談，得知他誤解只要「商」的「分數部份」小於「除數」，這「分數」便是「餘數」。他不明白計算得的「商」，實為「倍數」。若要算得「餘數」，便需明白這「分數商」和「餘數」的關係。因此，研究員便希望透過以下的訪談對話，誘導學生找得利用「帶分數商」的「分數部份」和除數的關係，找得求「餘數」的方法。

### 訪談

研究員透過下列交談和討論，誘導受訪學生糾正錯誤。

研究員：從題6，你的計算步驟十分正確，也能正確找得「商」是  $5\frac{16}{22}$ 。但你知道這  $5\frac{16}{22}$  與「被

除數」  $13\frac{3}{4}$  和「除數」  $2\frac{3}{5}$  的關係嗎？

學生二：不知道。

研究員：那於「8除以2等於4」，你知道2的多少倍是8？

學生二：我知2乘以4等於8，即2的4「倍」是8。

研究員：那麼，說回題6， $13\frac{3}{4} \div 2\frac{3}{5} = 5\frac{16}{22}$ ， $2\frac{3}{5}$  的多少倍等於  $13\frac{3}{4}$ ？

學生二：我明白啦。 $2\frac{3}{5}$  的  $5\frac{16}{22}$  倍等於  $13\frac{3}{4}$ 。

研究員：你也知道釀一瓶酒需要糯米  $2\frac{3}{5}$  公斤，這  $5\frac{16}{22}$  代表可以釀酒多少瓶？

學生二： $5\frac{16}{22}$  瓶。

研究員：那麼，題目6問可釀得米酒多少瓶，我們沒有半瓶或  $\frac{3}{4}$  瓶賣的；你也答得對共釀得5瓶，那是「商」的「整數部份」，那「分數部份」代表什麼意思？

學生二： $\frac{16}{22}$  瓶。

研究員：釀一瓶要糯米 $2\frac{3}{5}$ 公斤，那麼， $\frac{15}{52}$ 瓶等於多少糯米？

學生二：啊！我明白了，「餘數」應是 $2\frac{3}{5} \times \frac{15}{52}$ ，給我算算，答案是 $\frac{3}{4}$ ，即餘下糯米 $\frac{3}{4}$ 公斤。

下圖 6 是學生與研究員交談後，得出的正確計算方法：

6. 有糯米 $13\frac{3}{4}$ 公斤，釀一瓶米酒需用糯米 $2\frac{3}{5}$ 公斤。共可釀得米酒多少瓶？餘下糯米多少？

$13\frac{3}{4} \div 2\frac{3}{5}$   
 $= \frac{55}{4} \div \frac{13}{5} = \frac{55}{4} \times \frac{5}{13}$   
 $= \frac{275}{52} = 5\frac{15}{52}$   
 共可釀得米酒 5 瓶  
 餘下糯米  $\frac{3}{4}$  公斤

$52 \overline{) 275} \begin{array}{r} 5 \\ \underline{260} \\ 15 \end{array}$  因為  $\frac{15}{52}$ ，不夠 1，  
 $\therefore$  餘下糯米：  
 $2\frac{3}{5} \times \frac{15}{52} = \frac{13}{5} \times \frac{15}{52} = \frac{3}{4}$

圖 6：正確計算「帶餘數分數除法」的例子

研究員：現在你能改正求 Q.3 「餘數」的方法嗎？

學生二：我明白，將「商」的「分數部份」乘「除數」，就能計算得「餘數」。

下圖 7 是學生利用「倍」的概念，計算得分數除法中的「餘數」。

3.  $8\frac{3}{4} \div 2\frac{1}{8}$

$= \frac{35}{4} \div \frac{17}{8}$   
 $= \frac{35}{4} \times \frac{8}{17} = \frac{70}{17}$   
 $= 4\frac{2}{17}$   
 商 = 4 餘數 =  $\frac{1}{4}$

$17 \overline{) 70} \begin{array}{r} 4 \\ \underline{68} \\ 2 \end{array}$   
 餘數： $2\frac{1}{8} \times \frac{2}{17} = \frac{12}{8} \times \frac{2}{17} = \frac{1}{4}$

\*這裏用了「倍」的概念求餘數

圖 7：利用「倍」的概念求分數除法中的「餘數」

#### 四、運用「整數除法」的概念和「除法的直式」求「分數除法」的「餘數」(Q.7)

從表 3 和圖 8 表達的數據，我們清楚知道 80% 學生都未能把計算整數除整數的直式概念和技巧，轉移至分數除法中。

表 3：Q.7 的答案分佈

	Q.7		
	Ans	Count	%
正確答案 (全答對 x、y、z)	$x=5, y=13, z=3/4$	8	20%
錯誤答案	$x=5, y=52, z=15$	5	12%
	其他	27	68%
求得正確的「商」	$x=5$	30	75%
填寫正確的「商」和「餘數」	商=5，餘數=3/4	2	5%

註：z 為分數除法的「餘數」

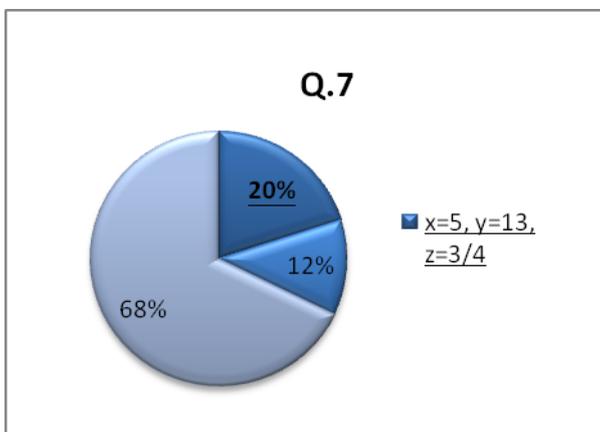


圖 8：有下劃綫為答對 Q.7 的 x、y、z 的百分比

通過分析學生的錯誤答案，研究員知道：有80%的學生未能想出計算得「除法直式」中的未知數x、y及z的方法，他們覺得束手無策，完全理解不來。儘管有20%學生能正確算得x、y、z的值，但在這小撮答對x、y、z的學生中，只有四分之一的學生明白z即是「餘數」，從而能填寫出正確的「餘數」。由此說明大部份學生未能理解直式中哪個數是「餘數」。圖9為學生所作的一個典型錯誤例子。

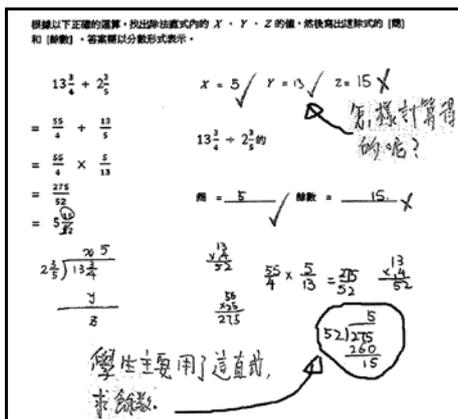


圖 9：學生轉移「整數除法」的「直式運算」至「分數除法」的錯誤例子

其後透過研究員與學生的訪談，研究員知道原校老師並沒有教授過這類「分數直式除法」，學生更說沒有人會用「長除法」計算「分數除法」的「餘數」的。但經過研究員利用「類比」的手法，在要求學生分析  $13\frac{3}{4} \div 2\frac{2}{5} = 5\frac{16}{52}$  的「被除數」、「除數」和「商」的關係後，他們都明白，並能掌握找出 Q.7 的 x、y、z 的值的的方法，並懂得比較利用「倍」求「餘數」的結果和利用此「直式分數除法」所計算得的「餘數」是否相同，以判斷此方法是正確的。

以下是研究員利用「類比」的教學方法，幫助學生找出 Q.7 的 x、y、z 的值，從而加深學生利用「帶分數商」求各類除法中的「餘數」的認知和理解。

訪談

研究員：根據 Q.7 提供的分數除法答案， $13\frac{3}{4} \div 2\frac{2}{5}$  等於多少？

學生三： $5\frac{16}{52}$

研究員：你能夠把  $13\frac{3}{4} \div 2\frac{2}{5} = 5\frac{16}{52}$ ，用「直式」寫出來嗎？

學生三：不明白。

研究員： $8 \div 2 = 4$ ，能用「直式」表示嗎？

學生三：明白，可寫成 
$$\begin{array}{r} 4 \\ 2 \overline{)8} \\ \underline{8} \\ 0 \end{array}$$

研究員：那麼  $13\frac{3}{4} \div 2\frac{3}{5} = 5\frac{15}{22}$ ，可同樣用「直式」表示嗎？

$$2\frac{3}{5} \overline{)13\frac{3}{4}} \\ \underline{13\frac{3}{4}}$$

學生三：可以，可寫成  $\frac{13\frac{3}{4}}{2\frac{3}{5}}$ 。

$$2 \overline{)9} \\ \underline{8} \\ 1$$

研究員：對，但現在 Q. 7 要求「商」是整數，如  $9 \div 2$  若「商」是整數，其直式是  $\frac{9}{2}$ 。看回

$$2\frac{3}{5} \overline{)13\frac{3}{4}} \\ \underline{\quad y}$$

Q. 7 的題目  $\frac{x}{z}$ ，你覺得  $x$  應是什麼整數？會是 6 嗎？

學生三：不會，因為 6 大於上面直式的「商」 $5\frac{15}{22}$ ，應該是 5。噢！我明白，即  $x=5$ 。

研究員：對。若  $x=5$ ，那麼  $y$  應怎樣計算出來？看看上面  $9 \div 2$  的直式，8 是怎樣計算得的呢？

學生三：我也明白了， $2 \times 4 = 8$ 。 $y$  應等於  $2\frac{3}{5} \times x$ ，即  $2\frac{3}{5} \times 5 = y$ 。讓我算算看。 $y=13$ 。

$$2 \overline{)9} \\ \underline{8} \\ 1$$

研究員：那麼， $z$  又是怎樣算得的呢？看看  $\frac{4}{1}$ ，它的「餘數」1，是哪些數相減計算得的呢？

$$z = 13\frac{3}{4} - y \\ = 13\frac{3}{4} - 13 \\ = \frac{3}{4}$$

學生三： $9-8=1$ 。噢，明白了， $z$  應是  $13\frac{3}{4} - y$ ，即  $\frac{3}{4}$ 。

研究員：那麼，根據你計算得的  $x$ 、 $y$ 、 $z$  的值，你能夠用直式表示  $13\frac{3}{4} \div 2\frac{3}{5}$  的「商」和「餘數」嗎？

$$2\frac{3}{5} \overline{)13\frac{3}{4}} \\ \underline{13} \\ \frac{3}{4}$$

學生三：是這樣嗎？

研究員：那麼「商」是多少？「餘數」是多少？

學生三：「商」是 5，「餘數」是  $\frac{3}{4}$ 。

研究員：比較「整數除法」和「分數除法」的「直式」，它們的「餘數」都一定是大於還是小

於「除數」？為什麼？

學生三：當然是小於「除數」。若大於「除數」，表示「商」的整數應可以再大一些啊！

研究員：對，那看回 Q. 6 的文字題，我們是怎樣計算得  $13\frac{1}{4} \div 2\frac{3}{8}$  的「餘數」的？

學生三：因為  $13\frac{3}{4} \div 2\frac{3}{8} = 5\frac{15}{8}$ ，我是把「商」的「分數部份」乘「除數」，即  $2\frac{3}{8} \times \frac{15}{8}$ 。計算得「餘數」的。

研究員：它們的「餘數」一樣嗎？

學生三：一樣，同是  $\frac{3}{4}$ 。

研究員：那麼，你現在明白計算「分數除法」的「餘數」時，我們可以有哪些方法嗎？

學生三：明白。可以利用「帶分數」的「商」的「分數部份」乘以「除數」，或利用「分數除法的直式」找  $z$  的值。

訪談完結後，研究員再要求該學生利用「帶分數」的「商」的「分數部份」和利用「分數除法直式」的兩種方法計算  $5\frac{3}{10} \div 1\frac{1}{2}$  的「餘數」。看看它們的結果是否相同。結果該學生能清楚準確計算得答案。現為方便讀者清楚看得此兩種求「分數除法」的「餘數」的方法，筆者整理了學生的運算步驟，展示如下：

方法 1:

$$\begin{aligned}
 & 5\frac{3}{10} \div 1\frac{1}{2} \\
 &= \frac{53}{10} \div \frac{3}{2} \\
 &= \frac{53}{10} \times \frac{2}{3} \\
 &= \frac{53}{15} \\
 &= 3\frac{8}{15} \\
 \therefore \text{餘數} &= 1\frac{1}{2} \times \frac{8}{15} \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \\
 &= \frac{4}{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 3 \\
 15 \overline{)53} \\
 \underline{45} \\
 8
 \end{array}$$

方法 2:

利用方法 1 的結果，先寫出「商」。再計算 x、y、z 的值。

$  \begin{aligned}  & 5\frac{3}{10} \div 1\frac{1}{2} \\  &= 3\frac{8}{15} \\  x &= 3 \\  y &= 1\frac{1}{2} \times 3 \\  &= \frac{3}{2} \times 3 \\  &= \frac{9}{2} \\  &= 4\frac{1}{2}  \end{aligned}  $	$  \begin{aligned}  z &= 5\frac{3}{10} - y \\  &= 5\frac{3}{10} - 4\frac{1}{2} \\  &= 1\frac{3}{10} - \frac{5}{10} \\  &= \frac{13-5}{10} \\  &= \frac{4}{10} \\  &= \frac{4}{5}  \end{aligned}  $	<p>因此:</p> $  \begin{array}{r}  x \\  1\frac{1}{2} \overline{)5\frac{3}{10}} \\  \underline{\phantom{1}y} \\  z \\  \downarrow \\  3 \\  1\frac{1}{2} \overline{)5\frac{3}{10}} \\  \underline{\phantom{1}4\frac{1}{2}} \\  \phantom{1}\frac{4}{5}  \end{array}  $ <p><math>\therefore</math> 餘數 = <math>\frac{4}{5}</math></p>
---	--	---

事實，利用了這兩種不同的求「分數除法」的「餘數」的方法，不僅加深了學生對「餘數」的「特徵」（利用「長除法」，可清楚知道「餘數」一定小於「除數」，「餘數」的單位一定和「被除數」的單位一樣）的認識，也加深了學生對除法的「被除數」、「除數」、「商」和「餘數」的關係。老師亦可要求學生利用理解得的下列關係作「驗算」。

$$\text{「被除數」} = \text{「除數」} \times \text{「商」} + \text{「餘數」}$$

### 伍、 結論和建議

從是次研究，研究員發現大部份學生都未能夠計算得「小數」和「分數除法」中的「餘數」。此外，幾乎所有學生也未能利用「帶餘數整數直式除法」的概念應用於「帶餘數分數直式除法」中。

這明顯反映出學生未能透過同時間解答這三類不同的跨年級「帶餘數」問題，亦不懂得利用「類比」推理的方法，找得解答「分數直式除法」的方法。但透過訪談及研究員的指導，

發覺學生大多能利用「對照」、「類比」的方法推算出解決新問題的方法。

研究員更發現幾乎所有老師都沒有把這三類不同的「帶餘數除法」作綜合式的討論和教學，更不用說把它們作「類比」、「對照」及分析了。從分析所得，這主要是大部份老師都是依照教科書的編排和提供的教學方法作教學。它們極少會把不同年級的同類型課題作深入比較和分析。這正是林碧珍、蔡文煥（2005）和Floden（2002）所述的教科書的選用，不僅影響老師在課堂中的教學方法，也同時嚴重影響了學生的學習方式；這最終當然影響了「教」與「學」的成效。

就此，研究者根據上述的研究結果，提出以下幾點建議，以供改善及提升教授這三類不同「帶餘數除法」的教學效益：

### 一、利用「類比」讓學生明白它們擁有的相同概念

利用「長除法」（直式）表示三類不同「帶餘數除法」的「商」和「餘數」

例：

$$17 \div 5 = 3 \dots 2$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 5 \overline{)17} \\ \underline{15} \\ 2 \end{array}$$

$$5.3 \div 1.5 = 3 \dots 0.8$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 1.5 \overline{)5.3} \\ \underline{4.5} \\ 0.8 \end{array}$$

$$13\frac{3}{4} \div 2\frac{3}{5} = 5 \dots \frac{3}{4}$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ 2\frac{3}{5} \overline{)13\frac{3}{4}} \\ \underline{13} \\ \frac{3}{4} \end{array}$$

當求「商」是「整數」時，它們的「餘數」必定要小於「除數」。老師可要求學生利用書本或課堂教授得的「概念」和「技巧」，找得「商」和「餘數」後，再填上直式所需的各數字。同時間，把三種不同的「除數」，透過相同的直式模式作「對比」，這是有助學生強化不同型式「帶餘數除法」的「概念」的理解和認知的。

## 二、利用「倍」的概念求三類不同「除數」的「商」和「餘數」

例：

$$\begin{array}{l}
 17 \div 5 \\
 = 3 \frac{2}{5} \\
 \text{餘數} = 5 \times \frac{2}{5} \\
 = 2
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 5.3 \div 1.5 \\
 = 53 \div 15 \\
 = 3 \frac{8}{15} \\
 \text{餘數} = 1.5 \times \frac{8}{15} \\
 = 0.8
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 13 \frac{3}{4} \div 2 \frac{5}{8} \\
 = \frac{55}{4} \div \frac{5}{8} \\
 = \frac{275}{2} \\
 = 5 \frac{15}{2}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 \text{餘數} = 2 \frac{5}{8} \times \frac{15}{2} \\
 = \frac{22}{4} \times \frac{15}{4} \\
 = \frac{33}{4}
 \end{array}$$

老師可透過觀察、討論，讓學生明白這三題除法算出的「帶分數商」的意義，即「除數」的若干「倍」等於「被除數」。因此若要計算它們的「餘數」，我們都可以利用相同的方法：「除數」乘以「商」的「分數部份」，找得「餘數」。

以上的方法確是能有效幫助學生明白在計算不同「除法」時，若要求「商」是「整數」時，則「餘數」=「商的分數部份」×「除數」的「認知」和「應用」。這種多樣化教學也鼓勵學生發展多樣化的解題方式，滿足了現代數學化教學的要求，也突出了一題多解及變式教學的功用（顧冷沅、黃榮金、馬頓，2005；孫旭花、黃毅英、林智中、張奠宙，2006；孫旭花，2007）。

## 三、教材宜具延展性

對同類概念數學教學，老師可利用同一情境導入新的單元，這有助學生在熟悉的情境理解新的概念，從而歸納得「新」、「舊」概念的「共通點」。這正如尤欣涵、楊德清（2010）所言，這些具延伸性的題型，能幫助學生思考，幫助學生建立新的認知基模，也同時擴展了學生對同類數學概念及技巧認知和結構的理解。

例如老師可利用「整數帶餘數的除法」情境，配上不同的「小數」或「分數」，使之變成「小數」或「分數」的帶餘數例子，這樣學生便較易理解所涉的概念和運算技巧。

例：

整數除法：

小明有絲帶 257cm，做絲花一朵要用絲帶 23cm。問可做得絲花多少朵？餘下絲帶多少？

小數除法：

小明有絲帶 34.5cm，做絲花一朵要用絲帶 1.7cm。問可做得絲花多少朵？餘下絲帶多少？

分數除法：

小明有絲帶  $8\frac{3}{4}$ cm，做絲花一朵要用絲帶  $1\frac{4}{5}$ cm。問可做得絲花多少朵？餘下絲帶多少？

#### 四、教授新單元前，宜先回顧舊知識

研究者建議老師當編寫新教學計劃或教案前，應回顧學生學過什麼相關的知識，看看他們可否利用舊知識，帶出或演繹得新知識。這種利用舊知識學新知識，既方便，亦有助學生易於掌握新知識所需的概念和技巧。

總結是次研究，我們發覺課本的編排及提供的教學方法是絕對不能滿足學生和老師的「學」與「教」的需要的。因此，作為專業的數學老師，確實有需要為學生的需要就教材的內容及編排作出修訂，建立適當的「校本課程」，藉以提升「教」與「學」的效益。

## 參考文獻

- 尤欣涵、楊德清 (2010), 台灣教研院教材與美國 MiC 教材於機率課程設計上之差異性比較。  
*台灣數學教師電子期刊*, 22, 34-57。
- 吳少階 (2011), 強調批判解難, 結合知識生活。星島日報, 教育版 (2011 年 9 月 1 日), 香港。
- 林碧珍、蔡文煥 (2005), TIMSS 2003 台灣國小四年級學生的數學成就及其相關因素之探討。*科學教育月刊*, 285, 2-38。
- 香港課程發展議會 (2000), 數學教育學習領域: 數學課程指引 (小一至小六)。香港: 政府印務局。
- 孫旭花 (2007), 螺旋變式數學課程之還原理念簡介—以青浦變式教學中「以新歸舊」概念理解教學實踐為例。*台灣數學教師電子期刊*, 12, 17-32。
- 孫旭花、黃毅英、林智中、張奠宙 (2006), 問題變式結構與功能的統一。*課程教材教法*, 5, 25-31。
- 顧冷沅、黃榮金、馬頓 (2005), 變式教學促進有效的數學學習的中國方式。範良火, 黃毅英, 蔡金法, 李士錡 (編), *華人如何學習數學* (頁 247-273)。南京: 江蘇教育出版社。
- Floden, R.E. (2002), The measurement of opportunity to learn, In C. P. Andrew & A. Gamoran(Eds.), *Methodological advances in cross-national surveys of educational achievement* (pp.231-266), Washington: National Academy Press.

### 附錄

附件1：題1至題7的答題成績統計

學生編號		成績統計					學生填寫的答案																
		題目 1-3 (3)	題目 4-6 (3)	題目 7 (2)	總分 8	備註	Q1a	Q1b	Q2a	Q2b	Q3a	Q3b	Q4a	Q4b	Q5a	Q5b	Q6a	Q6b	Q7x	Q7y	Q7z	Q7a	Q7b
1	1	2	0	3		12	5	16	6	4	2/17	3	2	3	0.8	5	15	5	52	15	5	15/52	
2	1	2	0	3		12	5	16	6	4	2	3	2	3	0.8	5	1/2	5	N	15	5	15	
3	1	3	1	5		12	5	16	6	4	10	3	2	3	0.8	5	3/4	6	13	3/4	5	3/4	
4	2	2	0	4		12	5	16	0.6	4	2	3	2	3	0.8	5	1.5	5	275/52	15/52	5	15/52	
5	1	2	0	3		12	5	N	N	N	N	3	2	3	0.8	5+15/52	N	2	13	2	2	9/25	
6	3	2	0	5		12	5	16	0.6	4	1/4	3	2	3	0.8	5	2	5	130	23	5.2	23/100	
7	2	2	1	5		12	5	16	0.6	4	2	3	2	3	0.8	5	3/20	5	13	3/4	5	15/52	
8	1	1	0	2		12	5	16.4	0.6	N	N	3	2	3	8	35	2	12	15	N	25	4	
9	2	2	0	4		12	5	16	0.6	4+1/17	0	3	2	3	0.8	5	15/52	5	52	15	5	N	
10	1	2	0	3		12	5	16	6	18	19	3	2	3	0.8	35	1/2	5	N	15	5	15/52	
11	2	2	0	4		12	5	16	0.6	4+2/17	0	3	2	3	0.8	5	15/52	5	5	52	5	15/52	
12	1	2	0	3		12	5	16	6	4	2	3	2	3	0.8	5	3/20	5	52	15	5	15	
13	0	2	0	2		12	45	16	4	N	N	3	2	3	0.8	52/275	N	5	275/52	15/52	5+15/52	15/52	
14	1	1	0	2		12	5	16	6	2	1/17	3	2	3	8	5	15/52	5	15	N	5	15	
15	1	1	0	2		12	5	16	6	N	N	3	2	3	8	5	1.5	6	N	N	N	N	N
16	2	2	1	5		12	5	16	0.6	4	2/17	3	2	3	0.8	5	3/13	5	13	3/4	5	15/52	
17	1	2	0	3		12	5	16	6	4	2/17	3	2	3	0.8	5	15/52	5	52	15	5	15/52	
18	1	1	0	2		12	5	16	6	4	2	3	2	3	8	N	N	5	12	N	3	9/52	
19	2	2	0	4		12	5	16	0.6	4	2/17	3	2	3	0.8	2	9/25	N	N	N	N	N	N
20	2	0	0	2		12	5	16	0.6	4+2/17	0	3	3	3	8	5	5/52	5	15	52	5	15/52	
21	2	2	0	4		12	5	16	0.6	4+2/17	0	3	2	3	0.8	5+5/52	N	5	275	15	5	15	
22	1	2	0	3		12	5	16	6	4	2	3	2	3	0.8	5	3/20	5	12	2	5	6	
23	1	1	0	2		12	5	16	6	2	1/17	3	2	3	8	7	N	5	15/52	0	5+15/52	0	
24	1	1	0	2		12	5	16	6	4	2	3	2	3	8	5	15	N	N	N	N	N	N
25	1	2	0	3		12	5	17	4	4	2	3	2	3	0.8	6	1+1/4	6	12+3/4	3/4	6	3/4	
26	1	2	0	3		12	5	16	6	4+2/17	0	3	2	3	0.8	5	23/100	5	275/52	15/52	5	15/52	
27	0	0	0	0	缺席	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/
28	1	2	0	3		12	5	16	6	4	2	3	2	3	0.8	4	27/100	5	260	15	5	0	
29	2	2	1	5		12	5	16	0.6	4+2/17	0	3	2	3	0.8	5+15/52	N	5	13	3/4	5+15/52	N	
30	2	2	0	4		12	5	16	0.6	4	2/17	3	2	3	0.8	4	5	44	104	35	44	35	
31	2	1	1	4		12	5	16	0.6	N	0	3	2	3	8	5	1.5	5	13	3/4	5	15	
32	1	2	1	4		12	5	16	6	4	2/17	3	2	3	0.8	5	5/52	5	13	3/4	5	15/52	
33	2	2	1	5		12	5	16	0.6	4	2	3	2	3	0.8	5	3/20	5	13	3/4	5	15/52	
34	1	2	0	3		12	5	16	6	4	2	3	2	3	0.8	5	1.5	5	13	15	5	15	
35	3	2	0	5		12	5	16	0.6	4	1/4	3	2	3	0.8	5	23/100	5	130	23/100	5	23/100	
36	1	2	0	3		12	5	16	0.6	4	2	3	2	3	0.8	5	7.5	N	N	N	N	N	N
37	1	2	0	3		12	5	16	6	4	2	3	2	3	0.8	5	3/20	5	13	15	5	15	
38	1	2	0	3		12	5	16	6	4	2	3	2	3	0.8	4	1.5	5.2	13	2	3/10	5.2	23
39	2	2	0	4		12	5	16	0.6	4	2	3	2	3	0.8	5	3/20	5	52	15	5	15	
40	1	3	2	6		12	5	1	9.6	4	2	3	2	3	0.8	5	3/4	5	13	3/4	5	3/4	
41	2	2	0	4		12	5	16	0.6	4	2/17	3	2	3	0.8	5	15/52	5	13	3/4	5	15	

註：沒有填寫答案用N表示。編號27的學生缺席，沒有提交工作紙。

附件 2：題 1 至題 7 的答題數目統計及對錯分析

題目	答案	數目	百分比	答題情況分析 (加粗) 及 錯誤原因
Q.1	<u>12...5</u>	39	98%	算式題：「被除數」與「除數」為整數，幾乎所有學生求得正確的「商」和「餘數」，只有一個學生計算「餘數」出錯
	12...45	1	2%	
Q.2	<u>16...0.6</u>	16	40%	算式題：「被除數」與「除數」為小數，88%學生求得正確的「商」，卻只有40%學生能準確計算得「餘數」
	16...6	18	45%	用除法直式計算得「餘數」後，沒有除以 10
	其他	6	15%	
Q.3	<u>4...1/4</u>	2	5%	算式題：「被除數」與「除數」為分數，5%學生答題正確，78%學生求得正確的「商」
	4...2	16	40%	將原式化成： $70/17=70\div 17=4...2$
	4...2/17	7	18%	將「商」為 4 又 2/17 當做是「商」4 餘 2/17
	4+2/17	6	15%	只寫下答案 4 又 2/17，不清楚如何用帶「餘數」的方式表達
	其他	9	22%	
Q.4	<u>3...2</u>	39	98%	應用題：「被除數」與「除數」為整數，所有學生求得正確的「商」，只有一個學生「餘數」錯誤
	3...3	1	2%	
Q.5	<u>3...0.8</u>	32	80%	應用題：「被除數」與「除數」為小數，所有學生求得正確的「商」，80%學生答題正確，正確率比算式題 Q.2 高出一倍
	3...8	8	20%	用除法直式計算得「餘數」後，沒有除以 10
Q.6	<u>5...3/4</u>	2	5%	應用題：「被除數」與「除數」為分數：5%學生答題正確，正確率與算式題一樣，73%學生求得正確的「商」
	5...0.15	6	15%	將原式化成： $275/52=275\div 52=5...15$ ，得出「餘數」比「被除數」大，現實中不可能發生，便有意將「餘數」調小，使其看似合理
	5...15/52	5	12%	將「商」為 5 又 15/52 當做是「商」5 餘 15/52
	5...1.5	4	10%	將原式化成： $275/52=275\div 52=5...15$ ，得出「餘數」比「被除數」大，現實中不可能發生，便有意將「餘數」調小，使其看似合理
	5...15	2	5%	將原式化成： $275/52=275\div 52=5...15$
	5+15/52	2	5%	只寫下答案 5 又 15/52，不清楚如何用帶「餘數」的方式表達
	其他	19	48%	
Q.7 (xyz)	<u>x=5, y=13,</u> <u>z=3/4</u>	8	20%	除法直式：20%學生答題正確，75%學生能得出 x=5
	x=5, y=52, z=15	5	12%	照抄答案 5 又 15/52 中出現的部份
	其他	27	68%	
Q.7	<u>5...3/4</u>	2	5%	除法直式補充有 20%學生答題正確，但最終答案只有 5%的學生答對，說明其中部份學生未能理解直式中哪個數是「餘數」
	5...15/52	11	27%	將「商」為 5 又 15/52 當做是「商」5 餘 15/52
	5...15	9	23%	將原式化成： $275/52=275\div 52=5...15$
	5+15/52	2	5%	只寫下答案 5 又 15/52，不清楚如何用帶「餘數」的方式表達
	其他	16	40%	

註：用加粗及下劃綫標注的為正確答案