ISSN 1815-6355

台灣數學教師(電子)期刊

Taiwan Journal of Mathematics Teachers

第30期

台灣數學教育學會

2012年06月

台灣數學教師(電子)期刊
Taiwan Journal of Mathematics Teachers
2012 年 06 月出版
NO.30 2012

發行人： 林福來教授

封面設計：施乃文

出版者：台灣數學教育學會

地址：台北市 116 汀州路四段 88 號國立台灣師範大學數學系 M212

電話：02-29307151

電子郵件信箱：tame@math.ntnu.edu.tw

網址：
http://www.math.ntnu.edu.tw/~tame/index.htm

總編輯：楊德清 dcyang@mail.ncyu.edu.tw

地址：嘉義縣民雄鄉文隆村 85 號
國立嘉義大學數學教育研究所

電話：05-2263411-1924

發行宗旨

一、本刊為一實務性的數學教育刊物，出版目的如下：

1. 積極發揚台灣數學教育學會之成立宗旨：研究、發展、推廣數學教育，使台灣學生快樂學好數學。
2. 提升數學教師教學品質、數學教育研究品質及促進數學教學策略與方法之交流。
3. 探討數學教育的學術理論與實務現況，以促進理論與實務之結合，進一步提升數學教學之內涵。
4. 提供數學教育課程、教材與教法等實務經驗，包括數學遊戲、DIY 教具之分享，以供未來之教學與研究參考之用。
5. 針對多數學生特定迷思概念之教學引導，如學生易有的錯誤型態及如何釐清觀念等。
6. 介紹國內外數學教育現況。

二、本刊內容以充實高中、國中與小學數學教學、課程與教材為主，以提供所有關心數學教育人士之教學資源與參考依據。

三、本期刊以季刊方式（3 個月一期，一年共 4 期）發行，分別於每一年的 3、6、9、12 月發行。

四、本期刊採電子與紙本方式同時發行。

ISSN 1815-6355

台灣數學教師（電子）期刊
Taiwan Journal of Mathematics Teachers

第 30 期

2012 年 06 月

台灣數學教師（電子）期刊

目錄

第 30 期　　　　　　　　　　2012 年 06 月

ISSN 1815-6355

國小學生數列作業一般化策略運用之研究

陳嘉皇

崑山科技大學　通識教育中心

摘要

本研究利用數字板設計數列,用以探索 33 位國小 6 年級學生一般化策略運用的表現，作業內容包含辨識數字關係、尋找樣式組合、一般化解題和擴展、臆測等活動。資料分兩部分分析，量化資料針對學生產出之策略予以類型分析與應用人次、百分比比較；質性資料則深入分析學生採用此策略之理由。研究發現：學生會運用基礎數論特徵，說明數列關係；能採取循環策略組合有效的樣式進行解題；對數列中的未知數會採用多元策略解題,並利用逆算法求解;利用先前建立的樣式規則擴展至其他情境，正確的進行臆測。研究建議：教師應促進學生一般化活動中樣式辨識與代數推理的連結，激發有效樣式的產出；加強學生樣式的形式與解題方法之間的轉化，協助數學概念建立；強化學生符號的思考與運用，促進代數推理能力，以協助學生解決樣式規則擴展和臆測歷程產生的樣式辨識錯誤、執著於數字運算而忽略其他有效解題樣式等問題。

關鍵字詞：解題、數列、一般化、臆測

通訊作者：陳嘉皇　chenchai1109@yahoo.com.tw

壹、緒論

許多學者(Carpenter, Franke, & Levi, 2003；Kaput, 1999；Kieran, 2004；Mason, 1996)認為一般化指的是不同數學概念與表徵之間關係的推理、探究與檢驗。因此，數學教育的核心任務應在於喚醒學生對數學一般化本質的覺知，促使學生運用數學模式表達數量關係，使用代數符號呈現數學結構，以進一步理解樣式及函數。數學一般化若能透過特殊案例的分析，進行系統組織、臆測和歸納，將樣式裡的規則抽離出來，呈現結構知識並轉化物件之間的關係，且能表達和論證一般化，不但能提供學生思考路徑及發現規則等實質效益，還能促進解題能力與技巧的發展(Blanton & Kaput, 2005)。

實施一般化活動對學生數學概念的建構和發展非常重要，美國數學教師學會(National Council of Teachers of Mathematics〔NCTM〕, 1989)之《Curriculum and evaluation standards for school mathematics》主張數學課程的教導，需包含能促進學生參與樣式、關係與函數理解的活動。教育部(2003)也宣稱六年級學生應能利用數量關係，列出適當的算式，進行解題，並檢驗答案的合理性。然而研究發現從算術轉換至代數推理的一般化歷程，已成為許多學生困難所在(Carpenter, Franke, & Levi, 2003；Kaput, 1999；Kieran, 2004；Mason, 1996)，包括缺乏描述關係所需的合適語言、運用錯誤策略描述一般化的趨勢，無法利用空間知覺推理樣式規則，也無法將情境的數字與樣式做連結。這些困難若持續下去，將來會造成學生偏向重視運算結果，而忽略一般化步驟的規律，進而阻礙推理能力的擴展。

檢驗樣式一般化的研究發現，學生雖然可以辨識樣式的變化，但無法獲得有用的代數式或利用一般化擴展至其他樣式(Blanton & Kaput, 2002; English & Warren, 1995; Lee, 1996)，一些研究也指出：由於學生解題常傾向循環而非函數的關係，因此在一般化的擴展和應用表現就產生障礙(李美蓮，2003；李佩玟，2004；陳嘉皇，2007，2010；Schliemann, Carraher., & Brizuela, 2007)。學生一般化表現產生的問題，

一方面出於實務現場教師教學方式的影響，雖然算術為小學課程的核心，教師仍以計算技巧的熟練及精算為主，較少著墨於關係思考與一般化能力的培養，以致於學生在代數推理的表現較不顯著；另方面顯示教師對一般化知識和技巧的缺乏，無法將合適的素材與策略應用於教學實務上，指導提升學生一般化歸納推理的策略和技巧。一般化是項重要的能力，是數學學習的基石，但對小學師生而言，是屬於一新的且不熟悉的議題，要讓一般化活動能在小學課程扎根，順利進行教學，勢必要提升教師在此方面的知識、概念與能力。

「數與計算」是小學數學課程教學的重點，學生藉由算術經驗與技巧解決面對的問題。因此，要理解與促進學生一般化能力，可藉由提供數字樣式(numerical pattern)的活動，引導探索、推理、歸納問題中的數學概念，藉由樣式變化的規則推演算式並應用解題。數字板(尤其是百格板，Hundred chart)是小學課室裡常用的教學工具，教師用他來教導十進位、乘法或具餘數之除法的數學概念。數字板可提供學生利用視覺辨識、比較與推理，歸納數學結構，並以數列的單位關係導出樣式規則，能以代數式解釋其關係，所以，數字板也是明瞭與建構樣式一般化的利器。樣式是數學的核心，學生組織與發展樣式的能力與他是否能運用數學推理的能力息息相關(White, Alexander & Daugherty, 1998)，數字板具有重複樣式與數字樣式的特徵，足以激發學生探索建構樣式規則，提供研究者與教師對其在一般化歷程解題策略與思考方法的理解。基於上述理由，本研究藉由數字板設計數列問題，探究六年級學生一般化的表現，明瞭其在一般化歷程中，會運用何種策略進行解題，其模式為何？進而將研究發現提供未來代數推理教學與課程設計參考。本研究目的如下：

一、探索學生辨識數列關係的策略，以明瞭一般化教學的方向。

二、探討學生發現有效樣式運作的策略，做為指導一般化課程設計之參考。

三、探討學生數列解題的策略？以提升學生一般化表現成就。

四、探討學生一般化擴展臆測至不同情境的表現，提供改善教學實施之依據。

貳、文獻探討

一、一般化的定義與活動設計

代數常被視為是「一般化的算術」，因此可在數字樣式裡透過算術一般化的概念而洞察代數概念的本質。一般化是什麼？Dreyfus(1991)認為是：對特殊案例進行推理或化約，辨識其間的共通性，並正確的加以擴展。Kaput(1999)則將一般化定義：對數學問題加以推理與溝通並擴展可能的範圍，能明確辨識與說明不同樣式的共通性，轉移推理與溝通至其他樣式或情境。以 Kaput(1999)的觀點來說，一般化與以下活動相互連結：(1)辨識不同例證之間的共通性，(2)擴展推理，以超越原初的範圍，或是(3)從特殊的例證中衍生出較廣泛的結果。從上述定義可以理解：學生進行一般化，需能正確的辨識問題變項的意義，有效運用合宜的策略進行推理，歸納問題的規則或結構的方式呈現關係。所以，一般化可視為是規則的創造，類似歸納的觀念，能描述成物件共通性的確認；一般化也可視為是演繹的歷程，擴展某人的推理。不管是規則的創造，或推理的擴展，這些表現都與數學概念的抽離歷程有關。

Lee (1996)宣稱：如果想促進學生正確的一般化，首要之務，應探索他們如何洞察與理解樣式。因此，小學實施樣式一般化教學，目的應協助學生發展推理、歸納的能力，並採用有意義與正確的方法表達一般化。基本的樣式作業指的是能讓學生參與有意義和多樣化的一般化活動，此種活動能組合學生的知覺和符號推論的能力，以便建立和論證合理與有用的代數結構，並能在公理的形式下獲得確認(Lee, 1996)。Shipley (1993)認為一般化的進行應包含兩項作業：(1)組合：從線索中導引出公式，即便線索不完整仍可提供合理範圍的項目，藉由一些方式而彼此組合；(2)外推：採用檢測將推論的步驟投射到其他的要素上，並使其連結。從 Shipley 的觀點可以理解：學生要從有限、不完整類型之樣式進行一般化，組合和推理的知識扮演著非常重要的角色。從組合的歷程來看，有意義的樣式應該是種具有順序結構的物件，學生可針對作業物件或項次之間的一致性關係，促進執行時採用一種做數學的態度，完成關係的連結與擴充。在外推部分，由於樣式結構的形成

是種主觀建構的活動，學生必須明白如何將關係的知覺與對符號推論加以有效的組合，說明樣式結構的變化，應用到已知或未知的項次。

研究發現，要讓學生發展有意義的推理步驟，引導一般化知識的建構，須有正確且可執行的一般化作業，因為這些作業與數學抽離等議題緊密連結，可協助產出組合與推理的行為，化約一般化所需的時間及能量(Dreyfus, 1991)。Rivera (2010)認為有意義的一般化活動包含兩項交互作用：(1)對物件推理和化約，實際的驗證樣式各項次的變項，包含使用代數式，如不同的計數與分離樣式中部分物件的方法；(2)符號化的行動，包含對樣式形式的轉化。Rivera 認為，當學生探索合理的規則時，可同時說明與採用已知項次所具備的知識，對不完整的未知項次加以建構。亦即學生需針對所給予的樣式，提供假設性的解釋，包含在擴展項次的關係時，能對樣式中相關要素辨識、關係組合、樣式類型的推理，進而將歸納產出之規則引導至進一步的確信。Rivera 提出的一般化交互作用歷程，事實上，亦如 Lee 宣稱的一般化重點，即應組合學生的知覺和符號推論的能力，才能建立和論證合理與有用的代數結構。因此，完整的一般化作業，應包含樣式要素的知覺、推理、關係組合、符號表徵與解題等活動，並讓其解釋所以然。

為配合上述論點的要求，本研究採取學生經驗熟悉且常接觸的數字板，設計相關作業，做為探索學生一般化表現的工具，期盼能透過其所具有的數字樣式特質，探索學生是否能對樣式要素進行辨認，具體化產出規則，解釋問題結構的關係，並將這些規則予以臆測，擴展應用至更廣泛的範例上，協助引導學生從算術至代數推理平順的轉化。

二、數列樣式之一般化研究

樣式是數學的核心，是數學知識的基礎，所以數學常被指稱為樣式的科學(Resnick, 1997)。數學家常以觀察樣式、臆測、檢驗、討論、言語表述、及一般化樣式描述「做數學」的意涵。例如，教育部(2003)頒佈的《國民中小學九年一貫課程綱要：數學學習領域》之代數能力指標，明示六年級學生能利用常用的數量關係，列出適當的算式，

進行解題並檢驗解的合理性。雖然條例並未明說「樣式」此術語，但可理解的是數量關係的表徵即是具有特定性質的樣式，如此學生才能從觀察樣式的變化與發展，抽離出重要的規則，利用符號表達物件結構的關係，進而臆測、檢驗這些規則，形成重要的數學概念。

在小學的教材裡，算術問題為學生學習的重心，為讓學生明瞭數學問題的關係與結構，設計的問題大多具有基礎數論(elementary number theory)有關「重複樣式」與「數列樣式」的特徵。重複樣式是種具有可辨識的重複單位(Threlfall, 1999)，此樣式具有循環的結構，可以透過小部分的樣式重複應用而產生，例如 A, B, A, B,...的樣式，或是每週的天數，這些重複的單位可當成最小的元素集合，透過連續應用而產出樣式，例如 ABAB ...或 ABABAB ...皆可同時產出重複樣式 ABABAB ...重複的單位皆由 AB 構成。

數列樣式是由數字構成的樣式，其範圍只能侷限於一些具有數值元素的樣式，即此樣式能被轉換至非數字的樣式，但不會喪失原來樣式的一些特徵，例如，樣式 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1 可以轉換成 abcdcba，雖然成了非數字樣式，但仍是運用數字當成個別元素的樣式。而像 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2,...當他轉換成 abaabaaab ...，並未喪失樣式的本質。

重複樣式的作業，可當成教導數學概念一個有用的基礎，將做樣式的行動當成具體與熟悉的經驗，可有意義的推論到新概念的討論(Threlfall, 1999)。小學數學教材對樣式的處理，基本上集中於重複樣式，經驗大多是每週的天數、每月的日數等循環特質的樣式。學生顯示不同的重複樣式作業，包括複製、辨認與表達重複的單位、擴展與外推或填滿空格、轉換與改變成不同的模式、及創造或產出自己的重複樣式(Threlfall, 1999)。而數列樣式操作的過程常包含四種基本的作業：解題與提供規則(非正式或正式的表達產出樣式的要素)、擴展與持續樣式、辨認與決定數列樣式的存在，以及創造和建構自己的數列樣式(Heargreaves, Threlfall, Frobisher, & Shorrocks - Taylor, 1999)。數字板具有重複樣式和數列樣式的特質與數學教育的功能，所以本研究擬透過數列的

設計，探討學生對樣式要素的辨識、有效樣式組合、解題、擴展與臆測等一般化歷程，會採取何種策略因應，並探索其背後隱含的意義。

理解基礎數論概念是認識其他數學領域的基礎。有關基礎數論應用於學生表現的研究，部分是關於證明或解題的數學議題(Lester & Mau, 1993; Martin & Harel, 1989; Movshovitz-Hadar & Hadass, 1991)，部分研究則透過解題探索數字的乘法結構(Ball, 1990; Graeber, Tirosh & Glover, 1989; Greer, 1992)，部分則探索教師對基礎數論概念的理解(Campbell & Zazkis, 2002; Zazkis, 1998; Zazkis & Campbell, 1996a, 1996b)，另外 Olson(1991)建議可利用幾何觀點配合基礎數論探究「最大公因數」(greatest common divisor, gcd)的表現，但沒有探索基礎數論對最大公因數理解的影響。

Rowland、Martyn、Barber 和 Heal (2000)設計 3 個連續數字總合的問題，例如 3＋4＋5＝3×4，8＋9＋10＝3×9 以及 29＋30＋31＝3×30 的問題，要求實習教師歸納這 3 個範例，並寫下文字說明，許多人無法完成，一些則寫下錯誤的解釋如：3 個連續整數加在一起等於前 2 個數字的乘積。Rowland 等人將此種現象稱為窄化視野的效果(tunnel vision effect)，亦即個體常將注意力置於某範例，而忽略其他可以幫助概括的範例所扮演臆測的角色。要改變此缺失，Rowland 等人建議可要求學生依數列順序逐項的吟誦這些等式，促使注意力可集中並發現變化。

關於基礎數論應用於小學學生數學表現的探討，以往的研究大多集中在線性數列結構(數線)，要求學生觀察數列數字的變化，找尋規則，進而運用四則運算解題，求出未知數(項次)的答案、或計算出算術集(Arithmetic progression, A.P)的和，然而對抽離數列規則，轉化成符號或代數式表達結構關係之一般化要求則較不明確，致使學生從算術轉化至代數的歷程產生困難(李美蓮，2003；李佩玟，2004；陳嘉皇，2007，2010；Tall, 1992)。Tall的研究發現，提供學生連續數字的數列作業，他們能覺察到數列順序的律動模式及共同的公差，很快的計算連續項次的數字，使用的策略只是將數列當成循環的樣式處理，無法賦予數列代數公式，使得算術一般化的效用受到阻礙，因此建

議一般化的活動作業應同時呈現循環、代數公式和可迭代的其他方法。

本研究採用之數列模式，主要參考 Rowland、Martyn、Barber 和 Heal (2000)設計 3 個連續數字總合的問題，利用數字板空間幾何樣式的特性，結合基礎基礎數論，創發不同數列作業，以激發學生數學推理及一般化能力的展現，從中理解學生採用何種策略解題，其思考方式為何？

參、研究方法與步驟

本研究採用作業調查法方式進行學生一般化表現資料的蒐集，採取個別測驗的方式實施。首先提供研究者自編之「數字樣式一般化作業」予學生作答，根據學生作業表現之正確與否及解題運用的方式，對各作業解題運用的策略特徵與行為，歸納策略類型，再統計分析各策略運用之人次；作答歷程並配合每項作業完成後之訪談，以深入理解學生採用此策略之理由。

一、研究樣本

參與研究的學生來自於南部某國小 6 年級同一班級 33 位學生。參與研究班級的教師教學採取問題思考法，常詰問學生要求對問題線索思索，並對同儕的解答加以辯論與解釋，教師也常在課後提供補充數學教材訓練學生解題探究，故學生勇於接受問題挑戰。決定採用該班學生參與研究的原因，一方面考量一般化作業對學生而言較不熟悉，較困難且會卻步，為尋找勇於接受挑戰，了解學生成功的解題表現，故以該班學生為樣本；另方面，這些學生習慣在課室表現與說明解題策略與方法，協助提供其他學生作答參考，因此擬藉由其對問題的解題表現，深入探究學生對數列作業的反應。參與研究之學生在 5 年級下學期時已學過「未知數」、「找規律」等單元活動，本研究進行前，亦已學過「列式與解題」。

二、研究工具

本研究以設計之數字板數列樣式做為研究工具，此工具是參考 Rowland、Martyn、 Barber 和 Heal (2000)設計 3 個連續數字總合的問題，利用數字板空間幾何樣式的特性，結合基礎數論擴展而成，包含 4 類作業(如附件 1)。

第 1 項作業為「辨識數列總和之數字關係」，提供 4 種 3 個數字連接之數列(橫、直、左斜、右斜)，要求學生描述數列總和的數字關係，目的在了解學生是否明白不同模式構成的數列具有不同的結構關係，從中理解學生採用何種策略表達這些數字的關係，並藉由這些類型的策略做為基礎，進一步探索與其他一般化作業的關係；

第 2 項作業為「發現數列總和之有效樣式」，有 4 種類型數列(橫、直、左斜、右斜)，要求學生以快速的方式得出數列之數字總和，並解釋其所用的策略？此作業在於了解學生面對複雜繁瑣的數字總和計算時，能否從中發現有效之樣式進行解題，並藉由說明了解其發現樣式所用之策略。

第 3 項作業為「一般化解題」，安排數列具 3 個數字總和可以形成「3×中間數字值」的樣式 7 種，樣式裡隱藏某未知數，要求學生利用其所建立的樣式規則解題，並說明解題所用的策略，此作業的目的在於驗證學生是否明白且可運用其所發現的樣式規則進行解題。學生可用符號方式對策略進行說明，因為符號扮演塑造與描述數列結構關係的角色(Gravemeijer, 2004)，可以支持學生探究正式數學，促進做數學的意義。

第 4 項作業為「擴展與臆測」，將數列數字個數擴增為 5 個，分為兩部分進行，一為擴展作業，提供 4 種數列(橫、直、垂直交叉、斜線交叉)，要求學生利用有效的策略得出其總和；另一為臆測作業，提供數字任意排列之數列，要求學生利用先前發現的策略進行臆測，並探討是否適用。本作業在於了解學生是否能將先前發現之樣式概念予以擴展，並臆測此規則是否可應用於任何數列情境。

調查活動採取個別作業方式進行，為免除學生急於利用紙筆運算，並能充分思考解題步驟與策略，故逐次依相關問題呈現給學生作答。為鼓勵學生產出有效策略，研究者透過引導詢問「想一想是否有其他方法可用！」激勵學生思考，因此，學生對於每一試題可提供多種的解題策略。學生所採取的解題策略可藉由其在 4 種作業產出的

語文說明或動作表徵加以推測與解釋，並將具相似特徵的策略歸為一類，賦予名稱。以作業一、辨識數列關係為例，學生對線性數列可指出或說明各項次的公差，則此方法稱為「循環策略」；以數字在數字板所處空間位置說明數字關係，則可歸類為「單位關係策略」；若將數列上下數字加減 1，轉變公差的關係，說明數字關係，則歸類為「轉換策略」。

作業編製完成後，進行信、效度的考驗。效度方面，研究者將試題提供 2 位國小教師審查進行專家效度考驗，在第 1 項辨識樣式要素作業方面，教師要求能將各組數列給予不同顏色加以區別，以讓學生容易判別；在第 2 項發現有效樣式作業方面，希望試題能平均分佈數字板各處，勿集中於大的數字範圍，以減少學生作答耗費時間與認知上的負荷；在第 4 項擴展與臆測作業方面亦建議試題能提供非線性的數列 (多種組合方式)，以考驗學生是否理解。信度方面，試題經 241 位六年級學生預測後，依據其作答正確比例計算並經統計分析，總共抽取出四項作業因素，其信度係數之 Cronbach α 值分別為.94、.81、.79、.75，總體作業之 α 值為.87。各作業因素所形成之分量表信度係數介於.75 至.94 之間，皆在編製作業可接受之範圍內。

三、資料分析

蒐集之資料由研究者與 2 位國小教師先行判讀是否正確，然後再行策略的分類。由於設計的數字板問題，是以基礎數論之加法問題為主，目的在於探索學生一般化歷程產出之策略及其思考模式，因此編碼的基礎環繞在以數字加法轉換至乘法結構(N 個數字其總和等於 N×中間數字 C)的連續體上，也因為數字板隱藏的樣式可透過視覺化策略引出，因此學生作業結果的分析，可透過其思考的說明和解題策略的特徵予以歸類。關於學生各活動表現的分析，分為兩部分說明，一以描述統計方式計數各策略或解釋類型之人次與百分比，以瞭解學生對各作業最常使用的解題方法與思考模式。因學生在單一試題解題上可提供多種策略，因此其策略比例的分析，採使用人數除以總人數方式計算；另則以質性方式深入探討學生採用策略背後所蘊含的意義。資料採取

4 碼編碼方式進行分析，第 1 碼(A、B、C、D、) 代表一般化的 4 種作業；第 2 碼(T1、T2、T3、T4…)表示作業各試題編號；第 3 碼(a、b、c、d...)表示學生在各作業產出的解題策略或思考模式；第 4 碼(1、2、3、4⋯) 則表示受試學生之編號。研究者與 2 位教師依據蒐集的學生資料進行編碼，內部一致性為.91，關於不一致部分則透過觀看相關的影帶與學生作業表現的資料再行確認。

為使研究具有良好之信、效度，在信度上採用兩種策略，(1)資料的真實性：對於資料的呈現盡量以原始記錄及訪談記錄為依據，詳實的轉譯成逐字稿；(2)與研究人員討論修正：研究者於研究過程中與陳教授、2 位教師進行討論修正，以避免主觀偏見。效度的提升則採取(1)研究人員之三角檢定：研究過程中及資料蒐集後之轉譯分析，研究者與其他成員持續針對資料進行分析討論，以提供研究者不同面向之思考，減低研究者疏失及主觀偏見，並取得共識；(2)資料來源的三角校正：研究者運用回溯法獲得之訪談轉譯稿資料、錄影(音)、學生作業表現、教師現場記錄進行交叉比較與檢驗。目的希冀能運用豐富及多元之資料檢驗學生一般化的表現。

四、研究步驟

本研究參考文獻，編製調查工具，經過預試、修正之後，於 2009 年 12 月至 2010 年 6 月期間實施。調查採用個別作業方式，以學生充分完成作答考量，作業時間約為 40 至 50 分鐘，作業的歷程皆予以錄影(音)，以做資料分析之用。在施測之前，先說明作業目的、作答方式，要求學生思考，做出最佳判斷及提供合適之解題策略，每題都須作答，不能遺漏。每項作業一完成，研究者即針對作業內容的反應，要求學生立刻做說明，學生可運用動作、言語、繪畫等各種表徵解釋與表達其策略應用的理由。俟作業與訪談結束，即整理相關資料進行分類、統計，繕寫研究結果。

肆、研究結果與發現

學生一般化各作業表現結果，依辨識數列關係、發現有效樣式、一般化解題、擴展和臆測等分析資料呈現，進一步討論學生數字樣式一般化表現的情形。

一、辨識數列關係之策略分析

學生辨識數列關係採用之策略與人次分佈如表 1、2 所示。

表 1：學生辨識數列關係採用之策略

解釋關係之策略	說　明
a.循環策略	以公差說明數字關係
b.空間關係策略	以數字在數字板所處空間位置說明數字關係
c.轉換策略	將數列數字加減 1，說明數字關係

表 2：學生辨識數列關係各試題採用策略之人數統計

試題／策略類型	運用人次			
	1(橫式數列)	2(左斜數列)	3(右斜數列)	4(直式數列)
a.循環策略	30(90.9%)	26(78.8%)	24(72.7%)	30(90.9%)
b.轉換策略	18(54.5%)	3(9.1%)	3(9.1%)	18(54.5%)
c.空間關係策略	0	3(9.1%)	3(9.1%)	0

從資料得知，對於數字板上不同數列的數字關係，學生運用了 3 種策略解釋數字之間的關係，其中以循環策略使用的人次最多，因為利用經驗將數字進行加減，就能發現數列的公差，而解釋其間的規則與關係。例如：

79 比 88 少 9，88 比 97 少 9，79＜88＜97；95 比 84 多 11，84 比 73 多 11，95＞84＞73。【AT3a09】

此種解釋最常出現在橫式與直式的數列(試題 1、4)，因為透過加減運算或視覺比對，就能發現相同的規則而解釋數字板數字的關係。較特別的是，對斜式數列數字關

係的解釋，除利用循環策略外，有 3 位學生對試題 2、3 採用空間關係的策略說明數字關係，他們將數字板數字所處之空間關係「定錨」，明白同列越靠右邊者數字越大，同行而跨列的數字則每列相差 10；採轉換策略說明數字間的關係，則發現呈現的斜線數列與直(橫)式數列的數字有所關聯(加減 10 或 1)，並與數字板的單位做連結，得出斜線數列的規則(左上右下會多 11，右上左下會多 9)。原案如下：

> *以 73、84、95 來說，是以 10 為單位的數字板，每一行上下的數之間都差 10(74、84、94)，74 減 1 就是 73，與 84 就差 11，95 比 94 多 1，比 84 多 11，這 3 個數都是差 11。*【AT2b03，AT2b18，AT2b019】

由學生的反應顯示，對於研究提供之數列設計，大部分學生會利用視覺觀察數字之間差異的特質，瞭解數列中各數字彼此的關係，找出數字之間的公差作為數列的要素，利用循環策略協助其辨識與解釋數列的關係。3 位學生則擴展循環策略，將情境中相關要素，例如斜線數列與線性數列之間的變化關係(多與不足)，轉換並建構成解題的規則，解釋數列中數字的關係。

二、發現有效樣式之策略分析

有關學生發現有效樣式採用之策略與各試題分佈之人次如表 3、4 所示。

表 3：學生發現有效樣式使用的一般化策略

樣式的類型		說　　明
循環策略	a.S×3＋D×3	S 為數列中最小的數字，D 為各項次的公差 (例如 73、82、91，S 為 73，D 為 9)，總數即為 3S＋3D
	b.L×3－D×3	L 為數列中最大的數字，D 為各項次的公差(例如：73、82、91，L 為 91，D 為 9)，總數即為 3L－3D
轉換策略	c.C×3	C 為數列中間的數字，因其前後或上下數字的公差可互補，和為 3 個 C 值
	d. A＋B＋C－3D	以直式數列後的 3 個數字為基準 A、B、C，數列內的數字分別較其少 1 公差，所以數列數字的和為 A＋B＋C 再－3D(例如：69、79、89，A 為 70、B 為 80、C 為 90)。

表 4：學生發現有效樣式各試題採用策略之人數統計

策略類型＼試題	運用人次			
	1(右斜數列)	2(左斜數列)	3(橫式數列)	4(直式數列)
a. 3S＋3D	21(63.6%)	24(72.7%)	26(78.8%)	26(78.8%)
b. 3S－3D	0	0	3	0
c. C×3	13(39.4%)	13(39.4%)	18(54.5%)	15(45.5%)
d. A＋B＋C－3D	0	0	3(9.1%)	3(9.1%)

從上述資料得知，學生發現的樣式類型會隨著數列的空間結構而有所不同，排除運用數字連續加法的策略外，大部分學生皆可發現有效的樣式進行解題。其中發現的樣式以 a 策略為最多，此種類型是以公差之循環策略做基礎，發現數字之間的樣式關係後，即將數列中最小的數字(S)做為基準，發現第 2 個數字與 S 有 1 個公差 (1D)，第 3 個數字與 S 有 2 個公差(2D)，因此以 S×3＋D×3 的樣式呈現數列關係。有 3 位學生則採取 b 策略以 3S－3D 的樣式解題，b 策略與 a 策略相似，但基準數是以數列中最大的數字為主。其次，發現有效的樣式模式為 C×3 此類型，學生將循環策略加以轉換，觀察數字空間位置與公差的關係，發現數字和可以中間數字(C)做基準，其他 2 個數字與 C 的公差在加總時可相互抵銷，因此可採用 3×C 的樣式處理。原案如下：

我發現 73 比 82 少 9，91 比 82 多 9，73＋82＋91 可以變成(82－9)＋82＋(82＋9)，－9 和＋9 相互抵銷變成 0，和是 3 個 82。【BT1c03】

69 比 79 少 10，89 比 79 多 10，一個減 10，一個加 10，69 和 89 這 2 個數合起來等於 2 個 79，69＋79＋89＝79×3。【BT4c10】

另有 3 名學生發現可利用 d 策略的樣式計算數字總和，此種思考是以「位置轉換策略」做為基礎，特別是數列數字接近 10 時，以鄰近位置之 10 的數字作為基礎，然後再將數列數字與其公差加總起來，獲得數字總和。

97、98、99 都接近 100，我把他們想成都是 100，97 與 100 相差 3，98 與 100 相差 2，99 與 100 相差 1，97＋98＋99 可想成是 3 個 100 然後減 3、減 2 再減掉 1。【BT3d03，BT3d18，BT3d19】

69 比 70 少 1，79 比 80 少 1，89 比 90 少 1，69、79、89 總和等於(70－1)＋(80－1)＋(90－1)，等於 70＋80＋90－3。【BT4c03，BT4c18，BT4c19】

由於研究要求學生不能使用連加的方式計算數字總和，因此迫使學生放棄舊有經驗，嘗試新的策略解題。學生透過觀察數列空間位置的特質與數值之間的關係，找出合適之數字當成基準物件，發現數字之間的公差具有倍數關係或可相互抵銷運算，可簡化加法繁瑣的流程，正確解題。從學生作業表現顯示，要進一步歸納出有效樣式進行解題，除理解數列的關係(循環策略)，仍須將決定有效樣式相關重要的元素抽離出來(例如公差具倍數關係、可相互抵銷)，並加以應用。Lee (199)認為學生對於發現樣式並非沒有能力，但阻礙他們成功解題的原因，在於沒有發現代數有用的樣式此能力。本研究發現部分學生針對提供的作業，無法將數字的公差視為樣式重要的元素，視為數列結構中一項重要因子，因此無法利用他歸結出有效的樣式進而解題。但不少學生可深化循環的策略成轉換策略，簡化問題結構(例如利用 3×C)，更易解決數字樣式問題。

三、樣式一般化解題之策略分析

學生採用樣式規則解題的策略與各試題分佈之人次如表 5、6 所示。

表 5：學生一般化解題使用之策略

解題所用策略	說　　　明
a.A±D	將數列中已知數字 A，加減數字的公差 D，做為探索未知數的依據(例如數列 35,36,X, X＝36＋1)
b.A±D/2	以數列中已知數字 A，加減數列上下或前後兩個數字之公差 D，再除 2，即可得到中間的未知數(例如數列 35,X,49, X＝(49-35)/2＋35)
c.S÷N	S(總和)÷N(數字個數)即可得到數列中間的未知數

表 6：學生一般化解題各試題採用策略之人數統計

策略類型＼試題	運用人次						
	試題 1	試題 2	試題 3	試題 4	試題 5	試題 6	試題 7
a.A±D	32(97.0%)	0	0	30(90.9%)	31(93.9%)	26(78.8%)	24(72.7%)
b.A±D/2	0	10(30.3%)	8(24.2%)	0	0	0	0
c.S÷N	0	18(54.5%)	18(54.5%)	0	0	0	0

總結上述資料得知，學生運用的一般化解題策略，會隨著未知數在數列的位置不同而有所差異。未知數若在數列前後的位置，學生較易使用循環策略，以 A±D 的策略，利用已知數加減公差即可解題。例如：

和是 270，中間的數是 90，97 比 90 多 7，這個空格比 90 少 7，是 83，加 7 與減 7 等於 0，3 個數等於 93×3＝270。【CT5a01】

73 比 67 多 6，空格的數是 79，79 比 73 多 6，這個多的與這個少的合起來可以抵銷，73×3 等於 219。【CT7a11】

這是由左上向右下斜的數列，空格是 82－11＝71，82 的上面是 72，空格在 72 的左邊，也就是 71。【CT4a03】

73＋6＝79 是空格的答案，67 的旁邊是 66，66 和 73 相差 7，空格的答案是 79，73 下面的數字是 80，73＋7 是 80，80 的左邊也就是 79。【CT7a19】

由資料亦知，數列的排列方式會影響學生解題的正確性，如試題 6、7 為斜式數列，學生會利用循環策略進行運算，但在計算過程則產生錯誤。另外未知數處於中間位置的數列，參與的學生，有些會利用 A±D/2 的策略解題，他們發現數字之間「等差」與「單位關係」，前後兩數字與中間數字的公差相同，且前後數字公差加總可以相互抵銷的特質，將他們的差數除以 2(策略 b)，獲得 3 個數字間的公差關係，而得到中間數字的值。例如：

61 和 75 相差 14，這是以 7 為單位的 3 連子，這個數是 68，因為 61 的下面就是 68，68 的下面就是 75。【CT3b28】

75 和 61 相差 14，每個數都相差 7，14÷2＝7，這邊的數會比中間多 7，這邊會比他少 7，兩個加起來等於 0，中間的數字是 68。【CT3b03】

另外資料也顯示一些學生(18 位)已瞭解連續數字的數列，可藉由 C×3＝總和的規則解題，因此可利用 C×3＝總和，逆算求得中間數字 C 的值。例如

這 3 個數的和是 231，把他除以 3，就是中間的數，67 比 77 少 10，87 比 77 多 10，加起來是 77×3＝231。【CT2c18】
連續數字可用中間的數乘以有幾個就是答案，中間的數就用全部除以個數就可以得到。【CT3b19】

上述結果顯示，對於應用樣式規則進行數列未知數解題，最基本的能力需能發現並將數列有關的結構因素予以連結，例如構成數列的循環單位、數字間的公差等特徵，將能順利解題；但若能進一步推想樣式規則之間的轉化，例如洞察出連續數字(奇數)的數列，中間的數字可由 C×3＝總和逆算得出，對於將樣式規則擴展臆測至其他樣式，學習數學一般化將更容易。

四、一般化擴展與臆測之策略分析

關於學生是否能將前述作業發現的一般化策略，擴展與臆測到其他情境，其表現從兩個部分加以說明。

(一)一般化策略擴展表現

關於學生如何運用先前習得的策略擴展應用到 5 連子數列總和，所用之策略與運用人次如表 7、8 所示：

表 7：學生一般化擴展採用之策略

所用策略	說　　　　明
a.N×5 策略	將公差相互抵銷，以中間數字乘以 5 表示數列結果
b. A±D 策略	以數列前後數字為基礎，加上其公差得出結果
c.轉換策略	將數列分成 2 個 3 連續數列，分別加上數列中之公差得出結果

表 8：學生一般化擴展各試題採用策略之人數統計

策略類型＼試題	運用人次			
	1(橫式數列)	2(直式數列)	3(直式交叉)	4(橫式交叉)
a. C×5 策略	18(54.5%)	20(60.6%)	20(60.6%)	16(48.5%)
b. A±D 策略	26(78.8%)	26(78.8%)	12(36.4%)	10(30.3%)
c.轉換策略	0	0	12(36.4%)	11(33.3%)

從上述資料得知，大多數學生經由前項一般化作業的練習與關係檢驗，至此問題時，會利用先前嘗試與比對的策略包含循環策略、轉換策略及「C×5」策略，擴展到 5 連子的解題。例如：

> *這 5 個數跟前面 3 個連續數一樣，能找到一個中間的數，33 和 53 兩數與 43 都相差 10，加起來後可以抵銷，42、44 與 43 相差 1，加起來後也可以抵銷，和等於 5 個 43，只要 43×5 就可以得到答案。*【DT3c11】

> *38 比 49 少 11，而 60 比 49 多 11，一個多一個少等於 0，而 40 比 49 少 9，58 又比 49 多 9，抵銷變成 0，只要將 49×5 就可以算出來了。*【DT4c14】

另發現數列設計的形式會影響學生解題運用的策略與正確性，雖然循環和 C×5 策略是學生較常使用的策略，然而面對 5 連子交叉數列，由於此種數列設計是兩種具不一樣的公差數列構成，學生需先觀察然後予以分離運算，不能將其視為皆具公差的結構，否則容易造成錯誤。許多學生僅觀察單一數列變化的現象，未和另一數列比對，誤認兩數列具同樣結構，雖獲得正確答案，但一般化的概念錯誤，這有如 Rowland 等

人描述的窄化視野的效果，亦即學生常將注意力置於某範例，而忽略其他可以幫助概括的範例所扮演臆測的角色。例如：

40、49、58 相差 9，都相差 9，用 49×5 就可算出答案。【DT4b31】

33 比 43 少 10，53 比 43 多 10，每個數都比 43 多 10 或少 10，一個多一個少等於 0，這裡可用 43×3 算出答案，這裡也可用 43×3 算出答案。（研究者質疑，交叉的數列每個數字都與中間數差 10）？不對！直的差 10，橫的不是，橫的都差 1。【DT3b14】

一些學生則發現 5 連子的數列是由兩個 3 連子數列交叉構成，雖然其公差不同，但可各自相互抵銷，所以可藉由兩個「C×3」的規則應用轉換策略，簡易快速的得出這些數字總和。

38、49 與 60 和前面的 3 連子一樣，可以用 49×3，40、49 與 58 是另一個 3 連子，也可以用 49×3，全部就是 49×6，這兩個交叉，49 重複 2 次，應該再扣掉 49。【DT4c03】

要求學生解釋「C×個數」的規則是否能應用到任何數列時，參與的學生有 28 位回覆此一般化的規則只能應用於奇數數目的連續數字數列上，因為奇數數目的數列才能看到中間的數字，公差才有「對稱」、互相抵銷的情形產生，偶數的數列則無法應用此規則。原案如下：

奇數數目的數列，可以將中間的數以 A 表示，左邊的數目可用 A－1、A－2、A－3 表示，和 A 相差 1、2、3，而右邊的數用 A＋1、A＋2、A＋3 表示、和中間的 A 也相差 1、2、3，可以相互抵銷，可以運用這個規則算出答案。【DT1a18】

49 是中間的數，38 和 49 的差與 60 和 49 的差可以抵銷，40 和 58 可以抵銷，可用 49×5 的規則算出答案。【DT4b03】

左邊有 1 個數，右邊也應該有 1 個數，上面有 1 個，下面也要有 1 個，一定要對稱才能將他們和中間數的差相互抵銷，也才能用「數字×C」的規則算答案(試題 3)。
【ET3b19】

(二) 一般化策略臆測表現

進一步提供臆測之圖形讓學生檢驗是否能正確的運用「C×5」的規則，其結果如表 9 所示：

表 9：學生應用「C×5」的規則之臆測表現(受試樣本 33 人)

作業	作業 5.1					作業 5.2				
試題	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
正確人數	23	30	29	29	29	29	31	21	24	24
比例(%)	69.7	90.1	87.9	87.9	87.9	87.9	93.9	63.6	72.7	72.7

從表 9 可知，除作業 5.1 之(1)題，與 5.2 之(3)、(4)、(5)等 4 題有較多學生產出錯誤外，其餘試題學生大多能正確臆測與說明。關於錯誤產出的原因，學生大多以圖形空間的視覺效果作為判斷基準，認為圖形具有對稱(尤以線對稱圖形)特徵即可應用「C×5」的規則解題，無視這些對稱的空格是否具有等差可以互補的另一特徵；另外產出錯誤原因在於仍想以算術運算方式，將圖形內之空格填入相關數字進行檢驗，只是無法建構出合適之數列關係，因此透過猜想認定這些圖形可應用樣式規則解題。錯誤的原案說明如下：

5.1 作業的第(1)個圖形可用中間數×5 的方法，這裡可當成中間的數，這裡有 2 格，這邊也有 2 格，可以抵銷。【CT1d02】

第(4)個圖形(作業 5.2)像一架新型的飛機，中間這個像機頭，兩邊是他的機翼，機翼一樣大小而且對稱，可以應用中間數×5 解題。【CT4d16】

第(3)(4)(5)的圖形(作業 5.2)都有一個中間的格子，兩邊的圖形都一樣，而且都是兩個格子，可以應用中間數×5 算出答案。【CT345d17】

中間這一個數字(作業 5.2 第(5)小題)訂為 35，左邊這兩格的數字就是 34 和 44，右邊這兩格就是 36 和 46，左邊和 35 分別少 1 和 10，右邊是多 1 和 10，可以互補，可以利用中間數×5 算出答案。【CT5d15】

只以圖型「對稱」作為正確臆測的條件是不足的，對上述問題正確判斷的學生大多數仍會代入公差或藉由符號算式之說明，做為論證之用，而確定此圖形是否可應用 C×5 的規則解題。

我把中間這個數當成 A 來看(作業 5.2 第(5)小題)，左邊這格是 A－1，右邊這格是 A＋1，這兩格可以互相抵銷，A 下面一格可想成是 A＋10，左邊是 A＋9，右邊是 A＋11，一個＋9，一個＋11，這兩格沒有辦法抵銷，這個圖形不能應用中間數字×5。【Cd03】

中間這格的數字(作業 5.2 第(3)小題)我把他想成是 54，他的上面一格是 44，比 54 少 10，44 的右邊就是 45，他和 54 相差 9，54 的左邊這一格是 53，比 54 少 1，53 下面這一格是 63，比 54 多 9，這個 9 和這個 9 可以抵銷，這裡少 10，這一格少 1，不能抵銷，不能用中間數字×5 的規則。【Cd18】

這(作業 5.2 第(3)小題)是斜的數列，用中間數×5 算出，這 2 個格子一個在上一個在左，他們和中間數的差沒有辦法抵銷，不能用中間數×5 的規則。【Cd19】

這個圖形(作業 5.2 第(4)小題)如果要用中間數×5 的規則，那麼要將下面的兩格移到中間空格的右邊，或將左邊這兩格移到上面來，圖形就會對稱，而且可以互補，因為中間數是 A 的時候，下面空格可以當成 A＋10 和 A＋20，上面的空格就是 A－10 和 A－20，就可以抵銷，變成 5×A。【Cd03】

上述結果顯示，大部分學生可利用先前習得的「C×個數」的樣式規則，擴展該概念並對不同的數列進行臆測，經由驗證、說明而獲得數學概念。少部分學生受限於圖形視覺化和算術經驗的影響仍有所錯誤。研究者認為圖形可提供學生樣式規則視覺化搜尋比較的線索，但要正確解題，仍須有推理與歸納關係的能力協助，才能正確完成一般化的作業。如 Presmeg(1986)的宣稱：只有對圖像線索的知覺是不夠的，這些線索必需被用來當成分析推理的要素，學生呈現出知覺推理的傾向，只能當成在解題初始感知變項發展的一種可能的策略，或當成一種分析方法的補充而已，否則學生就容易掉入 Rowland 等人描述的窄化視野的效果，亦即將注意力置於某範例，而忽略其他可

以幫助概括的範例所扮演臆測的角色。

伍、結論與建議

本研究旨在透過數字板設計的數列問題，探究學生建構數列關係時運用的策略，如何發現有效樣式？如何進行數列解題？以明瞭學生一般化擴展臆測至不同數列情境的表現，提供改善一般化課程與教學設計之參考。根據研究結果，總結如下：

一、學生依數列的特性，採取多種策略說明數字關係，以循環和空間關係策略最常運用

本研究設計之數列是以基礎數論的特徵做為重點，要求學生觀察數列的空間位置特性與數字之間的公差，正確的描述數列關係。研究發現學生能解釋數字之間的關係，且以觀察公差之「循環策略」與「空間關係」策略做為解釋的依據，而提供的特殊數列(斜式)可誘發學生擴展循環策略成轉換策略而解釋數字之間的關係。很明顯的，學生可透過數列的特徵，發現數列重要的變項線索及發展的規則，明確的說明數字在數列結構上的關係，這對於建構一般化能力而言是項重要的基礎，可協助研究者與教師探索學生如何洞察與理解樣式建構的要素，具體的說明數字關係，因此，未來有關代數推理課程與教學設計，可思考利用數字板的數列建構學生一般化學習的材料。

二、大多數學生能依數列結構變化採取多元策略，建構有效樣式進行解題

一般化歷程中一項重要的能力在於能明確辨識與說明不同樣式的共通性(Dreyfus, 1991; Kaput, 1999)，在數列裡，學生要能有效迅速的得出數字總和，較佳的方式就是發現各數字間的公差具有不變數的特徵，可以抽離成為進行加減或倍數的計數單位。研究結果得知學生在發現有效樣式的作業裡，會以數字間的公差做為思考策略，這些公差是不同數列具有的共通性，大部分學生能夠加以辨識和運用，並與原有數字結構

結合成一有效解題的樣式。分析學生有效解題的樣式，其組成的策略可分為「部分結構組合」的循環策略，與「整體結構組合」的轉換策略兩種模式，前者將基準量與公差分開思考，分別以基準量與公差的倍數計算數字整和；後者則推演出連續奇數的數列可以中間數字做為基準量，將各數字的共同差異量加以抵銷轉化後，以基準量的倍數進行計數。研究發現，快速解決數字和之有效樣式產出，知覺數列數字之公差呈現規則的變化外，仍需配合進一步的推理與歸納，將公差與數字結構加以組合，才能推演出有效的解題樣式。亦即知覺與辨識數列中各數字之間具有等差此不變數，仍需將他化約成解題有效的結構關係。

辨認樣式中的公差並將他化約組合成有效之關係結構，對學生而言並非簡單之事，教師可利用數字版的數列設計，鼓勵與誘發學生對產出的樣式關係加以連結，從不同的觀點激發學生進行一般化的推理。

三、學生對數列中的未知數會採用多元策略解題，並利用逆算法求解

研究發現學生在未知數求解問題上，大多能利用數字間公差之循環策略進行數列未知數的解題，並獲得正確答案。在解題過程中，學生發現各數字間的公差為一不變數，利用此不變數的特質對已知數字進行運算，並對其他數列進行策略的檢測、推論，以驗證答案的正確與否。另學生發現透過循環策的轉換可將數列中間數字訂為基準量，其前後數字與該基準量的差皆為 1 單位的公差，可以抵銷，而形成數字個數×中間數值的樣式規則，若要求數列中的未知數，利用此規則逆算後，再加減公差即可得到答案。

研究亦發現，學生對數列所建立的數字關係與有效樣式的結構組合，會影響其對數列中未知數的解題策略，例如運用循環策略組合樣式的學生，求未知數答案時亦多採取基準量加減公差的方式解題，而運用公差互補或位置轉換策略的學生，則容易傾向思考抵銷或位置轉換的方式解題。此現象與 Rivera(2010)的研究發現一致，即學生

於一般化初始階段對提供之樣式採取的辨識與知覺方式，會影響其一般化擴展與解題採取的策略。因此，在教導學生一般化的作業時，如何激發學生產出有效的樣式，以利後續一般化擴展和驗證的進行，實為一般化教學重要的關鍵。

四、學生會擴展建立的樣式規則至其他情境，並正確的進行臆測

從3連子連續數列轉變至5連子或不同排列形狀的樣式，是種自然的擴展，雖然樣式相似，但需包含更多的計數與代數思考策略才能成功。本研究發現：大部分學生皆能利用先前3連子作業習得的樣式規則：連續數字的數列，其總和可用數字個數×中間值之公式得出而進行擴展與臆測，並得到正確的結果。這些學生從先前範例概括建立的數學概念，透過思考論證而建立樣式規則，並採取推演的形式與合適的方法，表達一般化擴展和類推的過程，宛如Blanton和Kaput (2005)所描述的「代數推理」過程。由於本研究提供的數列，讓存在於數字與空間樣式裡的關係可運用文字、動作、圖形和符號呈現，因此，學生可創造與解釋樣式一般化，並運用這些關係作臆測，獲得對產出的樣式規則驗證的機會。然而數列特徵產出Rowland等人描述的窄化視野的效果，亦即將注意力置於某範例，而忽略其他可以幫助概括的範例所扮演臆測的角色，亦有所存在，因此學生在數字樣式一般化活動的歷程，樣式要素的辨識與分析需同時結合，才能精進學生一般化解題策略的產出，並獲得正確答案。

本研究透過數字板數列的設計，發現學生採用多元策略進行數字關係的辨識，形成有效之樣式並進行解題，並能將發現的一般化規則擴展應用到不同數列的臆測。運用數列方式探索一般化有其優點存在，其採用的數字不僅能適用於國小階段整數的運算，還可以用於連續性的函數關係，且可擴展到更大的數值情境。在教室裡運用數字板的數列作業，對於提升學生解題與發展豐富的代數推理和數學概念的理解而言，是有價值的。探索學生這些作業策略的表現，可提供分析樣式一般化教學的要點，用來提升代數推理課程的設計與研發。針對研究發現：學生對於樣式規則擴展和臆測歷程

產生的樣式辨識錯誤、執著於數字運算而忽略其他有效解題樣式等問題，提出下列建議，以提供日後研究設計與教師教學改善的參考。

一、加強一般化活動樣式辨識與代數推理的連結，激發有效樣式的產出

一般化教學初始，教師可將重點放在視覺化策略，配合數字關係的辨識與數字計數的方法，與期待能觀察到數學方式(有效樣式)做結合，此種手段－目的方法之間的引導，可指引學生更多洞察的方法出現，利於一般化的擴展。

二、擴展一般化歷程數列形式與解題方法間的轉化，協助數學概念建立

由於注意與觀察樣式的行動是複雜的，開始時並非數學的，所以有的學生會採取方便實務的解題策略，誤認數學總是數字的操弄，忽略其他解題線索，形成所謂窄化視野的效果。如何發展對樣式視覺理解的能力，首先，可提供多元樣式的數列問題，鼓勵學生洞察樣式動態中固定變化的數值(不變數)，並探索這些數值可能帶來解題的效益；其次，比較相同的樣式所產出不同算式或解題策略相異之處，分析與說明何種一般化的策略較容易得到答案，並能擴展至更大的樣式上。

三、鼓勵學生利用符號思考與呈現數列結構關係，促進代數推理能力

雖然視覺化可提供學生樣式變化的線索，但如何促進思考呈現結構關係，而非以單一案例的線索或是圖形某一特徵(例如對稱)進行一般化的擴展和臆測，避免落入 Rowland 等人所謂視野狹窄的效果現象，則可強化符號運用的功能，因為符號可對不變數的結構，以及數學物件之間的關係，提供構念、臆測與論證等系統性的手段，可彌補視覺化至符號化過程的縫隙。

參考文獻

李美蓮(2003)。**一位國二學生在等差數列解題表現之研究**。國立嘉義大學數學教育研究所碩士論文。未出版，嘉義市。

李佩玟(2004)。**國小六年級學童發現數列樣式的推理歷程之分析研究**。國立臺北教育大學教育心理與諮商學系碩士論文。未出版，台北市。

教育部(2003)。**國民教育九年一貫課程綱要：數學學習領域**。台北教育部。

陳嘉皇(2007)。學童「圖卡覆蓋」代數推理歷程之研究：以三個個案為例，**國立嘉義大學國民教育學報，第19 期**，79-107。

陳嘉皇(2010)。六年級學生線性樣式問題一般化表現之研究。**高雄師大學報:自然與科技類，29**，63-85。

Ball, D. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*, 132-144.

Blanton, M., & Kaput, J.(2002). *Developing elementary teachers' algebra "eyes and ears": Understanding characteristics of professional development that promote generative and self-sustaining change in teacher practice*. Paper represented at the annual meeting of the American Educational Research Association, New Orleans, LA.

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education,36*(5), 412 −446.

Campbell, S. R., & Zazkis, R. (2002). *Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction*. Westport, CT: Ablex.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. W. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth: Heinemann.

Dreyfus, T. (1991). On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. In F, Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th International Conference* *for Psychology of Mathematics Education.* (Vol. 1, pp. 33-48). Genova, Italy.

English, L., & Warren, E. (1995). General reasoning processes and elementary algebraic understanding: Implications for instruction. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 17*(4), 1-19.

Graeber, A., Tirosh, D., & Glover, R. (1989). Pre-service teachers misconceptions in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*, 95-102.

Gravemeijer, K. P. E. (2004). Learning trajectories and local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. *Mathematical thinking and learning, 6*(2), 105–128.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. A. Grouws(Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*(pp. 276-295). New York: Macmillan.

Heargreaves, M., Threlfall, J., Frobisher, L. & Shorrocks-Taylor, D. (1999). Children's strategies with linear and quadratic sequences. In A. Orton (Ed.), *Patterns in the teaching and learning of mathematics* (pp. 67-83). London: Cassell.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (2004). The core of algebra: Reflections on its main activities. In k. Stacey., H. Chick., & M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra* (pp. 21-33). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.

Lee, L. (1996). An Initiation into Algebraic Culture through Generalisation Activities. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra: Perspectives for*

Research and Teaching (pp. 87-106). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Lester, F. K., & Mau, S. M. (1993). Teaching mathematics via problem solving: A course for prospective elementary teachers. *For the learning of mathematics, 13*(2), 8-11.

Martin, W. G., & Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*, 41-51.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran & R. A. Lesh (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

Movshovitz-Hadar, N., & Hadass, R. (1991). Preservice education of mathematics teachers using paradoxes. *Educational Studies in Mathematics, 21*(3), 265-287.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Olson, J. (1991). Function recognition and computerized graphing. *Physics Teachers, 29*(5), 293-295.

Presmeg, N. (1986). Visualization and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics, 17*, 297-311.

Resnick, M. (1997). *Mathematics as a science of patterns*. Oxford: Clarendon Press.

Rivera, F. D. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics*, *73*, 297-328.

Rowland, T., Martyn, S., Barber, P., & Heal, C. (2000). Primary teacher trainees' mathematics subject knowledge and classroom performance. In T. Rowland & C. Morgan(Eds.) *Research in mathematics education Vol 2: Papers of the British Society for Research into learning mathematics*(pp. 3-18).

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., & Brizuela, B. M. (2007). *Bringing out the algebraic* *character of arithmetic: from children's ideas to classroom practice*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Shipley, E. (1993). Categories, hierarchies, and induction. In D. Medin (Ed.), *The psychology of learning and motivation* (pp. 265–301). San Diego, CA: Academic Press.

Tall, D. (1992). The Transition from Arithmetic to Algebra: Number Patterns, or Proceptual Programming? *New Directions in Algebra Education*, 213–231. Brisbane: Queensland University of Technology.

Threlfall, J. (1999). Repeating patterns in the early primary years. In A. Orton (Ed.), *Patterns in the teaching and learning of mathematics* (pp. 18-30). London: Cassell.

White, C. S., Alexander, P.A., & Daugherty, M. (1998). Reasoning by analogy in solving comparison problems. In L.D. English (Ed.), *Mathematical cognition (special issue)-Mathematical reasoning: Nature, form, and development 4*(2), (pp. 103-123). Hove, East Sussex: Psychology Press.

Zazkis, R. (1998). Odds and ends of odds and evens: An inquiry into students' understanding of even and odd numbers. *Educational Studies in Mathematics, 36*, (1), 73-89.

Zazkis, R. & Campbell, S. (1996a). Prime decomposition: Understanding uniqueness. *Journal of Mathematical Behavior, 15*(2), 207-218.

Zazkis, R. & Campbell, S. (1996b). Divisibility and Multiplicative Structure of Natural Numbers: Preservice teachers' understanding. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(5), 540-563.

附件 1：數字樣式一般化作業(如圖片檔)

一、數字關係辨識

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1.54、55和56有何關係？請你說明 2.73、84和95有何關係？請你說明
3.79、88和97有何關係？請你說明 4.62、72和82有何關係？請你說明

二、發現樣式

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1.請你找出總和和三個數字之間的關係？你發現什麼？請你說說看。

2.你發現的方法在百格板裡都可以應用嗎？試試看。

3為何（不）可以應用？解釋你的理由。

二、發現樣式

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1.粉紅色區塊數字總和多少？2.藍色區塊數字總和是多少？3.綠色區塊數字總和是多少？4.黃色區塊數字總和是多少？

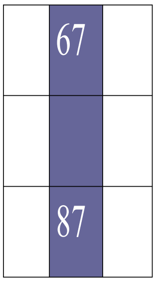
★說說看你用的方法？

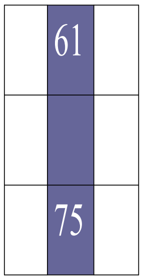
三、樣式一般化解題

93	94	

1.紅色區塊的數字總和是282，那麼空格的數字應該是多少？說說看你的想法

三、樣式一般化解題

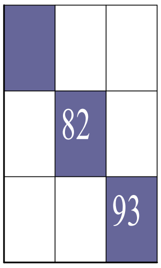


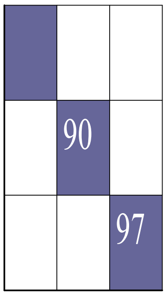


3.總和204

2.粉紅色區塊的數字總和是231，那麼空格的數字應該是多少？說說看你的想法

三、樣式一般化解題

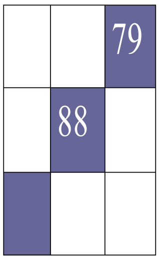




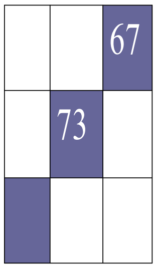
4.藍色區塊的數字總和是246，那麼空格的數字應該是多少？說說看你的想法

5.總和270

三、樣式一般化解題



6.棕色區塊的數字總和是264，那麼空格的數字應該是多少？說說看你的想法



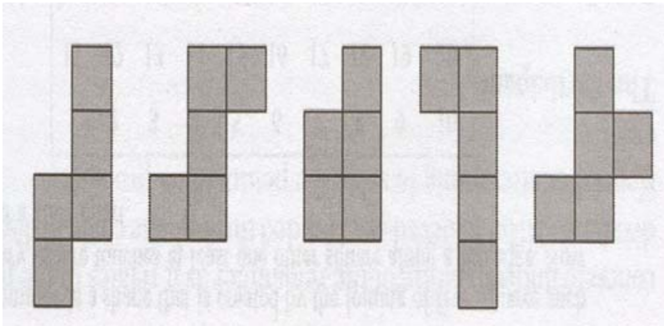
7.總和是219

四、擴展

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	78	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

（1）紅色區塊的數字總和是多少？你是怎麼算出答案的？
（2）綠色區塊的數字總和是多少？你是怎麼算出答案的？
（3）藍色區塊的數字總和是多少？你是怎麼算出答案的？
（4）紫色區塊的數字總和是多少？你是怎麼算出答案的？
（5）從上面的範例，發現什麼規律？這些規律要怎麼解釋？說說看？

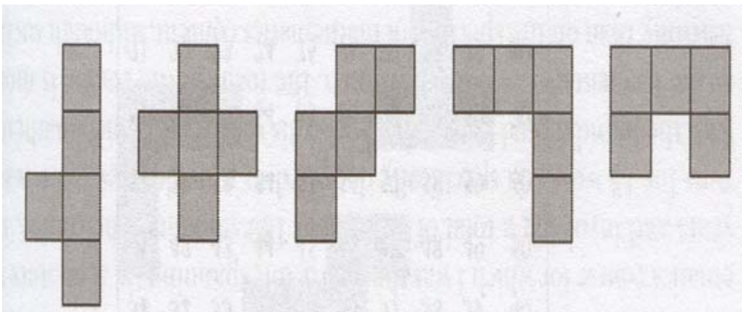
四、臆測



(1) (2) (3) (4) (5)

以上的區塊，哪一個數字的總和會等於中間的數字x5，並說說看你的解釋

四、臆測



(1) (2) (3) (4) (5)

以上的區塊，哪一個數字的總和會等於中間的數字x5，並說說看你的解釋

台灣、芬蘭與中國大陸國小一至六年級數學教科書代數佈題表徵之研究

張敬苓

國立嘉義大學數理教育研究所

摘要

本研究採內容分析法以比較台灣、芬蘭與中國之一至六年級數學教科書中代數教材之佈題表徵（符號型態、文字型態、視覺型態、聯合型態）方式之差異。因此，本研究選取市佔率最高的台灣康軒，中國義務教育課程標準實驗教科書，以及芬蘭 Laskutaito 教科書為研究對象。研究發現臺灣台灣（73%）與中國（48%）較偏重「聯合型態」之佈題，；芬蘭（78%）明顯偏重於「符號型態」之佈題；在文字型態之佈題方面，三套教材占的比重差不多，比例約為 10%左右。此外，結果亦顯示芬蘭教材提供較多元的佈題方式，較能刺激學童思考，並增加邏輯推理能力的發展。

關鍵詞：台灣、芬蘭、大陸、國小數學教科書

通訊作者：張敬苓 shell0918@dns.syes.ylc.edu.tw

壹、研究動機與目的

在傳統的課室教學中，教師們最常使用教科書來幫助備課，教科書便成為學生課堂活動中教學內容的主要來源（Cai, Nie, & Moyer, 2010; Huang & Cai, 2011; Newton, Blake & Brown, 2002; Yang, Reys, & Wu, 2010），也是影響教師教學與學生學習的重要因素（Reys & Reys, 2004; Yang et al., 2010）。另外，Fan 與 Kaeley（1998）發現教科書會影響老師的教學策略，並且有許多研究指出教科書影響著課室的教學（Fan & Kaeley, 1998; Huang, Rowntree, Yetkiner & Li, 2010; Huang & Cai, 2011），因為教科書有非常強的影響力對於該學什麼以及如何學習（Yang, Reys ＆ Wu, 2010; Park & Leung, 2006; Stein et al., 2007）。在東方的亞洲國家，將教科書是為聖經（Park & Leung, 2006; Huang & Cai, 2011）。另外，Chambliss 與 Calfee（1999）及 Westbury（1990）皆主張：教科書是教材的主宰者，教學方案的核心；應該教什麼、如何教，完全取決於教科書。因此，教科書對學生之學習成就具決定性的地位（Floden, 2002）。進行教科書分析對於提升學生學習數學將有實質的助益（楊德清、陳仁輝，2010; Törnroos, 2004; Yang et al., 2010）。

近年來臺灣學生的數學能力在國際性評比有不錯的成績，經濟合作暨發展組織（Organization for Economic Co-operation and Development [OECD]）於 2006 年所做的「學生能力國際評估計畫」（The Programme for International Student Assessment [PISA]）調查報告，在全球 57 個參與國家的 15 歲學生中，臺灣學生在數學能力表現上居全球第一位（OECD, 2007）。在 PISA2000、2003 的測驗，芬蘭學生在所有 OECD 的國家中表現最為出色，連續在 2000 年及 2003 年的評量總成績中稱冠。另外，在 PISA2009 的測驗中，最引人注目為中國大陸的上海，首次參加 PISA 測驗，在數學與閱讀的測驗當中成績均遙遙領先其他國家，可見近年來中國在數學教育上逐漸重視。

國際間數學教育學者認同代數是基礎數學知識中極具重要之主題（Huang & Cai, 2011; NCTM, 2000; Smith & Philips, 2000; Star, Herbel-Eisenmann & Smith III, 2000）。並且有研究指出從國小、國中到高中的數學課程，沒有比代數的學習更具挑戰性的（Smith & Philips, 2000）。學習代數知識被視為是通往未來發展機會的主要

途徑（Darrell & Aadina, 2008; Mose & Cobb, 2001），並且在上中學之前，小學生擁有更多機會去學習批判性的代數觀念（Darrell & Aadina, 2008; California Department of Education, 1997; NCTM, 2000）。

基於上述之研究動機並考量研究之範圍與限制，本研究之研究目的為探究台灣、芬蘭與中國大陸國小一至六年級數學教材之佈題表徵方式差異之比較。

貳、文獻探討

一、台灣、芬蘭與中國大陸數學課程標準分析

芬蘭中心課程理念強調數學的教學須提供「孩子做數學思考的機會」，與台灣課綱強調以學生為主體的理念相似。台灣、芬蘭與中國課程綱要皆強調結合生活經驗幫助孩子形成抽象的數學概念。另外，中國課綱將數學課程分為三個學段，不同於台灣與芬蘭將國小六年級與國中課程列為同一階段，中國課綱之第一、二學段為小學階段，第三學段為國中階段，小學與國中課程有明顯之區分。芬蘭與中國之課程綱要之呈現皆為階段性，僅台灣課程綱要又將數學階段性能力指標細分為各年級之分年細目。

由三個國家課程綱要比較看來，三個國家皆於第一階段階引入代數概念，但方向或內容卻有很大的不同。台灣之國小數學在代數主題之學習，在國小五年級之前仍然以算術的學習為主，在教學與課程安排上，大多併入數與量的教學中，在課程安排上較無強調數字間的關係。芬蘭於第一階段便開始強調「簡單的數字關係」，希望學生能了解數字的重要性，更鼓勵學生利用不同的表徵，並寫下或說出其解法和結論，在過程中發現數量之間的關係。中國課綱將數的運算與代數合為一個主題，與台灣課綱在五年級之前將代數併入數與量之教學的理念相類似，但仍有不同之處，中國課綱之具體目標除了列出數與量的認識、運算之外，亦強調「探索規律」，即表示中國課綱不僅強調數量的運算，亦強調數量之間的關係。另外，台灣與中國大陸的課程綱要偏向指出學生應學習到的數學知識，而芬蘭則偏向強調理解關係居多。

二、國內外相關研究

教科書為學生在學校學習最主要的教材，是學校教育、課程與教學的核心（周佩儀、鄭明長，2008; NCTM, 2000），亦是影響教師教學與學生學習的重要因素（Reys & Reys, 2004; Yang et al., 2010）。有許多研究指出教科書影響著課室的教學（Fan & Kaeley, 1998; Huang et al., 2010; Park & Leung, 2006; Huang & Cai, 2011），因此，教科書的質量問題這幾年也開始受到美國教育界的關注（Stein et al., 2007）。透過國際間的教科書比較，可更瞭解自己國家教科書的優缺點（Stigler ＆ Hiebert, 2004），進行教科書分析，以瞭解其他國家教科書之優劣，進而改善我國之教科書編排方式，對於提升學生學習數學應有實質的助益（楊德清、陳仁輝，2010; Tornroos, 2004; Yang et al., 2010）。例如：Cai, Nie 與 Moyer（2010）認為透過比較美國連結數學（Connected Mathematics Program [CMP]）與傳統數學課程（Glencoe Mathematics [GM]）在教解方程式之方法差異，讓讀者熟悉解方程式的替代方法，以及背後的數學觀念。在 CMP 的課程中，使用函數方法（functional approach）來解方程式。函數方法強調情境和內容上重要概念的變化與轉換，亦強調兩變數間的表徵關係與解方程式的概念性方面。在 GM 的課程中，使用結構方法（structural approach）來解方程式。結構方法要求學生運用抽象符號，並按照有系統的程序，強調關於解方程式的程序性方面。在一般的代數教學中，特別是在解方程式的單元，這兩種課程綱要可分別為概念性與程序性教學的具體例子。

此外，楊德清與陳仁輝（2011）採用內容分析法探討美國「情境數學」、新加坡「新課程數學」與台灣「部編版數學」三個數學教材中七年級代數課程發展數學能力方式之差異。結果顯示部編版數學和新課程數學採傳統方式鋪陳數學能力的發展，以抽象方式傳達概念，並強調練習角色的重要性與精熟學習；新課程數學強調程序性技能的流暢，發展多元的解題策略，而部編版數學概念知識鋪陳方式較為單調，採直接陳述方式，鮮見促進理解的內容設計。情境數學以題組的方式貫通學習的歷程，聚焦在培養學生能彈性地使用各種解題策略，較強調概念性知識的理解。在發展數學能力上。陳仁輝與楊德清（2010）之研究亦發現「情境數學」之教學目標具高度彈性，善用情境與生活經驗，運用表徵為媒介引導學生建立概念；「新課程數學」的教學目標強調未來代數的工具性角色，並注重同一主題的深入延伸，以

發展多元的解題策略；「部編版數學」教學目標偏重認知、技能的學習，少有情意目標的活動內容，聚焦知識的垂直連結，強調解題能力的培養。整體而言，「部編版數學」和「新課程數學」之數學教學主要是針對學生解決教材內容中的測驗題時所需要的知識而為，重視程序性問題，目標雖明確但易流於窄化；相對而言「情境數學」教學目標比較有彈性，重視概念性理解，但需注意如何在寬鬆的目標中準確聚焦在核心內容的發展上。翁玟琦（2011）採用內容分析法分析台灣（康軒版數學）與芬蘭（Laskutaito 版數學）國小代數教材。研究顯示，Laskutaito 版數學代數表徵方式較多樣，且佈題題型多樣並具挑戰性，康軒版數學則較缺乏； 另外，芬蘭代數教材融合了其他科目之內容（美術、自然、語文等），範圍更加擴大。

參、研究方法

一、研究方法與架構

本研究採用內容分析法（content analysis）來進行研究。本研究先採定量分析，針對研究對象所蒐集之資料進行類別及項目進行量化資料之呈現，探討、比較各國教科書代數主題之佈題的表徵方式（數學型態、文字型態、視覺型態、聯合型態、其他型態），再針對三個國家之代數教材進行質量並重的討論。

本研究依照市場佔有率採取立意取樣，選取三國市場佔有率最高的版本作為研究對象。臺灣教科書為 98 學年度經教育部審核通過，以「康軒文教事業股份有限公司」出本之數學教科書一到十二冊，目前在市場上佔有率最高（約 40％）（許俊偉、林志成，2011；張嘉玲，2011）；芬蘭教科書係根據 2004 年頒訂之核心課程所編輯，於 2006 年 WSOY 出版社出版之「Laskutaito」數學教科書，這套教科書是芬蘭中小學使用比例最高的系列，市佔率高達六至七成（陳之華，2007）；中國大陸教科書為經全國中小學教材審定委員會 2001 年初審通過,人民教育出版之義務教育課程標準實驗教科書數學，在中國大陸中小學課本上的編寫出版上佔據絕對優勢，約佔市場 50％（紀海珠，2004；馬健生、藤珺，2007；楊國揚、王立心，2010）。是故，本研究以台灣「康軒數學」、芬蘭「Laskutaito 數學」與中國大陸「義務教育課程標準實驗教科書數學」作為研究對象，分述如下：

（一）台灣「康軒數學」

在教材設計上，康軒數學著重數學活動與生活經驗及其他領域作連結，能結合學生生活經驗（游自達，2007）。康軒出版社所發行的教科書，在國小教科書有很高的市佔率約為 40%，是目前國小數學教科書使用率最高的版本（許俊偉、林志成，2011；張嘉玲，2011）。康軒數學國小一至六年級的數學教材中總共有 12 冊，每冊單元數大約為 8 至 9 個單元，合計有 114 個單元，其中含有代數相關內容的單元共有 37 個，本研究將以此 37 個單元作為研究對象。

（二）芬蘭「Laskutaito 數學」

由出版社 WSOY 所發行 Laskutaito 系列教科書，這套教材的編寫歷史已長達十八年之久，是芬蘭各中、小學校使用比例最高的教科書版本，另外，這系列的教科書包涵有教師手冊、輔助教材和專門給資優學生較多樣且具挑戰性的習作本，以及為了學習較緩慢學生所編印的特別輔助教材（吳祥輝，2006；陳之華，2008）。芬蘭 Laskutaito 數學教科書在國小階段共有 12 冊，每個年級分為 A、B 兩冊，上學期使用 A 冊，下學期則使用 B 冊，在國小階段共有 12 冊，共 54 個單元，含有代數相關內容的單元有 28 個，本研究將以此 28 個單元作為研究對象。

（三）中國大陸「義務教育課程標準實驗教科書數學」

人民教育出版社受託中國大陸教育部，主持並參與草擬 2000 年前歷次中小學各科教學大綱的編輯，且先後編寫及出版九套全國通用之中小學教材，第十套教材即為「義務教育課程標準實驗教科書」，通過教育部審查，並在全國實驗區進行實驗（人民教育出版社，2011），基本理念和所在地的教學內容為依據，總結現行九年義務教育小學數學教材研究與使用經驗的基礎所編寫而成。中國大陸「義務教育課程標準實驗教科書數學」一至六年級的數學教材中總共有 12 冊，合計有 94 個單元，其中含有代數相關內容的單元共有 33 個，本研究將以此 33 個單元作為研究對象。

二、類目建構與資料處理

本研究在進行內容分析時，以「題」為最小分析單位，分析範圍以課本為主，習作、教學指引等不列入分析範圍。佈題表徵型態之分類參考 Zhu 與 Fan（2006）之研究，將佈題表徵型態分為符號型態表徵、文字型態表徵、視覺型態表徵、聯合型態表徵等四種進行分析。**數學型態表徵指**問題主軸只包含數學符號的表徵，如：

(2)623－(　　)＝199　(3)847－(　　)＝688

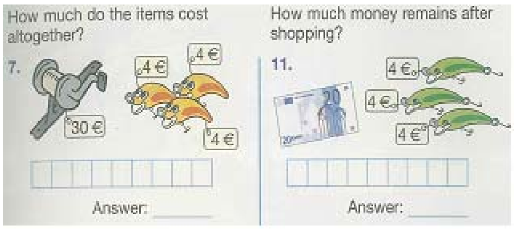
[圖引自康軒文教事業（2010b）]

文字型態表徵指問題主軸只以文字敘述者，如

40. Jacob has 30 pins. He gets six pins from Susan and twice as many from Mark. How many pins does Jacob have now?

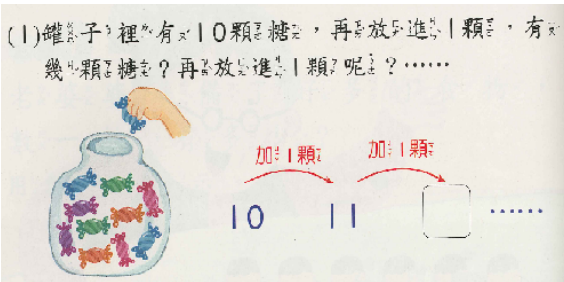
[圖引自 Saarelainen, R. (2006b)]

視覺型態表徵指問題主軸包含插圖、圖像、圖表、地圖等來表徵者，如：



[圖引自 Saarelainen, R. (2006a)]

聯合型態表徵指問題呈現方式包含兩種或兩種以上之上述型態者，如：



[圖引自康軒文教事業（2010a）]

三、信、效度檢定

本研究採用評分者一致性作為信度檢驗方式，先計算出評分者間「相互同意度（Pi）」，再求得「平均相互同意值（P）」，最後利用依格柏納信度公式求出信度（R）。

施測結果所獲致的信度達 0.93，大於可接受的信度標準 0.8（王石番，1996），因此，具有良好的信度。相關公式如下：（黃光雄、簡茂發，1993）本研究參考三個國家教材之代數課程綱要、教學目標，以及國內外代數之相關研究（FNBE, 2004；NCTM, 2000；中華人民共和國教育部，2001；），而形成本研究之分析類目；再參考國內外教科書相關研究（Zhu ＆ Fan, 2006；Yang, Reys ＆ Wu, 2010；Ding ＆ Li, 2010；陳仁輝、楊德清，2010；楊德清、陳仁輝，2011）之研究工具及歷程，形成本研究之分析架構，同時採取專家效度，於編制過程中多次與指導教授與資深教師進行討論與修改，並根據討論結果與建議進行修正，透過理論與專家的修訂與檢視，建立本研究發展分析類目的效度。

肆、結果與發現

表 4-1

三國各項佈題表徵方式題數及百分比綜合分析表

	符號型態		文字型態		視覺型態		聯合型態		總題數
	題數	百分比	題數	百分比	題數	百分比	題數	百分比	題數
台灣	76	12.9%	78	12.9%	7	1.2%	431	73.0%	592
芬蘭	1187	78.0%	154	10.1%	70	4.6%	110	7.2%	1521
中國	103	31.7%	33	10.2%	33	10.2%	156	48.0%	325

一、台灣「佈題表徵」分析

研究結果發現，台灣國小代數教材明顯偏重於「聯合型態」之佈題，占整體代數佈題中的 72.8%；在「符號型態」與「文字型態」方面之佈題比例為 13.2%，而純粹「視覺型態」佈題僅占 1.2%，除聯合型態佈題外，其餘的類目比例均偏低。「聯合型態」之佈題會占如此高的比例，研究者推估與台灣數學教科書之編排有相當大的關係，教科書編排目的是希望老師能夠方便且快速教學，不需要在授課之前花費過多的備課時間，因為教科書之佈題皆輔以幾近完整的解題過程，另外在教科書下

方設有「親師溝通站」來說明教學內容，老師可以很快的掌握教學重點，因此花費的備課時間就會相對減少；另外，「親師溝通站」的部份，也是希望孩子回家後，父母能夠就教科書的內容能輕鬆的教導孩子觀念。因此可以在教科書內看到幾乎所有的佈題除了題目本身的文字敘述或是圖形之外，皆輔以幾近完整的解題過程，留下少許需填寫的算式或是僅需孩子填入答案的括弧，尤其以低年段最為明顯。

台灣教科書內所附之插圖，以卡通為主體，非常可愛且豐富，翻開課本的每一頁，都有滿滿的插圖，深受小朋友的喜愛。不過，僅以圖片為主體之視覺型態佈題，比例卻是非常的低，僅占整體的 1.2%，總題數有 592 題，僅出現在六年級的課本佈題中含有 7 題。研究者推估會造成如此結果，除了大部分佈題均屬於聯合型態之佈題，佈題中除圖片之外，常常輔以文字或是算式，因此純粹屬於視覺型態之佈題的比例就會大幅下降；另外，台灣教科書內大部份的佈題若輔以圖片，此類圖片多是與佈題情境相關，無法幫助孩子解題。

低年段代數主題之佈題數偏少，而高年段代數主題之佈題明顯增加許多；六年級之題目就占整體的 45%之多，研究者認為這與教育部（2003）強調國小數學學習仍然以算術的學習為主，在教學上應併入數與量中，無獨立成教學單元有很大的關係。若無獨立成教學單元，相關代數之佈題自然就會減少，因此，低年段之代數佈題便偏低。而高年段之代數佈題明顯增加，可能是因為未知數與體積、面積等公式的引入，而使許多原屬於數與量主題範疇的佈題，亦可歸屬於代數主題之範疇中。低年段除代數主題之佈題數偏少，且文字與視覺型態之佈題也相對偏低，其主要佈題為聯合型態與符號型態，研究者認為這樣的結果與孩子學習數學的心智年齡有很大的關係，低年段使用較多聯合型態之佈題，是因為低年段之學童，剛開始接觸正規的數學教育，若能使用較多的圖形與符號之聯合型態的佈題，便可提升學童的學習，幫助學童能順利將具體物與符號間作連結，因此在低年階的圖形與符號之聯合型態佈題的確是占多數。在文字型態佈題較低年段增加，研究者認為由於低年段學童之文字理解能力較中年段學童弱，因此低年段之文字題常常輔以圖片說明幫助學童理解，諸如此類的佈題，歸類於聯合型態而非文字型態，而中年段的學童已有基本的語文理解能力，已經可以閱讀並理解純粹文字型態之佈題，因此文字型態之題型也就相對增加。

二、芬蘭「佈題表徵」分析

研究結果可發現，芬蘭國小代數教材明顯偏重於「符號型態」之佈題，占整體代數佈題中的 78%；在「文字型態」之佈題比例為 10.1%，在「聯合型態」之佈題比例為 7.2%，而純粹「視覺型態」佈題占 4.6%，除符號型態佈題外，其餘的類目比例均偏低。芬蘭整體佈題數高達 1521 題，而屬於符號型態之佈題就占其中的 1187 題，研究者由教科書之佈題方式推估芬蘭應極重視學童計算能力之熟練，例如教科書介紹數字序列或是加、乘法交換律等代數概念時，在學生練習題的部分便提供大量的佈題讓孩子練習，且佈題型態非常多樣，可提供孩子多方面的學習與思考的機會；另外，除了正規的由左至右計算題，在一年級上學期的教科書就出現大量的算式填充式的計算題。此外，在非代數單元或數與量單元後方的學生練習題，也不時會安插相關代數之計算題，讓學童能夠經由經常不斷的練習，達到精熟的程度，因此芬蘭符號型態之佈題比例才會如此之高。近年來，數學解題一直為芬蘭數學教育所著重之教學目標。歸屬於文字型態與聯合型態之佈題大都為應用題，且類型多為題組式應用題，可看出芬蘭相當強調於學童理解與思考的能力；且聯合型態之佈題，經常輔以多樣性的表徵，例如多樣化的具體物圖形、圖表等，如此一來更可以促進學童的思考。因此除去大量的計算練習題外，文字與聯合型態之佈題也佔不低的比例。

三、中國大陸「佈題表徵」分析

研究結果發現，中國大陸國小代數教材較偏重於「聯合型態」之佈題，占所有代數佈題中的 48%；「符號型態」方面之佈題比例為 31.7%，而「視覺型態」與「文字型態」佈題均為 10.2%。大致上看來，中國大陸的佈題型態與台灣和芬蘭較不相同，無明顯偏重於某一類目之表徵，整體佈題較其他兩國平均呈現。另外大陸教科書為三個國家中，代數相關之總題數最少的國家，僅 325 題，芬蘭之總佈題數為中國大陸的快五倍之多。會有這樣的研究結果，與中國大陸教科書的排版有很大的關係，中國大陸的教科書排版較為鬆散，常常一個頁面僅呈現一個佈題或是一個主要概念之佈題可橫跨二至三頁呈現，此類佈題最常出現於幾何公式的推導。另外，中國下方的學生練習題也為三個國家中最少的，其次為台灣，最多為芬蘭，因此中國大陸代數相關之總題數便相對於其他兩個國家少許多。

中國大陸國小代數教材較偏重於「聯合型態」與「符號型態」之佈題。研究結果呈現聯合型態之佈題較多，中國聯合型態之佈題常以生活中常出現之圖案，，或是以小朋友實際操作具體物之圖片，非常強調與生活情境作結合，來輔助學童解題。另外，研究結果呈現符號型態之佈題較多，研究者認為與芬蘭的數學教學理念相似，著重在計算能力的精熟，且強調練習題的運用與變化，以及概念上的連結，範例同時含有「加法列式」、「加法與乘法列式」與「加法與減法列式」的等三種解題概念呈現，引導學生多樣的思考模式，且學生練習題與範例的呈現較不相同，較能促進學生思考與概念之運用。相較於台灣的練習題與範例之佈題，台灣教科書則呈現極高的相似度，範例為引導學生利用算式填充式的方式列式，而下方學生練習題的部份，佈題方式幾乎跟範例一模一樣，學生幾乎不需要思考，利用上方範例所示範的列式，依據題目所給的數字作替換，就可以順利解答，久而久之學童便缺少了邏輯思考的過程。

四、小結

台灣國小康軒版數學教科書整體代數內容佈題，較偏重於「聯合型態」之佈題，比例為 73%，在台灣教科書除題目本身的文字敘述或是圖形之外，皆輔以幾近完整的解題過程，留下少許需填寫的算式或是僅需孩子填入答案的括弧，尤其以低年段最為明顯；芬蘭國小 L 版數學教科書整體代數內容佈題，較偏重於「符號型態」之佈題，比例為 78%，芬蘭應極重視學童計算能力之熟練，在學生練習題的部分便提供大量的佈題讓孩子練習，芬蘭中心課程理念強調數學的教學須提供孩子做數學思考的機會，因此佈題型態非常多樣化；而中國大陸國小義務教育課程標準實驗數學教科書整體代數內容佈題，與台灣相同，較偏重「聯合型態」之佈題，比例為 48%，中國全日制義務教育課程標準，強調從學生已有的生活經驗出發，因此，中國聯合型態之佈題常以生活中常出現之圖案，或是以小朋友實際操作具體物之圖片，非常強調與生活情境作結合，來輔助學童解題；另外，中國全日制義務教育課程標準，強調體驗解決問題策略之多樣性，因此，佈題常以多種概念方式呈現，較能促進學生思考與概念之運用。芬蘭中心課程理念強調數學的教學須提供「孩子做數學思考的機會」，與台灣課綱強調以學生為主體的理念相似。實際上芬蘭的確提供了多樣性的佈題，刺激學童思考，並增加訓練邏輯推理的能力；聯合佈題的用意應是透過多

樣的表徵佈題來幫助孩子思考，增進理解，而台灣聯合佈題之比例雖然偏高，但並非運用多樣化表徵來幫助學童思考，而是除佈題本身的文字敘述外，輔以幾近完整的解題過程，如此一來，學童久而久之便缺乏了思考的過程，與台灣課綱所強調以學生為主體的理念大不相同。

伍、結論與建議

一、結論

台灣與中國大陸國小代數教材偏重於「聯合型態」之佈題，而芬蘭國小代數教材偏重於「符號型態」之佈題。同為重視聯合型態佈題的台灣與中國大陸，在教科書編排上有很大的不同，台灣的特色為佈題輔以幾近完整的解題過程，且在教科書下方設有「親師溝通站」來說明教學內容，老師可以很快的掌握教學重點，父母也能夠在方學後輕鬆的教導孩子觀念。中國的特色為佈題常以生活中常出現之圖案，或是以小朋友實際操作具體物之圖片，強調與生活情境作結合輔助學童解題，並強調練習題的運用與變化，範例同時含有多整解題概念呈現，較能促進學生思考與概念之運用，呼應中國全日制義務教育課程標準強調「從學生已有的生活經驗出發」與「體驗解決問題策略之多樣性」的理念。芬蘭偏重符號型態佈題，重視學童計算能力之熟練，亦重視佈題呈現多元表徵，除了正規的由左至右的計算題，在一上的教科書便出現大量算式填充式計算題，更可以刺激學童解題思考，呼應芬蘭中心課程強調「數學的教學須提供孩子做數學思考的機會」之理念。

二、建議

因目前台灣教科書佈題均有輔以幾近完整的解題過程，且學生練習題也缺乏變化，學生幾乎不需思考按照範例的步驟就可以將答案求出，學童久而久之便缺乏了思考的過程，往後遇到沒有看過的題目，往往選擇放棄作答而不願嘗試。因此，教育現場的老師不該將教科書視為聖經而照本宣科，但台灣國小教師皆有教學進度的壓力，因此應將教科書當作教學進度的依據，將各單元的活動作橫向的相互連結，甚至可作不同單元間的垂直連結，像是中國與芬蘭的教科書中，代數的運算概念在每一冊都有重複提及，且許多代數概念都提早讓學童接觸，學童可透過低年段簡單

概念輕鬆了解代數概念的意涵，再透過重複佈題慢慢加深加廣，奠定學童的基礎，用以解決往後更艱難的問題。

芬蘭與中國大陸在同一代數概念的鋪陳上，會使用較多的表徵來呈現，佈題的題型相當多樣化，而這方面台灣教科書較缺乏，而低年段的學童需透過更多具體物的呈現，方能理解較抽象的代數概念，因此現場老師可透過更多的補充教材或是各國的教科書多樣的佈題，補足台灣教科書不足。另外，多樣性的佈題，更可刺激學童思考，並增加訓練邏輯推理的能力，研究結果顯示台灣聯合佈題之比例雖然偏高，但並非運用多樣化表徵來幫助學童思考，而是輔以幾近完整的解題過程，若要提昇孩子的思考邏輯，則需提供更多的思考機會，因此現場教師除課本佈題呈現之外，可參考中國與芬蘭的教科書，提供更多開放性的問題，透過討論與修正，鼓勵學童發展更多的解題策略。

參考文獻

人民教育出版社（2011）。*中小學教材編輯出版紀事*。北京：人民教育出版社。線上檢索日期：2011年11月14日。網址：
http://www.pep.com.cn/rjs/rjgl/ry/gndhjsm/201011/t20101103_944845.htm

中華人民共和國教育部（2001）。*全日制義務教育數學課程標準（實驗稿）*。北京：北京師範大學基礎教育課程研究中心。線上檢索日期：2011年11月14日。網址：
http://www.xsj21.com/KCBZ/KCNY/index_1.html#7

王石番（1996）。*傳播內容分析法：理論與實證*。台北：幼獅文化。

周佩儀、鄭明長(2008)。教科書研究方法論之探究。*課程與教學季刊*，11(1)，193-222。

紀海珠（2004）。*人教版仍壟斷中小學教材市場？*線上檢索日期：2011年11月16日。網址：
http://big5.xinhuanet.com/gate/big5/news.xinhuanet.com/book/2004-03/02/content_1340202.htm

翁玟琦（2010）。*台灣與芬蘭國小代數教材之比較分析*。國立嘉義大學數學教育研究所碩士論文，未出版，嘉義。

馬健生、藤珺（2007）。二十一世紀初中國課程改革中的市場力量。*教育資料集刊*，36，47-62。

康軒文教事業（2010a）。*康軒國小數學課本第一冊*。台北：康軒文教集團。

康軒文教事業（2010b）。*康軒國小數學課本第五冊*。台北：康軒文教集團。

張嘉玲（2006年9月7日）。*公平會開鍘，4教科書業者罰千萬*。TVBS. 線上檢索日期：2011年11月14日。網址：
http://www.tvbs.com.tw/news/news_list.asp?no=suncomedy20060907125006

教育部（2003）。*國民中小學九年一貫課程綱要*。台北：教育部。

許俊偉、林志成（2008年5月27日）。*北北基選一本，康軒翰林勝出*。中時電子報。線上檢索日期：2011年11月14日。網址：
http://blog.yam.com/etsinjhoftc/article/15327044

陳之華（2008）。*學習，可以非常生活化*。線上檢索日期：2011年11月14日。網址：

http://tw.myblog.yahoo.com/yolanda-chen/article?mid=5277&prev=6603&next=3891&l=f&fid=26

陳仁輝、楊德清 (2010)。台灣、美國與新加坡七年級代數教材之比較研究。*科學教育學刊*，18(1)，43-61。

游自達、林宜誠、林原宏、洪賢松、陳兆君、蔡秋菊（2007）。*九年一貫課程之教科書總評鑑總結報告：設計理念、能力指標與統整性—數學領域教科書評鑑報告*。台北：中華民國課程與教學學會。

黃光雄、簡茂發（1993）。*教育研究法*。台北：師大書苑。

楊國揚、王立心（2010）。*中國大陸教科書及學術圖書出版制度*。線上檢索日期：2011年11月16日。網址：

http://www.nict.gov.tw/tc/filemgr/research/achievement/2010_6_achievement.pdf

楊德清、陳仁輝 (2011)。台灣、美國和新加坡三個七年級代數課程發展學生數學能力方式之研究。*科學教育學刊*，19(1)，43-61。

Cai, J., Nie, B., & Moyer, J. (2010). The teaching of equation solving: Approaches in Standards-based and traditional curricula in the United States. *Pedagogies: An International Journal*, 5(3), 170-186.

California Department of Education (DCE). (1997). *Mathematics Content Standards for California Public Schools: Kindergarten through Grade Twelve*. Sacramento, CA: CDE Press.

Chambliss, M.J., Calfee, R. C. (1999). *Textbooks for learning*. London: Blackwell.

Darrell, E., & Aadina, A. B. (2008). Instructional Strategies for Teaching Algebra in Elementary School: Finding from a Research-Practice Collaboration. *Teaching Children Mathematics*, 518-522.

Ding, M., & Li, X. (2010). A Comparative Analysis of the Distributive Property in U.S. and Chinese Elementary Mathematics Textbooks. *Cognition and Instruction*, 28(2), 146-180.

Fan, L., & Kaeley, G. S. (1998, April). *Textbooks use and teaching strategies: An empirical study*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational

Research Association, San Diego, CA. (ERIC Document Reproduction Service No. ED419790)

Finnish National Board of Education.(2004). National core curriculum for Basic Education 2004. 線上檢索日期：2011年11月14日。網址：http://www.oph.fi/english/publications/2009/national_core_curriculum_for_basic_education

Floden, R. E. (2002). The Measurement of Opportunity to Learn. In A. C. Porter & A. Gamoran (Eds.). *Methodological advances in cross-national surveys of educational achievement*, 229-266. Washington: National Academy Press.

FNBE(2008). *Principles & Standards for school Mathematics*. 線上檢索日期：2011年11月14日。網址：http://standards.nctm.org/document/chapter/index/htm

Herscovics, N. and Linchevski, L. (1994). A Cognitive Gap between Arithemetic and Algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 59-78.

Huang, R. & Cai, J. (2011). Pedagogical representations to teach linear relations in Chinese and U.S. classrooms: Parallel or hierarchical. *Journal of Mathematical Behavior*, 30(2), 149-165.

Huang, R., Rowntree, R. V., Yetkiner, E., & Li, Y. (2010). Classroom instruction as implemented curriculum to provide students structured learning experience in China and the US. *Paper presented at research pre-session of 2010 annual meeting of National Council of Teachers of Mathematics San Diego, CA.*

Kieran, C. (2007): Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F.K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on athematics teaching and learning*, 707-762. Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Loveless, T. (2008). *The misplaced math student: Lost in eight-grade algebra. The Brown Center Report on American Education.* Washington, DC: Brown Center on Education Policy at Brookings.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principles and standards* *for school mathematics*, Reston, VA: NCTM.

National Mathematics Advisory Panel. (2008). *Foundations for success: The final report of the National Mathematics Advisory Panel*. Washington, DC: U.S. Department of Education.

Newton, L. D., Newton, D. P., Blake, A., & Brown, K. (2002). Do primary school science books for children show a concern for explanatory understanding? *Research in Science and Technological Education*, 20(2), 227-240.

OECD (2007). *PISA 2006 Science Competencies for Tomorrow's World*. pp.22,47,53. 線上檢索日期：2011年11月14日。網址：http://www.pisa.oecd.org/dataoecd/15/13/39725224.pdf

Park, K. & Leung, F. K. S. (2006). A comparative study of the mathematics textbooks of China, England, Japan, Korea, and the United States. In F. K. S. Leung, K. D. Graf, & F. J. Lopez-Real (Eds.). *Mathematics education in different cultural traditions—A comparatives study of East Asia and the West: The 13th ICMI study*. New York: Springer.

Reys, B. J., Reys, R. E. (2004).Why mathematics textbooks matter. *Educational Leadership*, 61(5), 61-66.

Saarelainen, R. (2006a). Lsakutaito 3A in English. Heisinki, Finland: WSOY Oppimateriaalit Oy.

Saarelainen, R. (2006b). Lsakutaito 6A in English. Heisinki, Finland: WSOY Oppimateriaalit Oy.

Stein, M. K., Remillard, J., & Smith M. S. (2007). How curriculum influences student learning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, 319-369. Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Törnroos, J. (2004). *Mathematics Textbooks, Opportunity to Learn and Achievement*. ICME-10M, Discussion Group 14 Copenhagen, Denmark.

Westbury, I. (1990). Textbooks, textbook publishers, and the quality of schooling. In D. L. Elliott & A. Woodward. (Eds.). *Textbooks and schooling in The United States*, 1-22. Chicago, Ill : NSSE.

Yang, D. C., Reys, R. E., & Wu, L. L. (2010). Comparing the Development of Fractions in the Fifth- and Sixth-Graders' Textbooks of Singapore, Taiwan, and the USA. *School Science and Mathematics*, 110(3), 118-127.

Zhu, Y., & Fan, L. H. (2006). Focus on the representation of problem types in intended curriculum: A comparison of selected mathematics textbooks from Mainland China and the United States. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 4(4), 609-626.

小雅於情境式應用問題之解題歷程

-以線型函數為例

李其錚

國立嘉義大學數學教育研究所

摘要

本研究是個案研究，個案小雅是高職一年級的學生，在校成績優異，但是對於文字敘述較複雜的應用問題卻是沒有信心。因此先以情境式之線型函數應用問題工作單為主要施測工具，並透過訪談來了解小雅的解題歷程，綜合討論則從「了解問題」、「擬定計畫」、「執行計畫」與「驗算回顧」四階段作為解題歷程之分析架構。重要研究結果發現如下：(1) 小雅對於問題擁有完備的程序性知識理解，但概念性知識理解不夠。(2) 在計畫擬定時，小雅對於所有的題目皆採用同一種解題策略。(3) 熟練解題中常需運用之計算程序，但對於較少擬定之策略所需之計算執行力欠佳。(4) 原先的解題記錄中看不出驗算或回顧之表現，但在訪談給予引導式的提問之下，逐能展現其驗算回顧的能力。

關鍵字: 應用問題；解題歷程；線型函數

通訊作者：李其錚 ccl1106@hotmail.com

壹、緒論

NCTM（2000）在數學教育原則與標準（Principles and Standard for School Mathematics）中提出，數學即解題、推理與證明、溝通、連結和表徵，可見數學解題在數學學習的重要性。國內的九年一貫課程綱要（教育部，2003）將「學習應用問題的解題方法」列為數學學習領域的四大教學總體目標之一，由課程綱要的內容可以看出，國內相當重視學習應用問題的數學教材來培養學生解題能力。然而研究者在教學實務上，發現學生在許多單元的學習，針對計算題皆能達精熟的程度，但面對應用問題，則容易產生解題的困難。學生的概念性知識薄弱，常無法正確的將文字題給定之條件轉換為數學式，雖然計算能力佳，程序性知識熟稔，卻常面對解題的失敗。Polya（1945）提出數學解題可細分成四個歷程，學生於解題過程中，必須先能理解文字內容，擬定解題策略，進而轉換文字為抽象數學符號，最後才是計算的執行，並驗證答案的合理性，每一步驟都影響解題是否順利，故學生在解題過程中之真實思維是教師在教學上應正視的問題。

依研究者的在高職數學的教學經驗中發現，與其他函數單元（如二次函數、三角函數）比較，學生在線型函數單元的測驗會有相對較高的答對率，然而即使孩子能夠正確解題，但也有可能只是機械式的操弄題目中給定之條件，也就是說學生答題正確，未必表示有正確的數學概念。而 99 年教育部公布的高職數學課綱中，已將函數單元整個刪除，卻在第一學期的第一個單元「直線方程式」之教材大綱中提到：「本單元宜複習線型函數與二次函數...」。雖然函數單元在高職已被刪除，但學生馬上會在第一冊第二章中面臨三角函數的挑戰，往後還有指數函數、對數函數、多項式函數等和函數相關且更進階之課程，故學生的函數基礎知識到達哪個階段，是否足夠做為往後其他函數單元學習之基礎皆是教師關心的重點。

基於上述研究動機，本研究將藉由「線型函數」課程為主題，探討個案學生於應用問題的解題表現，並深入訪談以了解其思維脈絡，從中探討：(1) 個案學生於了解問題、擬定計畫和執行計畫階段的解題表現。(2) 個案學生於引導式的提問後在備驗算回顧階段的思維改變。

貳、文獻探討

為探究學生於線型函數情境式應用問題的解題歷程，以下將分別介紹數學解題的歷程、線型函數應用問題的相關研究及線型函數的多重表徵：

一、 數學解題的歷程

Polya（1945）認為數學解題就是為了達到一個不能立即達到的數學目標，期間解題者沒有方法被告知，但卻要克服困難，繞過障礙而達成目標的方法。Polya 是最早系統化提出解題歷程的學者，在其著作「怎樣解題」（How to solve it）書中，強調教導學生啟發知識（Heuristic knowledge）與解題的重要性，他認為學生在尋求解答的過程中，不管想法還是看待問題之觀點會歷經幾個階段。解題之始，對問題的了解可能有限；當解題活動有些進展後，對問題產生不同的了解；到了快要知道答案時，對問題又有一番新的認識。書中提到數學解題可細分成四個歷程，分別說明如下：（一）了解問題（understanding the problem）：根據題目的提示，解題者必須了解題意、問題目標、已知條件以及題意中所有能運用的條件。（二）擬定計畫（devising a plan）：解題者根據題意，找出未知數與已知數之間的關係，從自我的舊經驗中搜尋相關性的問題或數學概念，建立獲得答案的想法，而後設計一個具有可能成功的計畫。（三）執行計畫（carrying out the plan）：解題者著手執行所擬定的計畫，將解題計畫付諸實現，並仔細檢查每一步驟。（四）驗算回顧（looking back）：解題者根據題意的條件，對答案再做一次的驗算或回顧答案之正確性與合理性。

Mayer（1992）從問題解決和認知心理學的觀點，將解題歷程分為兩個步驟，每個步驟又包含兩個子步驟，其分述如下：1.問題表徵（problem representation）：即將文字或圖案轉換成心理表徵，又包含二個子步驟。（1）問題轉譯（problem translation）和（2）問題整合（problem integration）。2.問題解決（problem solution）：即從問題的心理表徵進行到最後答案的過程，含二個步驟（1）解答的計畫與監控（Solution planning and monitoring）和（2）解答的實施（solution execution）。Mayer 同時指出，在解題歷程中，每個步驟所需的知識並不相同：問題表徵時，轉譯的過程需涉及語言和語意知識；而再

整合的過程，則有賴於基模知識的運用；問題解決時，解題計畫與監控和策略知識有關。而解題的實施，則和程序性知識有關。

綜合上述學者的觀點，雖然每位學者對解題歷程各有不同的觀點，但其實在解決問題的路徑上是一致的。在面對問題時，皆是閱讀、了解問題與察覺問題，再去分析和整合問題，並與自己的先備經驗做連結，擬定解題的計畫，形成解決問題的策略；最後進行計畫的執行，在計畫執行期間，發揮監控的能力，評估解答的合理性。然而 Mayer 將「解題計畫」與「監控」併列成同一解題歷程，且「解題計畫」與「問題整合」兩階段任務之間的界線又難以區分。因此，本研究將以階段區分最簡要明確的 Polya 解題歷程四階段「了解問題」、「擬定計畫」、「執行計畫」與「驗算與回顧」作為主要分析架構。

二、 線型函數應用問題的相關研究

數學應用問題是以日常生活事件為材料，且用語文型態來描述數學問題，因而比一般數學題目涉及更複雜的認知歷程，學生在解題時首先需整理題意，把「語文理解」轉換成「形式數學」，也就是按題意列式，然後再進行運算過程，而困難處即在按照題意列式（張新仁，1989）。Kintsch & Greeno（1985）也提出應用問題的解題常需要結合兩種能力：一是理解能力，二是計算能力。學生根據應用問題的狀況，將文字表達的條件改用數學符號表示，是普通語言到數學算式的一種轉譯，因此學生必須徹底瞭解題目給與的條件與熟悉數學表達的形式（Polya，1945）。上述研究皆顯示學生在解應用問題時，不僅要能利用程序性知識解題，更要能掌握題目中的文字或情境所代表的意思。

國中函數課程也從應用問題著手（國立編譯館主編，2010），藉由建立情境問題以幫助學生理解函數的意義。教育部（2003）提出九年一貫課程綱要之分年細目 7-a-13 其中說明之例題：自強號火車的行駛速率為每小時 120 公里，假設其依固定速率行駛，下表為行駛時間與行駛距離的數據記錄：（如表一）

表一：自強號火車的行駛時間和距離對應表

行駛時間（小時）	行駛距離（公里）
1	120
2	240
3	360

學生需要從上表中，觀察出火車在固定速率時，位移 y 與時間 x 的成比例關係，並將此種比例關係，以函數式 y=120x 來表示。

NCTM（2000）除了強調應該將函數課程納入數學教學計劃中外，更對六到八年級提出要將線型函數列為重要的研究課題。在「學校數學的原則與標準」中就認為中學生要能夠透過應用問題，去探究線型函數符號表徵與函數圖形的關係，且在其教學目標有提到「學生要能理解線型函數的表列、圖表之關係」、「學生應利用模型解決問題，類似能利用表列和圖形來顯現它們的函數和型態」，且認為教師「應鼓舞學生利用表列和圖形進行推論和解決概念性問題」。

綜上所述，學生於線型函數的學習，除了熟習函數關係式的計算、自變數和應變數間的轉換和代入特定值等程序性知識外，更應重視線型函數應用問題之解題。試著建立應用問題的情境來幫助學生理解函數的意義，甚而提升學生對線型函數的認知，因此學生處理應用問題的解題思維是值得探討的。

三、 函數概念的多重表徵

函數概念並非單一的形式，可由多種不同樣貌呈現，此即函數的多重表徵（multiple representation）。許多學者針對函數概念之表徵，都曾作過詳細的探討與研究，例如 Herscovics（1979）提到同一函數概念可由三種型式表徵，分別為數值表列（numerical table）、圖形（graph）和方程式（equation）。Janvier（1987）另外加入了文字敘述（verbal description）作為第四種表徵。Even（1990）集多數學者為大成，將函數分為一般表徵和其他表徵，認為函數的一般表徵有：代數式、圖形；其它的表徵有集合映射圖（arrow diagram）、表列式、有序數對集合（sets of ordered pairs）以及來自日常生活和其它學科的情境。

Kaput（1989）年曾提到每種函數表徵皆有其特質。代數式表徵以數學式為主，呈現應變數之值來自於自變數之值的規則，是函數表徵中最常使用的形式；圖形式表徵將自變數與應變數之間的關係藉由直角平面座標呈現，並稱之為函數圖形，能呈現出整體的概念；表列式分別列出定義域與值域之各項數值，所顯示的資料在數值的變化上較明確；集合映射圖容易看出在定義域與值域之間各元素的映射關係；文字情境敘述以文字敘述函數概念，能呈現無法以其他表徵呈現之情境。

而在臺灣國高中現有線型函數的各版本教科書課程中，研究者發現在線型函數應用問題方面，題目設計大多以文字情境敘述為主，圖形式（即視覺或圖形）、表列式（即數值表列或表格）為輔。不同的表徵呈現雖能加深學生不同的函數概念，卻也限制了其他函數表徵的發展，故研究者希望能針對不同表徵之線型函數，設計情境式應用問題工作單，透過解題表現以及訪談所得之內容，來更深入了解學生在不同的情境問題表徵之下其解題能達至何種階段。

參、研究方法

本研究採個案研究法，研究架構以線型函數為主軸，設計情境式應用問題工作單，讓學生自由解題，並藉由訪談來深入瞭解學生在應用問題的解題歷程。研究中將 Polya（1945）所提出的解題歷程「了解問題」、「擬定計畫」、「執行計畫」與「驗算回顧」四階段分成兩部分：先將重點放在個案能否了解情境式應用問題之題意、擬定適宜之解題策略並正確執行解題策略，分析學生的解題思考過程；而由於個案學生曾表示對於應用問題缺乏信心，不知道算出來的答案是否正確，故研究者將於訪談學生時，觀察其是否驗證答案之合理性，倘若受訪者預期性的行為沒有發生時，則給予引導式的建議（the guides use of heuristic suggestions），從中觀察個案學生於驗算回顧階段的思維變化。

一、研究對象

參與本研究的個案小雅（化名）喜好閱讀，擁有很好的表達能力，在校數學成績相

當優異，對於解工作單問題所需具備的程序性知識的建立頗為完備，例如熟練比例式的基本運算，能解二元一次聯立方程式，以及能在直角坐標平面上描繪線型函數的圖形。但研究者在觀察小雅平時考試中應用問題的解題後，曾發現再解題過程中，有概念性知識錯誤但是解答正確的情形，詢問原因後，小雅坦承很害怕遇到應用問題，有時解題只是把題目中的數字套進公式中，對於非例行性的問題缺乏信心，不知道算出來的答案是否正確。此外，研究者也發現到小雅個性活潑開朗，課堂上和研究者互動良好，敢勇於發問，透過訪談可以提供豐富的資料以作為解釋（interpretation）之用。因此透過此研究，研究者想了解小雅能否能將以上先備知識應用到解線型函數應用問題的解題計畫之中，並關注小雅是否具備驗證答案合理性之能力，希望能增強其解題信心。

二、研究者

為了暸解小雅在解題時的自發性想法，於解題之前，研究者會要求學生以完整的代數式子或畫圖表徵呈現其想法或策略，若有需要可用文字輔助說明。在學生解題之後，研究者將扮演晤談者之角色，利用 Polya 的解題理論為訪談架構，分析個案在解題歷程各階段的表現。其中「執行計畫」階段多數屬學生程序性知識之計算，研究者主要參考學生的解題紀錄，訪談過程中僅就需要才提問學生想法。訪談重點將針對其他三個階段：「了解問題」、「擬定計畫」及「驗算回顧」，先對個案進行非引導式的詢問，基本結構和問句條列如下：

（一）詢問學生是否能掌握題目中各項資訊的含義，例如：你知道題目中的已知條件為何嗎?你知道題目中之所求目標為何嗎?你知道基本通話費代表什麼意義嗎?

（二）詢問學生如何完成解題目標，例如：你使用何種策略?為什麼你會使用此種方法?

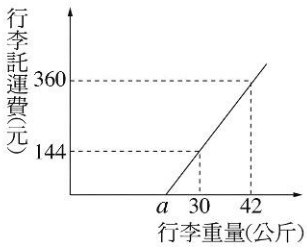
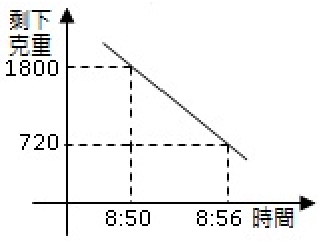
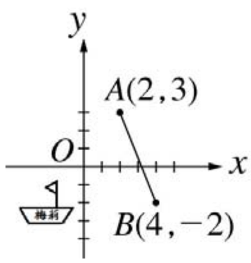
（三）詢問學生能否驗算回顧答案之合理性，例如：如何判斷你的答案是否正確?你覺得你算的答案合理嗎?而在此階段，如果受訪者預期性的行為沒有發生時，研究者將給予引導式的建議，盡量引導學生思考如何驗算或回顧答案，例如：你有發現表列數值的規律嗎?從圖形中可以觀察出什麼嗎?你能使用別種方法嗎?

三、工作單

為了深入探討小雅於情境式應用問題之解題歷程，研究者以「圖形表徵」與「數值表列」為基礎，參考國內外線型函數應用問題之相關文獻，分析國內各版本教科書及國中基本學力測驗歷屆試題、高職四技二專統測試題，編修出六題敘述情境各不相同之應用問題，並依照題目中表徵函數的方式，將工作單分為「表列式」和「圖形式」兩類；每類各三個題目。編製成「線型函數應用問題工作單」，如表二：

表二：*線型函數應用問題各題分析表*

<table>
<tr><th>題型</th><th>問題特質</th><th>題號、題目</th></tr>
<tr><td rowspan="3">表列式</td><td>常數函數</td><td>1. 已知某線型函數其對應關係如下表，求 $\alpha+\beta=$？
[編修自 92 基測二 7]
<table>
<tr><td>x</td><td>…</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>…</td></tr>
<tr><td>f(x)</td><td>…</td><td>4</td><td>α</td><td>4</td><td>β</td><td>…</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>離散點表徵的函數</td><td>2. 四邊形的內角度數和為 360 度，五邊形的內角度數和為 540 度，六邊形的內角度數和為 720 度，已知多邊形的邊數 x 與內角度數和 y 的關係，可用線型函數來表示，則試求二十二邊形的內角度數和為多少度？
<table>
<tr><td>X</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>…</td></tr>
<tr><td>Y</td><td>180</td><td>360</td><td>540</td><td>720</td><td>…</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>分段函數</td><td>3. 右表為大華公司的通話費計算方式：300 秒以內(含)只繳基本費 a 元，超過 300 秒之後的費用，與通話時間成線型函數關係，則基本費是多少元？[編修自 93 基測二 26]
<table>
<tr><td>通話秒數</td><td>0</td><td>150</td><td>…</td><td>300</td><td>500</td><td>1200</td></tr>
<tr><td>費用(元)</td><td>a</td><td>a</td><td>…</td><td>a</td><td>36</td><td>50</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

	斜率為正值	4. 型男航空公司規定，旅客行李重量若在 a 公斤以下(包含 a 公斤)，則完全免費，但若超過 a 公斤，則超重部分與行李託運費成線型函數關係，其關係如右圖所示。試求行李重量在幾公斤以下不需託運費?	
圖形式	斜率為負值	5. 如圖為八克星咖啡館某天早晨研磨咖啡豆時剩下咖啡豆重量和時間的關係圖，已知咖啡豆剩餘重量和研磨時間呈線型函數圖形如右圖，推估八克星咖啡館最快幾點幾分能將咖啡豆研磨完畢？[編修自 93 基測一 16]	
	斜率為固定值	6. 已知梅莉海盜船之航線在平面座標圖上恰呈線型函數$y=f(x)=\frac{1}{2}x+b$，某日梅利號航經某海域，得知海軍在A(2，3)、B(4，−2)兩地之間佈下水雷網，若航海士要帶領這群海盜順利避開水雷網(航線不能與AB線段相交)，則b的範圍為何？	

註：Markovits, Eylon & Bruckheimer（1986）在九年級已修過函數相關課程的學生的研究中，發現學生對於下列三種函數最感困惑：常數函數、分段函數（piecewise function）和以離散點表徵的函數，故研究者依此作為「表列式」表徵的設計依據。

四、資料蒐集與分析

本研究的資料來源，主要是小雅填寫在工作單上的解題記錄（包含文字敘述、畫圖表徵、數學算式…等等），以及研究者初步分析工作單之解題記錄後，深入訪談學生的錄影及錄音資料，轉譯過程適當的刪除與主題無關的對話，形成解題歷程的原始資料。原始資料完成後，以 Polya 解題歷程四階段為主要分析架構，將「了解問題」、「擬定計畫」、「執行計畫」與「驗算回顧」做為主要編碼（coding）類別。

分析面向可分為了解問題：探討能否根據題意說出已知條件、解題目標以及題意中所有能運用的資訊。擬定計畫：解題者根據題意，找出未知數與已知數之間的關係，連結舊經驗或數學概念以建立獲得答案的想法，而後設計一個具有可能成功的計畫。執行計畫：檢視解題者能否將解題計畫付諸實現。驗算回顧：包含個案能否對答案驗算、對過程的驗算、用別的方法推導出相同的結果、一眼看出答案、或是在別的問題上，應用這個結果與方法。

為求資料分析的客觀，提高研究的信度，將採用重覆情節（episode）的方式（甯自強，1998）。例如以情境與數據不同，但表徵結構類似的問題，檢核訪談時小雅對相同概念的一致性，並對照前後解題之策略是否相似。在效度上則採用三角校正法（triangulate），在訪談對話資料的編碼過程中，與研究同儕、指導教授共同討論、修正，做為人員的三角校正；分析不同的資料來源，檢視是否一致，避免資料詮釋流於偏見，以做為資料的三角校正。例如小雅在第四題運費託運題中，經由研究者引導式的提問之後，能用比例的概念推算答案的正確性，而在第五題研磨咖啡題中，亦能利用比例推理驗算出正確之答案，重覆的行為證實小雅卻已能在引導式的詢問之後，發展出驗算回顧的能力。

肆、結果與討論

本研究以情境式之線型函數應用問題為主要施測工具，藉由工作單之解題紀錄，以了解小雅在線型函數應用問題的解題表現，接著透過深入訪談來理解小雅在解題時的真實思維。而由於小雅在原始解題記錄中皆未呈現出驗算回顧之階段，故研究者將以引導式提問來深入了解小雅之解題到達何種歷程。本章將逐題分析小雅在訪談時所呈現的真實思維脈絡，再討論在引導式的提問之下，其解題思維之變化。為了節省篇幅，茲建表三以整理在引導式提問前，小雅於每一個歷程的表現。

表三：提問前，小雅六題的解題歷程

（表徵）題號	了解問題	擬定計畫	執行計畫	驗算回顧
（表列）1	完整呈現	a. 聯立方程式求函數式 b. 代入特定值	執行正確	解題中未見，但經訪談證實有連結舊經驗以回顧答案之合理性。
（表列）2	完整呈現	a. 聯立方程式求函數式 b. 代入特定值	執行正確	重新驗算解題過程
（表列）3	不夠確實	a. 轉換圖形式表徵 b. 聯立方程式	轉換圖形式表徵時遺漏部分圖形	解題中未見
（圖形）4	完整呈現	a. 聯立方程式求函數式 b. 代入特定值	執行正確	解題中未見
（圖形）5	完整呈現	a. 時間轉換成個位數 b. 聯立方程式	時間轉換時誤用基準點	解題中未見
（圖形）6	不夠確實	代入特定值	執行正確	解題中未見

表列式：題號1

小雅利用設立二元一次聯立方程式的方式出線型函數，先假設線型函數為f(x)＝ax + b後，代入（1 , 4）和（3 , 4）後找出a＝0，b＝4，故f(x)＝4，而題目所求$\alpha + \beta =$ f(2) + f(4)＝4＋4＝8（圖1）；訪談時，在小雅正確解釋題意和解題目標後，研究者判斷小雅已具備**了解問題、擬定計畫、執行計畫**三階段，而轉向詢問小雅能否證明此題結果是否正

確。而小雅表示：「這題我一算完就發現白算了，因為α和β一看就知道是4」。研究者進而詢問小雅「你怎麼能一看就知道是4，能不能說明給老師聽?」小雅：「因為這題所有的f(x)都等於4，畫出來是水平線」。

從訪談過程中，研究者發現小雅利用聯立方程式解完函數式後，即看出應變數皆相同，連結舊經驗後，想起常數函數在直角座標上的圖形為水平線，而判斷此題答案正確，故研究者認定小雅在此題已具備**驗算回顧**之解題歷程。此外，由於發現小雅在第 3 題之分段函數應用問題中，將表列式表徵轉換成直角座標圖時產生部分疏漏，故引導小雅練習將數值表列轉換成圖形之概念（如圖 2)，以作為訪談第 3 題驗算回顧時之依據。

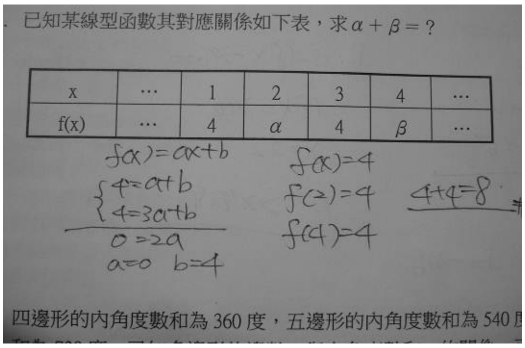


圖 1 第 1 題之原始解題記錄

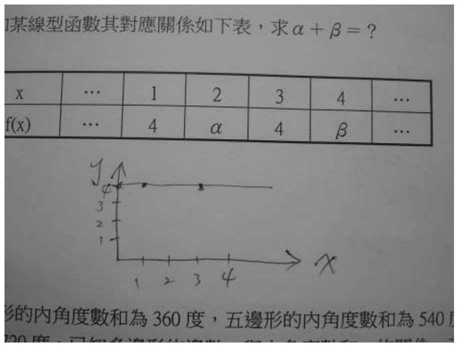


圖 2 第 1 題之訪談解題記錄

表列式：題號2

小雅仍以設立聯立方程式求出線型函數：f(x)＝180x－360，再將自變數22代入線型函數，得到f(22)＝180×22－360＝3600（如圖3)；研究者嘗試測驗小雅一些非例行性之問題，例如：「如果x=2的話，你會得到內角度數和為幾度?」小雅皆能正確回答出：「最少需要三邊才能畫出多邊形。」故根據解題記錄和訪談內容，判斷小雅已具備**了解問題**、**擬定計畫**、**執行計畫**的能力。而當詢問能否證明此題結果是否正確時，小雅隨即重新將解題過程檢驗一次，表示：「驗算完了，應該沒錯」。而雖然Polya認為重新驗算亦屬於驗算回顧之表現，但基於希望小雅能從多方向角度去思考應用問題的原因，故進而詢問小雅：「你能不能用別種方法算算看呢?」小雅沉思後表示：「沒辦法了」。至此，研究者確認小雅無法使用不同之解題策略，開始以引導式方法詢問小雅：

0211T:你能否仔細觀察這個表格，告訴老師這裡有沒有什麼規律?

0212S:（仔細觀察後，手比表格）度數和每一格都增加 180 度。

0213T: 那所以 7 邊形、8 邊形、9 邊形的內角度數和是多少?

0214S:（開始由 720 度往上加）是 900...1080...

0215T: 那 22 邊形?

0216S:（開始列出算式，如圖 4）：恩，答案一樣。

0217T: 你能否告訴老師，為何你每題都採用解二元一次聯立方程式的做法?

0218S: 因為題目中有提到線型函數阿，老師說線型函數就是要設 $f(x)=ax+b$ 阿。

0219T: 那你有考慮過邊長數和內角度數和的關係嗎?

0220S: 沒有，我看到題目就直接算了。

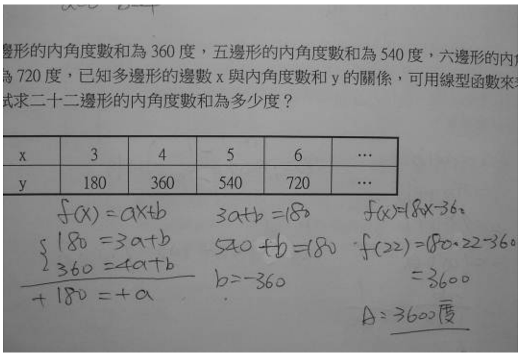


圖 3 第 2 題之原始解題記錄

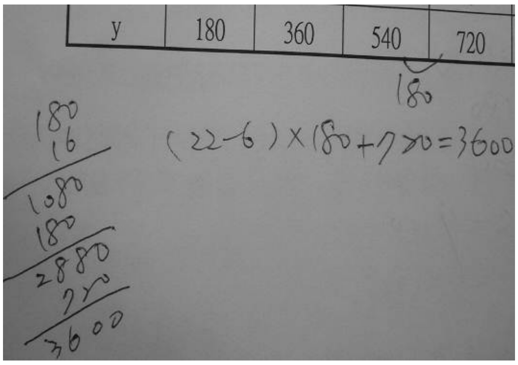
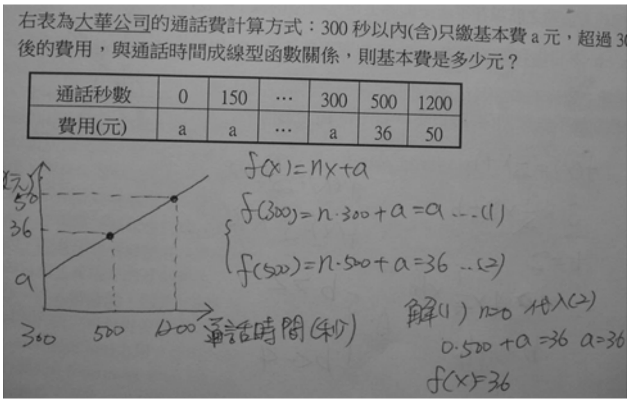


圖 4 第 2 題之訪談解題記錄

從解題記錄和訪談過程中，研究者發現小雅無論是表列式表徵或圖形式表徵之題目，皆慣用二元一次聯立方程式求解函數式的策略，研究者詢問後的結果是因為小雅認為遇到線型函數就是要利用聯立方程式解函數式（行號：0218S），推究其原因可能和學校多利用程序性知識去解題，導致小雅忽略了在此題情境中，邊長及內角度數和有「內角和＝(邊長－2) ×180」之關係。而在研究者的引導提問之下，小雅始能利用不同之解題策略（比例推理）來驗證其答案，而達到**驗算回顧**之階段。

表列式：題號 3

小雅在工作單第三題，先將表列式表徵轉換成直角座標圖形，並描繪出表格中超過基本費的三個座標（如圖 5），接者假設函數式為 f(x)＝nx+ a，代入（300 , a）和（500, 36）解函數式，經過計算後解出 n＝0，a＝36；計算過程到最後寫出 f(x)＝36 即停止作答，因解題紀錄不完整，難以推測後半段解題思維為何，將透過訪談以了解小雅之真實想法。



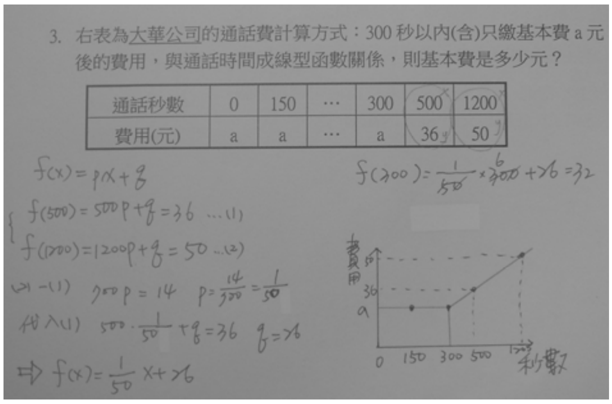


圖 5 第 3 題之原始解題記錄　　　　　　圖 6 第 3 題之訪談解題記錄

0301S：基本費在 300 秒以下都是 a 元，所以打 0 元也要付基本費，打 150 元也要付基本費，然後超過 300 後的費用會和通話時間成比例關係。

0302T：那你畫的圖所代表的意思是...?

0303S：就是題目中超過 300 秒之後的費用，300 秒的費用是 a 元，500 秒要付 36 元，然後 1200 秒要付 50 元。

0304T：那 300 秒以下的你為什麼不畫?

0305S：因為求函數用不到，所以可以不用畫...

…

0310T：你告訴我你覺得錯在哪裡？

0311S：就是算出來後 f(x)＝36，這樣好像是水平線才對...

0312T：你這函數式怎麼和前幾題設的不太一樣?（比著 f (x)=nx+a）

0313S：因為圖形的截距是 a 阿，所以我假設 f (x)=nx+a。

0314T：截距指的是什麼?

0315S：截距指的是圖形和 y 軸的座標...

0316T：那你的 a 是和 y 軸的座標嗎，你可以比對看看你在第一題時是如何畫圖的嗎?

0317S：我畫錯了，a 應該是在 300 的座標才對...

0318T：那你覺得應該要怎麼改?

0319S：(沉思)設函數式不要設 a 就好了，可以設 f (x)=px+q。

訪談之始，研究者先讓小雅重新嘗試解釋題意，過程中可以發現小雅能理解題目中「基本費率」所代表之涵義（行號 0301S-0303S），此為**了解問題**的展現。但當小雅將表列式表徵轉換為圖形式表徵的過程中，卻認為基本費以下的數值不屬於解題目標的一部分，故自行省略了 300 元之下的欄位，導致在設定函數式 f(x)時產生錯誤（行號 0313S），但在透過訪談後，藉由引導式提問，小雅漸漸發現當表列式表徵轉換成圖形式表徵時產生的錯誤（行號 0314T-0317S），因為少畫了 300 元之下的座標，導致誤判 a 值（即基本費）為該圖之截距。研究者認為小雅雖掌握題目之中心思想，但卻未能觀察數值表列之全貌，故認定小雅在**了解問題**階段不夠完備。而也由於將表列式表徵轉換圖形式表徵時造成的疏漏，因而誤設函數式為 f(x)＝nx＋a，導致小雅即使在**擬訂計畫**上和前兩題如出一轍，卻無法正確**執行計畫**。而在小雅修正函數式為 f(x)＝px＋q 後，研究者請小雅重新作圖和計算，即可正確**執行計畫**（如圖 6）。

圖形式：題號4

小雅於第四題依然使用設立聯立方程式解函數式的作法（如圖7），正確求出函數式並找到特定值，並於訪談中清楚闡述「不需託運費代表託運費為0元，題目要求的就是當託運費為0元時行李的重量為幾公斤。」故研究者根據小雅之解題表記錄和訪談後分析後認為小雅已具備**了解問題**、**擬定計畫**、**執行計畫**三階段，而轉向詢問小雅能否證明此題結果是否正確。

…

0405T：那你能說說看要怎麼證明你的答案是對的呢?

0406S：(沉思) 將 22 寫至圖形中 a 之位置。

0407T：(引導式提問)能否僅利用圖形中的資訊來推算呢?

0408S：(思考後，開始作圖和計算如圖 8)沒錯，22 公斤是對的。

0409T：能否說明你在算什麼呢?

0410S： 22 到 30 每增加 8 公斤就會多 144 元，比例剛好等於每 20 公斤增加 360 元。

0411T：你怎麼知道他的比值剛好相等?

0412S：因為交叉相乘後是相等的…

有鑑於小雅每題皆使用相同之解題策略（二元一次聯立方程式解函數式），研究者盡量引導小雅利用更多元的策略來驗算答案的正確性，而小雅在研究者的引導式提問之下，先試著將22填至圖形中 a 的位置，小雅思考後喚起先前的舊經驗，利用相似三角形邊長成比例的概念，先寫下兩個三角形底和高之比值，並利用比例式交叉乘積相等來驗證該比率是正確的（行號0407T-0412S），進而**驗算回顧**原本答案是正確的。而研究者也將測試小雅在下題中是否能利用比例推理之策略來驗算答案，所得結果是正向的。

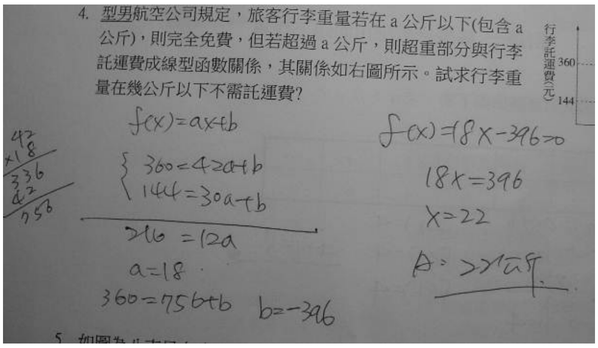


圖 7 第 4 題之原始解題記錄

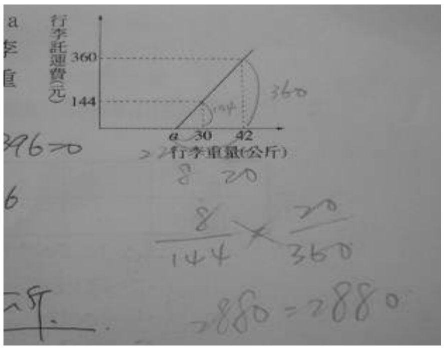


圖 8 第 4 題之訪談解題記錄

圖形式：題號5

小雅首先假設函數式 y＝ax＋b，利用二元一次聯立方程式解函數式的作法，代入(0, 1800)和(6, 720)兩點而算出函數式。函數式為 0 時，x＝10；最後利用 8:56＋10＝9:06 的式子得到咖啡豆會在九點零六分研磨完畢(如圖 9)。小雅此題已成功擬定解題計畫並推算出答案，但卻在最後一步功虧一簣，茲將透過訪談以探究小雅在此題之解題歷程。

0501T：小雅，能否說說看這題題目在問什麼?

0502S：就是咖啡豆一開始在 8 點 50 分的時候剩下 1800 克，到了 8 點 56 分的時候剩下 720 克，題目是要問幾點幾分的時候可以把咖啡豆磨完。

…

0505T：那你能說說看這裡為什麼要代入 0 和 6 呢?

0506S：(沉思) 我想會比較好算吧，因為一看到題目就想用 0 和 6 代替 8:50 和 8:56...

0507T：那再來，你為什麼會令函數式等於零去計算 x 的值呢?

0508S：因為咖啡磨完的話，等於咖啡會剩下 0 克重…

0509T：所以你算出來 x＝10 後，代表什麼意思?

0510S：代表時間還會經過 10 分鐘。

0511T：從哪裡經過 10 分鐘?

0512S：從 8 點 56 分。

0513T：所以你認為加上十分鐘後咖啡會在 9:06 分磨完，沒錯吧?

0514S：應該沒錯吧。

0515T：好的，那你可以證明給我看看你的答案是正確的嗎?

0516S：(開始計算，解題記錄如圖 10，計算出答案為 9：00)

0517T：喔，答案不一樣呢，哪個是對的?

0518S：是九點，因為從 720 克重變成 0 克只需經過 4 分鐘，因為本來我設定 50 分為 0，56 分為 6，所以如果算出來是 10 的話，答案應該是用 50 分去加才對...

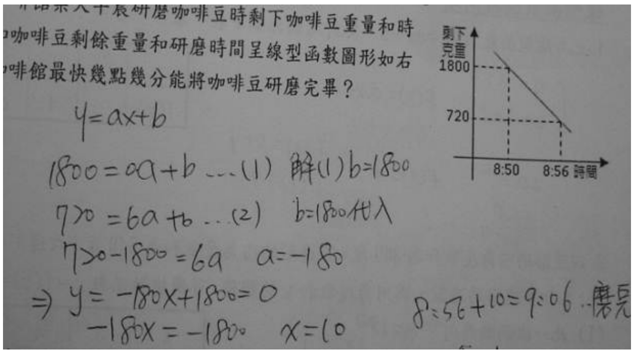


圖 9 第 5 題之原始解題記錄

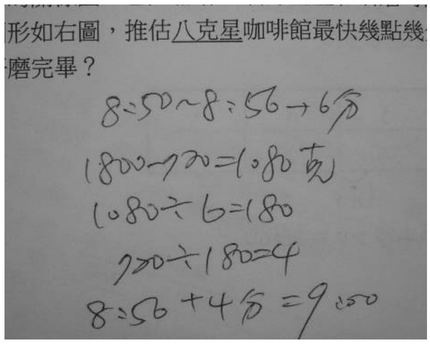


圖 10 第 5 題之訪談解題記錄

訪談時，研究者請小雅說明本題的解題目標，小雅基本上可以理解題目中的已知條件（咖啡豆在 8：50 為 1800 克、8：56 為 720 克）和解題目標（幾點幾分研磨完畢），也了解到當咖啡豆研磨完畢時，其重量會剩下 0 克重之意義（行號 0504S、0508S），皆為小雅在**了解問題**上的展現。而在**擬定計畫**階段將不再贅述小雅慣用之「聯立方程式解函數式」策略，特別的是小雅已經可以適當的運用「切換基準點」的策略，將時間軸上 8:50 當成基準點，轉換設定成 0 分，將 8:56 轉換成 6 分，以增進運算的速度。可惜的是小雅在後來計算出答案是 10 分鐘的時候，卻把 8:56 設定成基準點，導致無法順利地將時間轉換回正確時間 9:00，證明小雅在**擬定計畫**的階段，當擬定出非例行性之解題策略時，在**計畫執行**上仍不夠完備，例如在時間轉換的過程中仍有找錯基準點的問題(行號 0509T -0514S）。此外在**驗算回顧**階段，小雅已能根據題 4 於訪談時，研究者所引導之比例推理的策略，發現兩者之解題結果相異之處，更回頭發現時間和數字之間轉換上有誤用基準點的錯誤。(行號 0516S -0518S)。

圖形式：題號6

小雅首先將兩點（2,3）和（4,−2）帶入函數式，以求得兩點之 b 值，並推導出 b 值的範圍（圖 11)。並在訪談中陳述題目的題意和解題策略（行號 0602S)，此為**了解問題、擬定計畫、執行計畫**之歷程的展現。而在解題記錄中，研究者發現小雅雖能陳述解題目標，甚至成功推算出正確答案，但在觀察其解題記錄時，發現小雅對於海盜船之航線圖卻是畫錯的。小雅雖然善於利用程序性知識解題，但卻未對問題情境和已知條件做深入性的理解和判斷，也就是**了解問題**部分不夠深入。雖然經過訪談後小雅在重新畫上函數的圖形表徵後發現兩條航線是平行的(行號 0610S)，不過也證明了即使學生未能完全了解問題之所有概念，卻有可能正確地完成解題目標。

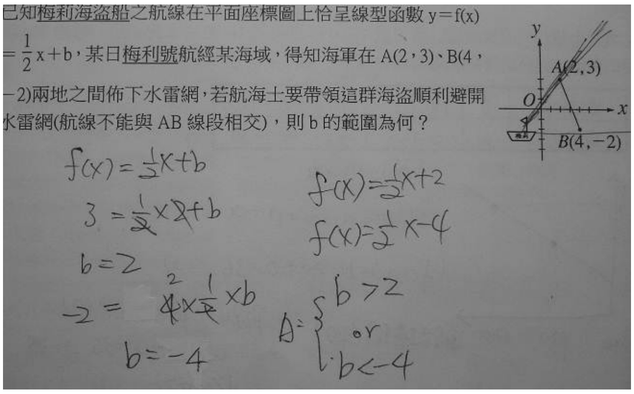


圖 11 第 6 題的原始解題記錄

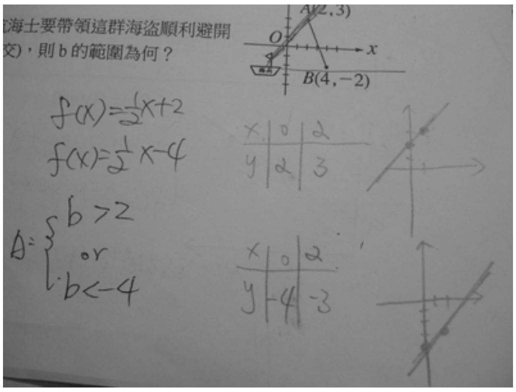


圖 12 第 6 題的訪談解題記錄

0601T：小雅，能否說說看這題題目在問什麼?

0602S：船一開始在這裡，如果要避開水雷，就要航行在 AB 線段之外，所以我把數字代進去後，在 2 和 4 之外就對了。

0603T：那你這兩條線代表什麼意思呢?

0604S：代表船只能走在這兩條路線之外。

0605T：那你有辦法證明這題是正確的嗎?

0606S：(沉思) 沒有辦法...

0607T：那你認為航線的圖形這樣畫是對的嗎?

0608S：是對的。

0609T：所以你可以試著畫畫看這兩個函數式的圖形嗎?

0610S：（作圖如圖 12）應該是平行才對，不過對答案應該沒影響。

為了節省篇幅，將以表四呈現小雅在引導式提問後，其解題歷程思維之改變。

表四：訪談後，小雅六題的解題歷程（粗體為有改變之處）

（表徵）題號	了解問題	擬定計畫	執行計畫	驗算回顧
（表列）1	完整呈現	**a. 利用函數圖形為水平線之概念** **b. 轉換成圖形表徵**	執行正確	**比對先備知識後後確認解題正確**
（表列）2	完整呈現	**a. 發現數值之規律** **b. 利用比例推理之策略**	執行正確	**比對原始答案後確認解題正確**
（表列）3	**比對第一題表徵轉換時的過程，發現原始解題中遺漏部分函數圖形，導致求函數式時產生錯誤**	a. 令 $f(x) = px+q$ b. 代入特定值	**執行正確**	訪談中未見
（圖形）4	完整呈現	**利用相似三角形邊長成比例之策略**	執行正確	**透過引導式提問後利用比率推理之策略驗算答案之合理性**
（圖形）5	完整呈現	**利用咖啡研磨速率不變之策略**	執行正確	**和原始答案後有異，發現在時間和數字的轉換上產生錯誤。**
（圖形）6	**理解題目中海盜船之航線為相互平行**	代入特定值	執行正確	訪談中未見

五、結論與建議

一、結論

本研究主要在探討小雅在線型函數應用問題的解題歷程，研究結論將就研究目的分成兩部分：(一) 個案學生於了解問題、擬定計畫和執行計畫階段的解題表現。(二) 個案學生於引導式的提問後是否具備驗算回顧的能力。

(一) 個案學生於了解問題、擬定計畫和執行計畫階段的解題表現：

１. 了解問題：小雅擁有完備的程序性知識理解，但概念性知識理解略顯不足。

當題目給定之已知條件為小雅熟悉之訊息時，往往利用程序性知識去解決問題，在常數函數（第一題）和多邊形內角和（第二題）中，小雅僅透過表列提供之數值資訊即開始代入聯立方程式解題，卻忽略了題目之情境可運用先前學過之數學概念，例如第一題常數函數的值域皆為固定值，第二題多邊形內角和可透過邊長和度數和的關係更快達成解題目標。此外在海盜船一題（第六題）中，小雅熟練地將特定值代入函數式中，雖然答案正確，卻忽略了函數式之斜率固定，航線應為水平線之數學概念。此種結果和考試引導教學有關，考試往往只重視結果，卻忽略了學生對於題目的思考歷程，學生受到的訓練的就是快速、精準且制式的解出正確答案，小雅就曾表示線型函數的解法就是設立函數式 f(x)＝ax+b 後解聯立方程式，久而久之在解題時只關注題目中的數值，導致學生越來越著重在程序性知識的發展。

2. 擬定計畫：小雅在原始解題記錄中，對所有的題目皆採用單一種策略。

劉秋木（1996）就 Polya 的擬訂計畫階段提出幾項一般性的解題策略，包括:有價值的聯想、條件目的分析、應用算術式、應用代數式、畫圖、作資料表、簡化資料、尋找組型、猜測與檢核、發現關係、推理等十類。而蕭淑娟（2010）針對八年級學生處理線型函數情境問題指出，學生處理情境問題的解題策略區分成操作圖形物件、運用比例推理與解聯立方程式。相較之下，小雅於原始解題中所呈現的類型較為貧乏，但經由研究者在訪談給與小雅引導式的提問後，例如在行李託運題中利用比例推理之策略，小雅漸漸地能在別提（如咖啡研磨題）中應用此種策略。

3. 執行計畫：小雅對於解題中常需運用之計算能力極為熟練，但對於較少擬定之策略所需之計算執行力欠佳。

從小雅的解題計畫和訪談過程中可以發現，小雅對於程序性的計算解題相當優異，不管是解聯立方程式，比例推理的運算或者是一般的計算式，皆很少看到小雅出錯。此外不管是函數表徵方式的不同，也未能影響小雅執行計畫的正確性。例如在圖形表徵中，雖然三題題目之斜率分別為正值、負值和固定值，小雅皆能精確運算出函數式或求解特定值。但是在和概念性知識相關之計畫執行時，小雅的表現就略顯不足，例如在咖啡研磨題（第五題）中，小雅在時間和整數的轉換上就產生找錯基準點的錯誤，導致該題在最後執行時計算錯誤。

（二）個案學生於引導式的提問後在備驗算回顧階段的思維改變：

1. 訪談之前：小雅於原始解題記錄中，無法觀察出具備驗算或回顧的解題表現。

Polya 的解題理論中，「驗算與回顧」階段包含對答案的驗算、對過程的驗算、用別的方法推導出相同的結果、能否一眼看出答案、能否在別的問題上，應用這個結果與方法。而綜觀小雅在這六題情境問題的解題結果，發現僅在第一題常數函數能驗證答案的合理性，而第二題在研究者的要求下有重新驗算解題過程是否計算錯誤，其餘題目皆無驗算或回顧的表現，整體來說小雅在驗算回顧方面的能力是有待啟發的。

2. 訪談之後：在訪談中適時給予引導式的提問之下，逐能展現其驗算回顧的能力。

訪談中小雅曾表示以往課堂所學的舊經驗中，線型函數的數學式就是 $f(x)=ax+b$，所以當他看到題目中出現「線型函數」的關鍵字就會制式的設立函數式。此種先備知識往往容易影響學生解題時的策略決定，以及侷限解題後對答案合理性的驗證。小雅原先認為線型函數就是要利用程序性的設立方程式的方式解題，但卻忽略了針對不同的情境問題，可利用題目中所給定的條件加以組織出不同的解題策略。而在引導式提問的介入之下，喚起了小雅其他數學先備知識，例如在第二題多邊形內角和中，小雅在研究者提示觀察表格之間的規律後，隨即能將焦點關注在表列中自變數和應變數的關係，並發現每邊長每增加一邊，度數和就會增加 180 度；在第四題中藉由提示可利用圖形中之幾何

關係，小雅隨即畫出相似三角形之對應邊，再利用對應邊長成比例的概念驗算答案。甚至訪談至第五題時，小雅能將策略推展至咖啡研磨題，利用咖啡豆研磨的速率不變的概念發展出類似比例推理的策略，藉以驗證和回顧答案之正確性。

二、建議

在本研究中發現，小雅擁有完備的程序性知識理解，但概念性知識理解略顯不足。即使像小雅數學成績這麼優秀的學生，仍在多數題目中利用程序性的聯立方程式解題，但卻未先對問題做深入性的理解再進行策略擬定，也就是「了解問題」部分不夠深入。建議教師在教學時間的允許之下，不要任由考試引導教學，或是利用公式代入來速算求解，而是陪著學生去了解每個情境、每個文句、每個圖形與每個表格所表徵的意義，其背後是否隱含學生不易發現的概念性知識，或是容易造成學生迷思的概念。

此外，在解題記錄中可以發現，小雅在解題後欠缺驗算或回顧的歷程，但在老師的引導和提問之下，小雅漸漸能修正其解題的策略。King在1989年提到，提問本身就是一種後設認知的歷程，具有反思的功能，學生藉此能活化其認知和理解。教師於平時教學時，不應直接向學生說明解題中的疏漏之處，而是藉由問題的引導，讓學習者能透過教師提醒某些訊息後而啟發靈感，進而修正學習的策略，達到認知的調整。

讓學生具備問題解決的能力，是數學課程教學的重要目的，更是教育部強調學校教育的目標，解線型函數應用問題之單元正是讓學生從許多個別問題的思考。教師在教學時，可試著嘗試透過了解問題，擬定計畫，執行計畫，驗算回顧成為形式化的問題解決機制，期使學生能將數學問題的解決能力，轉移成日常生活問題的解決能力。

參考文獻

張新仁（1989）：不同學科的認知歷程分析。*教育研究*，3，43-59。

劉秋木（1996）。*國小數學科教學研究*。台北：五南。

甯自強（1998）。涂景翰的數概念。*科學教育學刊*，6(3)，255-269。

教育部（2003）。*國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域*。台北市：教育部。

曹雅玲（2007）。提升兒童解決數學應用問題的能力。*國教新知*，54(4)，44-50。

國立編譯館主編（2010）。國民中學數學第二冊。台北市：國立編譯館。

教育部（2010）。*國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域*。台北市：教育部。

蕭淑娟（2010）。八年級學生之解題策略分析，未出版之碩士論文，國立臺灣師範大學，臺北。

Even, R. (1990). Subject matter knowledge for teaching and the case of function. *Educational Studies in Mathematics, 21*, 521-544.

Janvier, C. (1987). Translation processes in mathematics education. In C. Janvier (Ed.) , *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, 27-31.Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J. J. (1987). Representation systems and mathematics. In C. Janvier (Ed.). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, 19-26. Hillsdale, NJ:Erlbaum.

King, A. (1989). Effects of self-questioning training on college student's comprehension of lectures. *Contemporary Education on psychology, 14*, 366-381.

Kintsch, W., & Greeno, J. G. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review*, 92, 109-129.

Lester, F. K. (1980). Problem solving: Is it a problem? In M. M. Lindguiet (Ed.), *Selected issues in mathematics education* (pp.36). BC: Mc Cutchan.

Markovits, Z., Eylon B. A. , & Bruckheimer, M. (1986). Function today and yesterday. *For* *the Learning of Mathematics*,*6*(2) 1828.

Mayer, R. E. (1985). Implications of cognitive psychology for instruction in mathematical problem solving. In E. A. Silver(Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*(pp.123-138). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates

Mayer, R. E. (1992). *Thinking, problem solving, cognition* (2nd ed.), New York: W. H. Freeman and Company.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles & standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Polya, G. (2006)。*怎樣解題*（蔡坤憲譯）。台北：天下文化。（原著出版於 1945）。

活動報馬仔

一、 **2012/07/08(日)~2012/07/15(日)**

The 12th International Congress on Mathematical Education

地點：Seoul, Korea

參考網址：http://www.icme12.org/

二、 **2012/07/18(三)~2012/07/22(日)**

The 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education

地點：國立台灣師範大學

參考網址：http://www.tame.tw/pme36/index.html

稿 約

一、本刊徵選之數學教育刊物為：

（一）本刊以徵選實務性的數學教育刊物為主，舉凡任何數學創新教學之方法或策略、數學教學實務經驗、數學課程設計與實踐之心得分享等皆為本刊之首要選擇標的；

（二）研究文章（包括以實驗、個案、調查或歷史等研究法所得之結果，和文獻評論、理論分析等）；

（三）短文（包括研究問題評析、數學教育之構想、書評、論文批判等）；以及

（四）其他符合本刊宗旨之文章。

二、本刊所刊之文章，需為報導原創性教學或研究成果之正式文章，且未曾於其他刊物或書籍發表者（在本刊發表之文章未經台灣數學教育學會同意，不得再於他處發表）。

（一）來稿請注意下列事項：

1. 來稿請以中文撰寫，力求通俗易讀，須為電腦打字，每篇以不超過 6000 字為原則（特約稿不在此限），以電子郵件傳送。
2. 來稿請附中英文篇名、作者姓名及服務機關，作者姓名中英文並列，若有一位以上者，請在作者姓名及服務機關處加註（1）、（2）、（3）等對應符號，以便識別，服務機關請寫正式名稱。
3. 來稿請附中英文摘要，並於摘要後列明關鍵詞彙（key words），依筆劃順序排序（以不超過五個為原則），英文關鍵詞彙則須與中文關鍵詞彙相對應。
4. 文稿若為譯文，請附原文影本及原作者同意函，並請註明原文出處、原作者姓名及出版年月。
5. 凡人名、專有名詞等若為外語者，第一次使用時，請用（）加註原文。外國人名若未有約定成俗之譯名，請逕用原文。
6. 附圖與附釋請於文後，並編列號碼，並在正文中註明位置。
7. 文末參考文獻依作者姓氏分別編號排序：中、日文依筆劃多寡排列；西文（英、法、德…等）依字母順序排列；若中、日、西文並列時，則先中、日文後西文。至於參

考文獻之寫法如下：

（1）期刊論文，請依下列順序書寫：作者、出版年（西元）、論文篇名、期刊名稱、卷期、頁數。

例：張湘君（1993）。讀者反應理論及其對兒童文學教育的啟示。*東師語文學刊，6*，285-307。

（2）圖書單行本，請依下列順序書寫：作者、出版年（西元）、書名、版次、出版地、出版社、頁數。

例：張春興（1996）。*教育心理學*。台北：東華。頁64-104。

8. 稿件順序為：首頁資料（題目、作者真實姓名及服務機關、通訊地址及電話；若需以筆名發表，請註明）、中文摘要、正文（包括參考文獻或註釋）、末頁資料（以英文書明題目、作者姓名及服務機關、並附英文摘要）及圖表（編號須與正文中之編號一致）。

（二）本刊對來稿有權刪改，不同意者請在稿件上註明。

（三）來稿刊出，版權為台灣數學教育學會所有。

（四）作者見解，文責自負，不代表本學會之意見。

（五）來稿請e-mail至：dcyang@mail.ncyu.edu.tw