應用數學一般化教導學生 3 與 11 數字倍數的辨認

崑山科技大學 通識教育中心
助理教授　陳嘉皇

摘　要

本研究目的在於運用數學一般化的概念與步驟，指導學生理解速算法的意義，以能正確的辨識 3 和 11 的倍數問題。經由教學後，學生除理解速算法的意義外，更能將速算法轉換成更加有效的策略，進行數字倍數的辨認，對於提升學生思考、促進推理，具有實質的效益。

關鍵字詞：**數學一般化、倍數、速算法**

壹、前言

因數和倍數概念的理解，對國小學生而言是項非常重要的議題，因為學會運用因數和倍數的解法，未來對分數有關約分、擴分、通分或基礎數論有關質因數的分解等皆是良好的利器，可協助學生對異分母分數的運算、因數的分解等獲得助益，所以教育部(2003)在國小五年級「數與量」的能力指標上即明示學生應該能夠「理解因數、倍數、公因數與公倍數」。雖說此項能力非常重要，然觀察實務上的教學情況，常看見教師直接告知學生速算的方式提供學生解題，例如判斷某數是否為 3 的倍數時，除實際計算外，大多數的教師會要求學生將各位值的數字加總起來，然後除以 3，觀察是否能夠整除，若可即表示此數為 3 的倍數，不能整除則非 3 的倍數；若要判斷是否為 11 的倍數，則告知將奇位數的數字加總然後扣除偶位數數字的加總，結果是 0 或 11 的倍數時，即可判斷此數為 11 的倍數。教師教導學生這些方法雖能讓學生快速解題且獲得正確的結果，然詢問學生或教師為何可用此種方法？此種方法背後的意義是什麼？幾乎所有學生或教師只知道此法好用，但不知其後的意義為何？因此無法理解為何要用此種方法。教師常抱怨數學教學時間有限，此種方法是可縮減學生學習機會與數學概念之間的隙縫，但不知此種教學方式只是技巧傳授，實質上已抹煞學生探究數學的興趣，阻絕學生推理論證的動機和嘗試學習的情意和興趣，缺失實難衡量。

教師在數學課室裡採用上述方式進行教學，主要原因源自於傳統的經驗影響，又受限於既有的數學知識。要改變此種填鴨、背誦的教學方式，提供教師有效的教學方法和數學概念是唯一的手段。數學一般化的概念和技巧可提供此項需求，因為一般化是數學概念與不同表徵之間關係的推理，及對一些概念實體的探究與檢驗。一般化的作業若能透過特殊案例的分析，進行系統組織、臆測和歸納，將樣式裡的規則抽離出來，呈現數學結構知識並轉化物件之間的關係，且能表達

和論證一般化，不但能提供學生思考路徑及發現規則等實質效益，還能促進解題能力與技巧的發展(Blanton & Kaput, 2005)。因數與倍數的概念即是在探索數字世界中有關可除性與乘法概念的問題，這些問題可透過一般化的過程進行觀察、推理、理解數量之間的關係而建立規則或表列式，協助應用並擴展解題的範圍。

鑑此，本文嘗試透過一般化的應用，融入國小數學因、倍數之教學活動，讓學生從辨識、推理、歸納與擴展的步驟，學習如何辨認 3 和 11 的倍數，以理解學生學習倍數概念背後之意涵，促進學生數字運算知能力。

貳、文獻探討

一、倍數概念的學習

因、倍數的教學大多是以除法的原理(若有 a、b 兩個正整數，則必可找到 q、r 兩個非負整數，滿足 $a=b\times q+r$ 的關係，且 $b>r\geqq 0$)為基礎，透過判斷 a 是否能整除 b(餘數是否為 0)的方式，引入因數和倍數的定義：「設 a、b 是兩個正整數，若 $a=b\times q+r$，其中 q 是正整數且 r 等於 0，則稱 b 是 a 的因數，或稱 a 是 b 的倍數」。上述說明解釋了因數與倍數的關係，從敘述的內容可以明白學生要理解倍數的概念，首先需具備流利完善的除法及乘法的概念和技巧，將某一正整數做為單位量進行數字的分解和擴展，例如將 4 分解成 1、2、4，這些數字是 4 的因數，並以 4 為單位量，乘法性的生成 4、8、12…等正整數，稱為 4 的倍數，從中瞭解到 4 是 8 的因數，8 則是 4 的倍數等關係。在這部分，學生需明白因數問題是內向探討組成一個正整數的單位量;倍數問題是向外探討以一個正整數為單位量，可以生成哪些正整數，這是兩個相反方向的問題探討。而要讓因數和倍數概念精熟轉換，那麼乘除可逆的運算則需熟練。

因為國小課本是透過因數的意義引入倍數（a是b的因數，那麼反過來b是a的倍數），這是成人的測量運思，可以彈性的互換單位量和單位數的角色，瞭解乘、除互為逆運算的關係，所以可以掌握兩數之間因數和倍數的相對關係，然而這對國小學生而言卻非易事，須待學生累積足夠經驗後，才容易接受倍數的觀念。除了學生經驗是為影響倍數概念發展的因素外，另一因素是：若兩數之間互為倍數和因數關係，那麼表示兩數相除的結果應該呈現出整除的現象(沒有餘數)，然而學生接觸數字時，要判斷之間是否為倍數、因數的關係，則常直接應用直式記錄的除法進行運算以行判斷，這樣的作法則需耗費龐大的認知資源，不見有效率，因此需提供有效措施，協助提升其辨識的技巧，以輔助其倍數概念的發展。雖說速算法是有用的，但不能只教導此運算方式，忽略學生測量運思的發展與倍數概念的意義。謝堅(1998)認為學生倍數概念的發展應循序漸進，宜先透過一個整數是否為其因數的整數倍的方式，讓學生察覺此整數為其所有因數的倍數，當學生有能力與方法判斷某數是否為另一數倍數時，以某一正整數為起點，使用乘以整數倍的方式，求出該正整數在某一數量範圍內的所有倍數，就不是件困難的事。從謝堅的看法可知，倍數概念的建立可讓學生從觀察或操作數字之間

「倍」或「整除」的關係開始，再擴展衍生至更複雜的數字運算。

學生因、倍數概念如何理解與發展，大多的研究將重點集中於因數、倍數解題和迷失概念的診斷與補救措施(何欣玫，2005；林珮如，2002；邱慧珍，2002；陳標松，2003；張玉如，2012；劉昱泓，2011)，發現學生學習困難的因素不外先備知識不足、常因粗心及判斷錯誤而造成遺漏或多寫、或概念誤解或混淆；另有部分研究著重數學作業和試題對學生因數、倍數概念學習的關聯(葉佳瑩，2009；顏慶琳，2011)。這些研究雖提供教師對學生倍數學習困難之處與概念發展進程的理解外，對於教師在教學實際現場如何提供有效的輔導方法、強化學生因數、倍數的概念理解，並無具體之因應措施，所以，若能針對上述文獻發現之困難，配合教學策略合宜的引導，將可使學生因、倍數概念的學習成效表現更佳。

小學數學教材裡，有關 2 或 5 的倍數，學生透過十進位、偶數的概念，很容易就可以辨識某數是否為其倍數，然而對 3 或 11 的倍數辨識而言，教師常直接指示學生「將所有位數的數字加總除以 3，能整除的就是 3 的倍數」、「將奇位數的數字加總然後減去偶位數數字的加總，結果是 0 或是 11 的倍數，那麼此數字就是 11 的倍數」。這些說明雖指涉一些與倍數相關的數學概念，但要讓學生瞭解此種速算法，在步驟上卻遺漏許多程序的解釋，例如「為何要把數字加總？」、「為何要用奇位數的總和減去偶位數的總和？」、「為何相減等於 0 或 11 的倍數後就是 11 的倍數？」等問題。若以謝堅的論述，教師進行倍數和因數議題的教學時，應該提供學生辨識的機會，然後進行推理，產出合適規則後，再來驗證上述的宣稱，如此學生的倍數概念才會完善，因此數學一般化的引進是有其必要性。

二、一般化的意涵與應用

實施樣式一般化活動對學生數學概念的建構和發展非常重要，美國數學教師學會(National Council of Teachers of Mathematics〔NCTM〕, 1989)之《*Curriculum and evaluation standards for school mathematics*》就主張數學課程的教導，需包含能促進學生參與樣式、關係與函數理解的活動。教育部(2003)也宣稱學生應能利用數量關係，列出適當的算式，進行解題，並檢驗答案的合理性。一般化是什麼？Dreyfus(1991)認為是：對特殊案例進行推理或化約，辨識其間的共通性，並正確的擴展到更大的案例。Kaput(1999)則將一般化定義：對數學問題加以推理與溝通並擴展可能的範圍，能明確的辨識與說明不同樣式的共通性，轉移推理與溝通至更大層面的樣式或情境。以 Kaput(1999)的觀點來說，一般化與以下活動相互連結：(1)辨識不同例證之間的共通性，(2)擴展推理，以超越原初的範圍，或是(3)從特殊的例證中衍生出較廣泛的結果。從上述定義可以理解：學生進行一般化，需能正確的辨識問題變項的意義，有效運用合宜的策略加以推理，歸納問題情境的變化，以規則或結構的方式呈現關係。

Chinnappan(2010)在其代數的研究指出，提供真實情境之代數基模(模式)，可協助學生建構一般化的變項與其之間的關係，並能發展出較好的評鑑能力。教師利用鷹架顯示學生應用基模中的策略，可促進有意義之代數知識連結。數學教

育的目標就在於發展學生概念結構的理解，及概念在真實情境的具體化。決定與運用有效的策略，以提升理解，是非常重要的，其中一項要素就是建立概念、事實、習慣與步驟之間的連結與轉化。如何說明連結樣式一般化學習的關係？為有效分析數學一般化的實務，可採取心智模式或基模的觀點加以探討。一些學者認為基模發展的轉換，是透過學生對具有結構性問題的型態、定義的特徵、與所需相似解題方法概念化的歷程(Mayer, 1992; Quilici & Mayer, 1996)。若有較廣的基模或問題型態(作業或活動)，則學生會有較多的機會辨識新奇的問題，和一些教導的方法做連結，並能理解何時可運用這些學習過的策略方法。

一般化如何進行？一些學者已提出其進程(Ellis, 2007；Kaput, 1999；Rivera, 2007)。從一般化的歷程而言，作業的設計對倍數概念之教導與學習而言，是一項重要的參數，一般化的表現受到作業設計的影響，而有不同層次的概念與策略產出。然而在一般化的歷程，概念抽離與建構的認知發展是基模構築與探索的重點。協助學生概念抽離的教學可分為四個階段(Mitchelmore & White, 2004)：

1.熟悉(Familiarity)：為了要形成某個別情境的一般化，學生要從不同的情境中產出某概念，並熟悉每一種情境所強調的結構。
2.相似性(Similarity)：協助學生辨認這些情境所強調的結構之間的相似與差異。
3.具體化(Reification)：支持所導出相似性可辨認的一般法則，將想要的概念抽離形成心智物件，以自己的方式進行運算。
4.應用(Application)：運用此概念至新的問題情境。

熟悉為數學概念學習的基礎，他需要經歷相似性、具體化和應用三個歷程才能達成。相似性的辨認常被視為是部分抽離的概念，例如教導 $2(a + b) = 2a + 2b$ 分配律時，學生會將 $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ 與前者一樣，English 和 Halford (1995)指出這樣的學習是錯誤的類比形式。概念抽離的教學目的，是讓教師能有目的的指導學生將注意力集中在更深入、重要的數學相似性上，將抽離的觀點當成辨認相似性之一般化建構有目的的歷程，抽離的概念並非真實的複製，而是真正建立在思想引導的觀點上(Van Oers, 2001)。

倍數與因數概念即具有「相同單位量」與「整除」的相似性特徵，相關數字的觀念在學生年幼時即接觸，對學生而言是屬熟悉之情境，教師所為者在於將這些「倍」的問題藉由觀察操作，提供學生具體化的經驗，再抽離相同的規則形成結構的關係，進而應用解題。鑑此，研究者認為學生學習 3 與 11 的倍數此議題，必須經歷符應相似性、具體化與應用之辨識、推理與應用三階段歷程，才能建立與鞏固此倍數概念，且透過此歷程的表現，才能分析與評斷學生學習情形。

參、研究步驟與方法

本研究資料來自於研究者主持之「促進國小在職教師設計數學一般化活動的專業成長研究」國科會計畫，該計畫目的在於探索學生一般化策略，協助教師提升數學教學能力，發展有效教導代數思考所需之知識。計畫內容主要在於提供教

師代數思考教材，進行代數思考教學訓練，探討學生代數思考學習的策略與模式，及影響教師教學的因素。

本研究配合五年級學生因、倍數單元活動的學習，進行2小時教學(2011年9月份於晨間活動實施)，分別提供學生3與11倍數的問題，掌握辨識、推理與應用各階段之重點，引導學生一般化作業，以探索和分析學生對3和11倍數概念理解情形。在辨識階段，教師首先要求學生利用整除、可除性之特徵，提供數字讓學生以除法運算方式，尋找是否是3或11倍數，並詢問是3和11倍數的數字與3與11之間有何關係，要求學生陳述理由，以明白其是否瞭解整除與倍數的概念；在推理階段，研究者利用位值的概念，提供1至9個之位數、10至90之十位數、100至900之百位數數字(如表1與表2所示)…要求學生利用除法方式去除3和11，觀察其餘數的變化，並在表格上做記錄，探索各數字除3和11後餘數產生的規律，並進行其間規則的連結。有關餘數規則一般化的連結，牽涉兩個重要概念的說明需讓學生明白，一是某數除3或11，可將此數字拆成個、十、百、千…不同位值的方式，配合表格推理歸納的規則進行判讀；其次則是數字除3和11後產生的餘數要如何處理才能符應整除（倍數）的概念，在此，教師提出餘數與除數3和11間的關係具有「剩下」和「不足」的意義。例如122÷11＝11…1，此處餘1表示122是11的11倍又「剩下」1，要整除他可以將餘下的1扣除，然而也可將他以「不足」的方式處理，即可再補充10後可整除11，前者扣除的方式，是教科書與教師常教導學生的方法，但在實際情境上，學生常碰到需採用後者解題策略的問題，由於欠缺另類解題經驗，所以產生解題困難或錯誤，本階段之教學正可彌補上述經驗不足之處。在應用階段，教師則提出多種命題，要求學生利用推理階段發現的規則，對大數目之數字進行倍數的檢驗，以鞏固規則和問題之間的連結。

一、研究樣本

本研究參與的學生來自於台灣南部某都會區小學五年級學生28人(男女生各為15與13人)，教學時採4至5人男女混合分組方式（總計6組）進行合作討論學習，教師依據辨識、推理與應用等一般化的流程，提供學生數學問題，要求學生思考解題策略，相互討論解題方式的適切性，然後教師指派各組1人至教室前方將該組討論的策略寫在黑板上，共同檢討並意見交流。

二、活動設計

本研究目標在於指導學生如何建立倍數概念，能理解如何辨識3與11倍數之速算法背後之意義，因此活動以3和11兩數字為基礎，內容及步驟分為：

（一）3的倍數如何辨識

1.辨識

（1）將 1 至 9 等數字除以 3（可用眼睛觀察），其餘數為多少，分別予以記錄。
（2）利用 10、20、30…90 等方式除以 3，其餘數為多少，分別予以記錄。
（3）利用 100、200、300…900 等方式除以 3，其餘數為多少，分別予以記錄。
（4）利用 1000、2000、3000…9000 等除以 3，其餘數為多少，分別予以記錄。

2.推理

（1）你發現個位數字除 3 時產生何種規律？
（2）你發現十位數字除 3 時產生何種規律？
（2）你發現百位數字除 3 時產生何種規律？
（4）你發現千位數字除 3 時產生何種規律？
（5）歸納並說出你從上述紀錄發現的規則。

3.應用

（1）若數字變成 10000，20000，30000…時，你預測除 3 時產生何種規律？
（2） 若有一數字為 123，那麼此數字是否為 3 的倍數？你是如何辨認的？
（3）若有一數字為 744，那麼此數字是否為 3 的倍數？你是如何辨認的？
（4）若有一數字為 5354，那麼此數字是否為 3 的倍數？你是如何辨認的？
（5）若有一數字為 8398，那麼此數字是否為 3 的倍數？你是如何辨認的？
(6)若有一數字為 2234983549,那麼此數字是否為 3 的倍數？你是如何辨認的？

（二）11 的倍數如何辨識

1.辨識

（1）將 1 至 9 等個位數字除以 11（可用眼睛觀察），其餘數為多少（提問可改為會剩下多少），分別予以記錄。

（2）利用 10、20、30…90 等數字除以 11，其餘數為多少（學生產生困難，提問方式改為需加上多少，才能整除？），分別予以記錄。

（3）利用 100、200、300…900 等數字除以 11，其餘數為多少（提問可改為會剩下多少），分別予以記錄。

（4）利用 1000、2000、3000…9000 等數字除以 11，其餘數為多少（提問方式改為需加上多少，才能整除？），分別予以記錄。

2.推理

（1）你發現個位數字除 11 時產生何種規律？
（2）你發現十位數字除 11 時產生何種規律？
（2）你發現百位數字除 11 時產生何種規律？
（4）你發現千位數字除 11 時產生何種規律？
（5）歸納並說出你從上述紀錄發現的規則。

3.應用

（1）若數字變成 10000，20000，30000…時，你預測除 11 時產生何種規律？
（2）若數字變成 100000，200000，300000…時，你預測除 11 時產生何種規律？
（3）若有一數字為 3542，那麼此數字是否為 11 的倍數？你是如何辨認的？
（4）若有一數字為 7040，那麼此數字是否為 11 的倍數？你是如何辨認的？

（5）若有一數字為 35354，那麼此數字是否為 11 的倍數？你是如何辨認的？
（6）若有一數字為 82390，那麼此數字是否為 3 的倍數？你是如何辨認的？
（7）若有一數字為 2234983549，那麼此數字是否為 11 的倍數？你如何辨認的？

三、資料蒐集與分析

本研究依據設計之活動內容與流程由該班導師進行教學，教學活動為 2 節課（80 分鐘），教學歷程全程錄影（音），並要求學生將解題方法記錄於作業簿上。蒐集及分析的資料包含師生課室之互動說明與行動、學生作業等，之後將其轉譯成文字或圖片檔的方式呈現，並以其在「辨識」、「推理」和「應用」等階段的表現，分析學生對 3 與 11 數字有關倍數概念的理解。

肆、結果與討論

本節茲依學生在活動過程三個階段的表現，分別予以說明討論

一、　辨識階段資料分析與討論

學生對於教師所提供之數字作業，要求進行辨識是否為 3 與 11 的倍數，是否能整除與餘數為何，產出的紀錄歸納如表 1 和表 2 所示：

表 1：學生觀察 3 的倍數產出餘數之記錄

數字	除 3 之餘數	數字	除 3 之餘數	數字	除 3 之餘數	數字	除 3 之餘數
1	1	10	1	100	1	1000	1
2	2	20	2	200	2	2000	2
3	0	30	0	300	0	3000	0
4	1	40	1	400	1	4000	1
5	2	50	2	500	2	5000	2
6	0	60	0	600	0	6000	0
7	1	70	1	700	1	7000	1
8	2	80	2	800	2	8000	2
9	0	90	0	900	0	9000	0
個位數		十位數		百位數		千位數	

表 2：學生觀察 11 的倍數產出餘數之記錄

數字	除 11 餘數	數字	除 11 餘數	數字	除 11 餘數	數字	除 11 餘數
1	1（剩下）	10	10（剩下）	100	1（剩下）	1000	10（剩下）
2	2（剩下）	20	9（剩下）	200	2（剩下）	2000	9（剩下）
3	3（剩下）	30	8（剩下）	300	3（剩下）	3000	8（剩下）
4	4（剩下）	40	7（剩下）	400	4（剩下）	4000	7（剩下）
5	5（剩下）	50	6（剩下）	500	5（剩下）	5000	6（剩下）

6	6（剩下）	60	5（剩下）	600	6（剩下）	6000	5（剩下）
7	7（剩下）	70	4（剩下）	700	7（剩下）	7000	4（剩下）
8	8（剩下）	80	3（剩下）	800	8（剩下）	8000	3（剩下）
9	9（剩下）	90	2（剩下）	900	9（剩下）	9000	2（剩下）
個位數		十位數		百位數		千位數	

在此階段，各組學生透過將數字一一試除後，並將結果臚列在記錄表上，由於此作業耗費不少時間，因此有些組別學生開始覺得繁瑣，嘗試採用其他策略協助解題，例如第 3 組學生在其作業簿上寫下的方法(如圖 1 所示)。學生們認為這種方式可以很快判斷出數字是否為 3 或 11 的倍數，但詢問為何可以利用此種速算法解題，該組沒有一位學生能說明其理由。

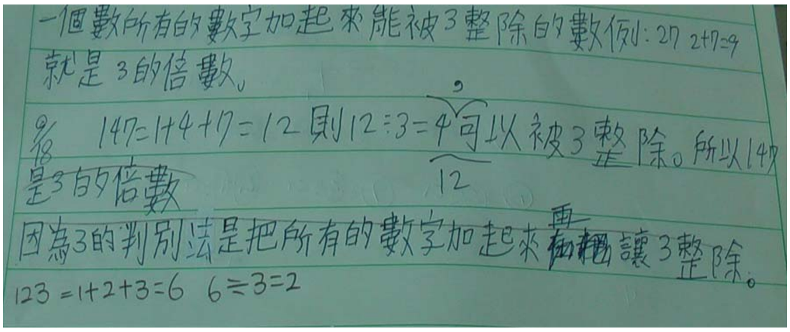


圖 1：第 3 組學生提出對數字是否為 3 倍數之想法

另外試算數字是否為 11 的倍數時，大部分學生皆記錄餘下多少，為讓學生發現另類記錄所呈現的規律，教師對有關個位數與百位數試算後的結果，將其「餘數」說明改變為試算後「剩下」的數，例如 100÷11 為 9 倍，會剩下 1；在十位數與千位數(偶位數)試算後的結果(因表格開始的數字與 11 的倍數相近)，改變為試算後「不足」的數，例如 10÷11 要整除是不足 1，30÷11 是 2 倍多了 8，但 8 要整除 11 不足 3，在此部分要求學生透過另外的想法轉換記錄的方式，並讓學生瞭解「剩下」與「不足」兩概念之間的關係。其記錄結果如表 3 所示。

表 3：學生觀察 11 的倍數產出餘數之另類記錄

數字	除 11 餘數	數字	除 11 餘數	數字	除 11 餘數	數字	除 11 餘數
1	1（剩下）	10	1（不足）	100	1（剩下）	1000	1（不足）
2	2（剩下）	20	2（不足）	200	2（剩下）	2000	2（不足）
3	3（剩下）	30	3（不足）	300	3（剩下）	3000	3（不足）
4	4（剩下）	40	4（不足）	400	4（剩下）	4000	4（不足）
5	5（剩下）	50	5（不足）	500	5（剩下）	5000	5（不足）
6	6（剩下）	60	6（不足）	600	6（剩下）	6000	6（不足）
7	7（剩下）	70	7（不足）	700	7（剩下）	7000	7（不足）
8	8（剩下）	80	8（不足）	800	8（剩下）	8000	8（不足）

9	9（剩下）	90	9（不足）	900	9（剩下）	9000	9（不足）
個位數		十位數		百位數		千位數	

二、推理階段資料分析與討論

在此階段，學生透過記錄表的比較與討論後，教師要求他們發表，以下為節錄之說明：

第 5 組：我們發現數字除以 3 他的餘數是 1、2、0、1、2、0、1、2、0 的方式出現，10 位數和 100 位數都是這樣。

第 6 組：第 1 個數會剩下 1，第 2 個數剩下 2，第 3 個數餘數是 0，然後第 4 個又剩下 1，第 5 個剩下 2，第 6 個餘數變 0。

第 3 組：我們這組有重大發現，1、1 的 10 倍、1 的 100 倍、1 的 1000 倍除以 3 後餘數都是 1，2、2 的 10 倍、2 的 100 倍，2 的 1000 倍除以 3 後餘數都是 2，3、3 的 10 倍、3 的 100 倍，3 的 1000 倍除以 3 後餘數都是 0，3 後面的數字像是 4 或 5，除以 3 後他們的餘數又會以 1、2、0 的方式重來。

第 3 組：因為 400 可以分成 300＋100，300 除以 3 的餘數是 0，100 除以 3 的餘數是 1，所以 400 除以 3 的餘數是 1；800 可以分成 300＋300＋200，300 除以 3 的餘數是 0，200 除以 3 的餘數是 2，所以 800 除以 3 的餘數是 2；4000 可以分成 3000＋1000，3000 除以 3 的餘數是 0，1000 除以 3 的餘數是 1，所以 400 除以 3 的餘數是 1；7000 可以分成 3000＋3000＋1000，3000 除以 3 的餘數是 0，1000 除以 3 的餘數是 1，所以 7000 除以 3 的餘數是 1。

第 1 組：我們的想法是哪一個數是 3 的倍數，可以把他先分成千位、百位、十位和個位數，然後判斷他的餘數，然後加起來，然後再除以 3，看能不能整除，像 123，可以分成 100＋20＋3，餘數總共是 3，所以是 3 的倍數（圖 2 所示）

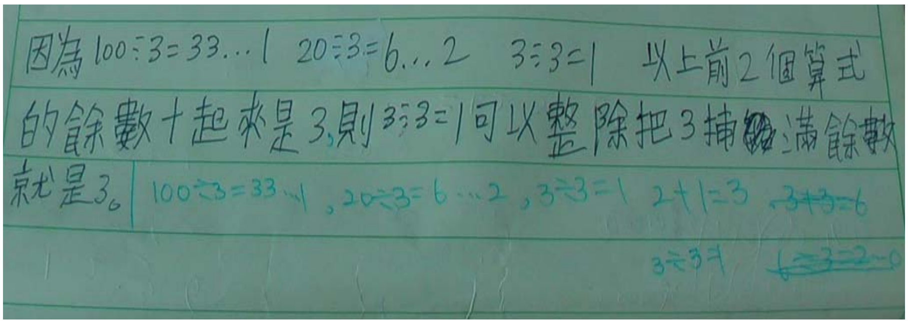


圖 2：學生經由一般化歷程呈現數字是否為 3 倍數之判斷方法

學生是否能正確盼讀數字是否為 3 的倍數，則需從紀錄表之觀察發現幾項速算法的特徵，才能正確解題：(1)不管是個位數或是十位數…3 個數後即為 1 個循環，此循環與整除和餘數有關，呈現出 1、2、0 的規律；(2)某數的 10 倍、100 倍、1000 倍…除以 3 後其餘數都會個位數字除以 3 的餘數一樣，也具有循環的特質；(3)整除 3 的意義是沒有餘數，因此此數字是否是 3 的倍數，可以透過將

此數字分解成不同的位值像個位、十位、百位後除以 3 的餘數總合加以判斷，例如餘數總和是 3，那麼此數就是 3 的倍數。掌握這些要點後，學生才能明白為何 3 的倍數可以透過將各位值數字除以 3 後的餘數加總，再除以 3 是否有餘數的方式，判斷數字是否為 3 的倍數。本研究發現大多數組別的學生皆能掌握這些重點，判讀並說明數字為 3 倍數的理由。

對於數字是否為 11 的倍數，學生將各個位值的數字除以 11 後「餘下」的數字加總，除以 11 若為整除是否為 11 倍數的方式，與實際試除後的結果加以比對，同意可利用餘數定理判斷該數字是否為 11 的倍數。然而學生如何理解課室裡教師常用的策略：「將奇位數的數字加總然後減去偶位數數字的加總，結果是 0 或是 11 的倍數，那麼此數字就是 11 的倍數」。教師要求學生檢視表 3 的紀錄，提示學生注意表中同一列各位值的數字除以 11 後的數字有何異同？經由教師說明表中規則的轉換與指導後，讓學生提出其觀察結果，有關學生說明節錄如下：

第 2 組：1 到 9 的數字除以 11，他的餘數也是 1 到 9；100 到 900 除以 11 他的餘數也是 1 到 9；10 到 90 除 11 他們不夠的數是 1 到 9，1000 到 9000 除 11 他們不夠的數也是 1 到 9，好奇怪！

第 4 組：個位數和百位數的應該是一種方法，十位數和千位數的是另外一種方法。

第 1 組：這和判斷是不是 3 的倍數所用方法一樣都有規則，只是個位數和百位數都是「剩下」，而十位數和千位數都是「不足」。

此時學生對於各位值除以 11 的餘數發生「剩下」與「不足」的現象產生困境，教師提出學生可採用速算法的步驟解法，以及為何將數字拆成不同的位值進行解題的想法，激勵學生思考。

第 3 組：我們知道了，「剩下」和「不足」這兩個部分可以消除，也就是這裡多 3，這裡不夠 3，兩個合起來就可以消除（變成 0）；個位可以和十位數消除，百位可以和千位消除。

第 5 組：我們這組認為第 1 個數（個位）、第 3 個數（百位）、第 5 個數（萬位）都是一樣的，除以 11 之後會剩下 1 到 9 的數字；第 2 個數（十位）、第 4 個數（千位）、第 6 個數（十萬位）都是一樣的，除以 11 之後會不足 1 到 9 的數字；這兩種一個是多的，一個是少的。

教師明白學生對於某數是否是 11 的倍數，不同的位值有其「剩下」和「不足」的相對概念，為連結速算法的思考，於是提出將「剩下」和「不足」的概念，採用「＋」和「－」的符號來表示其意義，並舉例剩 1 時，可用「＋1」表示，不族 1 時，可用「－1」表示，剩 1 和不足 1 合起來可以抵銷變成 0，剩 2 和不足 2 合起來也可以抵銷變成 0，剩 3 和不足 2 合起來可以抵銷變成剩下 1，剩 2 和不足 3 合起來可以抵銷變成不足 1，以利學生連結運算的觀念。並將數字中的

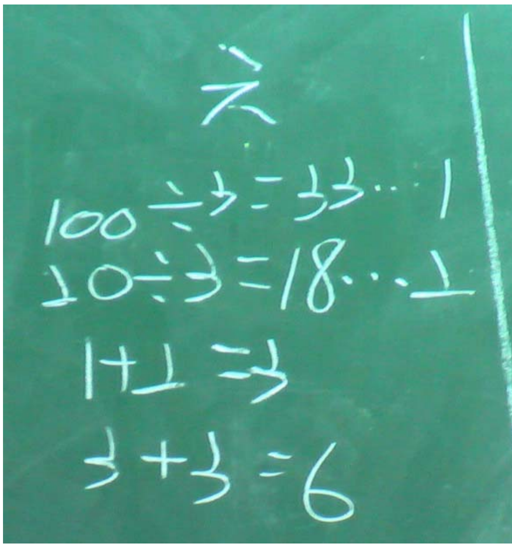
第 1 個位值（個位）、第 3 個位值（百位）、第 5 個位值（萬位）宣稱為奇數位值；第 2 個位值（十位）、第 4 個位值（千位）、第 6 個位值（十萬位）宣稱為偶數位值，強化學生對速算法中有關「奇數位值之數字總和減去偶數位值之數字總和」的認識。

三、應用階段資料分析與討論

當學生經由討論表達後，教師提供相關問題給予學生應用解題，以下節錄學生解題歷程呈現之說明與行動。

第 6 組：123 分成 100＋20＋3，100÷3 餘 1，20÷3 餘 2，1＋2 再加上個位數 3 等於 6，所以 123 是 3 的倍數(圖 3)。

第 5 組：100 和 20 除以 3 的餘數是 1 和 2，3 是 3 的倍數，前兩個餘數加起來是 3，可以被 3 整除，所以 123 是 3 的倍數。



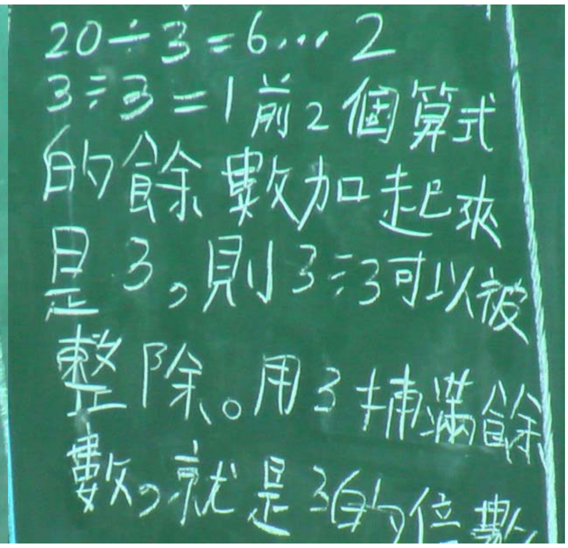


圖 3：第 2 組學生對於 3 之倍數解題說明　圖 4：第 5 組學生對於 3 之倍數解題說明

針對某數是否為 11 的倍數，在應用速算法的歷程中，學生則呈現了多種的解題方式，其思考說明如下：

第 1 組：3542 這個數字，3＋4＝7，2＋5＝7，兩個一樣，所以 3542 可以被 11 整除，他是 11 的倍數，因為一個餘數剩下 7，一個餘數不夠 7，兩個消除就變成 0。

第 4 組：7040 中 7＋4＝11，11－0＝11，11 可以被 11 整除，所以 7040 是 11 的倍數。

第 2 組：35354 將奇位數的數字 4、3、3 加起來是 10，偶位數的數字 5 和 5 加起來也是 10，奇位數的和減去偶位數的和是 0，所以 35354 是 11 的倍數。

第 3 組：我們將 2234983549 這個數字兩個兩個分成 22、34、98、35、49，然後相減得到 0、－1、＋1、－2 和－5，全部再合起來是－7(不足 7)，所以他不是 11 的倍數。

由上述呈現之說明，發現大部分學生可理解速算法之意義並適切的應用，令人驚訝的是，經由一般化歷程推理思考的刺激，一些學生（第 3 組）能夠擴展轉化「奇位數之和減去偶位數之和」原先的速算法，成為「兩兩配對加總」的方式辨識數字是否為 11 的倍數之概念，這不僅縮減辨識歷程繁複運算帶來的不便，更運用了「剩下」和「不足」相對的數學知識，以提升運算的正確性。

伍、結論與建議

本研究目的在於運用數學一般化的概念與步驟，指導學生理解速算法的意義，以能正確的辨識 3 和 11 的倍數問題。先前的研究雖集中於學生因、倍數概念的診斷與補救措施，但其重點仍置於解題答案之正確與否，並未深入探索學生因、倍數概念的建置和發展，甚至於這些概念如何與速算法結合運用(何欣玫，2005；林珮如，2002；邱慧珍，2002；陳標松，2003；張玉如，2012；劉昱泓，2011)。研究者結合學生先前學過的位值、整除與餘數的概念，這些皆與數論中的樣式特質有關，因此可鼓勵學生從觀察、試探中發現數字運算之間的關係，而建立一可解決問題的規則，並加以預測應用。本研究雖未進行教學前後之測驗比對，無法具體且客觀的呈現數學一般化產出的實證效果，但從學生課室表現可對學習倍數和因數此數學議題，提供兩方面的貢獻。一是建立學生利用問題中變項的「關係」解題，使運算更加流暢。從研究發現學生經由數學一般化的指導化，除可理解速算法的意義並加以應用外，更可從解題歷程中，思考如何再簡化教師所教導之速算法所強調的「運算觀點」，而改以「關係」協助計算，例如，位值中若是 3 的倍數，就予以忽略，不去管他，因為餘數等於 0；或將相鄰的數字「兩兩配對相減」然後計算總和，即可判斷數字是否為 11 的倍數，因為相鄰位值之數字一為正，一為負，可相互抵銷，簡化運算。這些案例皆可說明學生已經發現數字中之結構關係，利用這些關係可簡化計算並增加判斷的正確性。

其次是利用數學一般化的教學可縮減學生的認知負荷，因為經由相關程序的引導，學生不僅可經由有效的討論、思辯建立規則，獲得系統的知識與技術，且經由親自操弄、證明獲得正確的結果，這可刺激學生解題的動機，提升學生推理的能力，還經由社會化的利用，培養民主的素養。而本研究採用一般化的策略，融入倍數教學獲得的結果，可與先前研究結合，促進有效教學或補救方案的實施，精進學生因、倍數概念的學習。

在教學歷程中，研究者探討學生對倍數概念的思考與解題，發現幾項議題，提供建議做為未來改善教學、提升學生因、倍數學習成效的參考。一是判讀數字是否為 11 倍數歷程中有關速算法意義的探討較為複雜，教師宜對相關的術語，例如「整除」、「餘數」、「位值」、「剩餘」、「不足」、「正」、「負」等延伸的語詞加以說明，並以實例加以詮釋，以能與學生所欲學習之倍數問題相連結，促進相關概念的轉化與流暢性。二是「乘除可逆」能力的展現不僅影響作業歷程思考與記

錄的進展，亦是建構倍數與因數概念的基礎，教師宜先行讓學生完善與熟練此方面之能力和技巧，以利後續之學習。

參考資料

何欣玫（2005）。國小六年級學生因數與倍數之數學解題溝通能力研究。國立臺中教育大學教育測統計研究所碩士論文，未出版，臺中市。

林珮如（2002）。國小學童因數解題與迷思概念之研究。屏東師範學院數理教育研究所碩士論文，未出版，屏東縣。

邱慧珍（2002）。國小學童倍數解題及迷思概念之研究。屏東師範學院數理教育研究所碩士論文，未出版，屏東縣。

陳見發(2011)。**九年一貫課程國小學童因數學習表現及迷思概念之探討**。國立屏東教育大學數理教育研究所碩士論文，未出版，屏東縣。

陳標松（2003）。**國小六年級數學學習困難學生因數倍數問題解題之研究**。國立彰化師範大學特殊教育學系在職進修專班，未出版，彰化市。

教育部(2003)。**國民教育九年一貫課程綱要：數學學習領域**。台北教育部。

張玉如（2012）。**公因數公倍數概念學習之認知診斷與背景變項之關係**

國立臺中教育大學教育測驗統計研究所碩士論文，未出版，台中市。

劉昱泓（2011）**國小六年級學生因數與倍數概念認知診斷與試題關聯之研究**。國立臺中教育大學教育測驗統計研究所碩士論文，未出版，台中市。

謝堅(1998)。**實驗課程中因數與倍數教材的設計**。載於台灣省國民學校教師研習會編印之《國民小學數學科新課程概說〔高年級〕：協助兒童認知發展的數學課程》，60-77 頁。

顏慶琳(2011)。**五年級因數教材分析暨概念結構研究-以康軒版與翰林版為例**。國立臺中教育大學數學教育學系在職進修教學碩士學位班碩士論文，未出版，台中市。

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education,36*(5), 412−446.

Chinnappan, M. (2010). Cognitive Load and Modelling of an Algebra Problem. *Mathematics Education Research Journal, 22*(2), 8-23.

Dreyfus, T. (1991). On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. In F, Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th International Conference for Psychology of Mathematics Education.* (Vol. 1, pp. 33-48). Genova, Italy.

Ellis, A. B. (2007). Connections between generalizing and justifying: Students' reasoning with linear relationships. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 194-229.

English, L. D., & Halford, G. S. (1995). *Mathematics education: Models and process*.

Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Mayer, R. E. (1992). *Thinking, problem solving, cognition* (2nd ed.). New York: Freeman.

Mitchelmore, M. C., & White, P. (2004). *Teaching mathematical concepts: Instruction for abstraction*. Invited regular lecture presented at the 10th International Congress on Mathematical Education, Copenhagen, Denmark.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Quilici, J. L., & Mayer, R. E. (1996). Role of examples in how students learn to categorize statistics word problems. *Journal of Educational Psychology, 88*, 144–161.

Rivera, F. (2007). Visualizing as a mathematical way of knowing: Understanding figural generalization. *Mathematics Teacher, 101*(1), 69–75.

Van Oers, B. (2001). Contextualisation for abstraction. *Cognitive Science Quarterly, 1*, 279–305.

Utilizes mathematical generalization to teach students judge the concept of multiple of number 3 and 11

Kun-Shan University, Chia-Huang, Chen

Abstract

The aim of this study is to utilize concept and process of mathematical generalization to instruct students understanding the meaning of the convenient method that to judge the multiple problem of number 3 and 11 correctly. After teaching experiment, students can understanding the meaning of the convenient method, and transform it into more effective strategies to problem solving, the strategies can promote students thinking and reasoning.

Key words：Mathematical generalization, Multiple, Convenient method.