

ISSN 1815-6355

台灣數學教師(電子)期刊

Taiwan Journal of Mathematics Teachers

第32期

台灣數學教育學會

2012年12月

## 發行宗旨

# 台灣數學教師(電子)期刊 Taiwan Journal of Mathematics Teachers 2012 年 12 月出版 NO.32 2012

發行人：林福來教授

主編：

楊德清 國立嘉義大學數學教育研究所

編輯委員

Editorial Panel

呂玉琴

國立台北教育大學數學教育研究所

李源順

台北市立教育大學數學資訊教育學系

林素微

國立東華大學數學系

金鈞

國立台灣師範大學數學系

梁淑坤

國立中山大學教育研究所

蔡文煥

國立新竹教育大學應用數學系

劉祥通

國立嘉義大學數學教育研究所

劉曼麗

國立屏東教育大學數理教育研究所

(依姓名筆劃順序排列)

封面設計：施乃文

出版者：台灣數學教育學會

地址：台北市 116 汀州路四段 88 號國立台灣師範大學數學系 M212

電話：02-29307151

電子郵件信箱：tame@math.ntnu.edu.tw

網址：

<http://www.math.ntnu.edu.tw/~tame/index.htm>

總編輯：楊德清 dcyang@mail.ncyu.edu.tw

地址：嘉義縣民雄鄉文隆村 85 號

國立嘉義大學數學教育研究所

電話：05-2263411-1924

- 一、本刊為一實務性的數學教育刊物，出版目的如下：
  1. 積極發揚台灣數學教育學會之成立宗旨：研究、發展、推廣數學教育，使台灣學生快樂學好數學。
  2. 提升數學教師教學品質、數學教育研究品質及促進數學教學策略與方法之交流。
  3. 探討數學教育的學術理論與實務現況，以促進理論與實務之結合，進一步提升數學教學之內涵。
  4. 提供數學教育課程、教材與教法等實務經驗，包括數學遊戲、DIY 教具之分享，以供未來之教學與研究參考之用。
  5. 針對多數學生特定迷思概念之教學引導，如學生易有的錯誤型態及如何釐清觀念等。
  6. 介紹國內外數學教育現況。
- 二、本刊內容以充實高中、國中與小學數學教學、課程與教材為主，以提供所有關心數學教育人士之教學資源與參考依據。
- 三、本期刊以季刊方式（3 個月一期，一年共 4 期）發行，分別於每一年的 3、6、9、12 月發行。
- 四、本期刊採電子與紙本方式同時發行。

ISSN 1815-6355

**台灣數學教師（電子）期刊**  
**Taiwan Journal of Mathematics**  
**Teachers**

**第 32 期**

**2012 年 12 月**

# 台灣數學教師（電子）期刊

## 目錄

第 32 期

2012 年 12 月

---

---

應用數學一般化教導學生3與11數字倍數的辨認.....	1
陳嘉皇	
國中數學教科書分析－以99學年部編版為例.....	15
鄭震文	
活動報馬仔.....	33

---

---

ISSN 1815-6355

# 應用數學一般化教導學生 3 與 11 數字倍數的辨認

崑山科技大學 通識教育中心

助理教授 陳嘉皇

## 摘要

本研究目的在於運用數學一般化的概念與步驟，指導學生理解速算法的意義，以能正確的辨識 3 和 11 的倍數問題。經由教學後，學生除理解速算法的意義外，更能將速算法轉換成更加有效的策略，進行數字倍數的辨認，對於提升學生思考、促進推理，具有實質的效益。

關鍵字詞：數學一般化、倍數、速算法

## 壹、前言

因數和倍數概念的理解，對國小學生而言是項非常重要的議題，因為學會運用因數和倍數的解法，未來對分數有關約分、擴分、通分或基礎數論有關質因數的分解等皆是良好的利器，可協助學生對異分母分數的運算、因數的分解等獲得助益，所以教育部(2003)在國小五年級「數與量」的能力指標上即明示學生應該能夠「理解因數、倍數、公因數與公倍數」。雖說此項能力非常重要，然觀察實務上的教學情況，常看見教師直接告知學生速算的方式提供學生解題，例如判斷某數是否為 3 的倍數時，除實際計算外，大多數的教師會要求學生將各位值的數字加總起來，然後除以 3，觀察是否能夠整除，若可即表示此數為 3 的倍數，不能整除則非 3 的倍數；若要判斷是否為 11 的倍數，則告知將奇位數的數字加總然後扣除偶位數數字的加總，結果是 0 或 11 的倍數時，即可判斷此數為 11 的倍數。教師教導學生這些方法雖能讓學生快速解題且獲得正確的結果，然詢問學生或教師為何可用此種方法？此種方法背後的意義是什麼？幾乎所有學生或教師只知道此法好用，但不知其後的意義為何？因此無法理解為何要用此種方法。教師常抱怨數學教學時間有限，此種方法是可縮減學生學習機會與數學概念之間的隙縫，但不知此種教學方式只是技巧傳授，實質上已抹煞學生探究數學的興趣，阻絕學生推理論證的動機和嘗試學習的情意和興趣，缺失實難衡量。

教師在數學課室裡採用上述方式進行教學，主要原因源自於傳統的經驗影響，又受限於既有的數學知識。要改變此種填鴨、背誦的教學方式，提供教師有效的教學方法和數學概念是唯一的手段。數學一般化的概念和技巧可提供此項需求，因為一般化是數學概念與不同表徵之間關係的推理，及對一些概念實體的探究與檢驗。一般化的作業若能透過特殊案例的分析，進行系統組織、臆測和歸納，將樣式裡的規則抽離出來，呈現數學結構知識並轉化物件之間的關係，且能表達

和論證一般化，不但能提供學生思考路徑及發現規則等實質效益，還能促進解題能力與技巧的發展(Blanton & Kaput, 2005)。因數與倍數的概念即是在探索數字世界中有關可除性與乘法概念的問題，這些問題可透過一般化的過程進行觀察、推理、理解數量之間的關係而建立規則或表列式，協助應用並擴展解題的範圍。

鑑此，本文嘗試透過一般化的應用，融入國小數學因、倍數之教學活動，讓學生從辨識、推理、歸納與擴展的步驟，學習如何辨認 3 和 11 的倍數，以理解學生學習倍數概念背後之意涵，促進學生數字運算知能力。

## 貳、文獻探討

### 一、倍數概念的學習

因、倍數的教學大多是以除法的原理(若有  $a$ 、 $b$  兩個正整數，則必可找到  $q$ 、 $r$  兩個非負整數，滿足  $a=b \times q+r$  的關係，且  $b > r \geq 0$ )為基礎，透過判斷  $a$  是否能整除  $b$ (餘數是否為 0)的方式，引入因數和倍數的定義：「設  $a$ 、 $b$  是兩個正整數，若  $a=b \times q+r$ ，其中  $q$  是正整數且  $r$  等於 0，則稱  $b$  是  $a$  的因數，或稱  $a$  是  $b$  的倍數」。上述說明解釋了因數與倍數的關係，從敘述的內容可以明白學生要理解倍數的概念，首先需具備流利完善的除法及乘法的概念和技巧，將某一正整數做為單位量進行數字的分解和擴展，例如將 4 分解成 1、2、4，這些數字是 4 的因數，並以 4 為單位量，乘法性的生成 4、8、12...等正整數，稱為 4 的倍數，從中瞭解到 4 是 8 的因數，8 則是 4 的倍數等關係。在這部分，學生需明白因數問題是內向探討組成一個正整數的單位量；倍數問題是向外探討以一個正整數為單位量，可以生成哪些正整數，這是兩個相反方向的問題探討。而要讓因數和倍數概念精熟轉換，那麼乘除可逆的運算則需熟練。

因為國小課本是透過因數的意義引入倍數 ( $a$  是  $b$  的因數，那麼反過來  $b$  是  $a$  的倍數)，這是成人的測量運思，可以彈性的互換單位量和單位數的角色，瞭解乘、除互為逆運算的關係，所以可以掌握兩數之間因數和倍數的相對關係，然而這對國小學生而言卻非易事，須待學生累積足夠經驗後，才容易接受倍數的觀念。除了學生經驗是為影響倍數概念發展的因素外，另一因素是：若兩數之間互為倍數和因數關係，那麼表示兩數相除的結果應該呈現出整除的現象(沒有餘數)，然而學生接觸數字時，要判斷之間是否為倍數、因數的關係，則常直接應用直式記錄的除法進行運算以行判斷，這樣的作法則需耗費龐大的認知資源，不見有效率，因此需提供有效措施，協助提升其辨識的技巧，以輔助其倍數概念的發展。雖說速算法是有用的，但不能只教導此運算方式，忽略學生測量運思的發展與倍數概念的意義。謝堅(1998)認為學生倍數概念的發展應循序漸進，宜先透過一個整數是否為其因數的整數倍的方式，讓學生察覺此整數為其所有因數的倍數，當學生有能力與方法判斷某數是否為另一數倍數時，以某一正整數為起點，使用乘以整數倍的方式，求出該正整數在某一數量範圍內的所有倍數，就不是件困難的事。從謝堅的看法可知，倍數概念的建立可讓學生從觀察或操作數字之間

「倍」或「整除」的關係開始，再擴展衍生至更複雜的數字運算。

學生因、倍數概念如何理解與發展，大多的研究將重點集中於因數、倍數解題和迷失概念的診斷與補救措施(何欣玫, 2005; 林珮如, 2002; 邱慧珍, 2002; 陳標松, 2003; 張玉如, 2012; 劉昱泓, 2011), 發現學生學習困難的因素不外先備知識不足、常因粗心及判斷錯誤而造成遺漏或多寫、或概念誤解或混淆; 另有部分研究著重數學作業和試題對學生因數、倍數概念學習的關聯(葉佳瑩, 2009; 顏慶琳, 2011)。這些研究雖提供教師對學生倍數學習困難之處與概念發展進程的理解外, 對於教師在教學實際現場如何提供有效的輔導方法、強化學生因數、倍數的概念理解, 並無具體之因應措施, 所以, 若能針對上述文獻發現之困難, 配合教學策略合宜的引導, 將可使學生因、倍數概念的學習成效表現更佳。

小學數學教材裡, 有關 2 或 5 的倍數, 學生透過十進位、偶數的概念, 很容易就可以辨識某數是否為其倍數, 然而對 3 或 11 的倍數辨識而言, 教師常直接指示學生「將所有位數的數字加總除以 3, 能整除的就是 3 的倍數」、「將奇位數的數字加總然後減去偶位數數字的加總, 結果是 0 或是 11 的倍數, 那麼此數字就是 11 的倍數」。這些說明雖指涉一些與倍數相關的數學概念, 但要讓學生瞭解此種速算法, 在步驟上卻遺漏許多程序的解釋, 例如「為何要把數字加總?」、「為何要用奇位數的總和減去偶位數的總和?」、「為何相減等於 0 或 11 的倍數後就是 11 的倍數?」等問題。若以謝堅的論述, 教師進行倍數和因數議題的教學時, 應該提供學生辨識的機會, 然後進行推理, 產出合適規則後, 再來驗證上述的宣稱, 如此學生的倍數概念才會完善, 因此數學一般化的引進是有其必要性。

## 二、一般化的意涵與應用

實施樣式一般化活動對學生數學概念的建構和發展非常重要, 美國數學教師學會(National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 1989)之《Curriculum and evaluation standards for school mathematics》就主張數學課程的教導, 需包含能促進學生參與樣式、關係與函數理解的活動。教育部(2003)也宣稱學生應能利用數量關係, 列出適當的算式, 進行解題, 並檢驗答案的合理性。一般化是什麼? Dreyfus(1991)認為是: 對特殊案例進行推理或化約, 辨識其間的共通性, 並正確的擴展到更大的案例。Kaput(1999)則將一般化定義: 對數學問題加以推理與溝通並擴展可能的範圍, 能明確的辨識與說明不同樣式的共通性, 轉移推理與溝通至更大層面的樣式或情境。以 Kaput(1999)的觀點來說, 一般化與以下活動相互連結: (1)辨識不同例證之間的共通性, (2)擴展推理, 以超越原初的範圍, 或是 (3)從特殊的例證中衍生出較廣泛的結果。從上述定義可以理解: 學生進行一般化, 需能正確的辨識問題變項的意義, 有效運用合宜的策略加以推理, 歸納問題情境的變化, 以規則或結構的方式呈現關係。

Chinnappan(2010)在其代數的研究指出, 提供真實情境之代數基模(模式), 可協助學生建構一般化的變項與其之間的關係, 並能發展出較好的評鑑能力。教師利用鷹架顯示學生應用基模中的策略, 可促進有意義之代數知識連結。數學教

育的目標就在於發展學生概念結構的理解，及概念在真實情境的具體化。決定與運用有效的策略，以提升理解，是非常重要的，其中一項要素就是建立概念、事實、習慣與步驟之間的連結與轉化。如何說明連結樣式一般化學習的關係？為有效分析數學一般化的實務，可採取心智模式或基模的觀點加以探討。一些學者認為基模發展的轉換，是透過學生對具有結構性問題的型態、定義的特徵、與所需相似解題方法概念化的歷程(Mayer, 1992; Quilici & Mayer, 1996)。若有較廣的基模或問題型態(作業或活動)，則學生會有較多的機會辨識新奇的問題，和一些教導的方法做連結，並能理解何時可運用這些學習過的策略方法。

一般化如何進行？一些學者已提出其進程(Ellis, 2007; Kaput, 1999; Rivera, 2007)。從一般化的歷程而言，作業的設計對倍數概念之教導與學習而言，是一項重要的參數，一般化的表現受到作業設計的影響，而有不同層次的概念與策略產出。然而在一般化的歷程，概念抽離與建構的認知發展是基模構築與探索的重點。協助學生概念抽離的教學可分為四個階段(Mitchelmore & White, 2004)：

1. 熟悉(Familiarity)：為了要形成某個別情境的一般化，學生要從不同的情境中產出某概念，並熟悉每一種情境所強調的結構。
2. 相似性(Similarity)：協助學生辨認這些情境所強調的結構之間的相似與差異。
3. 具體化(Reification)：支持所導出相似性可辨認的一般法則，將想要的概念抽離形成心智物件，以自己的方式進行運算。
4. 應用(Application)：運用此概念至新的問題情境。

熟悉為數學概念學習的基礎，他需要經歷相似性、具體化和應用三個歷程才能達成。相似性的辨認常被視為是部分抽離的概念，例如教導  $2(a + b) = 2a + 2b$  分配律時，學生會將  $(a + b)^2 = a^2 + b^2$  與前者一樣，English 和 Halford (1995) 指出這樣的學習是錯誤的類比形式。概念抽離的教學目的，是讓教師能有目的的指導學生將注意力集中在更深入、重要的數學相似性上，將抽離的觀點當成辨認相似性之一般化建構有目的的歷程，抽離的概念並非真實的複製，而是真正建立在思想引導的觀點上(Van Oers, 2001)。

倍數與因數概念即具有「相同單位量」與「整除」的相似性特徵，相關數字的觀念在學生年幼時即接觸，對學生而言是屬熟悉之情境，教師所為者在於將這些「倍」的問題藉由觀察操作，提供學生具體化的經驗，再抽離相同的規則形成結構的關係，進而應用解題。鑑此，研究者認為學生學習 3 與 11 的倍數此議題，必須經歷符應相似性、具體化與應用之辨識、推理與應用三階段歷程，才能建立與鞏固此倍數概念，且透過此歷程的表現，才能分析與評斷學生學習情形。

## 參、研究步驟與方法

本研究資料來自於研究者主持之「促進國小在職教師設計數學一般化活動的專業成長研究」國科會計畫，該計畫目的在於探索學生一般化策略，協助教師提升數學教學能力，發展有效教導代數思考所需之知識。計畫內容主要在於提供教

師代數思考教材，進行代數思考教學訓練，探討學生代數思考學習的策略與模式，及影響教師教學的因素。

本研究配合五年級學生因、倍數單元活動的學習，進行2小時教學(2011年9月份於晨間活動實施)，分別提供學生3與11倍數的問題，掌握辨識、推理與應用各階段之重點，引導學生一般化作業，以探索和分析學生對3和11倍數概念理解情形。在辨識階段，教師首先要求學生利用整除、可除性之特徵，提供數字讓學生以除法運算方式，尋找是否是3或11倍數，並詢問是3和11倍數的數字與3與11之間有何關係，要求學生陳述理由，以明白其是否瞭解整除與倍數的概念；在推理階段，研究者利用位值的概念，提供1至9個之位數、10至90之十位數、100至900之百位數數字(如表1與表2所示)…要求學生利用除法方式去除3和11，觀察其餘數的變化，並在表格上做記錄，探索各數字除3和11後餘數產生的規律，並進行其間規則的連結。有關餘數規則一般化的連結，牽涉兩個重要概念的說明需讓學生明白，一是某數除3或11，可將此數字拆成個、十、百、千…不同位值的方式，配合表格推理歸納的規則進行判讀；其次則是數字除3和11後產生的餘數要如何處理才能符應整除(倍數)的概念，在此，教師提出餘數與除數3和11間的關係具有「剩下」和「不足」的意義。例如 $122 \div 11 = 11 \cdots 1$ ，此處餘1表示122是11的11倍又「剩下」1，要整除他可以將餘下的1扣除，然而也可將他以「不足」的方式處理，即可再補充10後可整除11，前者扣除的方式，是教科書與教師常教導學生的方法，但在實際情境上，學生常碰到需採用後者解題策略的問題，由於欠缺另類解題經驗，所以產生解題困難或錯誤，本階段之教學正可彌補上述經驗不足之處。在應用階段，教師則提出多種命題，要求學生利用推理階段發現的規則，對大數目之數字進行倍數的檢驗，以鞏固規則和問題之間的連結。

## 一、研究樣本

本研究參與的學生來自於台灣南部某都會區小學五年級學生28人(男女生各為15與13人)，教學時採4至5人男女混合分組方式(總計6組)進行合作討論學習，教師依據辨識、推理與應用等一般化的流程，提供學生數學問題，要求學生思考解題策略，相互討論解題方式的適切性，然後教師指派各組1人至教室前方將該組討論的策略寫在黑板上，共同檢討並意見交流。

## 二、活動設計

本研究目標在於指導學生如何建立倍數概念，能理解如何辨識3與11倍數之速算法背後之意義，因此活動以3和11兩數字為基礎，內容及步驟分為：

### (一) 3的倍數如何辨識

#### 1. 辨識

- (1) 將 1 至 9 等數字除以 3 (可用眼睛觀察), 其餘數為多少, 分別予以記錄。
- (2) 利用 10、20、30...90 等方式除以 3, 其餘數為多少, 分別予以記錄。
- (3) 利用 100、200、300...900 等方式除以 3, 其餘數為多少, 分別予以記錄。
- (4) 利用 1000、2000、3000...9000 等除以 3, 其餘數為多少, 分別予以記錄。

## 2. 推理

- (1) 你發現個位數字除 3 時產生何種規律?
- (2) 你發現十位數字除 3 時產生何種規律?
- (2) 你發現百位數字除 3 時產生何種規律?
- (4) 你發現千位數字除 3 時產生何種規律?
- (5) 歸納並說出你從上述紀錄發現的規則。

## 3. 應用

- (1) 若數字變成 10000, 20000, 30000...時, 你預測除 3 時產生何種規律?
- (2) 若有一數字為 123, 那麼此數字是否為 3 的倍數? 你是如何辨認的?
- (3) 若有一數字為 744, 那麼此數字是否為 3 的倍數? 你是如何辨認的?
- (4) 若有一數字為 5354, 那麼此數字是否為 3 的倍數? 你是如何辨認的?
- (5) 若有一數字為 8398, 那麼此數字是否為 3 的倍數? 你是如何辨認的?
- (6) 若有一數字為 2234983549, 那麼此數字是否為 3 的倍數? 你是如何辨認的?

## (二) 11 的倍數如何辨識

### 1. 辨識

- (1) 將 1 至 9 等個位數字除以 11 (可用眼睛觀察), 其餘數為多少 (提問可改為會剩下多少), 分別予以記錄。
- (2) 利用 10、20、30...90 等數字除以 11, 其餘數為多少 (學生產生困難, 提問方式改為需加上多少, 才能整除?), 分別予以記錄。
- (3) 利用 100、200、300...900 等數字除以 11, 其餘數為多少 (提問可改為會剩下多少), 分別予以記錄。
- (4) 利用 1000、2000、3000...9000 等數字除以 11, 其餘數為多少 (提問方式改為需加上多少, 才能整除?), 分別予以記錄。

### 2. 推理

- (1) 你發現個位數字除 11 時產生何種規律?
- (2) 你發現十位數字除 11 時產生何種規律?
- (2) 你發現百位數字除 11 時產生何種規律?
- (4) 你發現千位數字除 11 時產生何種規律?
- (5) 歸納並說出你從上述紀錄發現的規則。

### 3. 應用

- (1) 若數字變成 10000, 20000, 30000...時, 你預測除 11 時產生何種規律?
- (2) 若數字變成 100000, 200000, 300000...時, 你預測除 11 時產生何種規律?
- (3) 若有一數字為 3542, 那麼此數字是否為 11 的倍數? 你是如何辨認的?
- (4) 若有一數字為 7040, 那麼此數字是否為 11 的倍數? 你是如何辨認的?

- (5) 若有一數字為 35354，那麼此數字是否為 11 的倍數？你是如何辨認的？
- (6) 若有一數字為 82390，那麼此數字是否為 3 的倍數？你是如何辨認的？
- (7) 若有一數字為 2234983549，那麼此數字是否為 11 的倍數？你如何辨認的？

### 三、資料蒐集與分析

本研究依據設計之活動內容與流程由該班導師進行教學，教學活動為 2 節課（80 分鐘），教學歷程全程錄影（音），並要求學生將解題方法記錄於作業簿上。蒐集及分析的資料包含師生課室之互動說明與行動、學生作業等，之後將其轉譯成文字或圖片檔的方式呈現，並以其在「辨識」、「推理」和「應用」等階段的表現，分析學生對 3 與 11 數字有關倍數概念的理解。

### 肆、結果與討論

本節茲依學生在活動過程三個階段的表現，分別予以說明討論

#### 一、 辨識階段資料分析與討論

學生對於教師所提供之數字作業，要求進行辨識是否為 3 與 11 的倍數，是否能整除與餘數為何，產出的紀錄歸納如表 1 和表 2 所示：

表 1：學生觀察 3 的倍數產出餘數之記錄

數字	除 3 之餘數	數字	除 3 之餘數	數字	除 3 之餘數	數字	除 3 之餘數
1	1	10	1	100	1	1000	1
2	2	20	2	200	2	2000	2
3	0	30	0	300	0	3000	0
4	1	40	1	400	1	4000	1
5	2	50	2	500	2	5000	2
6	0	60	0	600	0	6000	0
7	1	70	1	700	1	7000	1
8	2	80	2	800	2	8000	2
9	0	90	0	900	0	9000	0
個位數		十位數		百位數		千位數	

表 2：學生觀察 11 的倍數產出餘數之記錄

數字	除 11 餘數	數字	除 11 餘數	數字	除 11 餘數	數字	除 11 餘數
1	1 (剩下)	10	10 (剩下)	100	1 (剩下)	1000	10 (剩下)
2	2 (剩下)	20	9 (剩下)	200	2 (剩下)	2000	9 (剩下)
3	3 (剩下)	30	8 (剩下)	300	3 (剩下)	3000	8 (剩下)
4	4 (剩下)	40	7 (剩下)	400	4 (剩下)	4000	7 (剩下)
5	5 (剩下)	50	6 (剩下)	500	5 (剩下)	5000	6 (剩下)

6	6 (剩下)	60	5 (剩下)	600	6 (剩下)	6000	5 (剩下)
7	7 (剩下)	70	4 (剩下)	700	7 (剩下)	7000	4 (剩下)
8	8 (剩下)	80	3 (剩下)	800	8 (剩下)	8000	3 (剩下)
9	9 (剩下)	90	2 (剩下)	900	9 (剩下)	9000	2 (剩下)
個位數		十位數		百位數		千位數	

在此階段，各組學生透過將數字一一試除後，並將結果臚列在記錄表上，由於此作業耗費不少時間，因此有些組別學生開始覺得繁瑣，嘗試採用其他策略協助解題，例如第3組學生在其作業簿上寫下的方法(如圖1所示)。學生們認為這種方式可以很快判斷出數字是否為3或11的倍數，但詢問為何可以利用此種速算法解題，該組沒有一位學生能說明其理由。

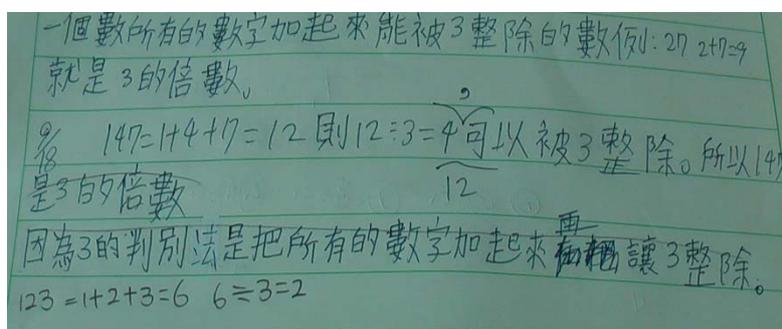


圖1：第3組學生提出對數字是否為3倍數之想法

另外試算數字是否為11的倍數時，大部分學生皆記錄餘下多少，為讓學生發現另類記錄所呈現的規律，教師對有關個位數與百位數試算後的結果，將其「餘數」說明改變為試算後「剩下」的數，例如  $100 \div 11$  為9倍，會剩下1；在十位數與千位數(偶位數)試算後的結果(因表格開始的數字與11的倍數相近)，改變為試算後「不足」的數，例如  $10 \div 11$  要整除是不足1， $30 \div 11$  是2倍多了8，但8要整除11不足3，在此部分要求學生透過另外的想法轉換記錄的方式，並讓學生瞭解「剩下」與「不足」兩概念之間的關係。其記錄結果如表3所示。

表3：學生觀察11的倍數產出餘數之另類記錄

數字	除11餘數	數字	除11餘數	數字	除11餘數	數字	除11餘數
1	1 (剩下)	10	1 (不足)	100	1 (剩下)	1000	1 (不足)
2	2 (剩下)	20	2 (不足)	200	2 (剩下)	2000	2 (不足)
3	3 (剩下)	30	3 (不足)	300	3 (剩下)	3000	3 (不足)
4	4 (剩下)	40	4 (不足)	400	4 (剩下)	4000	4 (不足)
5	5 (剩下)	50	5 (不足)	500	5 (剩下)	5000	5 (不足)
6	6 (剩下)	60	6 (不足)	600	6 (剩下)	6000	6 (不足)
7	7 (剩下)	70	7 (不足)	700	7 (剩下)	7000	7 (不足)
8	8 (剩下)	80	8 (不足)	800	8 (剩下)	8000	8 (不足)

9	9 (剩下)	90	9 (不足)	900	9 (剩下)	9000	9 (不足)
個位數		十位數		百位數		千位數	

## 二、推理階段資料分析與討論

在此階段，學生透過記錄表的比較與討論後，教師要求他們發表，以下為節錄之說明：

第 5 組：我們發現數字除以 3 他的餘數是 1、2、0、1、2、0、1、2、0 的方式出現，10 位數和 100 位數都是這樣。

第 6 組：第 1 個數會剩下 1，第 2 個數剩下 2，第 3 個數餘數是 0，然後第 4 個又剩下 1，第 5 個剩下 2，第 6 個餘數變 0。

第 3 組：我們這組有重大發現，1、1 的 10 倍、1 的 100 倍、1 的 1000 倍除以 3 後餘數都是 1，2、2 的 10 倍、2 的 100 倍，2 的 1000 倍除以 3 後餘數都是 2，3、3 的 10 倍、3 的 100 倍，3 的 1000 倍除以 3 後餘數都是 0，3 後面的數字像是 4 或 5，除以 3 後他們的餘數又會以 1、2、0 的方式重來。

第 3 組：因為 400 可以分成 300+100，300 除以 3 的餘數是 0，100 除以 3 的餘數是 1，所以 400 除以 3 的餘數是 1；800 可以分成 300+300+200，300 除以 3 的餘數是 0，200 除以 3 的餘數是 2，所以 800 除以 3 的餘數是 2；4000 可以分成 3000+1000，3000 除以 3 的餘數是 0，1000 除以 3 的餘數是 1，所以 4000 除以 3 的餘數是 1；7000 可以分成 3000+3000+1000，3000 除以 3 的餘數是 0，1000 除以 3 的餘數是 1，所以 7000 除以 3 的餘數是 1。

第 1 組：我們的想法是哪一個數是 3 的倍數，可以把他先分成千位、百位、十位和個位數，然後判斷他的餘數，然後加起來，然後再除以 3，看能不能整除，像 123，可以分成 100+20+3，餘數總共是 3，所以是 3 的倍數（圖 2 所示）

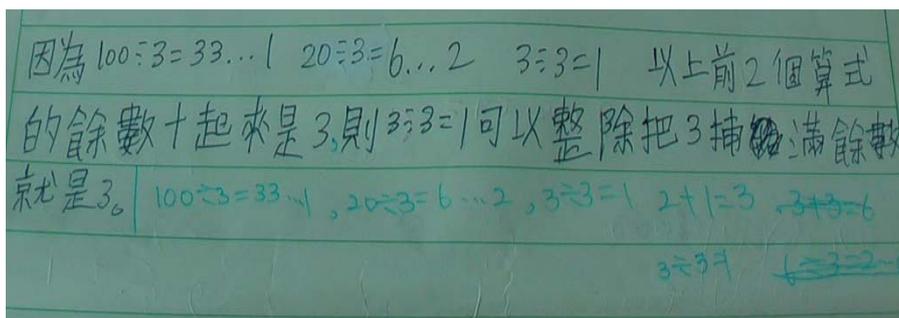


圖 2：學生經由一般化歷程呈現數字是否為 3 倍數之判斷方法

學生是否能正確判斷數字是否為 3 的倍數，則需從紀錄表之觀察發現幾項速算法的特徵，才能正確解題：(1)不管是個位數或是十位數...3 個數後即為 1 個循環，此循環與整除和餘數有關，呈現出 1、2、0 的規律；(2)某數的 10 倍、100 倍、1000 倍...除以 3 後其餘數都會個位數字除以 3 的餘數一樣，也具有循環的特質；(3)整除 3 的意義是沒有餘數，因此此數字是否是 3 的倍數，可以透過將

此數字分解成不同的位值像個位、十位、百位後除以 3 的餘數總合加以判斷，例如餘數總和是 3，那麼此數就是 3 的倍數。掌握這些要點後，學生才能明白為何 3 的倍數可以透過將各位值數字除以 3 後的餘數加總，再除以 3 是否有餘數的方式，判斷數字是否為 3 的倍數。本研究發現大多數組別的學生皆能掌握這些重點，判讀並說明數字為 3 倍數的理由。

對於數字是否為 11 的倍數，學生將各個位值的數字除以 11 後「餘下」的數字加總，除以 11 若為整除是否為 11 倍數的方式，與實際試除後的結果加以比對，同意可利用餘數定理判斷該數字是否為 11 的倍數。然而學生如何理解課室裡教師常用的策略：「將奇位數的數字加總然後減去偶位數數字的加總，結果是 0 或是 11 的倍數，那麼此數字就是 11 的倍數」。教師要求學生檢視表 3 的紀錄，提示學生注意表中同一列各位值的數字除以 11 後的數字有何異同？經由教師說明表中規則的轉換與指導後，讓學生提出其觀察結果，有關學生說明節錄如下：

第 2 組：1 到 9 的數字除以 11，他的餘數也是 1 到 9；100 到 900 除以 11 他的餘數也是 1 到 9；10 到 90 除 11 他們不夠的數是 1 到 9，1000 到 9000 除 11 他們不夠的數也是 1 到 9，好奇怪！

第 4 組：個位數和百位數的應該是一種方法，十位數和千位數的是另外一種方法。

第 1 組：這和判斷是不是 3 的倍數所用方法一樣都有規則，只是個位數和百位數都是「剩下」，而十位數和千位數都是「不足」。

此時學生對於各位值除以 11 的餘數發生「剩下」與「不足」的現象產生困境，教師提出學生可採用速算法的步驟解法，以及為何將數字拆成不同的位值進行解題的想法，激勵學生思考。

第 3 組：我們知道了，「剩下」和「不足」這兩個部分可以消除，也就是這裡多 3，這裡不夠 3，兩個合起來就可以消除（變成 0）；個位可以和十位數消除，百位可以和千位消除。

第 5 組：我們這組認為第 1 個數（個位）、第 3 個數（百位）、第 5 個數（萬位）都是一樣的，除以 11 之後會剩下 1 到 9 的數字；第 2 個數（十位）、第 4 個數（千位）、第 6 個數（十萬位）都是一樣的，除以 11 之後會不足 1 到 9 的數字；這兩種一個是多的，一個是少的。

教師明白學生對於某數是否是 11 的倍數，不同的位值有其「剩下」和「不足」的相對概念，為連結速算法的思考，於是提出將「剩下」和「不足」的概念，採用「+」和「-」的符號來表示其意義，並舉例剩 1 時，可用「+1」表示，不族 1 時，可用「-1」表示，剩 1 和不足 1 合起來可以抵銷變成 0，剩 2 和不足 2 合起來也可以抵銷變成 0，剩 3 和不足 2 合起來可以抵銷變成剩下 1，剩 2 和不足 3 合起來可以抵銷變成不足 1，以利學生連結運算的觀念。並將數字中的

第 1 個位值 (個位)、第 3 個位值 (百位)、第 5 個位值 (萬位) 宣稱為奇數位值；第 2 個位值 (十位)、第 4 個位值 (千位)、第 6 個位值 (十萬位) 宣稱為偶數位值，強化學生對速算法中有關「奇數位值之數字總和減去偶數位值之數字總和」的認識。

### 三、應用階段資料分析與討論

當學生經由討論表達後，教師提供相關問題給予學生應用解題，以下節錄學生解題歷程呈現之說明與行動。

第 6 組：123 分成  $100+20+3$ ， $100\div 3$  餘 1， $20\div 3$  餘 2， $1+2$  再加上個位數 3 等於 6，所以 123 是 3 的倍數 (圖 3)。

第 5 組：100 和 20 除以 3 的餘數是 1 和 2，3 是 3 的倍數，前兩個餘數加起來是 3，可以被 3 整除，所以 123 是 3 的倍數。

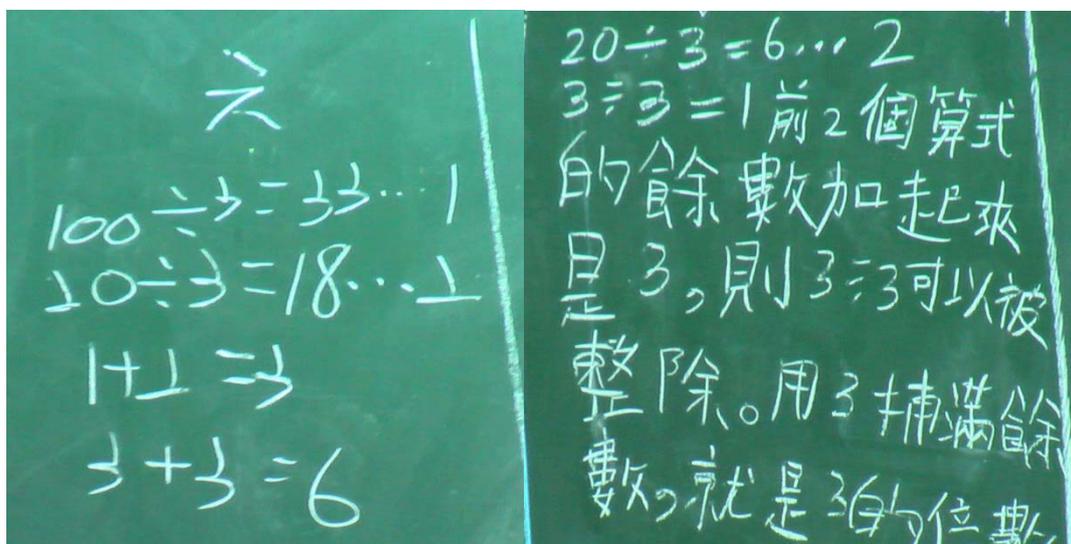


圖 3：第 2 組學生對於 3 之倍數解題說明 圖 4：第 5 組學生對於 3 之倍數解題說明

針對某數是否為 11 的倍數，在應用速算法的歷程中，學生則呈現了多種的解題方式，其思考說明如下：

第 1 組：3542 這個數字， $3+4=7$ ， $2+5=7$ ，兩個一樣，所以 3542 可以被 11 整除，他是 11 的倍數，因為一個餘數剩下 7，一個餘數不夠 7，兩個消除就變成 0。

第 4 組：7040 中  $7+4=11$ ， $11-0=11$ ，11 可以被 11 整除，所以 7040 是 11 的倍數。

第 2 組：35354 將奇位數的數字 4、3、3 加起來是 10，偶位數的數字 5 和 5 加起來也是 10，奇位數的和減去偶位數的和是 0，所以 35354 是 11 的倍數。

第 3 組：我們將 2234983549 這個數字兩個兩個分成 22、34、98、35、49，然後相減得到 0、-1、+1、-2 和 -5，全部再合起來是 -7 (不足 7)，所以他不是 11 的倍數。

由上述呈現之說明，發現大部分學生可理解速算法之意義並適切的應用，令人驚訝的是，經由一般化歷程推理思考的刺激，一些學生（第3組）能夠擴展轉化「奇位數之和減去偶位數之和」原先的速算法，成為「兩兩配對加總」的方式辨識數字是否為11的倍數之概念，這不僅縮減辨識歷程繁複運算帶來的不便，更運用了「剩下」和「不足」相對的數學知識，以提升運算的正確性。

## 伍、結論與建議

本研究目的在於運用數學一般化的概念與步驟，指導學生理解速算法的意義，以能正確的辨識3和11的倍數問題。先前的研究雖集中於學生因、倍數概念的診斷與補救措施，但其重點仍置於解題答案之正確與否，並未深入探索學生因、倍數概念的建置和發展，甚至於這些概念如何與速算法結合運用(何欣玫，2005；林珮如，2002；邱慧珍，2002；陳標松，2003；張玉如，2012；劉昱泓，2011)。研究者結合學生先前學過的位值、整除與餘數的概念，這些皆與數論中的樣式特質有關，因此可鼓勵學生從觀察、試探中發現數字運算之間的關係，而建立一可解決問題的規則，並加以預測應用。本研究雖未進行教學前後之測驗比對，無法具體且客觀的呈現數學一般化產出的實證效果，但從學生課室表現可對學習倍數和因數此數學議題，提供兩方面的貢獻。一是建立學生利用問題中變項的「關係」解題，使運算更加流暢。從研究發現學生經由數學一般化的指導化，除可理解速算法的意義並加以應用外，更可從解題歷程中，思考如何再簡化教師所教導之速算法所強調的「運算觀點」，而改以「關係」協助計算，例如，位值中若是3的倍數，就予以忽略，不去管他，因為餘數等於0；或將相鄰的數字「兩兩配對相減」然後計算總和，即可判斷數字是否為11的倍數，因為相鄰位值之數字一為正，一為負，可相互抵銷，簡化運算。這些案例皆可說明學生已經發現數字中之結構關係，利用這些關係可簡化計算並增加判斷的正確性。

其次是利用數學一般化的教學可縮減學生的認知負荷，因為經由相關程序的引導，學生不僅可經由有效的討論、思辯建立規則，獲得系統的知識與技術，且經由親自操弄、證明獲得正確的結果，這可刺激學生解題的動機，提升學生推理的能力，還經由社會化的利用，培養民主的素養。而本研究採用一般化的策略，融入倍數教學獲得的結果，可與先前研究結合，促進有效教學或補救方案的實施，精進學生因、倍數概念的學習。

在教學歷程中，研究者探討學生對倍數概念的思考與解題，發現幾項議題，提供建議做為未來改善教學、提升學生因、倍數學習成效的參考。一是判讀數字是否為11倍數歷程中有關速算法意義的探討較為複雜，教師宜對相關的術語，例如「整除」、「餘數」、「位值」、「剩餘」、「不足」、「正」、「負」等延伸的語詞加以說明，並以實例加以詮釋，以能與學生所欲學習之倍數問題相連結，促進相關概念的轉化與流暢性。二是「乘除可逆」能力的展現不僅影響作業歷程思考與記

錄的進展，亦是建構倍數與因數概念的基礎，教師宜先行讓學生完善與熟練此方面之能力和技巧，以利後續之學習。

### 參考資料

- 何欣玫 (2005)。國小六年級學生因數與倍數之數學解題溝通能力研究。國立臺中教育大學教育測驗統計研究所碩士論文，未出版，臺中市。
- 林珮如 (2002)。國小學童因數解題與迷思概念之研究。屏東師範學院數理教育研究所碩士論文，未出版，屏東縣。
- 邱慧珍 (2002)。國小學童倍數解題及迷思概念之研究。屏東師範學院數理教育研究所碩士論文，未出版，屏東縣。
- 陳見發(2011)。九年一貫課程國小學童因數學習表現及迷思概念之探討。國立屏東教育大學數理教育研究所碩士論文，未出版，屏東縣。
- 陳標松 (2003)。國小六年級數學學習困難學生因數倍數問題解題之研究。國立彰化師範大學特殊教育學系在職進修專班，未出版，彰化市。
- 教育部(2003)。國民教育九年一貫課程綱要：數學學習領域。台北教育部。
- 張玉如 (2012)。公因數公倍數概念學習之認知診斷與背景變項之關係  
國立臺中教育大學教育測驗統計研究所碩士論文，未出版，台中市。
- 劉昱泓 (2011) 國小六年級學生因數與倍數概念認知診斷與試題關聯之研究。國立臺中教育大學教育測驗統計研究所碩士論文，未出版，台中市。
- 謝堅(1998)。實驗課程中因數與倍數教材的設計。載於台灣省國民學校教師研習會編印之《國民小學數學科新課程概說〔高年級〕：協助兒童認知發展的數學課程》，60-77 頁。
- 顏慶琳(2011)。五年級因數教材分析暨概念結構研究-以康軒版與翰林版為例。國立臺中教育大學數學教育學系在職進修教學碩士學位班碩士論文，未出版，台中市。
- Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412-446.
- Chinnappan, M. (2010). Cognitive Load and Modelling of an Algebra Problem. *Mathematics Education Research Journal*, 22(2), 8-23.
- Dreyfus, T. (1991). On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th International Conference for Psychology of Mathematics Education*. (Vol. 1, pp. 33-48). Genova, Italy.
- Ellis, A. B. (2007). Connections between generalizing and justifying: Students' reasoning with linear relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 194-229.
- English, L. D., & Halford, G. S. (1995). *Mathematics education: Models and process*.

- Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Mayer, R. E. (1992). *Thinking, problem solving, cognition* (2nd ed.). New York: Freeman.
- Mitchelmore, M. C., & White, P. (2004). *Teaching mathematical concepts: Instruction for abstraction*. Invited regular lecture presented at the 10th International Congress on Mathematical Education, Copenhagen, Denmark.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Quilici, J. L., & Mayer, R. E. (1996). Role of examples in how students learn to categorize statistics word problems. *Journal of Educational Psychology*, 88, 144–161.
- Rivera, F. (2007). Visualizing as a mathematical way of knowing: Understanding figural generalization. *Mathematics Teacher*, 101(1), 69–75.
- Van Oers, B. (2001). Contextualisation for abstraction. *Cognitive Science Quarterly*, 1, 279–305.

## Utilizes mathematical generalization to teach students judge the concept of multiple of number 3 and 11

Kun-Shan University, Chia-Huang, Chen

### **Abstract**

The aim of this study is to utilize concept and process of mathematical generalization to instruct students understanding the meaning of the convenient method that to judge the multiple problem of number 3 and 11 correctly. After teaching experiment, students can understanding the meaning of the convenient method, and transform it into more effective strategies to problem solving, the strategies can promote students thinking and reasoning.

Key words : Mathematical generalization, Multiple, Convenient method.

## 國中數學教科書分析—以 99 學年部編版為例

<sup>1</sup> 鄭震文 <sup>2</sup> 洪秀珍 <sup>3</sup> 周惠綺 <sup>4</sup> 梁淑坤

<sup>1,2,3</sup> 國立中山大學教育研究所研究生

<sup>4</sup> 國立中山大學教育研究所教授

### 摘要

本研究主要目的在於分析現行國中數學教科書中，四大主題教材（NASD）所佔內容的百分比與課程綱要之比較，以及教材內容中不同主題的分布情形，並做教材內容細部的探討，採內容分析法，以部編版國中數學教科書為研究對象，作為本研究資料分析的來源，並據此藉以了解國中數學教科書編寫之概略樣貌。研究主要發現有三：第一，國中階段教材中，教材份量的百分比由重到輕依序是：代數、幾何、數與量、統計與機率。第二，從不同年級來看，國一偏重在數與量和代數，國二偏重在代數和幾何，國三則偏重幾何，統計與機率僅在國三下才有教材。第三，從教材內容與國小連結的情形來看，國一和國二的教材中，有些單元與國小五、六年級所習得的課程有類似或相同的名稱，其單元內容，皆可發現是在國小相關的單元設計中，在類似的概念下加深與加廣，讓九年一貫課程在國小與國中階段有適當的銜接。其餘名稱不同的單元內容，亦是與國小教材相連結的。研究者結論時建議教師應重視統計概念與生活的連結，並且建議師資培育中心與國中教師在教學研習或教學研究時，應重視與國小數學教材的銜接。

**關鍵字：**國中數學教科書、篇幅比例、加深加廣、與國小連結

## 壹、前言

我國的數學課程改革，從國民政府遷台後，共有多次大小不同的改變（民國41、51、57、64、82、90及92年課程綱要），至近期民國97年修訂公佈，100年實施的97綱要，不但影響了數學課程的實施，也因此影響教科書的多次修訂；其中，有關教科書的相關研究，在歷次的課程改革中，也是國家積極鼓勵的配套之一（梁淑坤，2011）。

政府自民國76年解嚴後，開始出現教科書開放民間編輯，民國85年以後就全面逐年開放國中小教科書審定本，可是，國立編譯館出版（簡稱部編版）的教科書，無論是統一還是開放，部編本從古至今的重要性是肯定的；然而，教科書的編訂實關係著課程實施與教學的實踐。其實，教科書是直接影響到老師教學最主要的因素，可見教科書的重要性，是值得我們深入探討的（羅珍珍、鄭震文，2009；Lloyd, 2008；Tarr, Reys & Reys, Chavez, Shih, & Osterlind, 2008）。然而，有關國中小之教科書研究，有以年代或國小數與計算內容之比較研究（如，陳秉筠、梁淑坤，2011），和四種綱要版本（51、57、64、82年版）國小數學教科書內容，以章節頁數為計算單位作比較分析（如，Tam, 2010），以及針對九年一貫國中小教科書作評鑑報告，將各版本數學教科書作分析比較（游自達、林宜城、林原宏、洪賢松、陳兆君、蔡秋菊，2007），但仍少見針對國中教材編寫之內容章節作研究。另外，但由於部編版教科書屬於公立機構負責編輯，社會大眾較相信其公信力，又由於民間版本眾多，為了避免單獨分析某民間版本而使本研究有圖利之嫌，因此本研究以部編版國中數學教科書為研究對象，作為本研究資料分析的來源，並據此藉以了解國中數學教科書編寫之概略樣貌。

研究者將透過九年一貫課程數學領域綱要（簡稱92綱要），扣除連結（C）主題後之四大主題的綱要，再針對分年細目數在各年級所佔的百分比，和目前國中數學課本的教材內容中，四大主題所佔內容的百分比，以所佔教科書篇幅作為計算單位，去做比較，並做綱要內容細部的探討，其待答問題為：

（一）四大主題—數與量(N)、代數(A)、幾何(S)、統計與機率(D)與不同年級（七、八、九）教科書教材之關係：

1. 四大主題(N、A、S、D)以教科書的篇幅來計算，於國中三年的教材篇幅比例為何？
2. 不同年級（七、八、九）與四大主題(N、A、S、D)兩個向度的教材篇幅比例為何？

（二）與國小連結四大主題(N、A、S、D)中教科書單元章節為何？

## 貳、文獻探討

本研究主要目的在於分析現行國中數學教科書中，教材內容與課程綱要之比較，以及教材內容中不同主題的分布情形，因此本文文獻就課程改革、教科書分析和內容分析法三部份做探討，以作為本研究之理論依據。



將各版本數學教科書從設計理念、與能力指標相符合情形、教材內容與組織、活動設計與取材等面向作分析比較。上述各家學者對教科書的研究，均屬於國內的研究。以上這些教科書研究中，有不同年代的比較研究，如 Tam(2010)、黃幸美(2011)，也有同年代不同版本的比較研究，如游自達等人(2007)。

至於國際比較的教科書研究也有多位學者探討。徐偉民和徐于婷(2009)將台灣與香港國小數學教科書代數教材內容，以內容分析法，各取一種版本的教科書加以分析，以「佈題」為分析的單位，屬於跨國性的教科書比較分析。吳麗玲和楊德清(2007)探討台灣、新加坡與美國的小學五、六年級分數教材，以內容分析法進行分析，分析單位為教科書中的教學單元及數學「題」，並計算其百分比，以作進一步分析，屬於三個國家間教科書的比較分析。再如，陳仁輝和楊德清(2010)將台灣、美國和新加坡的七年級代數教材作比較，以內容分析法，先以「章」為區分單位，再以「題」作為分析單位，比較三個國家的七年級代數課程，在課程教學目標、佈題方式與知識類型的差異，亦是三個國家間教科書的比較分析。

上述研究中，以國小部分較多，國中數學教科書的研究並不多。綜合上述各家學者對教科書的研究，可以從分析單位及分析向度作分類，這些歸類，可以表格呈現如下：

		梁淑坤 (1996)	Tam (2010)	黃幸美 (2011)	游自達等 人(2007)	徐偉民和 徐于婷 (2009)	吳麗玲和 楊德清 (2007)	陳仁輝和 楊德清 (2010)
單 位	佈題	V				V	V	V
	章節		V					
向 度	內容、 表徵、 活動設 計	V		V	V			

參考以上教科書的歸類及本研究的目的，是以單一的部編版國中數學教科書與綱要做分析，並與國小數學教材內容連結作內容分析，本研究的分析單位採用章節為分析單位，分析國內的數學教科書，分類上屬於國內國中數學教科書的非比較研究。

### 三、內容分析法

內容分析(content analysis)的研究法乃是分析如教科書、報章雜誌、論文、廣告等人們用以傳達訊息的工具，人們的意識形態、信仰、價值觀等則包含在其中(楊孟麗、謝水南譯，2008)。例如，上官瑋茵(2010)針對等號為主題以內容分析法研究九年一貫能力指標呈現此主題的情形。由於本研究的研究對象是教科書文本，因此本研究採用的研究方法自然是內容分析法。

### 參、研究方法

本研究分析的教科書是以國立編譯館主編之部編版 99 學年度國中數學教科書，以教育部於民國 92 年公佈之九年一貫數學能力指標(教育部，2003)作為

對照，資料分析之方式採內容分析法。

以國民中小學九年一貫課程數學領域綱要(92綱要)各主題七至九年級分年主題教材(即，數與量(N)、代數(A)、幾何(S)、統計與機率(D))的細目數統計與佔該年級之細目數百分比的計算，作為領域比例的參考；而所佔教科書篇幅比例，其計算方式是以99學年部編版國中數學課本四大主題的頁數、佔該冊數總頁數以及佔三年總頁數與分年級總頁數之百分比，以及各章節頁數佔該冊數總頁數之百分比，作為數量、比例高低評比與討論差異的數值依據。

#### 肆、研究結果

本研究從九年一貫數學能力指標(教育部, 2003)的四大主題—數與量(N)、代數(A)、幾何(S)、統計與機率(D)，而連結(C)主題之覺察、轉換、解題、溝通實各教材之編寫精神與基礎，故予以略過；茲就以下三個面向，從附錄一與附錄二的統計結果分析探討之。

一、四大主題(N、A、S、D)教科書的篇幅來計算，於國中三年的教材篇幅比例

從附錄二之六冊總計可知，國中三年數學教材中，「代數」教材的百分比最重，佔37.5%，其次是「幾何」，佔30.5%，「數與量」則有26.5%，「統計與機率」則僅有5.5%。研究者認為，從國小進入國中階段，應該逐漸脫離較為具體的數字運算，學習抽象的代數運算，提升思考的層次，因此「代數」的比例最重。但若與附錄一分年細目的比例相較(「數與量」，21.4%；「代數」，33.3%；「幾何」，37.3%；「統計與機率」，8.0%)，「代數」與「幾何」的比例略有差異，分年細目中的幾何比例略高，

「幾何」及「數與量」的比例相差不多，重要性僅次於「代數」；而「統計與機率」部分，在九年一貫數學學習領域的階段性目標中，以「能理解統計、機率的意義，並認識各種簡易統計方法」，以及「能報讀簡單統計圖形並理解其概念」為主，至於更高階之統計與機率的相關能力(像是，數據產出的統計設計、利用數據與機率做推論等)，實需更為豐富的知識累積與經驗得以勝任，不在此階段的培養目標中，因此僅以達前述之階段能力為學習之份量，比例偏低實屬合理情形。

二、不同年級(七、八、九)與四大主題(N、A、S、D)兩個向度的教材篇幅比例

(1)不同年級(七、八、九)於四大主題的教材篇幅比例

國小階段的數學，由於學童智力發展因素，抽象思考不夠成熟，加上在學習數學基礎的階段，因此國小階段在數與量(N)方面的學習佔了相當重要的部份，到了高年級，才逐漸加入較抽象的代數(A)，幾何(S)則是以具體操作為主，認識幾何形體，統計與機率(D)則是以能報讀簡單的統計圖形及其概念為重，因此國中階段如何銜接？各年級教材重點為何？則是研究者要探討分析的。

從各年級各主題所佔的教材內容比例來看，國一的教材偏重在數與量(N)

及代數(A)兩大主題,各佔了51.1%和48.9%,數與量(N)的比例稍重,幾何(S)和統計與機率(D)主題則沒有列入國一的教材,而九年一貫數學能力指標中,數與量在國一有19條細目(51.4%),代數則有18條(48.6%),幾何和統計與機率則沒有細目,在比例上是與九年一貫數學能力指標是相對應的。

再從國二的教材來看,教學重點轉向到幾何,佔45.4%的教材內容,代數則佔了37.4%,與國一相較,教材內容約少了11%左右,數與量則大幅減少為17.1%,統計與機率則仍然沒有教材。在九年一貫數學能力指標中,數與量在國二有8條細目(13.1%),代數有17條(27.9%),幾何有36條(59%),統計與機率則沒有細目。細目與教材在比例上大致是相對應的。

國三的教材中,幾何教材的比例最重,有48.1%,與國二相同,其次是代數,有25.2%,統計與機率則有17.3%,最少的是數與量,有9.4%。但若細看其教材分布,若撇開國三下的回顧與前瞻單元來看,幾何和代數教材都集中在國三上;統計與機率則集中在國三下,其餘則是在課本附錄,不列入頁數比例計算;數與量在國三上則完全沒有教材,並且都集中在國三下的回顧與前瞻單元,因此,扣除回顧與前瞻單元後,其比例應修正為:數與量0%、代數18%、幾何55%、統計與機率27%。而在九年一貫數學能力指標中,數與量沒有細目,代數有7條細目(25%),幾何有11條(39.3%),統計與機率有10條(35.7%)。因此,若不將回顧與前瞻單元以及課本附錄算在內,細目與教材在比例上也是大致相對應的。

綜合國一、國二和國三的教材內容來看,國一偏重在數與量和代數,國二偏重在代數和幾何,國三偏重幾何,統計與機率僅在國三下才有教材。從課程原理來看,九年一貫數學能力指標屬於官方課程(official curriculum)課程,教科書的教材屬於書寫課程(written curriculum),若僅從教材內容比例來看,兩者大致是相對應的,但若要看兩者在內容上有無落差,仍有待深入探討。

#### (2)四大主題(N、A、S、D)於不同年級所佔的教材篇幅比例

從四大主題的內容分布來看,第一,「數與量」在國一所佔的比例(51.1%)最重,其次是國二(17.1%),國三的比例最少(9.4%),且國三的數與量教材都是在回顧與前瞻單元,沒有新的教材內容,因此數與量在國一、國二時就已全部教完,若與九年一貫數學能力指標對照(國一、國二和國三分別是51.4%、13.1%、0),比例上則是大致相符的。第二,「代數」在國中三年的比例和數與量類似,國一的比例最重(48.9%),國二次之(37.4%),國三最少(25.2%),國三的代數和數與量的情形相同,教材內容同樣在回顧與前瞻單元,新的教材在國一和國二時就已教完,與九年一貫數學能力指標對照,國一、國二和國三的細目數分別是18(48.6%)、17(27.9%)和7條(25%),教材和能力指標兩者的代數教材比例大致相符。

第三,「幾何」在國一沒有教材,國二和國三的幾何教材比例則大致相同(45.4%和48.1%),與九年一貫數學能力指標對照,國一、國二和國三的細目數分別是0、36(59%)和11(39.3%)條,教材和能力指標兩者的幾何教材比例相差

很大。第四,「統計與機率」在國三下有完整的一個單元介紹,但內容並不多(佔17.3%),其他學期則完全沒有教材,與九年一貫數學能力指標對照,國一、國二和國三的細目數分別是0、0和10(35.7%)條,教材和能力指標兩者的統計與機率教材比例也相差很大。

### 三、與國小連結四大主題(N、A、S、D)中教科書單元章節

由國一各單元來看,研究者發現單元設計有與國小五、六年級所習得的課程有類似的名稱,包含「因數與倍數」、「比」這二個單元,而新加入的有負數、一元一次方程式、二元一次聯立方程式、函數與直角坐標、不等式這五個單元,但細看這些類似課程名稱的單元內容,皆可發現是在國小相關的單元設計中,在類似的概念下加深與加廣,讓九年一貫課程在國小與國中階段有適當的銜接。譬如在因數與倍數單元中,因數、倍數與質數以及公因數與公倍數皆是國小所學過的概念,但細看內容設計仍可發現其難度加深(如:最大公因數 $\times$ 最小公倍數=兩數乘積),而以符號代表數與指數律則為新加入的內容。在比的課程中亦可發現與國小課程的相似之處為比與比值的部分,在國小課程相等的比的基礎下學習比例式與連比、正比與反比。

研究者再以單元出現的先後,分散在四大主題(NASD)及教科書的第幾冊(第一至第六冊),呈現出課程架構圖如附錄三。結果發現,章節之間在四大主題的轉換是國一換3次,國二換5次,而國三才換2次。機率與統計僅曇花一現於三下,而幾何連續地在二下及三上出現共6單元,沒有以螺旋式的方式出現,分散到第一至第六冊去。此種主題轉換的情形,研究者認為有三點可以探討。其一,由前述教材內容分析可知,國一、國二和國三教材內容偏重的主題不同,因此僅在這些主題作轉換;其二,數學知識具有連續性,以國一上教材為例,一元一次方程式單元中出現的負數,一定要先教學,因此在教材主題必須作轉換;其三,從課程編排的角度來看,整合式或螺旋式的教材編排方式,和單一主題式的編排方式,哪一種方式學生的學習效果較好?Grouws(2011)的研究結果顯示,參與數學整合式(integrated)教材課程的學生,其數學成就表現比單一主題式(subject-specific)教材課程的學生要好,此結果可以作為國內數學教材編排的參考。

在與國小單元名稱不同的內容中,仍可看出與國小連結的地方。在負數單元與國小數線單元做了連結,而一元一次方程式則與國小的怎樣解題單元作為基礎,進而在學習二元一次聯立方程式和不等式這兩個單元,而函數與直角座標則在學習完一元一次方程式與二元一次聯立方程式後進行學習。

由國二各單元來看,國二上的「乘法公式與多項式」、「多項式的因式分解」和「一元二次方程式」三者的關連性相當高,學生先學會乘法公式,及多項式的加、減、乘、除,進一步就是多項式的因式分解與解方程式,研究者認為三者應歸為同一類,將其稱做「多項式與方程式」,「畢氏定理與平方根」偏重在計算,與多項式的性質不同,因此應獨立為一類,但研究者認為,畢氏定理與平方根雖放在同一單元,但因為畢氏定理涉及到幾何圖形,與幾何主題的關係較高,平方

根與根式的運算則純粹屬於數字運算，和數與量主題關係密切。國二下的「數列與級數」單元，是從圖形序列、數字序列開始引入，而圖形序列與數字序列在國小階段就已經出現過，因此本單元是屬於國小數學的延伸，予以加深加廣。

國二下的其他單元是幾何的主題，「幾何圖形的角」單元中，如三角形的角、平行與垂直等，都是國小數學的內容，國中階段再次介紹，除了將內容將深加廣外，研究者發現最大的特點是將代數運算及幾何概念在數學上的正式定義引入，並予以符號化。「三角形的基本性質」單元中，三角形的全等引入了幾何證明的教材，研究者認為這對學生而言是一個全新的體驗，考驗著學生的邏輯思考。「幾何圖形」單元中，平行四邊形、線對稱、周長與面積、表面積與體積等，都是小學學過的教材，在此除了重新以數學的正式定義與符號介紹外，也新加入了幾何圖形的包含關係，這正是 van Hiele(1984)的幾何發展階段的第二層次關係期(Relation) 或非形式演繹期(Informal Deduction)的特徵，面積方面，則將圓周率用  $\pi$  取代了 3.14 的近似值。

從幾何教材的整體來看，對照 van Hiele(1984)的幾何發展階段，國小階段幾何教材最多只到第二層次關係期(Relation)或非形式演繹期(Informal Deduction)，國中則從第二層次進到了第三層次形式演繹期(Formal Deduction)。

由國三各單元來看，課程內容包含了「相似形的應用」、「圓」、「二次函數」、「統計與機率」、「回顧與前瞻」；研究者發現，前三項內容(即第五冊)主要在於針對幾何和代數方面性質與推理的深入學習，內容中凡提及幾何相關性質的描述，除再次地連結國二的幾何教材外，其相關性質之說明、推理與證明過程皆甚為詳盡(像是，三角形之相似與全等性質等)，也出現了一個特別強調證明的單元(即：「數學證明」)，主要在於引領學生了解數學證明的重要性與推理論述的邏輯性，並示範其可能的策略(像是，反例的運用)，用以增添幾何證明與推理能力的訓練。後兩項內容(即第六冊)中，「統計與機率」內容延續國小對於資料整理的統計、呈現方式或製成圖表之能力的學習，除增加其統計集中趨勢概念(如，平均數、眾數、中位數)的認識外，亦加入了其對數字圖表的解讀、轉化與分辨能力(如，相對次數與相對累積次數之對應與差異比較)，並增加機率概念的學習，用以融合資料數據與其事件發生之可能性的進階連結。

最後一項的課程內容「回顧與前瞻」，則是針對數與量、代數、幾何作回顧，以及在前述三大領域中，以篇幅分佈平均的綜合例題，作整體數學學習之解題練習，除了提供個別重點的例題練習外，亦有綜合三大主題的練習，但此單元除有部分統計圖表(如，折線圖)融入函數與圖形運用外，並無統計與機率的解題練習，統計與機率這一部分的練習則收錄在第六冊課本附錄中。

## 伍、結論與建議

我國的數學教科書分析方式多樣，有不同年代的比較研究 (Tam, 2010；黃幸美, 2011)、同年代不同版本的比較研究 (游自達等人, 2007)、不同國家不同

年代的非比較研究（梁淑坤，1996）以及跨國性的比較分析（徐偉民、徐于婷，2009；吳麗玲、楊德清，2007；陳仁輝、楊德清，2010），其中國中數學教科書的研究有兩篇（游自達等人，2007；陳仁輝、楊德清，2010），其餘均是國小部分，而本研究則是國內國中數學教科書的非比較研究。根據上述研究結果，可發現國中階段教材中，教材份量的百分比由重到輕依序是：代數、幾何、數與量、統計與機率。而「統計與機率」教材份量偏低（5.5%）的原因，是因為國中階段是以「能理解統計、機率的意義，並認識各種簡易統計方法」，以及「能報讀簡單統計圖形並理解其概念」為主，不牽涉到更高階之統計與機率的相關能力。此外，若從不同年級來看，國一偏重在數與量和代數，國二、國三偏重在代數和幾何，國三上則偏重幾何，統計與機率僅在國三下才有教材。再從教材內容與國小連結的情形來看，國一的教材中，「因數與倍數」、「比」二個單元，及國二的幾何單元中，與國小五、六年級所習得的課程有類似或相同的名稱，這些類似課程名稱的單元內容，皆可發現是在國小相關的單元設計中，在類似的概念下加深與加廣，讓九年一貫課程在國小與國中階段有適當的銜接。其餘名稱不同的單元內容，亦是與國小教材相連結的。另外，若將幾何教材對照 van Hiele(1984)的幾何發展階段，國小階段幾何教材最多只到第二層次關係期(Relation)或非形式演繹期(Informal Deduction)，國中則從第二層次進到了第三層次形式演繹期(Formal Deduction)。

除了上述結論之外，研究者建議未來研究或現職教師，「統計與機率」的國中教材篇幅少並非不重要，教師應重視從生活中理解統計、機率的意義，並報讀生活中真實的統計圖表及其概念，累積豐富的生活經驗，為未來學習更高階的統計與機率的相關概念做準備。其次，雖然四大主題（N、A、S、D）所佔的教材內容比例與九年一貫數學能力指標分年細目的比例大致上是一致的，但兩者在內容上有無落差，仍有待探討，以及與實際課程(enacted curriculum)間有無落差，則有待未來的研究加以驗證。針對此點，建議未來研究可以對老師或學生透過教學觀察或訪談的方式進行研究，以探討九年一貫數學能力指標的精神是否真正落實？

另外，國中數學教材重視與國小教材的連結，建議師資培育中心與國中教師在教學研習或教學研究時，也應重視國小數學教材的部分，如此才能知道學生的學習脈絡，改進教學方式，幫助學生學習。最後，本研究僅針對部編版數學課本進行研究，建議未來研究可進行版本間或跨國的比較。

## 參考文獻

### 中文部份

- 上官瑋茵（2010）。國中課程綱要代數分年細目詮釋的等號類型之內容分析。國立中山大學教育研究所碩士論文，未出版，高雄。
- 吳麗玲、楊德清（2007）。臺灣、新加坡與美國五、六年級分數教材佈題呈現與

- 知識屬性差異之研究。國立編譯館館刊，35(1)，27-40。
- 周珮儀 (2005)。我國教科書研究的分析。課程與教學季刊，8(4)，91-116。
- 徐偉民、徐于婷 (2009)。國小數學教科書代數教材之內容分析：台灣與香港之比較。教育實踐與研究，22(2)，67-94。
- 教育部 (2003)。國民中小學九年一貫課程數學領域綱要。台北：作者。
- 梁淑坤 (1996)。從佈題探討數學教科書的評鑑。教師之友，37(4)，23-28。
- 梁淑坤 (2011)。數學課程改革下綱要實施之相關研究。台灣數學教師電子期刊，28，1-20。
- 陳仁輝、楊德清 (2010)。台灣、美國與新加坡七年級代數教材之比較研究。科學教育學刊，18(1)，43-61。
- 陳秉筠、梁淑坤 (2011)。初探台灣小學數學課程標準的沿革：以民國 64 年與 82 年的「數與計算」為例。DATUM，香港教育學院出版。
- 游自達、林宜城、林原宏、洪賢松、陳兆君、蔡秋菊 (2007)：數學領域教科書評鑑報告。輯於李隆盛、張芬芬編，九年一貫課程之教科書總評鑑：設計理念、能力指標與統整性 (上冊) (IV-1~IV-127)。台北：中華民國課程與教學學會。
- 黃幸美 (2011)。一百年來我國小學數學之幾何與測量教科書發展之教育心理學理論基礎與演進。教科書百年演進國際學術研討會論文集，pp.183-236。發表於教科書百年演進國際學術研討會，國家教育研究院台北院區主辦，2011，台北市。(國立編譯館教科書百年演進研究計畫)
- 楊孟麗、謝水南(譯)(2008)。教育研究法(原作者：J. R. Fraenkel & N. E. Wallen)。台北市：心理出版社。(原著出版年：2003)
- 羅珍珍、鄭震文 (2009)。課程實施的忠實性：What, Why, How 及挑戰。台灣數學教師電子期刊，19，2-14。

#### 英文部分

- Grouws, D. A. (2008, November). *Three hundred classroom visits: What did we learn?* Paper presented at Conference on investigating the relationships between mathematics teaching and the development of curriculum, National Chiayi University.
- Grouws, D. A. (2011, October). *Advancing Mathematics Curriculum Research: Design Considerations and Recent Findings and Implications*. Paper presented at Conference on investigating the relationships between mathematics curriculum implementation and the performance of students' mathematical learning, National Pingtung University of Education.
- Grouws, D. A. (2011, October). *Update on Curriculum Reform in the U.S.: The New Common Core State Standards in Mathematics*. Paper presented at Conference on investigating the relationships between mathematics curriculum

- implementation and the performance of students' mathematical learning, National Pingtung University of Education.
- Lloyd, G. (2008). Curriculum use while learning to teach: One student teacher's appropriation of mathematics curriculum materials. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(1), 63-94.
- Tam, H. P. (2010). A brief introduction of the mathematics curricula of Taiwan. In Leung, F. K. S. & Li, Y. (Eds.), *Reforms and issues in school mathematics in East Asia: Sharing and understanding mathematics education policies and practices* (pp. 109-128). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
- Tarr, J., Reys, R., Reys, B., Chavez, O., Shih, J., & Osterlind, S. (2008). The impact of middle-grades mathematics curricula and the classroom learning environment on student achievement. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(3), 247-280.
- Van Hiele, P. M. (1984). A Child's Thought and Geometry. In D. Fuys, D. Geddes, & R. Welchman Tischler (Eds.), *English Translation of Selected Writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele* (pp. 243-252). ERIC/SMEAC

**附錄一**

國民中小學九年一貫課程數學領域綱要（92 綱要）各主題七至九年級分年細目數與佔該年級之細目數的比例表

主題 年級	N	A	S	D	合計
七	19(51.4%)	18(48.6%)	0	0	37 (29.4%)
八	8(13.1%)	17(27.9%)	36(59%)	0	61 (48.4%)
九	0	7(25.0%)	11(39.3%)	10(35.7%)	28 (22.2%)
合計	27 (21.4%)	42 (33.3%)	47 (37.3%)	10 (8.0%)	126(100%)

附錄二

99 學年部編版國中數學課本四大主題的頁數與佔該冊數總頁數以及佔三年總頁數的整體的比例表

冊數	單元名	次單元	N	A	S	D
第一冊	因數與倍數	1-1 以符號代表數與指數律	4-17(7.7%)			
		1-2 因數、倍數與質數	18-33(8.8%)			
		1-3 公因數與公倍數	34-53(11%)			
		1-4 分數	54-64(6%)			
	負數	2-1 認識負數	66-79(7.7%)			
		2-2 加法和減法	80-93(7.7%)			
		2-3 乘法和除法	94-114(11.5%)			
		2-4 數線	115-126(6.6%)			
		2-5 科學記號	127-142(8.8%)			
	一元一次方程式	3-1 以符號列式			144-153(5.5%)	
		3-2 一次式的運算			154-161(4.4%)	
		3-3 一元一次方程式的解法			162-175(7.7%)	
		3-4 一元一次方程式的應用			176-187(6.6%)	
總計		<b>共 182 頁</b>	138(75.8%)	44(24.2%)	0	0
第二冊	二元一次聯立方程式	1-1 二元一次方程式的列式		4-14(6.1%)		
		1-2 代入消去法		15-23(5%)		
		1-3 加減消去法		24-32(5%)		
		1-4 二元一次聯立方程式的應用		33-40(4.4%)		
	比	2-1 比與比值	42-57(8.9%)			
		2-2 比例式與連比	58-74(9.4%)			
		2-3 正比與反比	75-88(7.8%)			
	函數與直角坐標	3-1 函數			90-96(3.9%)	
		3-2 直角坐標			97-113(9.4%)	
		3-3 函數與圖形			114-126(7.2%)	
		3-4 二元一次方程式的圖形			127-138(6.7%)	
	不等式	4-1 認識不等式			140-148(5%)	
		4-2 不等式的性質			149-165(9.4%)	
		4-3 不等式和數線			166-173(4.4%)	
		4-4 一元一次不等式			174-186(7.2%)	
	總計		<b>共 180 頁</b>	47(26.1%)	133(73.9%)	0

冊數	單元名	次單元	N	A	S	D	
第三冊	乘法公式與多項式	1-1 乘法公式		4-17(8.8%)			
		1-2 多項式與其加減		18-26(5.6%)			
		1-3 多項式的乘除		27-44(11.3%)			
	畢氏定理與平方根	2-1 畢氏定理			46-53(5%)		
		2-2 平方根與近似值	54-72(11.9)				
		2-3 根式的運算	73-82(6.3%)				
		2-4 畢氏定理的應用			83-94(7.5%)		
	多項式的因式分解	3-1 乘法公式與提公因式法			96-109(8.8%)		
		3-2 十字交乘法			110-124(9.4%)		
	一元二次方程式	4-1 用因式分解法求解			126-140(9.4%)		
		4-2 配方法與公式解			141-155(9.4%)		
		4-3 一元二次方程式的應用			156-166(6.9%)		
總計		共 160 頁	29(18.1%)	131(81.9%)	0	0	
第四冊	數列與級數	1-1 數列與級數	4-21(9.5%)				
		1-2 等差級數	22-34(6.8%)				
	幾何圖形的角	2-1 三角形的角				36-55(10.5%)	
		2-2 多邊形的內角與外角				56-69(7.4%)	
		2-3 平行與垂直				70-80(5.8%)	
	三角形的基本性質	3-1 全等的概念				82-95(7.4%)	
		3-2 SSS 全等與尺規作圖				96-114(10%)	
		3-3 三角形的邊角關係				115-130(8.4%)	
	幾何圖形	4-1 平行四邊形				132-148(8.9%)	
		4-2 線對稱與幾何圖形				149-170(11.6%)	
		4-3 周長與面積				171-183(6.8%)	
		4-4 表面積與體積				184-196(6.8%)	
總計		共 190 頁	31(16.3%)	0	159(83.7%)	0	

冊數	單元名	次單元	N 數與量	A 代數	S 幾何	D 機率統計	
第五冊	相似形的應用	1-1 縮放			4-24(13.6%)		
		1-2 相似三角形			25-36(7.8%)		
		1-3 相似形的應用			37-50(9.1%)		
	圓	2-1 圓				52-73(14.3%)	
		2-2 圓與角				74-86(8.4%)	
		2-3 圓與多邊形				87-103(11%)	
		2-4 數學證明				104-120(11%)	
	二次函數	3-1 二次函數			122-141(13%)		
3-2 配方法與拋物線				142-159(11.7%)			
總計		共 154 頁	0	38(24.7%)	116(75.3%)	0	
第六冊	機率與統計	1-1 資料的統計與分析				4-22(10.8%)	
		1-2 資料的分佈				23-42(11.4%)	
		1-3 機率				43-60(10.3%)	
	回顧與前瞻	2-1 數與量	62-86(14.2%)				
		2-2 代數			87-125(22.2%)		
		2-3 幾何				126-159(19.4%)	
		2-4 綜合解題 (數字有劃線的是含兩個以上的主題)	160-162, <u>169</u> , <u>170</u> , <u>172</u> , 175 (3.4%)	164, 166, 167, <u>172</u> , <u>173</u> , 176, 177(3.4%)	163, 165, 167, 168, <u>169</u> , 171, <u>172</u> , <u>173</u> , 174, 177(4.8%)	179-187 (附錄) 不計算	
	總計		共 175.5 頁	31(17.7%)	45(25.6%)	42.5(24.2%)	57(32.5%)
第一冊到第六冊總和		共 1041.5 頁 (100%)	276(26.5%)	391(37.5%)	317.5(30.5%)	57(5.5%)	
各年級總和	一	362 頁(34.8%)	185(51.1%)	177(48.9%)	0(0%)	0(0%)	
	二	350 頁(33.6%)	60(17.1%)	131(37.4%)	159(45.4%)	0(0%)	
	三	329.5 頁(31.6%)	31(9.4%)	83(25.2%)	158.5(48.1%)	57(17.3%)	

附錄三

部編版 NASD (民 99)

N	A	S	D
<p><b>第一冊</b></p> <p>一、因數和倍數                      1-1 以符號代表數                      1-2 因數、倍數與質數                      1-3 公因數與公倍數                      1-4 分數</p> <p>二、負數                      2-1 認識負數                      2-2 加法和減法                      2-3 乘法和除法                      2-4 數線                      2-5 科學記號</p>	<p>三、一元一次方程式                      3-1 以符號列式                      3-2 一次式的運算                      3-3 一元一次方程式的解法                      3-4 一元一次方程式的應用</p>		
<p>二、比                      2-1 比與比值                      2-2 比例式與連比                      2-3 正比與反比</p>	<p><b>第二冊</b></p> <p>一、二元一次聯立方程式                      1-1 二元一次方程式的列式                      1-2 代入消去法                      1-3 加減消去法                      1-4 二元一次聯立方程式的應用</p> <p>三、函數與直角坐標                      3-1 函數                      3-3 函數與圖形                      3-4 二元一次方程式的圖形</p> <p>四、不等式                      4-1 認識不等式                      4-2 不等式的性質                      4-3 不等式和數線                      4-4 一元一次不等式</p>	<p>3-2 直角坐標</p>	
	<p><b>第三冊</b></p> <p>一、乘法公式與多項式                      1-1 乘法公式                      1-2 多項式與其加減                      1-3 多項式的乘除</p>	<p>二、畢氏定理與平方根                      2-1 畢氏定理</p>	

<p>2-2 平方根與近似值 2-3 根式的運算</p>	<p>三、多項式的因式分解 3-1 乘法公式與提公因式法 3-2 十字交乘法</p> <p>四、一元二次方程式 4-1 用因式分解法求解 4-2 配方法與公式解 4-3 一元二次方程式的應用</p>	<p>2-4 畢氏定理的應用</p>	
<p><b>第四冊</b> 一、數列與級數 1-1 等差數列 1-2 等差級數</p>		<p>二、幾何圖形的角 2-1 三角形的角 2-2 多邊形的內角與外角 2-3 平行與垂直</p> <p>三、三角形的基本性質 3-1 全等的概念 3-2 SSS 全等與尺規作圖 3-3 三角形的邊角關係</p> <p>四、幾何圖形 4-1 平行四邊形 4-2 線對稱與幾何圖形 4-3 周長與面積 4-4 表面積與體積</p>	
	<p>三、二次函數 3-1 二次函數與圖形 3-2 配方法與拋物線</p>	<p><b>第五冊</b> 一、相似三角形 1-1 縮放 1-2 相似三角形 1-3 相似形的應用</p> <p>二、圓 2-1 圓 2-2 圓與角 2-3 圓與多邊形 2-4 數學證明</p>	
			<p><b>第六冊</b> 一、機率與統計 1-1 資料的統計與分析 1-2 資料的分佈 1-3 機率</p> <p>二、回顧與前瞻</p>

			2-1 數與量
			2-2 代數
			2-3 幾何
			2-4 綜合解題

# 活動報馬仔

一、 2013/04/03(三)~2013/04/05(五)

**2013 International Conference on e-Commerce,  
e-Administration, e-Society, e-Education, and e-Technology**

**地點：Kitakyushu, Japan**

**參考網址：<http://www.e-case.org/2013>**

二、 2013/04/27(六)~2012/05/01(三)

**American Educational Research Association Annual Meeting  
2013**

**地點：San Francisco, California**

**參考網址：<http://www.aera.net/>**

## 稿 約

### 一、本刊徵選之數學教育刊物為：

- (一) 本刊以徵選實務性的數學教育刊物為主，舉凡任何數學創新教學之方法或策略、數學教學實務經驗、數學課程設計與實踐之心得分享等皆為本刊之首要選擇標的；
- (二) 研究文章（包括以實驗、個案、調查或歷史等研究法所得之結果，和文獻評論、理論分析等）；
- (三) 短文（包括研究問題評析、數學教育之構想、書評、論文批判等）；以及
- (四) 其他符合本刊宗旨之文章。

### 二、本刊所刊之文章，需為報導原創性教學或研究成果之正式文章，且未曾於其他刊物或書籍發表者（在本刊發表之文章未經台灣數學教育學會同意，不得再於他處發表）。

#### (一) 來稿請注意下列事項：

1. 來稿請以中文撰寫，力求通俗易讀，須為電腦打字，每篇以不超過 6000 字為原則（特約稿不在此限），以電子郵件傳送。
2. 來稿請附中英文篇名、作者

姓名及服務機關，作者姓名中英文並列，若有一位以上者，請在作者姓名及服務機關處加註 (1)、(2)、(3) 等對應符號，以便識別，服務機關請寫正式名稱。

3. 來稿請附中英文摘要，並於摘要後列明關鍵詞彙 (key words)，依筆劃順序排序（以不超過五個為原則），英文關鍵詞彙則須與中文關鍵詞彙相對應。
4. 文稿若為譯文，請附原文影本及原作者同意函，並請註明原文出處、原作者姓名及出版年月。
5. 凡人名、專有名詞等若為外語者，第一次使用時，謂用 ( ) 加註原文。外國人名若未有約定成俗之譯名，請選用原文。
6. 附圖與附釋請於文後，並編列號碼，並在正文中註明位置。
7. 文末參考文獻依作者姓氏分別編號排序：中、日文依筆劃多寡排列；西文（英、法、德...等）依字母順序排列；若中、日、西文並列時，則先中、日文後西文。至於參

考文獻之寫法如下：

- (1) 期刊論文，請依下列順序書寫：作者、出版年（西元）、論文篇名、期刊名稱、卷期、頁數。

例：張湘君（1993）。讀者反應理論及其對兒童文學教育的啟示。《東師語文學刊》，6，285-307。

- (2) 圖書單行本，請依下列順序書寫：作者、出版年（西元）、書名、版次、出版地、出版社、頁數。

例：張春興（1996）。《教育心理學》。台北：東華。頁64-104。

8. 稿件順序為：首頁資料（題目、作者真實姓名及服務機關、通訊地址及電話；若需以筆名發表，請註明）、中文摘要、正文（包括參考文獻或註釋）、末頁資料（以英文書明題目、作者姓名及服務機關、並附英文摘要）及圖表（編號須與正文中之編號一致）。

(二) 本刊對來稿有權刪改，不同意者請在稿件上註明。

(三) 來稿刊出，版權為台灣數學教育學會所有。

(四) 作者見解，文責自負，不代表本學會之意見。

(五) 來稿請e-mail

至：dcyang@mail.ncyu.edu.tw