

ISSN 2312-7716  
DOI 10.6610/TJMT

第 44 卷第 2 期  
二〇二四年十月  
Vol. 44, No. 2  
October 2024

# 臺灣數學教師

Taiwan Journal of Mathematics Teachers



國立臺灣師範大學數學系  
Department of Mathematics,  
National Taiwan Normal University



台灣數學教育學會  
Taiwan Association  
for Mathematics Education

**發行單位** | 國立臺灣師範大學數學系  
台灣數學教育學會

## 編輯委員會

主編	陳嘉皇	國立臺中教育大學數學教育學系
副主編	林原宏	國立臺中教育大學數學教育學系
	李源順	臺北市立大學數學系
編輯委員	林勇吉	國立清華大學數理教育研究所
(依姓氏筆劃排序)	林素微	國立臺南大學教育學系
	徐偉民	國立屏東大學教育學系
	秦爾聰	國立彰化師範大學科學教育研究所
	張淑怡	國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系
	張煥泉	苗栗縣頭份鎮信德國民小學
	許慧玉	國立清華大學數理教育研究所
	楊凱琳	國立臺灣師範大學數學系
	劉建成	桃園市平鎮區平鎮國民中學
	鄭章華	國立彰化師範大學科學教育研究所
	謝佳叡	國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系
國際編輯委員	林承瑤	美國南伊利諾大學課程與教學學系

地址	臺北市汀州路四段 88 號國立臺灣師範大學數學系 《臺灣數學教師》
電話	886-2-7734-6576
傳真	886-2-2933-2342
電子郵件	tjmtedit@gmail.com
網址	<a href="http://tame.tw/news/news.php?class=204">http://tame.tw/news/news.php?class=204</a>

## 附 啟

1. 本期刊自 2014 年 35 卷起每年出版二期。
2. 本期刊原名《台灣數學教師(電子)期刊》，自 2014 年 35 卷第 2 期起改名為《臺灣數學教師》。
3. 本期刊電子郵件由自 2015 年 36 卷第 1 期起改為 tjmtedit@gmail.com。

版權所有，轉載刊登本刊文章需先獲得本刊同意，翻印必究

## 主編的話

---

長度測量是許多數學概念的基礎，例如幾何、代數和計算。掌握了長度測量的基本技能，學生才能更好地理解和應用這些高級數學知識。通過學習長度測量，學生可以將數學知識應用到實際情境中，提高解決實際問題的能力。學習長度測量有助於學生發展空間感知能力，使他們能夠更好地理解 and 描述物體之間的空間關係，這對於學習幾何學尤為重要。長度測量常常是建立數學模型的第一步。學生需要學會如何從實際情境中抽象出數學模型，並通過測量數據來進行驗證和調整。本期兩篇論文皆與長度測量有關，首先是張淑怡與甯平獻兩位教授之「從數學素養看長度教材發展及線段圖解題」，本文首先說明研究者的數學素養觀點；其次從數學素養看長度概念與教材發展；接著是利用公分尺將共測單位概念具體化，解決異分母分數加減問題；最後則是利用線段長表徵各種量以具體化方程式和比例概念，讓學生操作表徵解決問題。其中，後二者主要是將長度作為表徵上的運用，基於教學需求，探究如何將抽象的數學概念具體化為可操作的情形。第二篇是由楊芷欣與陳嘉皇兩位作者之「數學體現活動教學之研究—以二年級長度測量為例」，探討體現認知數學活動融入國小二年級長度單元教學後，學生在長度知識概念以及量感的學習成效。研究者自編體現認知活動，對臺中市某國小二年

級學生進行教學。教學前、後對學生施以長度操作測驗，過程中讓學生透過肢體進行操作，並習寫學習單，以瞭解學生操作情形。研究發現：(一) 體現活動實施後，學生在「長度操作測驗」的表現有顯著進步。(二) 體現活動提供操作機會，促進生活經驗連結，增長長度知識。綜合教學研究實施與本次行動研究結果，未來教師在教授長度概念和培養學生量感方面，可借鑒體現認知理論，設計適合的數學活動。這次出版，衷心感謝所有為這份刊物貢獻智慧和力量的朋友們。感謝作者們的勤奮努力，您們的深刻洞見和專業知識帶來了豐富且有價值的內容。感謝編輯人員的細緻工作，您們的不懈努力確保了每一篇文章的高質量和準確性。還要感謝所有支持和閱讀我們刊物的讀者朋友，正是您們的支持和關注激勵我們不斷前行。願我們共同創造的這份刊物，能夠持續為大家帶來知識和啟發，並在未來的日子裡一如既往地與大家共同成長！

《臺灣數學教師》主編  
陳嘉皇 謹誌

# 臺灣數學教師

第 44 卷 第 2 期

2005 年 3 月創刊

2024 年 10 月出刊

---

## 目錄

從數學素養看長度教材發展及線段圖解題 1

／甯平獻、張淑怡

數學體現活動教學之研究－以二年級長度測量為例 16

／楊芷欣、陳嘉皇

# Taiwan Journal of Mathematics Teachers

Vol. 44 No. 2

First Issue: March 2005

Current Issue: October 2024

---

## CONTENTS

Teaching Material Development of Length Concept from the  
Perspective of Mathematical Literacy and its Use as a  
Problem-Solving Tool 1

/ Ping-Xian Ning 、 Shu-I Chang

Research on the Teaching of Mathematics Embodied  
Activities - Taking Length Measurement in Second Grade 16

/ Yang, Zhi-Xin 、 Chen, Chia Huang

## 從數學素養看長度教材發展及線段圖解題

甯平獻<sup>1</sup> 張淑怡<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 國立臺中教育大學數學教育學系

<sup>2</sup> 國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系

本文首先說明研究者的數學素養觀點；其次從數學素養看長度概念與教材發展；接著是利用公分尺將共測單位概念具體化，解決異分母分數加減問題；最後則是利用線段長表徵各種量以具體化方程式和比例概念，讓學生操作表徵解決問題。其中，後二者主要是將長度作為表徵上的運用，基於教學需求，探究如何將抽象的數學概念具體化為可操作的情形。

**關鍵詞：**長度教材發展、線段圖、數學素養

## 壹、數學素養

為什麼要有數學素養呢？與其問為什麼要有數學素養，還不如問為什麼要有國民教育？國民教育是現代化國家普遍的制度，主要目的在於提高國家的競爭力。國家的組成是國民，提升國家競爭力自然就是提升國民的素質。國家競爭力取決於這個國家的繁榮程度，簡單來說，國民的生活都很不錯、有幸福感、對國家有向心力、社會的分工完美，那麼整個社會的生產力因分工良好，就會回饋給國民有更好的生活。

為了提高國民的素質，各國規範了各自的國民教育。一些比較富有的國家，比如挪威、瑞典、丹麥等，其國民教育涵蓋至大學階段。比較貧窮的國家可能是有一大堆人民完全不識字。由於建立國民教育制度的目標在於提高國民素質，也就是希望國民都具有改善自己生活的能力，亦能夠踴躍參與社會。若要社會參與，文字的認識就變得很重要。因此，早期國民教育的目的就是要掃除文盲。

隨著現代社會的參與，由個別的區域擴充到國家，甚至到整個所謂的地球村，地球各地的人們互動越發強大，分工也從局部的區域擴展到全球性的分工。全球性的分工需要的素質就更厲害也更多了，原本只需要認識自己國家的文字，現在要進一步能夠知道外國語，如此才有辦法溝通；要獲得世界認可的標準來交換各自分工的產品，如此才有辦法在更大的國際社會裡面交換經濟及其他各種產品。由是，原本狹隘的文盲掃除已不符現實需求，國民素質被許以更高的期望，這個期望就叫做素養，亦即有素養的國民。換言之，對於每一個國家而言，國民教育的目標提高了，從識字提升到具備語文素養、具備數學素養等等。由上可知，透過國民教育的實施，國民被期許能以學到的數學知識，協助自己「改善生活環境」以及「擴大社會參與」，此為數學素養的兩大目標。

然而，生活環境的改變不一定需要數學，改善生活環境從數學素養的門縫去看，它指的是生活環境中的數、量、形及群體等現況的改變。至於社會參與，一般來說主要是兩件事，一是在社會裡面消費由他人所生產的產品，另一則是提供社會所需求的勞務。由是，當我們以改善生活環境及擴大社會參與為目標，連帶的需要解決一些數、量、形及群體等問題的時候，由個體是否擁有解決這些數、量、形及群體等問題的數學知識，可看出個體的數學素養是否足夠。所以數學素養出現在哪裡？出現在個體改善生活環境或者是擴大社會參與，連帶引出的數、量、形及群體的改變問題的時候，個體如何解決



這些問題。特別是能夠自發性的解決，而非仰賴於他人。此種情境下的成功解題有賴於個體的數學素養。

## 貳、從數學素養看長度概念與教材發展

許本部分主要探究長度概念與教材發展，包括長度初步概念、未數值化的間接比較、個別單位比較、長度普遍單位概念、長度單位制度，以及使用長度化約其他幾何量的測量方法等六階段。特別地，當將數學素養的目標指向改善生活環境及擴大社會參與，每一發展階段可進行的教學活動或提問亦在文中一併說明。

### 一、數學素養中的長度初步概念

長度的本質是指由一個位置移動到另一個位置的移動程度，簡稱為「位移的程度」。位移是感官注意力的移動，可以是視覺或觸覺的，前者是指眼光注意位置的移動，後者是指觸點的移動。至於程度的不同是從量上做區分，質的區分則指向種類的不同。

根據上述定義，長度的初始教學一定要同時呈現兩個要彰顯長度的物品。以「美術課要使用的兩條毛線」為例，將紅色和綠色毛線貼在黑板上，問「這兩條毛線除了顏色和擺放位置不同外，還有什麼不同？」藉此引入「長度」、「比較長」、「比較短」等語詞及其意義。由是，「長度的意義」和「長度的直接比較」是一體兩面。亦即，若沒有要進行兩物長度的直接比較，就沒有從物品中區分出長度的需求，就沒有所謂長度的本質；提到長度的本質就有直接比較的結果。

「直接比較」的意思是將兩個量並置比較，即兩量必須在同一個時空裡面。長度直接比較可以學生比較身高作為教學情境，問「誰比誰高？」「怎麼比會準一點呢？」，學生回答可能是背對背、不能彎腰駝背、不能一個站在椅子上…，此時，一端必須對齊且要拉直等長度直接比較的重點即由學生口中自然產出。

### 二、未數值化的間接比較

當兩量在不同時間或不同空間時，如何比較呢？例如：「五歲時的你和現在的你，哪一個你比較高？」「不同班的小佳和小珮，誰比較高？不把兩人找過來的情況下，如何證明誰比較高？」前者學生可能回答：牆壁上有我五歲時的身高畫記，我現在在那個畫記以上，所以現在的我比較高。後者學生可能先到隔壁班用繩子做出小佳的身高畫記，再把該段畫記的繩長拿來跟小珮身高比較。像上述兩例，當A、B兩量分屬不同時空，無法直接比較時，透過複製其中一量A，將複製所得第三個量C與另一量B直接比較，謂之

「間接比較」。其中，牆壁上五歲的身高刻度到地面的長度，以及用小佳身高做出的繩長皆為間接比較中複製所得第三個量。

根據上述說法，間接比較運作過程涉及「保留概念」與「遞移律」。何謂長度的保留概念？如圖 1，當有紅、綠兩線段頭尾皆對齊時，學生會說兩線段一樣長。當將紅色線段在學生面前弄成曲線時，若學生仍認為兩線段一樣長，學生就具有長度保留概念。換言之，長度不因時空的變化而變化。故「保留概念」真正的意涵是「不變性」。

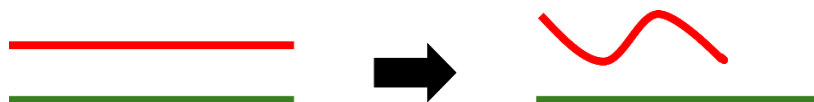


圖1 長度保留概念測試

為何長度的間接比較會涉及保留概念呢？當學生具備保留概念，意味長度開始可以被複製，且相信所複製的長度不因時空的變化而變化。例如相信牆壁上五歲的身高刻度到地面的長度不會變，才能夠主張我長高了；相信用小佳身高做出的繩長不會變，才可以小珮身高和該段繩長做比較以替代之。一般而言，長度保留概念是發展的，而不是學習的。學生大致到一年級下學期才有長度保留概念，故教科書有關長度間接比較多安排在一下。

為何長度的間接比較會涉及遞移律呢？當A、B兩長度無法直接比較，需透過第三個長度C來比較時，如上述做法，若C是複製A所得，C又比B長，我們會說A比B長，此即遞移律（若 $A=C$ ， $C>B$ ，則 $A>B$ ）。另外，若找到的第三個長度C比A短，且比B長，我們會說A比B長，此亦是遞移律之展現（若 $A>C$ ， $C>B$ ，則 $A>B$ ）。

### 三、數值化的間接比較（個別單位比較）

當兩量不能直接比較時，除了完整複製的間接比較外，還有其他比較方式嗎？例如：「繪本的兩段邊長A和B，哪個邊比較長？如何證明？」學生可能使用相同尺寸的迴紋針或橡皮擦等做為媒介，如用迴紋針相連分別複製邊長A和B，再計數A、B各由幾個迴紋針組成進而比較。換言之，當兩量無法直接比較時，使用小單位分別等量合成複製此兩量，再藉由小單位個數加以比較，謂之「個別單位比較」。上例使用的迴紋針即所謂個別單位。

根據上述說法，個別單位比較運作過程涉及更高階的「保留概念」與「數值化」。首先，前曾提及保留概念在間接比較的重要性在於長度開始可以被複製，且相信所複製的

長度不會變。在個別單位比較中，保留概念的重要性再次被彰顯且居較高層次，因長度開始可以被單位化，即可以複製、再製、一而再再而三的製作，且相信被重複的每一個都一樣長。由此看來，沒有保留概念就沒有長度單位的出現，沒有長度單位的出現就不可能有個別單位比較，也就沒有後續的普遍單位比較。其次，當一個又一個單位出現後，如何區分比較多和比較少的單位呢？由於數是用來區分量的，透過數概念的引入，兩量才能進一步區分出各自有幾個單位長，並加以比較。

綜上所述，相較於間接比較，個別單位比較有可重複的單位以及引入數概念在測量上，故可視為間接比較之進化。

#### 四、數學素養中的長度普遍單位概念

為了溝通上的便利，當使用約定俗成的單位，如公分、公尺，進行個別單位比較時，該約定俗成的單位稱為普遍單位。此時我們會用如 5 公分、7 公分來區分兩量。像此種以數來區分量的運作過程，學生須具備公分保留概念，知道每個 1 公分都一樣長，且 5 公分就是 5 個 1 公分。

當給學生一把尺，以 0 為起點測量卡片邊長時，學生可能可以正確報讀，但未必知道刻度尺的結構，如報讀 5 公分，可能只是報讀刻度尺上最後一個數字，未必知道 5 公分是 5 個 1 公分。由是，可進一步提供斷尺，檢查學生是否具公分保留概念。當卡片邊長是由刻度 4 至刻度 9 時，學生反應可能有二：只會報讀數字的小朋友會回答 9 公分；有保留概念的小朋友會回答 5 公分。故，斷尺測量活動在公分尺使用教學中極具重要性。

普遍單位是一約定俗成的單位，其來源主要是因為人們要分工合作，讓整個社會來參與各種社會物質的製作，此與強調改善生活及擴大社會參與的數學素養關係密切。究竟普遍單位的長度題材如何在素養教學中實施呢？在學校可以進行教室空間布置，可從丈量教室開始，針對可以移動的家具先行設計擺放的位置，實際擺放後可再重新布置組織，亦可以畫出示意圖。同樣的步驟，可以讓學生布置自己的房間或書桌作為作業。此外，如作手環，如何串珠才能剛剛好？買成衣，何種尺寸較合適？學生在解決上述任務的歷程中，除使用普遍單位，前曾提及的直接比較、間接比較、個別單位比較等亦皆是可能涉及的解題行為。由於食衣住行育樂皆和長度有關，若能配合十九項議題取材，應更能強化數學素養與現實生活的連結。

#### 五、數學素養中的長度單位制度

測量長度的普遍單位有很多，這些單位及其彼此間的關係謂之單位制度。目前國小此部分的教學重點多在複名數、度量衡關係的建立與使用，然，在強調改善生活及擴大

社會參與的數學素養下，下述議題可供課堂討論與澄清：「為何要有這麼多普遍單位？」節省溝通體力使更簡約掌握環境，以及生活情境和交流中的誤差容許程度是主要原因。

「為何以 146 公分，而非 1460 毫米，來描述身高？」單位量是 1 公分時，該身高介於 145.5 到 146.4 之間，0.5 公分的誤差是可容許的，不須要求到 0.5 毫米的誤差範圍；且單位數是 146 較符合簡約的條件。「單位會繼續擴充嗎？」單位會隨著科學的發展而擴充，如更大的單位如光渺，更小的單位如奈米。

另外，在度量衡關係的建立與使用上可採取下列步驟：(一) 關係的建立：從「一樣長」過渡到「等號關係」。如「1 公分和 10 個 1 毫米合起來一樣長」此一關係之建立，可請學生使用公分尺（同時有公分和毫米的刻度），從公分刻度 2 畫到刻度 3，問學生「這是幾公分？和幾個 1 毫米一樣長？」換言之，分別使用公分和毫米為單位去測量同一線段。關係建立後，可以說因為一樣長，所以我們記成「=」。(二) 使用這個關係：方向有二，(a) 兩個都是整數，例如，2 公分 5 毫米 = ( 25 ) 毫米；25 毫米 = ( 2 ) 公分 ( 5 ) 毫米。(b) 在學會小數、分數後才去建立「1 毫米和 0.1 公分一樣長」，1 毫米 = 0.1 公分，25 毫米 = ( 2.5 ) 公分。

## 六、使用長度化約其他幾何量的測量方法

幾何量包括長度、面積、體積、角度、容量，這些量皆可透過約定各自單位與長度單位間之關係，進而化約成長度來進行。就面積而言，我們約定「1 平方公分是每邊長 1 公分的正方形面積」，此約定有何功能？以長 3 公分寬 4 公分的長方形面積為例，原先需透過平方公分板計數有幾格，當有了 1 公分長度和 1 平方公分間的關係後，就可透過邊長之分析，將長方形變成 3 行 4 列個正方形，即 1 列有 3 個，有 4 列，進而發展出長方形面積公式是「長 x 寬」，於是僅須透過測量長方形之長和寬即可算出面積。

類似地，體積單位與長度單位的約定為「1 立方公分是每邊長 1 公分的正方體體積」，以長 3 公分、寬 4 公分、高 5 公分的長方體體積為例，原先需透過計數有幾個 1 立方公分之正方體，當有了 1 公分長度和 1 立方公分間的關係後，就可透過邊長之分析，將長方體視為一層有 3 行 4 列個，共 5 層的立方體構成，進而發展出長方體體積公式是「長 x 寬 x 高」，於是僅須透過測量長方體之長、寬、高即可算出體積。

另外，我們亦可利用單位圓的弧長來計算角度，即將角度單位（弧度量）與長度單位約定為「單位圓的弧長是 1 公分時，該弧所夾角度的弧度量是 1」，此為高中範圍，在此不贅述。至於容量的部分亦可間接透過其與體積單位的約定「1 毫升是 1 立方公分」，來算出容量。

## 參、利用公分尺將共測單位概念具體化， 解決異分母分數加減問題

兩個量若可以找到同一個單位量，使得兩個量都成為這個單位量的整數倍時，這兩個量叫做可共測量。例如：8 和 6 都是 2 的整數倍， $\frac{1}{3}$  和  $\frac{1}{4}$  都是  $\frac{1}{12}$  的整數倍。兩量若可共測，其共測單位量可以不只 1 個。正整數與共測單位相關的是公因數問題，分數與共測單位相關的是公分母的求解問題。異分母分數加減運算過程中的通分，即在尋找共測單位，除了由教師直接告知方法外，如何建基於學生的先備知識自然的引入呢？

當學生首次接觸異分母分數加減問題「 $\frac{1}{3}$  條蛋糕和  $\frac{1}{4}$  條蛋糕，哪一個比較多？多多少條？」時，學生多能回答  $\frac{1}{3}$  條比較多，但卻無法回答多多少條。但若是離散量情境佈題，「一包糖果 24 顆， $\frac{1}{3}$  包和  $\frac{1}{4}$  包，哪一個比較多？多多少包？」學生多能透過轉換為糖果的顆數進行解題，如「 $\frac{1}{3}$  包糖果有 8 顆， $\frac{1}{4}$  包糖果有 6 顆，多 2 顆。1 包 24 顆，所以是多  $\frac{2}{24}$  包。」亦可進一步紀錄為「 $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{2}{24}$ 」。

由上例可知，糖果的離散本質提供了天然的共測單位，1 顆或  $\frac{1}{24}$  包，使學生得以給出  $\frac{2}{24}$  包此一答案。換言之，在離散量來說，要找共測單位是很自然的，因離散量有一個永遠的共同單位「1」，而「1」是所有數的公因數。由是，建議公分母的求解問題應考量以離散量的問題引入較為自然。

由於公分尺是使用公分將連續量離散化，例如一把 24 公分的尺代表它是由 24 個 1 公分組合成的，此與一包糖果有 24 顆的道理是一樣的，故公分母的求解問題於離散量情境佈題後，可使用公分尺過渡到連續量，此時可利用離散量經驗解決連續量問題。以下舉例說明如何使用公分尺進行連續量情境之教學，「美術課，一個男生分到  $\frac{1}{4}$  條彩帶，一個女生分到  $\frac{1}{3}$  條彩帶，一個女生比一個男生多分到多少條彩帶？」

首先，教師依序提出下述五個問題，並請學生以分母的整數倍，如 24 公分，作為一條彩帶的長度，依序解題與討論（如圖 2）。其次，請小組各自以分母的整數倍（24 公分以外的數值）作為一條彩帶的長度，再次進行下述五個問答，並歸納初步發現。最後，可以任意長度作為彩帶長，脫離公分尺數值化的部分，推廣成直接以連續量的條為單位進行操作。

**問題 1：**「你能把（24 公分）線段平分成 4 等分嗎？請用 4 個不同的刻度標示出來。」此時學生能透過等分除解題，並在刻度上下分別以公分與條作為單位予以標示。

**問題2:**「你能把(24公分)線段平分成3等分嗎?請用3個不同的刻度標示出來。」此時學生能透過等分除解題,並在刻度上下分別以公分與條作為單位予以標示。

**問題3:**「你能不能找到一個共同單位,分別讓 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{4}$ 是那個刻度的倍數?」此時學生可透過8公分和6公分的共同單位是2公分或1公分,找到 $\frac{1}{3}$ 條和 $\frac{1}{4}$ 條相應的共同單位是 $\frac{1}{12}$ 條或 $\frac{1}{24}$ 條。

**問題4:**「 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{4}$ 如何用共同單位 $\frac{1}{12}$ 來表示?」「 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{4}$ 如何用共同單位 $\frac{1}{24}$ 來表示?」當共同單位是 $\frac{1}{12}$ 條(2公分),學生透過將8公分和6公分分別表示為「4個 $\frac{1}{3}$ 」和「3個 $\frac{1}{4}$ 」,找到 $\frac{1}{3}$ 條和 $\frac{1}{4}$ 條相應的表示方式是「4個 $\frac{1}{12}$ 」和「3個 $\frac{1}{12}$ 」,紀錄為「 $\frac{1}{3}=\frac{4}{12}$ , $\frac{1}{4}=\frac{3}{12}$ 」。當共同單位是 $\frac{1}{24}$ 條(1公分),運用相同方式,可找到等值分數「 $\frac{1}{3}=\frac{8}{24}$ , $\frac{1}{4}=\frac{6}{24}$ 」。

**問題5:**「 $\frac{1}{3}$ 條比 $\frac{1}{4}$ 條多多少條?請用條為單位來計算。」學生可能紀錄為「 $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{12}$ 」或「 $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{8}{24} - \frac{6}{24} = \frac{2}{24}$ 」。

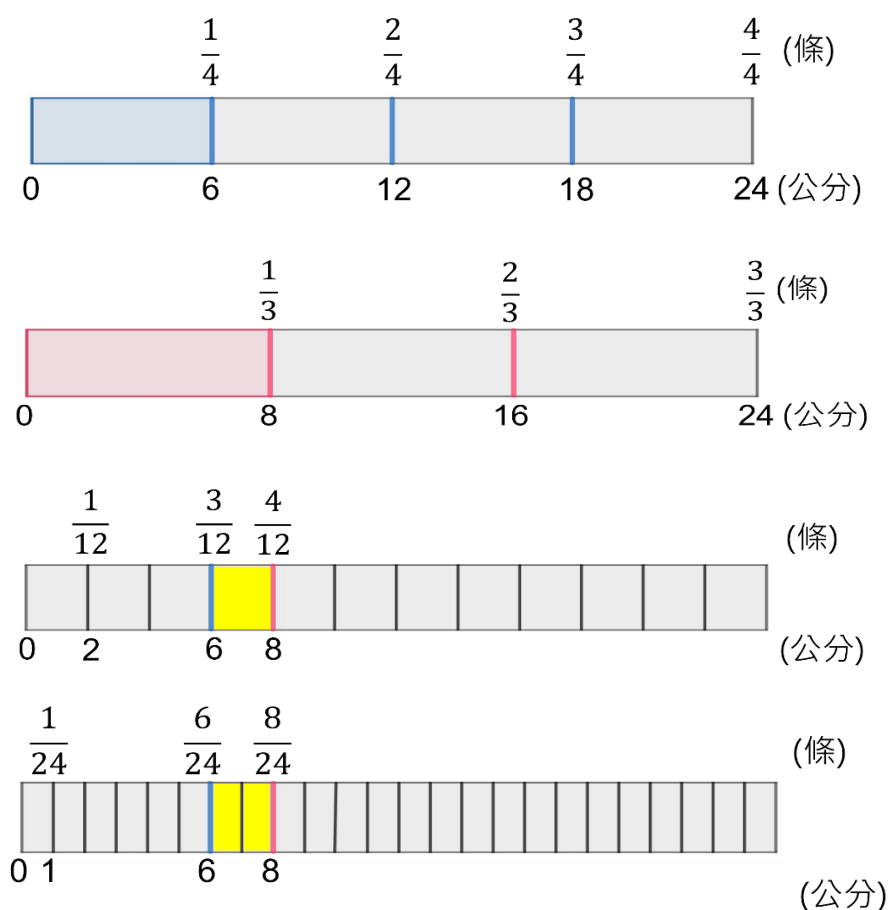


圖2 用24公分尺解異分母分數減法問題

由上可知，將公分尺引入異分母分數加減教學之原因，除了公分尺是使用公分將連續量離散化，可利用先前離散量經驗解決連續量問題外，尚有下列兩部分：(一)公分尺上的刻度可視為巢狀刻度，其啟發如何去找共測單位。所謂「巢狀概念」可以大包內有中包，中包內有小包的糖果包裝作為類比，此時中包可視為由小包構成的全體，中包也可視為構成大包的部分。在上例問題 4 中，8 公分和 6 公分一方面可視為由 2 公分或 1 公分這些共測單位構成的全體，另一方面其也是構成 24 公分此一全體的部分。同樣的， $\frac{1}{3}$  條和  $\frac{1}{4}$  條一方面可視為由  $\frac{1}{12}$  條或  $\frac{1}{24}$  條這些共測單位構成的全體，另一方面其也是構成 1 條此一全體的部分。此一在公分尺上找共測單位的歷程，有助該概念具體化。(二)公分尺上同時有公分和毫米兩種單位，一刻度可同時使用此兩單位描述，如 1 公分 = 10 毫米，此對於可在其上分別使用原單位及共測單位描述同一刻度有所啟發，如問題 4 的等值分數。

## 肆、利用線段長表徵各種量以具體化方程式和比例概念，讓學生操作表徵解決問題

凡是可單位化，可以被比較的量，如比大小、比先後，皆可以被表示成直線。由是，離散量，如人數、個數、錢數等皆可以用線段長來表徵。另外，國小量與實測範疇的這些量，包括長度、面積、體積、重量、角度、容量、時間等由於皆可單位化，故亦皆可再表現成為長度。例如：時間再表現成為長度是指將鐘面的圓周長拉直成為長度，當短針從刻度 1 走到 4，表示時間是 3 小時。體積再表現成為長度是指將體積視為 1 立方公分之積木個數併排成一直線，當從刻度 1 到 4 表示體積是 3 立方公分。又如，面積再表現成為長度是指將面積視為 1 平方公分之方格個數併排成一直線，當從刻度 1 到 4 表示面積是 3 平方公分。

由上可知，當學生理解尺的刻度結構時，即可透過長度將這些量加以數值化，此時，除了可以把幾個同類量的關係展現在同一線段圖上，亦可在相同長度的線段圖上展現不同類量。前者可用來具體化方程式概念，後者則可具體化比例概念。以下分別說明之：

### 一、利用線段圖將方程式概念具體化，作為代數概念前置

整數四則問題能化約為方程組問題，透過代入消去法、加減消去法等來解題，過程中涉及等量公理，對國小兒童較為抽象。當學童能將其他量的測度再表現成為長度，即

可將問題由抽象的文字具體化成為線段的具體關係，等量關係就可以用等長來表示，再利用對具體關係的操作來解決問題。亦即把聯立方程組的運作透過利用線段圖的表示方式來解題。此一作法之優點為促進兒童以具體運作的方式來解決原本要使用等量公理來解決的抽象聯立方程組問題。以下以雞兔同籠問題為例。

**問題：**兔和雞共有 10 頭，共有 24 隻腳，兔和雞各有幾頭？

首先，以聯立方程組來解題：

將兔子設為  $x$  頭，雞  $y$  頭，

原問題可寫成聯立方程組(1)  $x + y = 10$ ，(2)  $4x + 2y = 24$

將(2)重組變成  $2(x + y) + 2x = 24$ ，

(1)利用等量公理，兩邊同時乘 2 變成  $2(x + y) = 20$  代入(2)

(2)變成  $20 + 2x = 24$

再利用等量公理  $2x = 24 - 20$ ， $2x = 4$ ， $x = 2$ ， $y = 8$

接著，改以線段圖將上述聯立方程組之運作歷程具體化（如圖 3）：

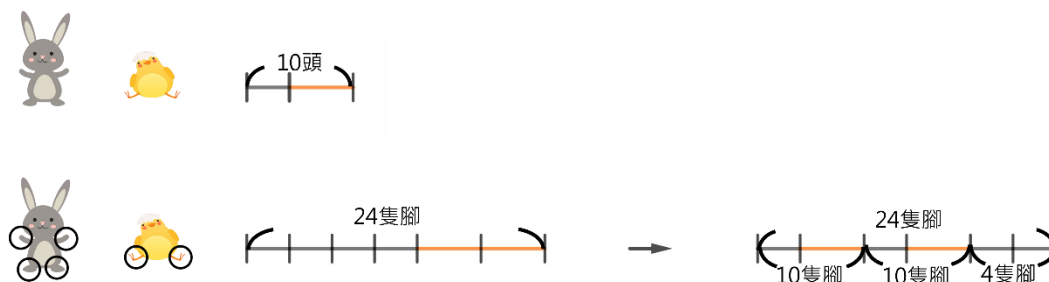


圖 3 雞兔同籠的線段圖解題歷程

(1) 以灰線段代表兔子頭數，橘線段代表雞頭數。

(2) 將題目中的每個關係敘述一一表徵為灰色和橘色線段間的具體關係。如以灰線段和橘線段合起來是 10 單位，表示兔和雞共 10 頭。一隻兔子有 4 隻腳，兔子總腳數可看成左前腳、左後腳、右前腳、右後腳個別總數的合成，由於左前腳、左後腳、右前腳、右後腳個別總數皆與兔子頭數一樣多，故兔子總腳數可視為 4 段灰線段。同樣地，一隻雞有 2 隻腳，雞的總腳數即為 2 段橘線段；再以 4 段灰線段和 2 段橘線段合起來是 24 單位，表示雞和兔的總腳數是 24 隻腳。

(3) 操作灰色和橘色線段間的具體關係來解題。由於灰線段和橘線段合起來是 10 單位，故將第二個線段圖加以重新組織，總腳數變成 2 組灰、橘線段和剩下的 2 段灰線段。此時，剩下的 2 段灰線段為 4 單位 ( $24 - 20 = 4$ )，1 段灰線段即為 2 單位，亦即兔



子 2 頭。由此可求出雞 8 頭。

除了上述雞兔同籠問題外，怎樣解題教材中的年齡問題，基準量與比較量教材中的母子和、母子差等未知數問題亦皆可以變成線段關係圖，等量關係就可以用等長來表示，透過操作具體關係來解題，使方程式(組)概念具體化。

## 二、利用線段圖將比例概念具體化，解決速度、濃度、密度問題

速度、濃度、密度等內涵量是由比值來定義，涉及兩個量的複合問題，欲了解這些概念，須先了解「統計的平均數」，然此概念是兒童較為缺乏的。以生活情境中的開車速度為例，在高速公路、交流道、市區等的速度限制與交通狀況不盡相同，過程中車子並非勻速的(會忽快忽慢)，故總距離除以總時間求得的速度事實上是平均值，僅意味著該車的速度可以該平均作為代表，此時可以進行已知距離與時間的兩車車速比較。至於單一車子的速度計算，唯有想像在一條沒有紅綠燈的路上勻速直線前進，題目才有意義。由上可知，在速度、濃度、密度等內涵量問題中，「均勻分布」是解題的基本假設。為協助學生跨過均勻分布的想像困難，此處利用線段圖直的概念來具體化，亦即將速度、濃度、密度等再表現成相同長度的不同量單位的比例關係。以下使用線段圖使速度概念具體化。

**問題：**車子 3 小時行駛 150 公里，時速是多少？



圖 4

### 時速問題的線段圖解題歷程

由圖 4 可知，相同長度的線段圖，上面代表行經距離 150 公里，下面代表所花時間 3 小時。當將下面的 3 小時分割成 3 段 1 小時，每段 1 小時上面對應的是 50 公里，即時速 50 公里，線上每一點的速度都是時速 50 公里。

由於此種形式的線段圖是距離對時間的表達線，每一點都是速度，是比值，且每一點上的速度都是一樣的，故可以進一步讓學生視覺上感受到，同一速度，不論是時速、分速或秒速，其實都是同樣的速度，只是線段圖下方的時間單位不同，而造成上面的距離不同，此應可協助解決學童在速度單位互換時選用乘法或除法上的困難。以下以分速換秒速的問題為例。

**問題：**小明 2 分鐘走 120 公尺，分速是多少？秒速是多少？

請學生依題意畫出一線段圖（如圖 5），上面標示 120 公尺，下面標示 2 分鐘後，教師進行關鍵提問，學生回應並同步分割線段圖。首先，教師提問「2 分鐘是幾個 1 分鐘？」「在每個 1 分鐘，小明移動多遠？」（學生作答如圖 5 步驟 1，即分速是 60 公尺）。其次，教師提問「1 分鐘是幾個 10 秒？」「在每個 10 秒鐘，小明移動多遠？」（學生作答如圖 5 步驟 2）。接著，教師提問「10 秒能不能再細分成 1 秒？」「在每個 1 秒鐘，小明移動多遠？」（學生作答如圖 5 步驟 3，即秒速是 1 公尺）。由於線上每一點速度都一樣，故分速 60 公尺 = 秒速 1 公尺。由圖 5 可知，分速換成秒速是由大刻度變成小刻度，用除法。相反地，秒速換成分速、分速換成時速皆是由小刻度換成大刻度，用乘法。

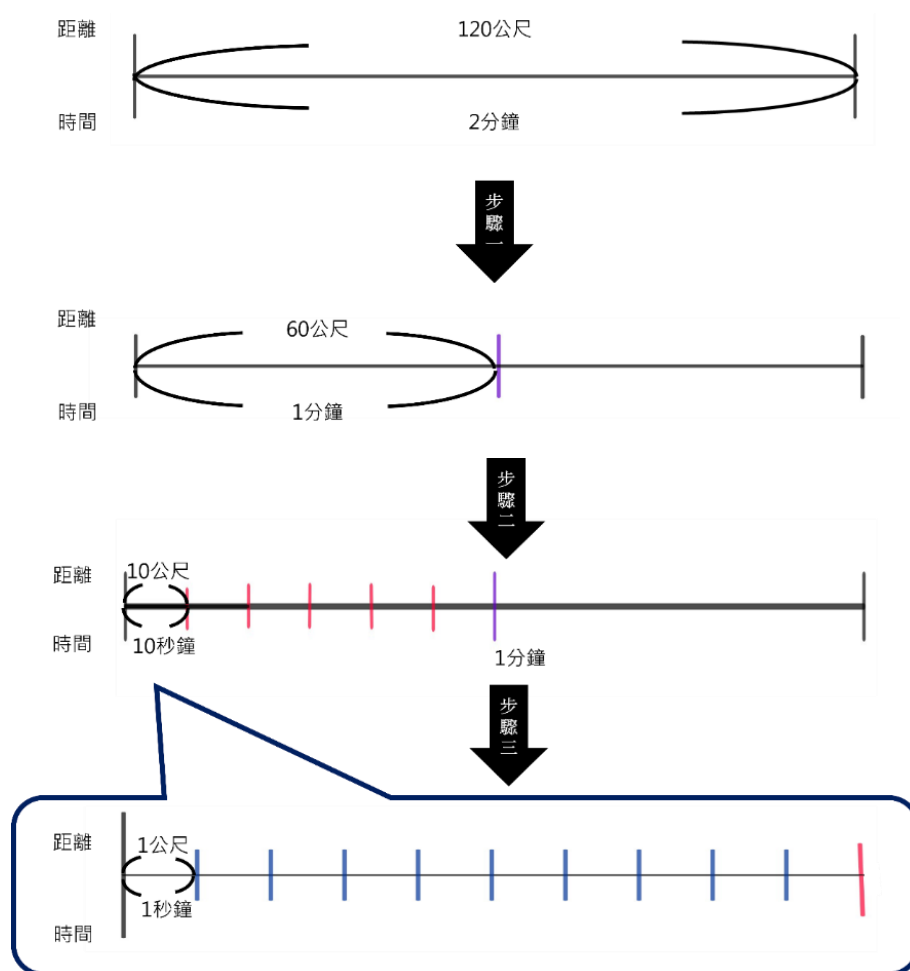


圖 5 分速換秒速的線段圖解題歷程

值得一提的是，除了使用線段圖，針對數學學習困難的學生，可以進一步將資訊科技融入教學，如製作能同時呈現時刻變動和位置變動的影片，上面是人走路產生的位置

變動，底下可以同步看到鐘面刻度的變化，如此應會讓學生對速度以及不同速度單位間的換算更有感。

此外，線段圖除了可用來計算個別的速度、濃度、密度外，亦可進一步用來比較彼此間之關係。以下以濃度比較為例。

**問題：**媽媽用 1 罐蘋果原汁加 4 杯水調成蘋果汁，小伶用 2 罐蘋果原汁加 6 杯水調成蘋果汁，誰調的蘋果汁比較甜？

必須先說明的是，濃度問題亦預設了蘋果汁裡面的原汁和水都均勻分布。相同長度線段上下可以是不同量的單位，如圖 6 線段圖下方是原汁，單位是罐；上方是水，單位是杯。當以線段圖來表現時，原有蘋果原汁和水兩種變因簡化為長度的變因，就可因著不同人的配方，用相似來放大或縮小。

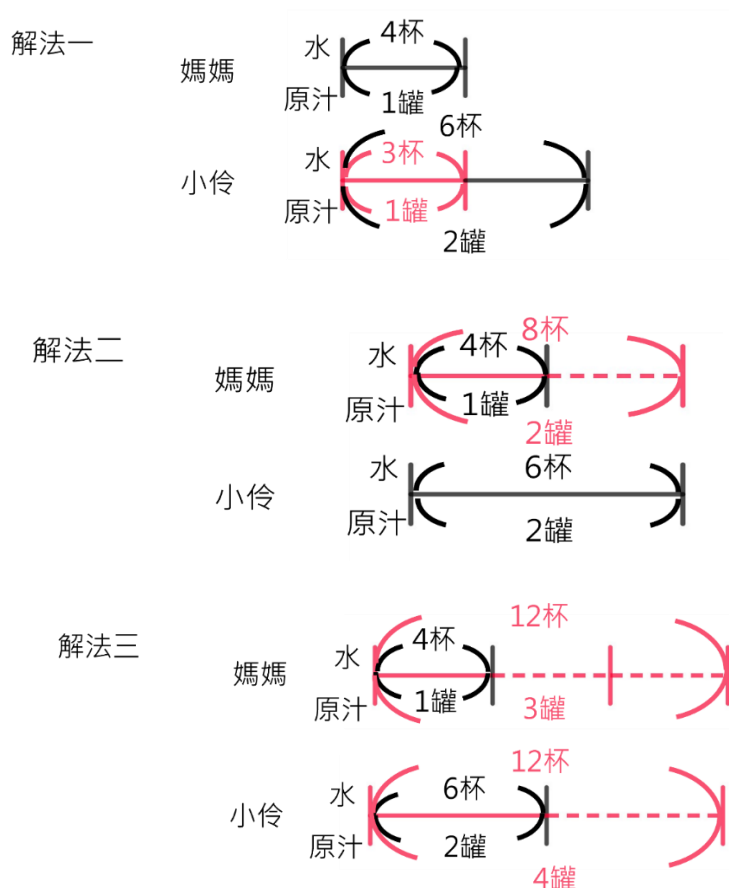


圖 6 用線段圖解濃度比較問題的三種解法

圖 6 解法一和解法二皆是固定原汁，比較水量的作法；解法三是固定水量，比較原

汁的作法。以下說明之：解法一是將小伶的 2 罐原汁分割成 2 段，每段是 1 罐原汁，上面對應的是 3 杯水，而媽媽 1 罐原汁用的是 4 杯水。相同原汁下，小伶用的水比較少，故小伶的較甜。解法二是將媽媽的 1 罐原汁拉長成 2 段，2 段是 2 罐原汁，上面對應的是 8 杯水。而小伶 2 罐原汁用的是 6 杯水，故小伶的較甜。解法三是將媽媽的 4 杯水拉長成 3 段，3 段是 12 杯水，下面對應的是 3 罐原汁。同時亦將小伶的 6 杯水拉長成 2 段，2 段是 12 杯水，下面對應的是 4 罐原汁。相同水量下，小伶用的原汁比較多，故小伶的較甜。

## 伍、結語

本文將數學素養的目的指向改善生活環境及擴大社會參與，並從該觀點來看長度概念與教材發展，提供六個發展階段可進行的教學活動與提問。另外，本文亦探究長度在表徵上的運用，包括利用線段圖將抽象的分數共測單位、方程式和比例概念具體化，藉以降低問題難度。所謂具體化是指將文字題中的各種量再表現成為視覺可見的長度，並將量與量間的關係用長度逐一表現出來，進而操作長度關係來解題。由於長度被進一步使用變成學生解決問題的工具，亦即學具，故教學生自己製作線段圖來解題亦是本文所強調的。

致謝 本文原始素材源自甯平獻教授主講的台中線上讀書會，感謝魏嘉伶小姐提供逐字稿。

楊芷欣、陳嘉皇 (2024)。

數學體現活動教學之研究—以二年級長度測量為例。

臺灣數學教師, 44 (2), 16-54

doi: 10.6610/TJMT.202410\_44(2).0002

## 數學體現活動教學之研究—以二年級長度測量為例

楊芷欣<sup>1</sup> 陳嘉皇<sup>2</sup>

<sup>1</sup>臺中市大雅區汝鑾國小

<sup>2</sup>國立臺中教育大學數學教育學系

本研究旨在探討體現認知數學活動融入國小二年級長度單元教學後，學生在長度知識概念以及量感的學習成效。研究者根據體現認知理論和數學領域課程綱要中的長度學習表現與學習內容，自編體現認知活動，對臺中市某國小二年級學生進行教學。教學前、後對學生施以長度操作測驗，過程中讓學生透過肢體進行操作，並習寫學習單，以瞭解學生操作情形。研究者觀察學生操作中的肢體動作，並使用課室錄影及照片紀錄分析學童表現。研究發現：(一) 體現活動實施後，學生在「長度操作測驗」的表現有顯著進步。

(二) 體現活動提供操作機會，促進生活經驗連結，增長長度知識。綜合教學研究實施與本次行動研究結果，未來教師在教授長度概念和培養學生量感方面，可借鑒體現認知理論，設計適合的數學活動。本研究提出以下教學建議：(一) 體現活動之課程安排需要考量學生的數學程度。(二) 體現活動雖然有趣，但教師需要安排較多時間去實施。未來研究亦可以考慮設置實驗組與對照組，或採用其他單元，來進一步驗證結果。

**關鍵詞：**長度、量感、測量、體現活動、體現認知

# Research on the Teaching of Mathematics Embodied Activities - Taking Length Measurement in Second Grade

## Abstract

This research aims to explore the effectiveness of students' knowledge concepts of length and sense of quantity after the cognitive mathematics activity curriculum is integrated into length unit teaching in the second grade of elementary schools. Based on the embodied cognition theory and the learning performance and learning content in the curriculum syllabus in the field of mathematics, the researcher compiled a self-organized embodied cognition activity team to teach second-year students in an elementary school in Taichung City. Length operation tests are administered to students before and after teaching. During the process, students are allowed to operate with their bodies and write study sheets to understand the students' operation conditions. The researchers observed students' body movements during operations and used classroom videos and photo records to analyze students' performance.

Research found:

1. After the implementation of the reflection activities, students' performance in the "Length Operation Test" has improved significantly.
2. Reflective activities provide operational opportunities, promote connections between life experiences, and increase knowledge.

Based on the implementation of teaching research and the results of this action research, future teachers can draw on embodied cognition theory to design suitable mathematics activities in teaching the concept of length and cultivating students' sense of quantity. This study puts forward the following teaching and research suggestions:

1. Curriculum arrangements that reflect activities need to take into account students' mathematics level.
2. Although the reflection activities are interesting, teachers need to allocate more time to implement them.

Future research could consider establishing experimental and control groups or employing other units to further validate the results.

**Keywords:** Embodied cognition, Embodied activity, Length, Measurement, Sense of quantity.

## 壹、緒論

人類生活與環境密不可分，我們在學習的過程中會用身體感官認識世界，例如：用眼睛認識花草樹木的樣子、用鼻子聞出甜甜的蜂蜜香氣、用皮膚感受氣溫的冷與熱……等。也會透過肢體動作回應環境，例如：天氣太熱，因此舉起手做出搧風的手勢動作、天氣寒冷時會產生全身性的發抖……等。我們無時無刻透過身體感官與環境互動。

依據 Piaget 和 Inhelder (1969) 提出的認知發展論中，由「前運思期」過渡到「具體運思期」適逢國小低年級階段，該階段的學生透過與環境、人工製品互動形成知識。根據教育部 (2018) 公布的《十二年國民基本教育課程綱要數學領域》(以下簡稱《數學領綱》) 指出，在小學第一或第二學習階段，學生處於建立數學概念基礎的關鍵時期。由於其數學經驗不足，教師必須藉生活情境來引導學生學習。因此期盼教師能提供具體情境讓學生進行操作，透過活動察覺並形成相應的數學概念，同時也期許學生能正確使用數學工具。而關於使用數學工具方面，可以發現生活環境裡，有不計其數的事情會運用到「測量」技術。舉凡長至蓋房子時測量樓房高度、丈量土地的邊長、計算旅遊路途距離有多長；短至紙張邊長長度、衣服肩膀寬度是否合身，甚至運用紙筆和直尺畫出兩點中間的距離直線，都不外乎與測量息息相關。

「體現認知」的教學策略，恰好符合教育部 (2018)《數學領綱》提及第一學習階段 (一年級、二年級) 的數學學習方式，建議以「操作」為主。研究者認為運用身體動作學習數學，可能會引起學童的學習興趣，在身體動作和學習媒材的觀察、互動、理解，進而達到增進數學學習成效之目的。本研究之「體現認知數學活動」意指研究者依據體現認知理論，融入國小二年級長度單元「認識公分」所設計出的活動。

本研究目的是應用「體現認知」理論於數學教學為原則，設計二年級長度概念以及培養學生量感發展為主的教學活動。讓學生透過與環境、人工製品互動體驗，形成量感。依據學生在長度操作測驗的學習表現，探討體現認知數學活動是否能有效增進學生數學學習成效。本研究欲探討的問題如下：

- 一、探討「體現認知數學活動」後，學生在「長度操作測驗」的學習表現是否有所差異？
- 二、探討學生在長度單元的操作表現為何？



## 貳、文獻探討

### 一、體現認知定義

體現認知 (Embodied Cognition) 一詞是由「具體表現」(Embodied) 及「認知」(Cognition) 組合而成，它主要探討個體與環境之間的互動，環境包含社會、物理、教學等三種不同類別的環境 (Sriraman & Wu, 2020)，同時也涵蓋了情意、文化層面的環境 (Núñez et al., 1999)。Tran 等人 (2017) 定義體現認知為知覺與動作的循環，個體經由動作來回應外在的物理環境與心理內在環境的改變，知覺系統感受到這個改變，繼續進行下一步的行為，所以認知的形成是透過身體感官知覺與環境互動的結果，是被身體及其活動方式塑造出來的。Duijzer 等人 (2019) 強調學習和認知過程發生在個人的身體與其物理環境之間的相互作用中，是以生理條件為基礎，探討心智外的訊息呈現因素如何影響心智內的訊息處理運作。

本研究將「體現認知」的操作型定義為：透過教師設計體現認知數學活動，在教學過程中，觀察學生的操作與表達，分析該活動是否有效提升學生學習表現。

### 二、體現認知的課程

#### (一) 體現認知應用的課程領域

Duijzer 等人 (2019) 曾在文章中表示體現學習可以加強科學、技術、工程和數學的學習。學習數學通常被視為從具體、合理化到抽象的漸進運動或軌跡 (Breive, 2022)，較適合在實際教學場域實施體現認知教學。

#### (二) 體現認知數學課程設計

體現認知課程設計是利用認知科學哲學中的體現轉向及認知發展和社會文化理論，來闡明構建和促進教學材料和活動的綜合指導方針 (Abrahamson et al., 2020)。根據 Abrahamson 等人 (2020) 的研究指出，體現設計研究的重點是導師與學生在核心概念的協同，努力將擬定的學科展示方式 (例如：圖表) 視為表示或促進尊重討論中所制定的直觀知識源現象。具體化的設計可以使學生做好正確的直覺反應或表現的準備，然後再提供他們驗證並增強這些直覺的分析程序。

基於動作的體現設計可以讓參與者解決運動控制問題，當他們被分配到對材料或是虛擬對象進行技術導向的操作任務時，會試圖實現指定目標的狀態。若將體現認知應用至數學課程，教師可藉由講課的姿勢、手勢引導學生利用身體動作進行反饋與思考課程觀念，增進學生數學概念的理解。

教師在設計體現認知活動時，要思考課程內容是否能解決以下 Wilson 與 Golonka (2013) 提出的四個關鍵問題：

1. 「要解決的任務是什麼？」：個體如何識別且產生特定行為，取決於任務內容。
2. 「有機體可以利用哪些資源解決任務？」：有機體可以運用多元資源。例如大腦、身體、環境以及事物之間的關係。
3. 「如何整合這些資源來解決任務？」：所需的資源要裝到一個動態系統中，隨著時間的推移而展開。這些資源可能分布在大腦、身體和環境中，透過感知獲取身體和環境的信息。
4. 「有機體會組織並使用這些資源嗎？」：有機體是否會整合這些資源，取決於經驗的多寡。

綜合上述，教師在設計體現認知活動時，需要確立學生需解決的任務為何，並且給予多種資源，讓學生能透過大腦、身體和環境整合資源，增進學習經驗。

### 三、體現認知的工具

#### (一) 身體潛能與體現工具

Lakoff 與 Johnson (1980) 提倡數學教育認知科學，其中有三個假設如下：

1. 心智的具像化 (Embodiment of Mind)：身體與大腦的結構會影響數學概念之架構。代表身體與環境互動後如何產生知覺，形成數學概念的理解。
2. 無意識的認知 (Cognitive Unconscious)：大多數的思考通常需要藉由工具的檢測，無法立即形成。也就是說人們通常在無意識的情況下逐漸形成認知。
3. 隱喻的思考 (Metaphorical Thought)：隱喻幫助我們透過具體的物件、事實來進行推理，增進抽象概念的瞭解。

#### (二) 體現工具對學生學習的影響

Dackermann 等人 (2017) 指出透過具體觀察運動活動與認知之間的聯繫，越來越多的證據表明數字處理與運動活動之間存在聯繫。數學概念是在各種材料和經驗外觀的組成中發現的。因此數學概念可以被視為經驗網絡，對於身體的具體生活經驗產生重組。學生經由與體現工具互動，將多種生活周遭的素材整合成數學觀念，故體現工具為影響學生學習的媒介。而當學生試圖理解自身肢體的圖形化表示時，就會產生知覺運動和想像的體驗，並透過學生的口頭思維表達來體現 (Duijzer et al., 2019)。教師如何運用體現

工具，促進學生數學概念的體現，決定了學生和環境互動的方式。

## 四、體現認知的教學

### （一）體現認知數學教學定義

依據 Tran 等人（2017）將體現認知定義為認知與環境之間的循環，可知體現認知數學教學就是將體現認知的教學應用於數學領域中，認知與數學課室之間的循環。林勇吉（2021）將體現認知的數學教學定義為學生透過肢體的運動來學習數學。研究發現，體現認知不但能建構內在知識概念，同時也是在社會互動中，人們在理解語言、身體動作與面部表情等訊息的重要基礎（Buccino et al., 2001）。數學推理被認為是一種非語境化的活動，依賴具體定義之符號系統的聯繫。體現認知好比一個基本資料庫，從中可以運用動作模擬進行解碼，且可由其他人執行操作。

### （二）體現認知數學教學類型

Tran 等人（2017）指出將身體融入學習經驗可以增強數學上具體指稱與抽象概念的理解。而體現認知應用於數學教育中有三種不同的教學類型，分別為教具、手勢、全身的肢體運動。其中，使用教具進行教學最為常見，操作教具代表學習者能操弄、滑動、翻轉一個三維空間的物件（林勇吉，2021）。

### （三）教師如何利用工具促進數學的體現

依據 Shvarts 等人（2021）指出，導師要幫助學生注意到人工製品的可供性，並建立與工具耦合的目標感知與動作循環。因此要為學生提供包含先前發展的協調且有助於解決數學任務的工具，再經由教學指導讓學生能自主組織處理，並通過仔細的提示、指導性的問題和任務，促進功能系統的靈活和創造性。所以數學關係一開始會以感覺運動任務形式出現，接著導師透過要求學生反思他們的感覺運動策略來改變任務（Flood, 2018）。也就是說，導師將感覺運動體驗轉變為數學話語，使用多模態策略來引導出學生對感覺運動協調的口頭、手勢表達。整個體現的過程發生在意向驅動的行為中，學生能否建立目標感知與動作循環的耦合，取決於老師是否靈活透過引入子任務來調節學生的意向性並利用指向手勢或口頭表達來促進數學的體現（Shvarts et al., 2021）。吳美瑤（2019）也指出教師不僅要請學生在活動中觀察身體變化，在活動結束時也要予以引導反思、討論，才能算是有效的體現認知教學。除了個人操作之外，若有機會讓學生觀察同儕如何進行體現認知活動的操作，而不是自己著手進行，也可以提高學生數學理解力（Duijzer et al., 2019）。

## 五、體現認知的評量

評量學生是否達學習目標，可藉由觀察學生的全身性姿勢、手勢變化來確認。

### （一）全身性姿勢

以全身性動作協調為導向的體現認知，姿勢是觀察學生學習的關鍵體現工具。教師觀察學生的身體姿勢，能從中瞭解學生的學習狀況。McNeill (2005) 將姿勢分成四種層面：

1. 圖像的 (Iconic)：呈現具體物或行動影像的姿勢，這些姿勢是關於動作的形式或是呈現具體圖像的語意學相關的事物內容。
2. 比喻的 (Metaphoric)：指呈現抽象的影像，包含運用形式的比喻，例如說話者出現握住某物件並把它呈現，但未呈現物件的意義，而是持某個觀念或記憶或一些抽象的事物，具有圖像的元素與某種比喻。
3. 跳動的 (Beat)：是種不精細的正式姿勢，他僅是手部上下或來回輕打，看起來似乎與言辭的旋律配合，但其意義可能是複雜的，指示說話者感覺到論述中提及某些事物的短暫焦點。
4. 直證的 (Deictic)：直證的姿勢是指不經思索，伴隨手指擴充，補充某物件的意義，而身體各部分或所持物件都可用作補充指示。

陳嘉皇與梁淑坤 (2014, 2015) 的研究指出學生在學習代數概念中，會運用姿勢解釋與說明一般化的行動。除具有協助其表達對問題的認知、轉化概念的意義、連結結構關係外，教師也能從中瞭解學生如何進行和思考算術至代數間的轉化，及學生是否真正理解問題。

### （二）手勢變化

手勢在體現認知教學過程中，亦是很常見的觀察重點。過去研究指出，年幼的孩子有數學洞察力，但無法用語言或符號表達出來，會用手勢表達他們的想法或是指認他們所見 (Breive, 2022)。此外，手勢是協作學習的重要中介，學生能使用手勢來進一步探索、定向操作數位科技以及共享符號概念 (Fortman & Quintana, 2023)。可見手勢會潛移默化地從一種符號系統轉移到另一種符號系統，在學習過程中發揮重要的作用。

體現認知分別在課程安排、教師教學、學習評量，皆與過去傳統教課書式學習有所不同。教師在編排體現認知數學課程時要採用具體化的設計，目的要使學生的身體與環

境互動，並適當加入人工製品，促進學生數學概念。教學上重視教師親自示範肢體動作，讓學生模仿行為動作。也會對學生進行內容提問，引導學生推理數學觀念。不論教師讓學生自己或是同儕展現肢體動作、課室語言、手勢操作等，都希望學生能藉由不同的感官獲得資訊，再經由身體動作以及知識的連結，將數學概念體現。學習評量方式則與傳統紙筆評量不同，更注重學生課堂上的肢體展現、語言表達以及操作活動。

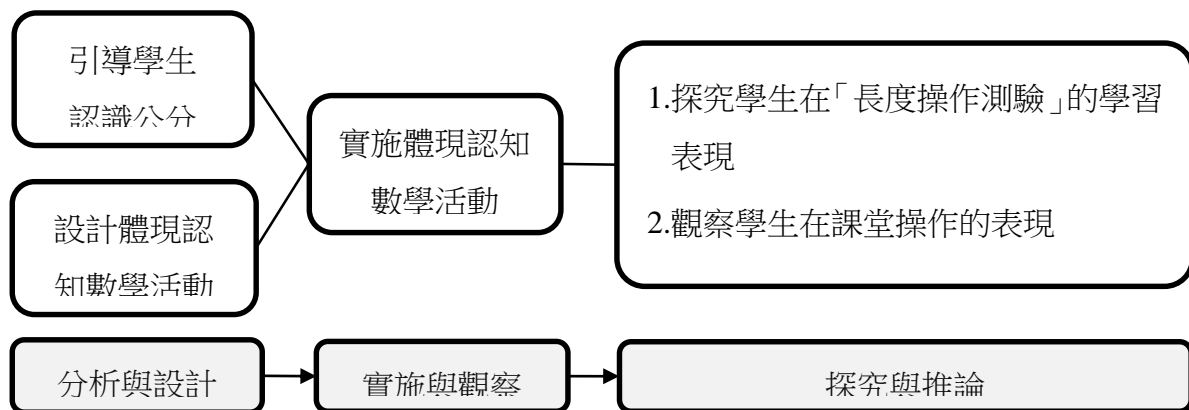
## 參、研究方法與步驟

### 一、研究架構

圖 1 呈現本研究架構，將所欲介入之教材單元進行分析，結合體現認知理論背景設計活動課程，包含使用測量工具、量感估測與實測、長度單位保留三大面向。課堂教學採實體教學，並於教學前後進行測驗，教學過程中蒐集以下資料：課堂學習單、師生互動錄影資料、學生活動操作照片。

圖 1

研究架構圖



### 二、研究對象

本研究採方便取樣，為研究者自身任教的班級。研究對象包含 6 位男生、7 位女生，共 13 名學生。班上 86.6%的學童具有注意力不集中特質，活潑好動，善於表達。因為該特質的緣故，全班在課室討論時無法專心，偶有某些問題教師已回答好多次，但學生卻因未留意聆聽，產生事後向老師舉手發問的情況；或是針對相同的某一問題，提出許多不符上課主題的內容，需要老師多次提醒才能將心思拉回數學課堂。本研究礙於樣本數

過少，因此獲致結果將無法進行過度推論。且因校內一個年級僅有一個班，無法進行實驗組與對照組的區分，沒辦法對照是否有進行體現認知數學課程，兩班學童學習成效是否有顯著差異，此為本研究之限制。

### 三、體現認知數學活動設計與教學

依據過去研究，教師培養學生量感的方法，以大量估測與實測活動為主（黃幸美，2016）。研究設計三節以體現認知為理論基礎的數學活動，每個活動實施的時間皆為 40 分鐘，總時長共 120 分鐘。活動內容配合《數學領綱》學習表現與學習內容，研究者自行歸納出三個主要的學習面向，分別為：量感估測與實測、長度單位保留、使用測量工具，其對應 Tran 等人（2017）體現認知教學類型如表 1。

表 1

三個學習面向對應體現認知教學類型

學習面向	使用測量工具	量感估測與實測	長度單位保留
體現認知 教學類型	教具、 全身的肢體運動	手勢、 全身的肢體運動	手勢、教具

體現認知數學活動使學生透過全身性的肢體動作進行操作，也能藉由口頭回答、文字紀錄等多模態策略引導學生建立感知與動作間循環的耦合（Shvarts et al., 2021）。以下說明設計之體現認知數學活動內容，以及其應用之工具和對應的教學方式如表 2。敘述如下：

表 2

體現認知數學活動所應用之工具及對應的教學方式

活動序	使用工具	教學方式
一	方瓦（圖 2） 直尺、電子書直尺	請學生捏方瓦邊長，感受其量。 請學生找出直尺上的一公分，再請他們上臺用肢體動作與手勢比畫出直尺上的一公分在兩個刻度之間。
二	活動一實物包（圖 3）、學習單—長度分分看（附錄 1）	判斷指定長度的閾值，將結果記錄在學習單中。

學習單一長度畫畫看(附錄 2)、學生的手指、直尺	記錄用手指憑感覺比出的指定長度，並且連線，測量、報讀實際長度。使用直尺作出準確的指定長度。
三 學習單一長度量量看(附錄 3)、學生的身體尺 活動三實物包(圖 4)	學生透過身體尺一扠、一肘，測量桌面邊長，並記錄在學習單。 練習長度保留，理解單位大小與測量次數之間的關聯性。

### (一) 活動一 介紹 1 公分與進行長度的估測分類

發給學生一人一個方瓦(圖 2)，請學生捏一捏方瓦上下左右的寬度。詢問學生「請問你手中的方瓦，你覺得它有多大？或是跟你的生活中什麼東西一樣大？」進而請學生思考「你認為老師說的『多大』是什麼意思？是方瓦的邊長還是方瓦的這一面？」詢問過程中教師利用身體動作讓學生了解長度與面積的不同。逐步引導學生方瓦的邊長是指哪個範圍「認為方瓦的邊長有多長？」讓學生具備長度的概念以及 1 公分的量感，並理解「公分」為長度單位。詢問學生「生活中有哪些東西與 1 公分一樣長？」並請學生運用肢體展示給全班看，引導學生直尺是測量長度的工具。請學生觀察直尺上哪裡與方瓦一樣是 1 公分長，教師用電子書上的直尺教具，親自示範動作，讓學生瞭解長度是從直尺上哪裡到哪裡。隨後教師介紹直尺上的刻度與距離，引導並歸納直尺刻度上前後兩數相減結果會等於 1，並請學生將 1 公分的量記住。

本活動參考黃幸美(2004, 2016)採用給予學生一包實物(圖 3)的方式，進行量感估測並將估測結果記錄在學習單一長度分分看上。學習單寫完後，教導學生如何正確使用直尺測量刻度，讓學生親自使用直尺測量，驗證那些物品的實際長度為幾公分，最後全班一同討論答案。教師提醒學生當物品長度不足 1 公分時，會使用「大約」的說法。最後收回學習單，歸納這些實物的實際長度。

圖 2

方瓦



圖 3

實物包



### (二) 活動二 透過手指比畫並加以記錄、測量與報讀長度、畫出長度

發下學習單一長度畫畫看，請學生用沒有寫字那隻手的手指比出教師指定之長度(1公分、3公分、5公分、10公分)，提醒學生比的時候手指要放在學習單上，不能離開桌面。學生操作時，教師邊拍照紀錄。接著要學生從比出的這一掬之中，在手指頭碰到的地方輕輕用鉛筆點兩點，四題都依序比完長度、點完兩點後，再請學生拿出直尺，將剛才畫好的兩點連線，並測量與報讀操作結果，記錄在學習單中。

寫完學習單第一大題，教師調查學生用手指比畫的連線長度是否等於指定長度，抑或是大於、小於指定長度，並請學生練習報讀自己所畫之長度。教師指導學生兩種畫出準確整公分線段的策略，一種是從刻度 0 開始到指定長度的刻度；另一種是已知相鄰兩刻度間為 1 公分，用累積 1 公分的方式畫出指定線段長。完成學習單第二大題後，詢問學生自己用手比畫的和用直尺按照刻度畫精準的線段是否有落差，最後收回學習單。

### (三) 活動三 大單位和小單位

教師發下學習單一長度量量看，請小朋友估測後再利用一肘與一掬測量桌子的長度。提醒學生測量時的每一掬要盡量把大拇指和食指伸到最長，量第二次時，手指要接好，不可以與上次量的手指有重疊或是有空隙，否則會有誤差。供學生兩種測量方式(捏指法、轉來轉去法)，學生將實際操作結果記錄在學習單上，過程中教師進行拍照紀錄。

和學生討論測量結果，發現每個人的結果不同。原因是每位人的一掬長度不一樣，有些人一掬較長，僅需要測幾次就可以將桌子長度量完；但有些人的一掬較短，要量數次才能將桌子長度量完。歸納每個人的一掬長度不同，屬於不同單位，測量出來的結果也不盡相同。延伸出較長物品用大單位、較短的物品用小的單位測量較適合之概念。

發下活動三實物包(圖 4)，請小朋友拿出 8 公分的紙條，依據學習單上的問題，運



用實物(邊長 1 公分的方瓦、邊長 2 公分的智高積木、長 8 公分的粉筆)測量紙條長度，並將結果紀錄在學習單上。全班從測量同樣紙條的過程中，發現物品長度與測量次數的關係為「測量的單位越大，測量的次數就越少；而測量的單位越小，則需要測量較多次。」最後教師延伸介紹公制單位。

圖 4



活動三實物包

本研究採方便取樣，為研究者本身任教的二年級班級。實施研究前皆取得研究對象的監護人同意後才進行研究。研究過程中輔以錄影及拍照，蒐集學生課堂上的身體動作表現，以利後續研究分析。研究者在每一節活動會進行觀察，活動結束後會歸納觀察紀錄，並反思教學上遇到的狀況，作為未來活動修正的依據。

#### 四、資料蒐集與分析

##### (一) 教學前的試卷答題表現

本研究設計之長度操作測驗前測卷(附錄 4)與一般考驗長度概念的前測卷不同，旨在測量學生長度單元的先備知識，評斷學生是否具有長度單元中「使用測量工具」、「量感估測與實測」、「長度單位保留」三個學習面向的先備知識。試題內容依據教育部(2018)《數學領綱》進行編製。透過與指導教授以及數名現場教師討論，評量前測卷之信、效度。前測卷共設計 20 題，每題 5 分，滿分 100 分，回答不全者不予給分。前測卷各題主要對應的學習面向如表 3。

表 3

前測卷各題對應的學習面向

學習面向	使用測量工具	量感估測與實測	長度單位保留
前測卷題號	1,2,3,15,16,19,20	4,5,10,11,12,13,14	6,7,8,9,17,18

本前測卷的實施對象為尚未學習長度概念之國民小學二年級學生，實施時間為開學第一週的某天早自修，以紙筆測驗的形式進行作答。前測卷屬於本研究的量性資料，將會分析其平均數、標準差以及學生作答正確率。本前測卷的分數僅用來評估學生在未學習長度概念時，是否具備長度相關的先備知識，不適合於學完長度知識後實施。本測驗結果與解釋僅針對尚未習得任何長度知識的學生，若非相同背景下施測，其結果可能會與本研究有所差異。

## (二) 課堂學習單

研究者結合教育部（2018）《數學領綱》中之「學習表現」與「學習內容」以及參考教科書例題，設計出配合活動之學習單。這些學習單屬於質性資料，研究者觀察與分析學習單上的活動紀錄，探究學生在體現認知數學活動之下是否能培養長度量感。

## (三) 課堂師生互動錄影資料

透過攝影機的影像紀錄，可獲得教學歷程與師生互動的質性資料。為了記錄學生全身性的動作與師生互動情況，會進行課堂錄影。同意書中有指出該資料僅用於研究用途，會以打馬賽克的方式保護受試者再進行使用，這些錄像絕不外流。

## (四) 學生活動操作照片

課堂中透過照相紀錄，可獲得學生操作活動當下的狀況。根據照片能探究學生的身體動作，反映出學生在操作過程中的肢體行為。與課堂錄影一致，皆有取得家長同意，所得照片資料皆會保密處理。

## (五) 教學後的試卷答題表現

長度操作測驗後測卷（附錄 5）旨在測量學生經由體現認知數學活動後，評斷學生是否因此具備長度單元中「使用測量工具」、「量感估測與實測」、「長度單位保留」三個學習面向的知識。試題內容題數與編排方式皆與前測方式同。後測卷各題主要對應的學習面向如表 4。

表 4

後測卷各題對應的學習面向

學習面向	使用測量工具	量感估測與實測	長度單位保留
後測卷題號	1,2,13,14,19,20	7,8,9,10,11,12	3,4,5,6,15,16,17,18

後測卷的實施時間為課程結束後一週的某天早自修，測驗以紙筆測驗的形式進行作答。採用「量化」以及「質性」兩種研究方法，透過量化資料（前、後測卷答題表現）與質性資料（課堂學習單、課堂師生互動錄影資料、學生活動操作照片）進行分析，並根據分析結果回應研究問題。分析方式敘述如下：

### （一）量化分析

利用前、後測卷的平均數、標準差及學生作答正確率進行分析，瞭解學生經由「體現認知數學活動」後，其「長度操作測驗」的學習表現是否有提升。

### （二）質性分析

藉由蒐集課堂學習單、師生互動錄影資料、學生活動操作照片，檢視學生如何運用全身性動作學習長度概念，進而發展量感，以利數與量、幾何的發展。

## 肆、研究發現與討論

## 一、長度操作測驗作答表現

透過前、後測卷的學生作答正確率進行比較，相較於前測卷，整體而言，全班學生作答正確率普遍提升（如表 6、圖 5）。全班之中僅有 1 位學生的後測作答正確率比前測退步（-0.5%），若依據前後測之答對題數，該名學生前測與後測答對題數相差一題，推測後測時粗心大意，把會的題目寫錯答案。作答正確率提升最多的學生，他的作答正確率由 5% 進步至 40%，共提升 35%。由此可知體現認知數學活動能有效增進學生長度知識，提升長度操作測驗的表現。

表 6

前、後測卷之學生作答正確率比較表

學生	前測	前測	後測	後測	作答正確率 進步幅度
	答對題數	作答正確率	答對題數	作答正確率	
S01	16	80%	17	85%	+5%
S02	13	65%	17	85%	+20%
S03	9	45%	12	60%	+15%
S04	11	55%	14	70%	+15%
S05	1	5%	8	40%	+35%
S06	13	65%	18	90%	+25%
S07	16	80%	18	90%	+10%
S08	13	65%	15	75%	+10%
S09	11	55%	10	50%	-5%
S10	0	0%	1	5%	+5%
S11	12	60%	14	70%	+10%
S12	4	20%	6	30%	+10%
S13	12	60%	15	75%	+15%

圖 5

前、後測作答正確率比較圖

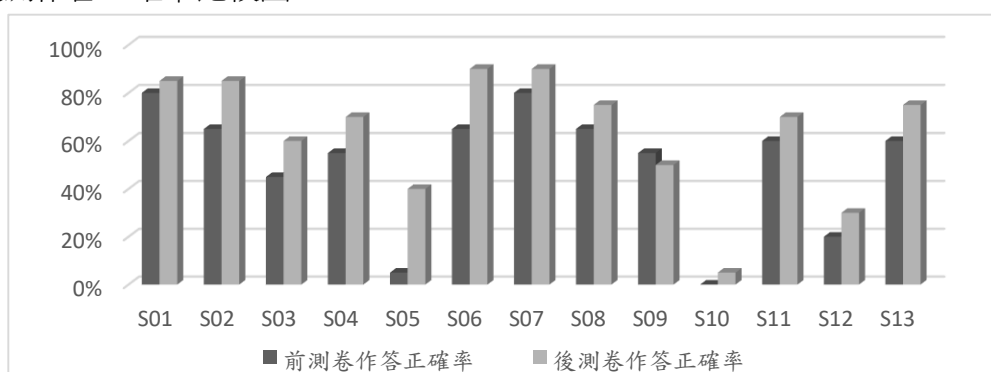


表 7

描述性統計量

	個數	平均數	標準差	最小值	最大值
前測分數	13	50.38	26.098	0	80
後測分數	13	63.46	25.770	5	90

表 7 呈現體現認知數學活動前、後測的分數表現比較，後測的平均高於前測，且標準差也變小。顯示學生的分數有進步，且整體表現比較過去還要集中。此外，分數的最小值與最大值皆有提升的趨勢。由統計資料可知，體現認知數學活動能有效提升學生在長度操作測驗的學習表現。同時也證實體現認知數學活動結合多元媒材，幫助注意力不集中的學生建立數學概念，提升數學學習成效。

## 二、長度單元學生課堂操作表現

### (一) 學生判別長度「關」的表現

分析活動一長度分分看學習單中，學生在各題判斷其閾值的答題人次與答對比率（表 8），研究者發現學生能夠輕易判斷其閾值的是選項ㄇ（筷子，19.5 公分），其次是ㄉ（粉筆，8 公分），接著是ㄎ（彩色筆，9.2 公分），再來是ㄊ（電池，4.5 公分）。推測其閾值對學生容易判斷的歸因如後。

表 8

學習單長度分分看學生各題判斷其閾值之答對比率

代號/物品	實際長度	答對總人次 (人)	全部總人次 (人)	答對比率 (%)
ㄅ/橡皮擦	4.5 公分	40	50	80
ㄆ/智高積木	2 公分	40	47	85.1
ㄇ/筷子	19.5 公分	39	41	95.12
ㄏ/電池	4.5 公分	38	43	88.37
ㄏ/彩色筆	9.2 公分	31	35	88.57
ㄏ/訂書針盒	5.1 公分	36	44	81.81
ㄏ/課本的厚度	0.6 公分	24	47	51.06
ㄏ/粉筆	8 公分	37	41	90.24
ㄏ/牛奶的高度	12 公分	34	42	80.95
ㄏ/大迴紋針長	4.8 公分	32	41	78.04
ㄏ/小迴紋針長	2.8 公分	33	43	76.74
ㄏ/鉛筆的寬度	0.8 公分	34	44	77.27

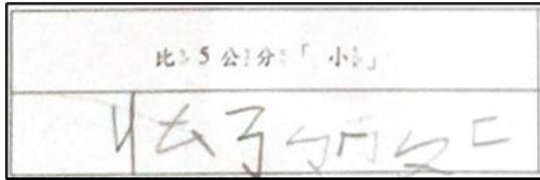
研究者觀察到，選項ㄇ（筷子，19.5 公分）因是實物包裡面長度最長的物品。不論學生是否具備長度保留、累積的能力，對學生而言，會直覺聯想到「該物最長，一定大於 10 公分」。學生在判斷選項ㄏ（粉筆，8 公分）時，會因為該物並沒有像選項ㄇ那麼長，學生可用累積方瓦邊長的方式進行判斷，觀察學生要判斷 8 公分是否大於 10 公分，對他們具有挑戰性。因 8 公分與 10 公分僅相差 2 公分，學生在進行長度累積的過程中若有誤差，會造成該選項判斷錯誤。學生在判斷選項ㄏ（彩色筆，9.2 公分）之閾值時，也和選項ㄏ有相似情況。只不過ㄏ是和 10 公分相差 0.8 公分，差距更細微。學生判斷相差甚微的長度時，容易做錯。

舉凡物品和指定判斷依據相差 0.2 公分，學生就會錯亂，對長度閾值之量感會有所動搖，無法正確判斷。例如：學生在判斷選項ㄏ（訂書針盒，5.1 公分）是否大於或小於 5 公分時，有 4 位學生將該物品判斷成小於 5 公分長（圖 6）；學生判斷選項ㄏ（大迴紋針長，4.8 公分）是否大於或小於 5 公分長時，有 5 位學生將選項ㄏ歸類成大於 5 公分的物品。分析學生出現上述狀況的原因，可能與學生的量感經驗不足有很大關聯。量感

經驗不足，使學生對於某些量沒有穩定的心像，導致學生在判定接近整公分的長度時，會無法有效判斷該量是否大於或小於指定數值。

## 圖 6

長度分分看學生答題表現



本研究對象超過半數具備一定的量感，能夠準確判斷長度之閾值。亦有出現量感不穩定或是無法評估其量感的狀況，推測其出現量感不穩定的情形，可能是心中尚無該長度之印象，導致無法藉由內在產生的心像進行閾值判定。另外，題目全錯的學生，研究者探究其原因，可能是這些學生看不懂題目的編排，不能理解當前進行的活動如何操作。研究者透過分析學習單上學生書寫內容，推測學生長度「閾」量感表驗不佳的因素有以下三點：

1. 學生操作時的判斷誤差，接近整公分的長度學生較難以準確判定。
2. 學生未瞭解物品的測量範圍，導致判定錯誤。
3. 學生上課不專心，未聽懂老師上課內容，以致學習單不會寫，進而無法將判定結果填入。

### (二) 學生在使用直尺工具前、後對長度的量感

在習寫長度畫畫看學習單的過程中，因學生尚未學習「大約」的概念，半數學生在判斷自己比出且畫出的線段時判斷錯誤。「大約」為當無法測量出整公分時，以最靠近的刻度說明「大約幾公分」。從學生的學習單習寫狀況發現，學生會認為不論長度多長，判斷時若沒有剛好整公分，就會將長度無條件進位至下一個整公分的刻度，亦會出現學生明明畫出整公分，但估測時依然無條件進位至下一個整公分刻度的情形。例如：有 1 位學生在判斷自己比出的 5 公分時，實際上長度為 5.4 公分，但該名學生（圖 7）卻將該長度判定成大約 6 公分。

針對學生會有無條件進位至下一個整公分刻度的狀況，研究者分析與國小低年級數與量的發展有關。依據教育部（2018）《數學領綱》學習內容，可知第一學習階段的學生在數與量的學習是以整數為始。一年級學習數詞序列時，瞭解數的前後關係，直至二年

級才出現「估算」的學習內容。未學習估算技巧前，學生會透過過往學習經驗，將學習數詞序列之概念類比至此，導致明明測得的量不足以一公分，但學生會認為該數值比前一刻度大，所以該數值是前一個刻度後面的整數。

另有 1 位學生（圖 8）在判斷自己比出的 10 公分時，實際長度為 10 公分，但他卻將該長度判定為大約 11 公分。推測其原因，可能是該生未注意自己本身測得的數值是整公分，因為其他題的學習經驗上，有不足以一公分、需要無條件進位的情況，導致該生在該題判斷時，被先前操作經驗影響，所以將數值無條件進位。

圖 7

長度畫畫看學生答題表現

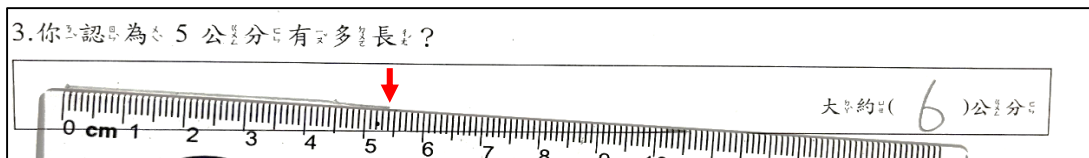
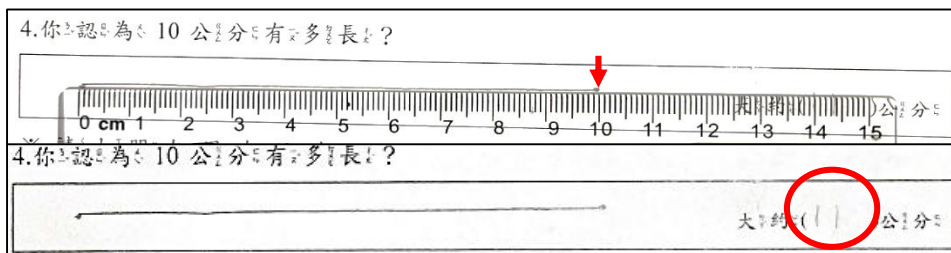


圖 8

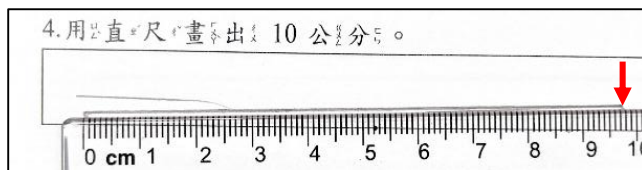
長度畫畫看學生的答案



從長度畫畫看發現，有 2 位學生在畫 1 公分長時，畫成 0.8 公分；有 1 位學生在畫 3 公分長時，畫成 2.7 公分；另有 1 位學生在畫 5 公分時，畫成 4.7 公分；還有 3 位學生在畫 10 公分時，畫成 9.8 公分（圖 9）。由此可知學生在畫線過程中，偶有 0.1 至 0.3 的誤差，推測是學生手部肌肉尚未發育完全，故較精細的動作難免有不準確的情形。

圖 9

長度畫畫看學生答題表現



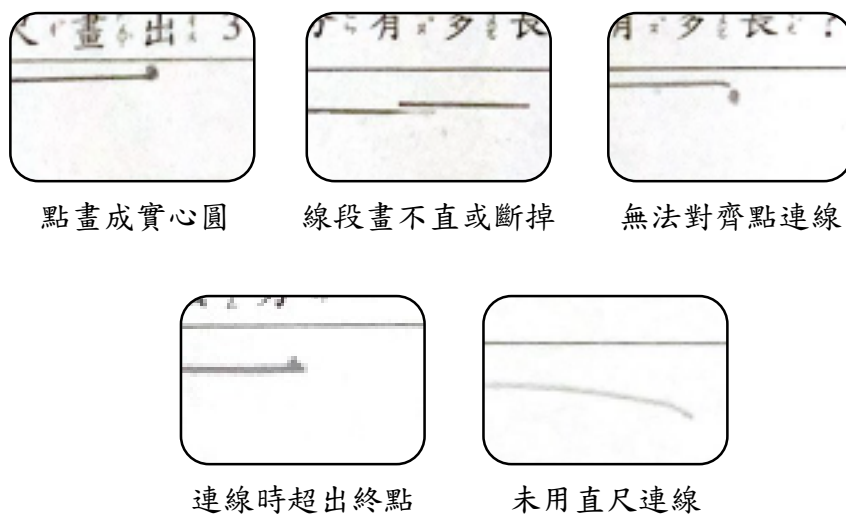


綜合上述活動，研究者觀察分析學生畫線的方式，有以下 5 種特色（圖 10）：

- (1) 點畫成實心圓：學生將起始點或終點畫成一個實心圓圈。
- (2) 線段畫不直或斷掉：學生有使用直尺，但在連線過程沒有壓緊直尺導致畫出來的線段歪斜或是斷掉。
- (3) 無法對齊點連線：學生無法準確對齊終點進行連線，線段與終點有些微的距離。
- (4) 連線時超出終點：學生進行連線時，線段超出終點。
- (5) 未用直尺連線：學生未攜帶直尺，故連線時線段歪曲不平整。

圖 10

學生畫線的 5 種特色



### （三）學生透過肢體動作學習單位大小之表現

#### 1. 指出直尺上的一公分

學生在活動一中，觀察方瓦以及直尺，尋找直尺上哪裡有像方瓦邊長一樣是一公分。課室討論的過程中，研究者請學生（圖 11）到投影幕前面向全班指出自己在直尺上所發現的一公分是從刻度幾到幾。從學生的動作姿勢，能夠評量學生是否對一公分在哪裡有深刻瞭解。研究者觀察到學生會先用手指指出某個刻度作為起點，接著手指划到另一個作為終點的刻度。有的學生找到直尺上的一公分為刻度 0 至 1 之間的長度，有的學生找到 5 至 6、7 至 8 等不同刻度間的一公分。肢體動作反映出學生對數學概念的理解，表示他們具有刻度、起點、終點，以及直尺上一公分的基本概念。

圖 11

學生指出直尺上所發現的一公分



## 2. 運用個人手勢動作比出指定長度

研究者觀察學生透過肢體動作比出指定長度，發現每位學生具備的量感不同，所比出的長度有些微落差，但用手指比畫的手勢動作卻極為相似。如圖 12，學生比出一公分時，都舉起沒有寫字的那隻手進行手勢表現。

圖 12

比出相似的一公分手勢



圖 13

學生比出的五公分



從各個學生比出來的長度，可以觀察到學生對於長度量的認知是否有明確的概念。研究者從其中一位學生所比出的 5 公分（圖 13）和另一位學生比出的 10 公分（圖 14）觀察到，前一位學生比出的長度小於 5 公分，而後一位學生比出的長度則遠大於 10 公分。在較短的距離中，其量感與指定長度相差甚微，但在長距離的表現上，會與指定長度有較大落差。研究者推測當學生心中所需複製一公分的次數越多，越會出現複製上的

誤差，導致出現短距離長度量的量感比長距離的好。

圖 14

學生比出的十公分



圖 15

學生小心翼翼複製方瓦邊長



另從學習策略的角度觀察學生如何運用肢體動作進行長度的比畫，研究者發現學生在比出指定長度時，較憑感覺，不見得理會學習單上提供的參考量。全班僅有 1 位學生透過複製方瓦的邊長，進行長度累加，最後比出指定線段長（圖 15）。這名學生有留意到方瓦這個參考量，對其邊長累加是有感覺的。推測該生的策略為已知方瓦邊長為 1 公分，所以 1 公分就是 1 個方瓦邊長、3 公分是 3 個方瓦邊長，運用長度累加進行類推，最終比出較準確的長度。

### 3. 用身體的尺進行測量

活動三研究設計課程時，將身體部位的尺「一肘」以及「一掬」作為體驗，從中理解單位與測量次數有何關係。活動過程中要求學生統一測量桌子比較長的那一邊，研究者發現普遍學生都是測量靠近自己那一側的邊長，只有 1 位學生測量離自己稍遠、平行的那一側邊長（圖 16、圖 17）。研究者觀察到因為該名學生測量的邊長與自己身體有些距離，測量過程中幾乎是整個身體彎腰、趴在桌子上測量，為課室間有趣的現象。

圖 16

測量離自己稍遠的桌面邊長



圖 17

測量時手肘對齊桌角



研究者歸納出學生運用自身的身體部位進行測量時有以下策略：

1. 測量一開始有將手肘或是手指指尖對齊桌子邊長的一端：

學生在利用自己的肢體進行測量桌子邊長時，會連結上一節課利用直尺進行畫線的經驗，將桌角視為刻度零，測量桌子邊長有幾呎或幾肘長時，手指指尖或手肘皆會小心翼翼對齊桌角再開始測量（圖 18）。

圖 18



非測量的手引導下次對齊的位置

圖 19



測量時指尖對齊桌角

2. 測量到一半用身體部位標記下一次要對齊的起點：

學生會運用非測量的那隻手作為測量的輔助工具。測量過程會將非測量的手指在未完成之處，引導自己下一次測量時要對齊哪個位置（圖 19）。或是直接利用測量完第一段的手肘稍作暫停（圖 20），再使用非測量的手指出下一次測量要對齊的位置。兩種方式都有運用到非測量工具的那隻手，充分運用自身身體部位進行測量。

圖 20

測量時手肘稍作暫停



圖 21

撐開的手指幾乎貼齊桌子



### 3.每次的測量皆保持同一單位進行測量：

學生利用自己身體部位進行測量時，因手肘的長較直且易於固定，較不會留意到測量時使用的單位長是否一致。但在透過一扞進行測量時，有些學生會留意自己每次用一扞做出來的長度有沒有一樣，甚至將手指撐開到幾乎貼齊桌子（圖 21）。此外，學生分別利用捏指法與轉來轉去法時，學生觀察到採用轉來轉去的方式在操作上不會形成誤差，但在使用捏指法時，學生須留意捏起來的指尖之間是否有無空隙，無空隙才能測得較準確。

### 4.利用未測量的手累計長度：

活動進行中也觀察到部分學生會善用沒有當測量工具的手進行次數的累數(圖 22)。測量一次，就將非測量工具的手擺在底下輔助，引導自己測量一次就累數一次。

圖 22



使用非測量的手進行次數的累數

學生運用自身的一肘長以及一掬長所產生的測量誤差成因，分析如下：

- 1.未將手肘或是手指對齊桌角進行測量，導致有測量誤差。如圖 23、24。分析學生出現該類型誤差，可能與測量技巧的不熟悉有關。直尺的測量技巧未類比至身體尺的測量，導致測量時出現起點未對齊的情況。

圖 23

測量時手肘未對齊桌角



圖 24

測量時指尖未對齊桌角



- 2.測量單位的長度大小不一，導致每一次的測量的單位不同而產生誤差。如圖 25、26。分析學生出現該類型的測量誤差，與不熟悉直尺上的每一公分皆為相同單位有關係。學生未將直尺上刻度皆為相同單位之概念類比至使用身體尺。

圖 25

測量時未將每一掬撐到最開



圖 26

測量時手指捏起時有誤差



本研究在教學過程中，教師有透過全身性的肢體動作示範測量誤差會使結果不同，讓學生觀察並藉此引導學生在測量時如何減少誤差。

#### (四) 長度保留與單位大小之體驗

研究者在活動三安排用身體部位測量桌子長度，同時也透過實物包讓學生體驗長度保留以及單位大小對測量次數的關係。研究者觀察到學生有兩種主要的測量方式，一種

是將所有操作工具平穩放在桌子上進行長度累積（圖 27），另一種是將操作工具拿在手上，在空中進行測量（圖 28）。分析學生選擇不同測量方式的原因，跟學生的學習風格有關。較謹慎的學生傾向於將物品放在桌上仔細測量，而較活潑的學生傾向於將物品拿在手上測量。

過程中也出現測量上的錯誤類型，有 1 位學生將智高積木突起的部分算入單位長，導致在測量過程中的測量次數不正確（圖 29）。此外，有些學生發現到粉筆長度以及欲測試的紙條長度一樣長，頭部不停的來回擺動、眼神不停觀察兩物，形成有趣的現象。

圖 27

在桌面上進行長度累積



圖 28

在空中進行長度累積



圖 29

智高積木突起的部分算入單位長



學生透過肢體動作學習長度知識所帶來的影響說明如下：

### （一）長度量感表現

「量感」是「準確運用量」的直覺，可由借助身邊具體形象的事物，豐富對測量單位的直觀感知。個體讓大腦能藉由多種感官知覺獲得訊息，並將多元訊息進行參照處理，幫助抽象符號或概念與外在具體物件互相連結，進而促進學習。學生實際在體現認知數

學活動初期的量感表現，多數具備不穩定的量感，於活動一判斷長度閾值時有混亂的現象。教師應建立多個參考量，培養學生的量感。也因數學量感源自於生活量感，故研究者在活動一的實物包安排許多學生在生活中常見的物品。活動一藉由體現認知的教學設計，讓學生透過大量的動手操作，使感覺與大腦訊息不停連結，提升學生的量感。

由於活動一要操作的物品較多元，衍伸出學生在操作過程中易被其他物品吸引，專注度不集中。然而活動一操作耗時，實施過程中途有遇到下課時間，影響學生學習情緒，學生因而靜不下心。未來應將活動一拆分成兩節課進行，一堂課針對認識一公分、體驗一公分的量感為主；另一節課著重在不同物品的長度閾值判斷。如此一來才能讓學生充分感受一公分的量，強化對於量的感知。也讓學生有充裕的時間充分理解所要判斷之物品長度範圍，以及能夠靜下心來思考其閾值。此外，教師也要熟悉課程操作流程，避免指導語的不明確進而影響學生閾值判斷的結果。

活動二中，研究者發現不同的學習策略，會對學生學習成效有影響。憑感覺比畫指定長度的學生，心中複製一公分的能力較不穩定，出現結果較不準確的情形。而全班僅一位利用手指進行參考量複製的學生，透過手眼協調加深量感，較能準確複製出指定長度。因此教師在帶領學生進行活動二時，要多引導學生發現參考量的重要性，使學生能使用更佳的學習策略進行學習。

針對學生利用直尺進行畫線，則發現學生畫較長的長度畫得較準確，研究者推測可能與學生手部肌肉發展有關，在短距離的作圖中，易有誤差。研究結果驗證黃幸美(2004, 2016)以及 Wagner 與 Davis (2010) 所言：若缺乏量感或涉及更多步驟的操作，則估測結果的準確性也較低。就算測量後判讀的量有誤差或是對「大約」的判斷具有迷思概念，全班仍有半數學生比出和測出的長符合指定長度，可見學生具有一定程度的量感。

學生對於長度量有直觀的想法，會將自己感受到的量以感嘆的方式與全班分享，使全班能夠交流彼此對量的感受。學生在操作過程中也有機會觀察別人如何進行體現認知活動的操作，而不是自己著手進行，這樣的作法亦可以提高學生數學理解力 (Duijzer et al., 2019)。

## (二) 肢體動作與長度概念之體現

體現認知屬於表徵的一種，可以代表或是呈現某些事物。手勢是學習上重要的中介，學生能用來進一步探索、定向操作數位科技以及共享符號概念。

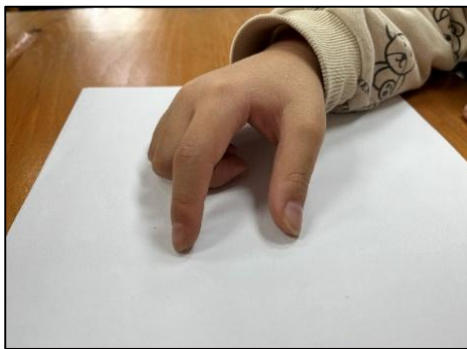
學生在活動一從直尺上找尋一公分可以利用哪兩個刻度做出來時，學生會使用食指



指出自己找到的刻度為哪兩個。在投影幕前比畫給大家看時，學生會用食指從第一個刻度划過去另一個刻度，用這樣的動作告知全班這樣的距離為一公分。該動作符合 Shvarts 等人 (2021) 提出促進數學的體現之方式，取決於老師是否靈活通過引入子任務來調節學生的意向性並通過指向手勢或口頭表達。

從習寫活動二—長度畫畫看學習單的過程中，研究者觀察到學生比出長度的手勢習慣以大拇指與食指張開的方式做出指定長度。當要做出短距離時，食指與大拇指呈現彎曲狀，虎口呈現圓弧狀 (圖 30)；當要做出長距離時，食指與大拇指會伸直，虎口呈現鈍角三角形 (圖 31)。證實了 Abrahamson 等人 (2020) 手勢能揭示學生的思維，反映對複雜任務的圖示化。學生除了自己比出指定長度之外，還搭配同儕互動，跟同儕一起合作比出指定長度。過程中學生們為了要做出接近老師指定的長度，會互相討論該如何做得更準確。

圖 30



學生比短距離時的手勢變化

圖 31



學生比長距離時的手勢變化

活動三中學生透過自己身體的一肘與一掬作為單位，進行桌子邊長的測量。測量過程中學生使用長度保留概念，以及結合測量物品時要對準其開頭的方式進行操作。並從後續討論讓學生理解每個人的一肘或是一掬長度不同，代表單位不同，因此測量次數各異。驗證數學關係一開始會以感覺運動任務形式出現，接著導師透過要求學生反思他們的感覺運動策略來調整任務 (Flood, 2018)。學生操作過程中，身體動作會讓學生有感覺記憶，建立目標感知與動作循環的耦合 (Shvarts et al., 2021)。故後續研究者提到之前曾經操作過此活動，學生對單位大小會影響測量次數有印象，也能憶起曾經用身體的尺測量桌子邊長的活動。符應文獻中學生透過感覺動作可以降低大腦的能量或是認知負荷，幫助大腦進行更多的認知程序，進而幫助解題能力發展。也證實學生在老師的幫助下，能夠透過修改和內化過程幫助學習。

## 伍、結論與建議

根據研究結果歸納出本研究的結論如下：

### 一、體現活動實施後，學生在「長度操作測驗」的表現有顯著進步

經由「長度操作測驗」前測的結果發現，學生對於長度概念較無相關先備經驗，以致前測表現未及格。體現認知數學活動採取多模態的學習方式，給予學生和生活連結的實作機會。學生透過肢體動作進行學習，加深長度量的經驗連結。透過親自測量以及感受量，使學生在學習上能與環境、人工製品耦合，從中習得長度相關知識，進而形成認知。「長度操作測驗」後測的結果發現，學生在作答正確率各方面有進步，班平均表現及格，顯示體現認知數學活動具有成效，可引導學生增進長度單元的知識。

### 二、體現活動提供操作機會，促進生活經驗連結，增長學生的長度知識

學生在長度概念因與個人經驗連結較弱，易出現迷思概念。體現認知數學活動的設計是從給定方瓦的行動開始，建立學生一公分長度量的經驗，接著使用學生的學用品進行長度閾值的判斷，再請學生結合自身量感與肢體畫出指定線段，進而習得直尺操作方式。隨後採用身體尺（一掬、一肘）測量給定物體的長度，從而感知單位大小會影響測量次數。透過課室的觀察、各活動學習單等資料中皆能證實體現認知數學活動讓學生以多模態的方式學習，不僅透過肢體動作增進學生的量感，也運用人工製品進行長度知識的學習。

就教學方面提出建議如下：

#### （一）體現認知數學活動之課程安排需考量到學生的數學程度

「操作」在低年級學習數學過程中，是重要的學習策略。體現認知數學活動讓學生透過肢體動作與人工製品互動，進而產生長度知識。本研究當初設計體現認知數學活動一時，因高估學生的程度，以為學生能夠輕易聽懂教師的引導從而判斷閾值，但結果發現學生實際上的認知理解能力與教師想像有落差，導致結果不如預期，從而不斷修正教學方式。故教師在設計課程時，需考量到自身班級學生的程度，避免體現認知數學活動之操作難度太高，造成學生額外的認知負荷。

#### （二）體現認知數學活動雖然有趣，但教師需要安排較多時間去實施

體現認知數學活動因使用自身肢體動作搭配人工製品進行操作與學習，與使用傳統教科書的學習不同。體現認知數學活動使學生邊做邊學，學生在課堂上是很充實、有趣的。根據活動一，因學生一開始較不習慣脫離教科書學習數學知識，故教師需要花較多

時間與心思去引領學生操作，學生也要一段吸收新知的時間，因此在時間安排上需要延長該單元的教學時數，才能有效促進學生的學習成效。

就未來研究方面提出建議如下：

### (一) 未來研究者可設置實驗組與對照組，比較兩組學生在「長度操作測驗」的學習成效差異

本研究因研究對象背景之限制，無法進行實驗組與對照組的設計。希望未來研究者能突破此限制，擴大研究樣本，設計實驗組與對照組，以增強本研究之結果。

### (二) 未來研究者可採用不同單元，設計體現認知數學活動，證實體現認知數學活動之有效性

本研究因研究對象為二年級學童，在內容的設計與呈現較為簡單。若未來研究者能夠針對中高年級的幾何單元，設計出符合體現認知理論的活動，證實體現認知數學活動的有效性，使得這方面的研究資料更為完善。

## 誌謝

本文感謝在研究中參與協助的國小師生。特別感謝匿名審查者與編輯委員提供之修正建議，使本文能更臻完善。

## 參考文獻

- 吳美瑤 (2019)。認知與學習的新觀點：體現認知在課程與教學之應用。《課程與教學季刊》，23 (1)，193-216。 [http://doi.org/10.6384/CIQ.202001\\_23\(1\).0008](http://doi.org/10.6384/CIQ.202001_23(1).0008)
- 林勇吉 (2021)。數學與肢體運動：應用「體現認知」於數學教學。《臺灣數學教師》，42 (1)，17-28。 [http://doi.org/10.6610/TJMT.202104\\_42\(1\).0002](http://doi.org/10.6610/TJMT.202104_42(1).0002)
- 教育部 (2018)。十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校—數學領域。教育部。 [https://www.k12ea.gov.tw/files/class\\_schema/課綱/12-數學/12-1/十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校—數學領域.pdf](https://www.k12ea.gov.tw/files/class_schema/課綱/12-數學/12-1/十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校—數學領域.pdf)
- 陳嘉皇、梁淑坤 (2014)。表徵與國小學生代數思考之初探性研究。《教育研究集刊》，60 (2)，1-40。
- 陳嘉皇、梁淑坤 (2015)。姿勢、言辭表徵與代數思考之研究。《教育學報》，43 (1)，103-127。
- 黃幸美 (2004)。《兒童的數學問題解決與思考》。心理出版社。
- 黃幸美 (2016)。學童估測長度、面積與體積的表現與策略使用之探討。《教育科學研究

期刊, 61 (3), 131-162。 [http://doi.org/10.6209/JORIES.2016.61\(3\).05](http://doi.org/10.6209/JORIES.2016.61(3).05)

- Abrahamson, D., Nathan, M. J., Williams-Pierce, C., Walkington, C., Ottmar, E. R., Soto, H., & Alibali, M. W. (2020). The future of embodied design for mathematics teaching and learning. *Frontiers in Education*, 5. <https://doi.org/10.3389/educ.2020.00147>
- Breive, S. (2022). Abstraction and embodiment: exploring the process of grasping a general. *Educational Studies in Mathematics*, 110(2), 313-329.
- Buccino, G., Binkofski, F., Fink, G. R., Fadiga, L., Fogassi, L., Gallese, V., & Freund, H. J. (2001). Action observation activates premotor and parietal areas in a somatotopic manner: An fMRI study. *European Journal of Neuroscience*, 13(2), 400-404. <https://doi.org/10.1046/j.1460-9568.2001.01385.x>
- Dackermann, T., Fischer, U., Nuerk, H. C., Cress, U., & Moeller, K. (2017). Applying embodied cognition: from useful interventions and their theoretical underpinnings to practical applications. *ZDM*, 49, 545-557.
- Duijzer, C., Van den Heuvel-Panhuizen, M., Veldhuis, M., Doorman, M., & Leseman, P. (2019). Embodied learning environments for graphing motion: A systematic literature review. *Educational Psychology Review*, 31, 597-629. <https://doi.org/10.1007/s10648-019-09471-7>
- Flood, V. J. (2018). Multimodal revoicing as an interactional mechanism for connecting scientific and everyday concepts. *Human Development*, 61(3), 145-173. <https://doi.org/10.1159/000488693>
- Fortman, J., & Quintana, R. (2023). Fostering collaborative and embodied learning with extended reality: Special issue introduction. *International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning*, 18(2), 145-152.
- Lakoff, G., & Johnson, M. (1980). *Metaphors we live by*. University of Chicago Press.
- McNeill, D. (2005). *Gesture and thought*. University of Chicago Press.
- Núñez, R. E., Edwards, L. D., & Filipe Matos, J. (1999). Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 39(1), 45-65. <https://doi.org/10.1023/A:1003759711966>
- Piaget, J. & Inhelder, B. (1969). *The psychology of the child*. Basic Books.
- Shvarts, A., Alberto, R., Bakker, A., Doorman, M., & Drijvers, P. (2021). Embodied

instrumentation in learning mathematics as the genesis of a body-artifact functional system. *Educational Studies in Mathematics*, 107(3), 447-469.

Sriraman, B., & Wu, K. (2020). Embodied cognition. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 266-268). Springer International Publishing. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0\\_179](https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_179)

Tran, C., Smith, B., & Buschkuehl, M. (2017). Support of mathematical thinking through embodied cognition: Nondigital and digital approaches. *Cognitive Research: Principles and Implications*, 2(1), 1-18. <https://doi.org/10.1186/s41235-017-0053-8>

Wagner, D., & Davis, B. (2010). Feeling number: grounding number sense in a sense of quantity. *Educational studies in Mathematics*, 74, 39-51.


Wilson, A. D., & Golonka, S. (2013). Embodied cognition is not what you think it is. *Frontiers in psychology*, 4, 35621. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2013.00058>

附錄 1 學習單一長度分分看

### 長 度 分 分 看

二年級甲班 座號： \_\_\_\_\_ 姓名： \_\_\_\_\_

※ 右圖是正方形，它的每一邊長都是 1 公分。



※ 請小朋友比較看看以下物品長度，進行分類。

勺 橡皮擦	尺 智高積木	門 筷子	口 電池
勺 彩色筆	衣 訂書針盒	弓 課本的厚度	力 粉筆
《 牛奶的高	巧 大迴紋針長	厂 小迴紋針長	日 鉛筆的寬度

1. 這些物品，你覺得比 1 公分小的有哪些？比 1 公分大的有哪些？

比 1 公分「小」	比 1 公分「大」

2. 這些物品，你覺得比 3 公分小的有哪些？比 3 公分大的有哪些？

比 3 公分「小」	比 3 公分「大」

3. 這些物品，你覺得比 5 公分小的有哪些？比 5 公分大的有哪些？

比 5 公分「小」	比 5 公分「大」

4. 這些物品，你覺得比 10 公分小的有哪些？比 10 公分大的有哪些？

比 10 公分「小」	比 10 公分「大」

附錄 2 學習單一長度畫畫看

### 長度的畫畫看

二年級甲班 座號： \_\_\_\_\_ 姓名： \_\_\_\_\_

※ 右圖是正方形，它的每一邊長都是 1 公分。



※ 請小朋友比比出有多長，再按照步驟畫出指定長度。

四題畫完用直尺測量實際長度。

1. 你認為 1 公分有多長？

\_\_\_\_\_ 大約( )公分

2. 你認為 3 公分有多長？

\_\_\_\_\_ 大約( )公分

3. 你認為 5 公分有多長？

\_\_\_\_\_ 大約( )公分

4. 你認為 10 公分有多長？

\_\_\_\_\_ 大約( )公分

※ 請小朋友用直尺畫出指定長度。

1. 用直尺畫出 1 公分。

\_\_\_\_\_

2. 用直尺畫出 3 公分。

\_\_\_\_\_

3. 用直尺畫出 5 公分。

\_\_\_\_\_

4. 用直尺畫出 10 公分。

\_\_\_\_\_

附錄 3 學習單一長度量看

### 長度測量看

二年級甲班 座號： \_\_\_\_\_ 姓名： \_\_\_\_\_

※ 請小朋友想想看，如果用自已的一一肘以及一一杈測量桌子有多長，應該會多長呢？將估計的結果記錄下來。

測量工具： 一一肘長	測量工具： 一一杈長
我認為桌子應該有 ( ) 肘長	我認為桌子應該有 ( ) 杈長

※ 接下來，請小朋友利用自已的一一肘和一一杈測量桌子長度，並將結果記錄下來。

測量工具： 一一肘長	測量工具： 一一杈長
實際測量後，大約 ( ) 肘長	實際測量後，大約 ( ) 杈長

※ 請小朋友利用實物包裡裡面的物品，測量紙條長度。

測量工具	量了幾次
長 1 公分的方瓦	量了 ( ) 次
長 2 公分的智高積木	量了 ( ) 次
長 8 公分的粉筆	量了 ( ) 次

1. 紙條實際長度為 ( ) 公分。
2. 我們可以發現：
 

測量單位越 ( )，測量的次數就會 ( )。

測量單位越 ( )，測量的次數就會 ( )。



附錄 4 長度操作測驗前測卷

### 前測卷

二年級甲班 座號：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

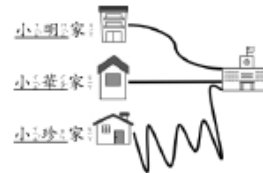
#### 一、是非題 (紅色題號為本論文中提及之試題編號)



- 1. ( ) 測量線段長時，要將某一點對齊直尺上的刻度 0，當另一點落在直尺上的刻度 5，表示線段長 5 公分。
- 2. ( ) 刻度 1 和 4 之間距離是 4 公分。
- 3. ( ) 比較物品長短時，不用對齊物品其中一邊，就可比。

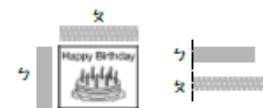
#### 二、選擇題

- 4. ( ) 右圖是小明、華華、珍珍三人的家到學校的路線。請問誰家走到學校的距離最短？



(1) 小明 (2) 華華 (3) 珍珍

- 5. ( ) 右圖的卡片中，哪一條邊比較長？

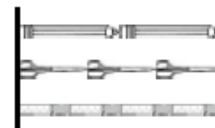


(1) ㄅ (2) ㄆ (3) 一樣長

#### 三、填充題

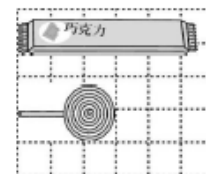
※ 看右圖回答問題。

- 6. ( ) 枝鉛筆的長度跟 ( ) 把剪刀的長度一樣長。
- 7. ( ) 根彩色筆的長度和 1 枝鉛筆一樣長。





※ 看右圖回答問題。


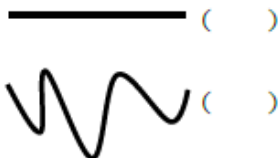

- 8. 棒棒糖和 ( ) 個格子一樣長。
- 9. 巧克力大約和 ( ) 個格子一樣長。



※ 判斷線段有多長。

<p>5. 10</p>  <p style="text-align: right;">大約 ( ) 公分</p>	<p>6. 11</p>  <p style="text-align: right;">大約 ( ) 公分</p>
--	---

四、配合題

<p><b>12</b> 1.把比較薄的圖起出來。</p> 	<p><b>13</b> 2.把直線打√，曲線畫○。</p> 	<p><b>14</b> 3.把最高的打√，最矮的畫○。</p> 
	( ) ( )	( ) ( ) ( )

五、畫圖題

15 1.請用直尺畫出 7 公分的距離。

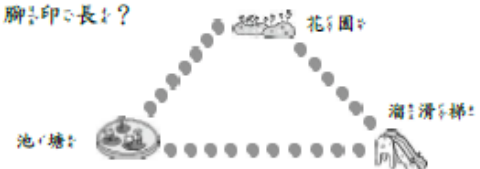
16 2.請用直尺畫出 17 公分的距離。

六、應用題

17 1.右圖是樂樂公園的路線圖，●表示一腳印的長。小美要從池塘開始，經過花園，最後來到溜滑梯，請問要走幾個腳印的長？

算式：( )

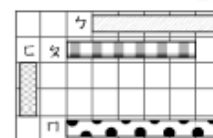
答：( ) 個腳印的長。



18 2.最長的彩帶比最短的彩帶多幾格長？

算式：( )

答：多 ( ) 格長。



七、問答題



19 1.直尺上的數字叫做 ( )。

20 2.直尺上數字和數字之間的長度叫做 ( )。

附錄 5 長度操作測驗後測卷

### 後測卷

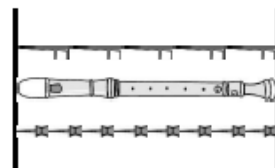
二年甲班 座號： \_\_\_\_\_ 姓名： \_\_\_\_\_

一、是非題 (紅色題號為本論文中提及之試題編號)

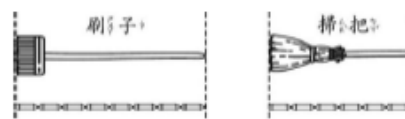
1. ( ) 如果要測量臺中到臺北的距離，適合用「公分」進行測量。
2. ( ) 我們可以用神奇寶尺上的刻度 4 和 13，畫出 9 公分的長度。

二、選擇題

3. ( ) 5 枝牙線棒和 8 個圖釘的長度合起來是幾根直笛的長度？  
(1) 1 根 (2) 2 根 (3) 3 根。



4. ( ) 右圖是牙刷和掃把，請問牙刷比掃把多幾根鉛筆長？  
(1) 1 根鉛筆長 (2) 2 根鉛筆長 (3) 3 根鉛筆長。



三、填充題

\* 方瓦的邊長是 1 公分。



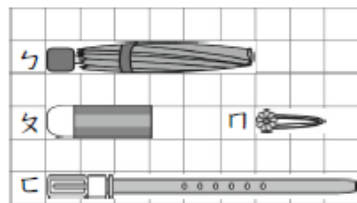
5. 用 13 個方瓦接起來的長度是 ( ) 公分。
6. 用 20 個方瓦接起來的長度是 ( ) 公分。

\* 判斷以下物品有多長。

<p>7. 牙膏的長度大約 ( ) 公分。</p>	<p>8. 木瓜的長度大約 ( ) 公分。</p>
---------------------------	---------------------------

四、配合題

1. 一個格子邊長是 1 公分，請依據物品長度，判斷其長度大於或小于 5 公分，將答案填入下方表格中。



- 9 牙刷 10 橡皮擦 11 髮夾 12 皮帶

長度大於 5 公分	長度小於 5 公分

五、畫圖題

13. 請用神奇寶尺畫出 10 公分的距離。

14. 請用神奇寶尺畫出 21 公分的距離。

六、應用題

15. 婷婷有 6 公分的緞帶，鈺鈺有 8 公分的緞帶，請問兩人合起來有幾公分的段帶？

算式：( )

答：合起來有 ( ) 公分的段帶。

16. 拉爾有 19 公分的繩子，綁包裏用掉了 11 公分，請問拉爾還有幾公分的繩子？

算式：( )

答：拉爾還有 ( ) 公分的繩子。

17. 緩緩測量教室桌子的長度有 3 肘長，如果兩張桌子併在一起，會有幾肘長？

算式：( )

答：有 ( ) 肘長。

18. 兩琪發現書本的其中一邊長 21 公分，另一邊長 13 公分，請問書本兩邊邊長相差幾公分？

算式：( )

答：相差 ( ) 公分。

七、問答題



19. 直尺上的數字叫做 ( )。

20. 直尺上數字和數字之間的長度叫做 ( )。

## 《臺灣數學教師》稿約

2013.09.27 編審委員會會議通過  
2014.09.04 編審委員會會議修訂通過  
2015.05.24 編輯委員會會議修訂通過  
2016.05.15 編輯委員會會議修訂通過

2018.05.12 編輯委員會會議修訂通過  
2019.05.25 編輯委員會會議修訂通過  
2020.05.編輯委員會會議修訂通過  
2020.11.14.編輯委員會會議修訂通過

壹、《臺灣數學教師》（原名為《台灣數學教師(電子)期刊》）（Taiwan Journal of Mathematics Teachers）（以下簡稱本刊）是國立臺灣師範大學數學系及台灣數學教育學會共同發行之期刊，內容以出版數學教育領域相關議題的原創性論文為宗旨。本刊徵求符合宗旨之教學實務文稿，內容包含探討數學教學策略、學生迷思概念之教學引導、數學教育課程、教材與教法等實務經驗分享、研究問題評析、數學教育之構想、書評、論文批判、數學教學與應用性研究、數學教育研究趨勢介紹、專題演講講稿、數學學習評量、電子媒材設計、數學教師專業發展及其他數學教育相關議題等內容。本期刊徵稿分為以下兩類：

- 一、實徵研究：中文文稿以8000字為原則、英文文稿以4000字為原則。
- 二、實務分享：中文文稿以2000~3000字為原則、英文文稿以2000~3000字為原則。

貳、本刊每年發行兩期，分別於四月、十月出刊，並採電子方式發行。全年徵稿，隨收隨審。

參、本刊所刊之文稿須為原創性的教學實務文章，即未曾投遞或以全論文形式刊登於其他期刊、研討會彙編或書籍。若文稿在送審後自行撤稿，或出現一稿多投、修正稿回覆逾期、侵犯著作權等違反學術倫理等情況，將依下列規則處理：

- 一、來稿一經送審，不得撤稿。因特殊理由而提出撤稿申請者，案送主編決定；非特殊理由而自行撤稿者，一年內將不再接受該作者的投稿。
- 二、若文稿被發現一稿多投、侵犯著作權或違反學術倫理等情況，除文稿隨即被拒絕刊登外，一切責任由作者自負，且本刊於三年內不接受該作者來稿，並視情節嚴重程度求償。
- 三、作者應於發出文稿修正通知的二週內回傳修正稿及修正回覆說明書，逾期視同撤稿。若有特殊情況請先與本刊聯絡。

肆、未經本刊同意，已獲本刊接受之文章不得再於他處發表。投遞本刊之文稿須經編審委員會送請專家學者審查通過後予以刊登，被刊登文章之著作財產權歸國立臺灣師範大學數學系及台灣數學教育學會共同擁有，文責由作者自負。

伍、文稿請以中文或英文撰寫。文稿的呈現請使用單行間距之12級字新細明體或Times New Roman字體，以橫書方式於A4規格紙張上，文稿上下左右各留2.5公分空白，並以Microsoft Word 98以上之繁體中文或英文文書軟體處理。

陸、文稿格式請參考《臺灣數學教師》期刊論文撰寫體例的說明或已發行之文稿，若有需要引用英文文獻以及數學符號、公式等請參考APA第六版出版手冊。交遞稿件時需注意下列事項：

一、提交投稿基本資料表

(一) 文稿基本資料。

(二) 通訊作者之姓名、服務單位、職稱、通訊地址、聯絡電話和電子郵件地址。

一位以上作者時，非通訊作者只需填寫姓名、服務單位和職稱。

(三) 任職機構及單位：請寫正式名稱，分別就每位作者寫明所屬系所或單位。

(四) 頁首短題 (running head)：以不超過15個字為原則。

(五) 作者註 (author note)：說明與本篇研究相關的資訊。

二、提交已簽署的《臺灣數學教師》著作財產權讓與同意書。

三、文稿除正文外，還需包含中英文摘要，摘要請獨立一頁呈現，並置於正文之前。

摘要頁內容包括論文題目 (粗體20級字、置中)、摘要 (不分段，限500字以內)、與關鍵詞 (以五個為上限，並依筆畫順序由少到多排列)。

四、若為修正稿，遞交修正的文稿上請以色字標示修改處，並需提交「修正回覆說明書」，依審查意見逐項說明修改內容或提出答辯。作者應於發出文稿修正通知的二週內回傳修正稿及修正回覆說明書，若有特殊情況請先與本刊聯絡。

柒、文稿以電子郵件方式投遞，包括作者基本資料表、著作財產權讓與同意書與全文共三份資料。作者應負論文排版完成後的校對之責，編輯委員僅負責格式上之校對。

捌、投稿電子郵箱：[tjmtedit@gmail.com](mailto:tjmtedit@gmail.com)

## 《臺灣數學教師》著作財產權讓與同意書

茲同意投稿至國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會共同發行的《臺灣數學教師》之一文，名稱為：

---

立書人聲明及保證本著作為從未出版之原創性著作，所引用之文字、圖表及照片均符合著作權法及相關學術倫理規範，如果本著作之內容有使用他人以具有著作權之資料，皆已獲得著作權所有者之（書面）同意，並於本著作中註明其來源出處。著作人並擔保本著作未含有毀謗或不法之內容，且絕未侵害他人之智慧財產權，並同意無償授權台灣數學教育學會於本著作通過審查後，以論文集、期刊、網路電子資料庫等各種不同方法形式，不限地域、時間、次數及內容利用本著作，並得進行格式之變更，且得將本著作透過各種公開傳輸方式供公眾檢索、瀏覽、下載、傳輸及列印等各項服務。國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會並得再授權他人行使上述發行之權利。惟著作人保有下列之權利：

1. 本著作相關之商標權及專利權。
2. 本著作之全部或部份著作人教學用之重製權。
3. 出版後，本著作之全部或部份用於著作人之書中或論文集集中之使用權。
4. 本著作用於著作人受僱機關內部分送之重製權或推銷用之使用權。
5. 本著作及其所含資料之公開口述權。

著作人同意上述任何情形下之重製品應註明著作財產權所屬，以及引自《臺灣數學教師》。

如果本著作為二人以上之共同著作，下列簽署之著作人已通知其他共同著作人本同意書之條款，並經各共同著作人全體同意，且獲得授權代為簽署本同意書。如果本著作係著作人於受僱期間為雇用機構所作，而著作權為讓機構所有，則該機構亦同意上述條款，並在下面簽署。

本著作之著作財產權係屬（請勾選一項）

- 著作人所有  
 著作人之僱用機構所有

立同意書人（著作人或僱用機構代表人）簽章：\_\_\_\_\_

著作人姓名或僱用機構名稱：\_\_\_\_\_

（正楷書寫）

中華民國 年 月 日

**Publisher** | Department of Mathematics, National Taiwan Normal University  
Taiwan Association for Mathematics Education

**Editorial Board**

**Chief Editor** | Chia-Huang Chen (Department of Mathematics Education,  
National Taichung University of Education)

**Vice Chief Editor** | Yuan-Horng Lin (Department of Mathematics Education,  
National Taichung University of Education)

**Editorial Panel** | Yuan-Shun Lee (Department of Mathematics, University of Taipei)  
Yung-Chi Lin (Graduate Institute of Mathematics and Science Education,  
National Tsing Hua University)

Su-Wei Lin (Department of Education, National University of Tainan)

Wei-Min Hsu (Department of Education, National Pingtung University)

Erh-Tsung Chin (Graduate Institute of Science Education,  
National Changhua University of Education)

Shu-Yi Chang (Department of Mathematics Education and Information Education,  
National Taipei University of Education)

Huan-Chuan Chang (Sinde Elementary School, Toufen, Miaoli)

Hui-Yu Hsu (Graduate Institute of Mathematics and Science Education,  
National Tsing Hua University)

Kai-Lin Yang (Department of Mathematics, National Taiwan Normal University)

Jian-Cheng Liou (Ping-jhen Junior High School, Taoyuan City)

Chang-Hua Chen (National Academy for Educational Research)

Chia-Jui Hsieh (Department of Mathematics Education and Information Education,  
National Taipei University of Education)

**International Editorial Panel** | Cheng-Yao Lin (Department of Curriculum and Instruction,  
Southern Illinois University)

---

**Address** | No.88 Sec. 4, Ting-Chou Rd., Taipei City, Taiwan, R.O.C.  
Department of Mathematics, National Taiwan Normal University  
*"Taiwan Journal of Mathematics Teachers"*

**TEL** | 886-2-7734-6576

**FAX** | 886-2-2933-2342

**E-mail** | [tjmtedit@gmail.com](mailto:tjmtedit@gmail.com)

**Website** | <http://tame.tw/news/news.php?class=204>

---



1 從數學素養看長度教材發展及線段圖解題

/ 甯平獻、張淑怡

Teaching Material Development of Length Concept from the Perspective of Mathematical Literacy and its Use as a Problem-Solving Tool

/ Ping-Xian Ning、Shu-I Chang

16 數學體現活動教學之研究 — 以二年級長度測量為例

/ 楊芷欣、陳嘉皇

Research on the Teaching of Mathematics Embodied Activities - Taking Length Measurement in Second Grade

/ Yang, Zhi-Xin、Chen, Chia Huang

