

從數學素養看長度教材發展及線段圖解題

甯平獻¹ 張淑怡²

¹ 國立臺中教育大學數學教育學系

² 國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系

本文首先說明研究者的數學素養觀點；其次從數學素養看長度概念與教材發展；接著是利用公分尺將共測單位概念具體化，解決異分母分數加減問題；最後則是利用線段長表徵各種量以具體化方程式和比例概念，讓學生操作表徵解決問題。其中，後二者主要是將長度作為表徵上的運用，基於教學需求，探究如何將抽象的數學概念具體化為可操作的情形。

關鍵詞：長度教材發展、線段圖、數學素養

壹、數學素養

為什麼要有數學素養呢？與其問為什麼要有數學素養，還不如問為什麼要有國民教育？國民教育是現代化國家普遍的制度，主要目的在於提高國家的競爭力。國家的組成是國民，提升國家競爭力自然就是提升國民的素質。國家競爭力取決於這個國家的繁榮程度，簡單來說，國民的生活都很不錯、有幸福感、對國家有向心力、社會的分工完美，那麼整個社會的生產力因分工良好，就會回饋給國民有更好的生活。

為了提高國民的素質，各國規範了各自的國民教育。一些比較富有的國家，比如挪威、瑞典、丹麥等，其國民教育涵蓋至大學階段。比較貧窮的國家可能是有一大堆人民完全不識字。由於建立國民教育制度的目標在於提高國民素質，也就是希望國民都具有改善自己生活的能力，亦能夠踴躍參與社會。若要社會參與，文字的認識就變得很重要。因此，早期國民教育的目的就是要掃除文盲。

隨著現代社會的參與，由個別的區域擴充到國家，甚至到整個所謂的地球村，地球各地的人們互動越發強大，分工也從局部的區域擴展到全球性的分工。全球性的分工需要的素質就更厲害也更多了，原本只需要認識自己國家的文字，現在要進一步能夠知道外國語，如此才有辦法溝通；要獲得世界認可的標準來交換各自分工的產品，如此才有辦法在更大的國際社會裡面交換經濟及其他各種產品。由是，原本狹隘的文盲掃除已不符現實需求，國民素質被許以更高的期望，這個期望就叫做素養，亦即有素養的國民。換言之，對於每一個國家而言，國民教育的目標提高了，從識字提升到具備語文素養、具備數學素養等等。由上可知，透過國民教育的實施，國民被期許能以學到的數學知識，協助自己「改善生活環境」以及「擴大社會參與」，此為數學素養的兩大目標。

然而，生活環境的改變不一定需要數學，改善生活環境從數學素養的門縫去看，它指的是生活環境中的數、量、形及群體等現況的改變。至於社會參與，一般來說主要是兩件事，一是在社會裡面消費由他人所生產的產品，另一則是提供社會所需求的勞務。由是，當我們以改善生活環境及擴大社會參與為目標，連帶的需要解決一些數、量、形及群體等問題的時候，由個體是否擁有解決這些數、量、形及群體等問題的數學知識，可看出個體的數學素養是否足夠。所以數學素養出現在哪裡？出現在個體改善生活環境或者是擴大社會參與，連帶引出的數、量、形及群體的改變問題的時候，個體如何解決

這些問題。特別是能夠自發性的解決，而非仰賴於他人。此種情境下的成功解題有賴於個體的數學素養。

貳、從數學素養看長度概念與教材發展

許本部分主要探究長度概念與教材發展，包括長度初步概念、未數值化的間接比較、個別單位比較、長度普遍單位概念、長度單位制度，以及使用長度化約其他幾何量的測量方法等六階段。特別地，當將數學素養的目標指向改善生活環境及擴大社會參與，每一發展階段可進行的教學活動或提問亦在文中一併說明。

一、數學素養中的長度初步概念

長度的本質是指由一個位置移動到另一個位置的移動程度，簡稱為「位移的程度」。位移是感官注意力的移動，可以是視覺或觸覺的，前者是指眼光注意位置的移動，後者是指觸點的移動。至於程度的不同是從量上做區分，質的區分則指向種類的不同。

根據上述定義，長度的初始教學一定要同時呈現兩個要彰顯長度的物品。以「美術課要使用的兩條毛線」為例，將紅色和綠色毛線貼在黑板上，問「這兩條毛線除了顏色和擺放位置不同外，還有什麼不同？」藉此引入「長度」、「比較長」、「比較短」等語詞及其意義。由是，「長度的意義」和「長度的直接比較」是一體兩面。亦即，若沒有要進行兩物長度的直接比較，就沒有從物品中區分出長度的需求，就沒有所謂長度的本質；提到長度的本質就有直接比較的結果。

「直接比較」的意思是將兩個量並置比較，即兩量必須在同一個時空裡面。長度直接比較可以學生比較身高作為教學情境，問「誰比誰高？」「怎麼比會準一點呢？」，學生回答可能是背對背、不能彎腰駝背、不能一個站在椅子上…，此時，一端必須對齊且要拉直等長度直接比較的重點即由學生口中自然產出。

二、未數值化的間接比較

當兩量在不同時間或不同空間時，如何比較呢？例如：「五歲時的你和現在的你，哪一個你比較高？」「不同班的小佳和小珮，誰比較高？不把兩人找過來的情況下，如何證明誰比較高？」前者學生可能回答：牆壁上有我五歲時的身高畫記，我現在在那個畫記以上，所以現在的我比較高。後者學生可能先到隔壁班用繩子做出小佳的身高畫記，再把該段畫記的繩長拿來跟小珮身高比較。像上述兩例，當A、B兩量分屬不同時空，無法直接比較時，透過複製其中一量A，將複製所得第三個量C與另一量B直接比較，謂之

「間接比較」。其中，牆壁上五歲的身高刻度到地面的長度，以及用小佳身高做出的繩長皆為間接比較中複製所得第三個量。

根據上述說法，間接比較運作過程涉及「保留概念」與「遞移律」。何謂長度的保留概念？如圖 1，當有紅、綠兩線段頭尾皆對齊時，學生會說兩線段一樣長。當將紅色線段在學生面前弄成曲線時，若學生仍認為兩線段一樣長，學生就具有長度保留概念。換言之，長度不因時空的變化而變化。故「保留概念」真正的意涵是「不變性」。

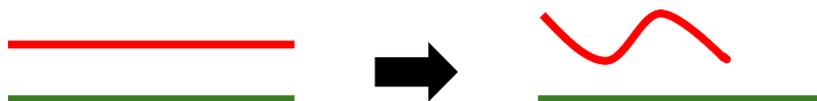


圖1 長度保留概念測試

為何長度的間接比較會涉及保留概念呢？當學生具備保留概念，意味長度開始可以被複製，且相信所複製的長度不因時空的變化而變化。例如相信牆壁上五歲的身高刻度到地面的長度不會變，才能夠主張我長高了；相信用小佳身高做出的繩長不會變，才可以小珮身高和該段繩長做比較以替代之。一般而言，長度保留概念是發展的，而不是學習的。學生大致到一年級下學期才有長度保留概念，故教科書有關長度間接比較多安排在一下。

為何長度的間接比較會涉及遞移律呢？當A、B兩長度無法直接比較，需透過第三個長度C來比較時，如上述做法，若C是複製A所得，C又比B長，我們會說A比B長，此即遞移律（若 $A=C$ ， $C>B$ ，則 $A>B$ ）。另外，若找到的第三個長度C比A短，且比B長，我們會說A比B長，此亦是遞移律之展現（若 $A>C$ ， $C>B$ ，則 $A>B$ ）。

三、數值化的間接比較（個別單位比較）

當兩量不能直接比較時，除了完整複製的間接比較外，還有其他比較方式嗎？例如：「繪本的兩段邊長A和B，哪個邊比較長？如何證明？」學生可能使用相同尺寸的迴紋針或橡皮擦等做為媒介，如用迴紋針相連分別複製邊長A和B，再計數A、B各由幾個迴紋針組成進而比較。換言之，當兩量無法直接比較時，使用小單位分別等量合成複製此兩量，再藉由小單位個數加以比較，謂之「個別單位比較」。上例使用的迴紋針即所謂個別單位。

根據上述說法，個別單位比較運作過程涉及更高階的「保留概念」與「數值化」。首先，前曾提及保留概念在間接比較的重要性在於長度開始可以被複製，且相信所複製的

長度不會變。在個別單位比較中，保留概念的重要性再次被彰顯且居較高層次，因長度開始可以被單位化，即可以複製、再製、一而再再而三的製作，且相信被重複的每一個都一樣長。由此看來，沒有保留概念就沒有長度單位的出現，沒有長度單位的出現就不可能有個別單位比較，也就沒有後續的普遍單位比較。其次，當一個又一個單位出現後，如何區分比較多和比較少的單位呢？由於數是用來區分量的，透過數概念的引入，兩量才能進一步區分出各自有幾個單位長，並加以比較。

綜上所述，相較於間接比較，個別單位比較有可重複的單位以及引入數概念在測量上，故可視為間接比較之進化。

四、數學素養中的長度普遍單位概念

為了溝通上的便利，當使用約定俗成的單位，如公分、公尺，進行個別單位比較時，該約定俗成的單位稱為普遍單位。此時我們會用如 5 公分、7 公分來區分兩量。像此種以數來區分量的運作過程，學生須具備公分保留概念，知道每個 1 公分都一樣長，且 5 公分就是 5 個 1 公分。

當給學生一把尺，以 0 為起點測量卡片邊長時，學生可能可以正確報讀，但未必知道刻度尺的結構，如報讀 5 公分，可能只是報讀刻度尺上最後一個數字，未必知道 5 公分是 5 個 1 公分。由是，可進一步提供斷尺，檢查學生是否具公分保留概念。當卡片邊長是由刻度 4 至刻度 9 時，學生反應可能有二：只會報讀數字的小朋友會回答 9 公分；有保留概念的小朋友會回答 5 公分。故，斷尺測量活動在公分尺使用教學中極具重要性。

普遍單位是一約定俗成的單位，其來源主要是因為人們要分工合作，讓整個社會來參與各種社會物質的製作，此與強調改善生活及擴大社會參與的數學素養關係密切。究竟普遍單位的長度題材如何在素養教學中實施呢？在學校可以進行教室空間布置，可從丈量教室開始，針對可以移動的家具先行設計擺放的位置，實際擺放後可再重新布置組織，亦可以畫出示意圖。同樣的步驟，可以讓學生布置自己的房間或書桌作為作業。此外，如作手環，如何串珠才能剛剛好？買成衣，何種尺寸較合適？學生在解決上述任務的歷程中，除使用普遍單位，前曾提及的直接比較、間接比較、個別單位比較等亦皆是可能涉及的解題行為。由於食衣住行育樂皆和長度有關，若能配合十九項議題取材，應更能強化數學素養與現實生活的連結。

五、數學素養中的長度單位制度

測量長度的普遍單位有很多，這些單位及其彼此間的關係謂之單位制度。目前國小此部分的教學重點多在複名數、度量衡關係的建立與使用，然，在強調改善生活及擴大

社會參與的數學素養下，下述議題可供課堂討論與澄清：「為何要有這麼多普遍單位？」節省溝通體力使更簡約掌握環境，以及生活情境和交流中的誤差容許程度是主要原因。

「為何以 146 公分，而非 1460 毫米，來描述身高？」單位量是 1 公分時，該身高介於 145.5 到 146.4 之間，0.5 公分的誤差是可容許的，不須要求到 0.5 毫米的誤差範圍；且單位數是 146 較符合簡約的條件。「單位會繼續擴充嗎？」單位會隨著科學的發展而擴充，如更大的單位如光渺，更小的單位如奈米。

另外，在度量衡關係的建立與使用上可採取下列步驟：(一) 關係的建立：從「一樣長」過渡到「等號關係」。如「1 公分和 10 個 1 毫米合起來一樣長」此一關係之建立，可請學生使用公分尺（同時有公分和毫米的刻度），從公分刻度 2 畫到刻度 3，問學生「這是幾公分？和幾個 1 毫米一樣長？」換言之，分別使用公分和毫米為單位去測量同一線段。關係建立後，可以說因為一樣長，所以我們記成「=」。(二) 使用這個關係：方向有二，(a) 兩個都是整數，例如，2 公分 5 毫米 = (25) 毫米；25 毫米 = (2) 公分 (5) 毫米。(b) 在學會小數、分數後才去建立「1 毫米和 0.1 公分一樣長」，1 毫米 = 0.1 公分，25 毫米 = (2.5) 公分。

六、使用長度化約其他幾何量的測量方法

幾何量包括長度、面積、體積、角度、容量，這些量皆可透過約定各自單位與長度單位間之關係，進而化約成長度來進行。就面積而言，我們約定「1 平方公分是每邊長 1 公分的正方形面積」，此約定有何功能？以長 3 公分寬 4 公分的長方形面積為例，原先需透過平方公分板計數有幾格，當有了 1 公分長度和 1 平方公分間的關係後，就可透過邊長之分析，將長方形變成 3 行 4 列個正方形，即 1 列有 3 個，有 4 列，進而發展出長方形面積公式是「長 x 寬」，於是僅須透過測量長方形之長和寬即可算出面積。

類似地，體積單位與長度單位的約定為「1 立方公分是每邊長 1 公分的正方體體積」，以長 3 公分、寬 4 公分、高 5 公分的長方體體積為例，原先需透過計數有幾個 1 立方公分之正方體，當有了 1 公分長度和 1 立方公分間的關係後，就可透過邊長之分析，將長方體視為一層有 3 行 4 列個，共 5 層的立方體構成，進而發展出長方體體積公式是「長 x 寬 x 高」，於是僅須透過測量長方體之長、寬、高即可算出體積。

另外，我們亦可利用單位圓的弧長來計算角度，即將角度單位（弧度量）與長度單位約定為「單位圓的弧長是 1 公分時，該弧所夾角度的弧度量是 1」，此為高中範圍，在此不贅述。至於容量的部分亦可間接透過其與體積單位的約定「1 毫升是 1 立方公分」，來算出容量。

參、利用公分尺將共測單位概念具體化， 解決異分母分數加減問題

兩個量若可以找到同一個單位量，使得兩個量都成為這個單位量的整數倍時，這兩個量叫做可共測量。例如：8 和 6 都是 2 的整數倍， $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{4}$ 都是 $\frac{1}{12}$ 的整數倍。兩量若可共測，其共測單位量可以不只 1 個。正整數與共測單位相關的是公因數問題，分數與共測單位相關的是公分母的求解問題。異分母分數加減運算過程中的通分，即在尋找共測單位，除了由教師直接告知方法外，如何建基於學生的先備知識自然的引入呢？

當學生首次接觸異分母分數加減問題「 $\frac{1}{3}$ 條蛋糕和 $\frac{1}{4}$ 條蛋糕，哪一個比較多？多多少條？」時，學生多能回答 $\frac{1}{3}$ 條比較多，但卻無法回答多多少條。但若是離散量情境佈題，「一包糖果 24 顆， $\frac{1}{3}$ 包和 $\frac{1}{4}$ 包，哪一個比較多？多多少包？」學生多能透過轉換為糖果的顆數進行解題，如「 $\frac{1}{3}$ 包糖果有 8 顆， $\frac{1}{4}$ 包糖果有 6 顆，多 2 顆。1 包 24 顆，所以是多 $\frac{2}{24}$ 包。」亦可進一步紀錄為「 $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{2}{24}$ 」。

由上例可知，糖果的離散本質提供了天然的共測單位，1 顆或 $\frac{1}{24}$ 包，使學生得以給出 $\frac{2}{24}$ 包此一答案。換言之，在離散量來說，要找共測單位是很自然的，因離散量有一個永遠的共同單位「1」，而「1」是所有數的公因數。由是，建議公分母的求解問題應考量以離散量的問題引入較為自然。

由於公分尺是使用公分將連續量離散化，例如一把 24 公分的尺代表它是由 24 個 1 公分組合成的，此與一包糖果有 24 顆的道理是一樣的，故公分母的求解問題於離散量情境佈題後，可使用公分尺過渡到連續量，此時可利用離散量經驗解決連續量問題。以下舉例說明如何使用公分尺進行連續量情境之教學，「美術課，一個男生分到 $\frac{1}{4}$ 條彩帶，一個女生分到 $\frac{1}{3}$ 條彩帶，一個女生比一個男生多分到多少條彩帶？」

首先，教師依序提出下述五個問題，並請學生以分母的整數倍，如 24 公分，作為一條彩帶的長度，依序解題與討論（如圖 2）。其次，請小組各自以分母的整數倍（24 公分以外的數值）作為一條彩帶的長度，再次進行下述五個問答，並歸納初步發現。最後，可以任意長度作為彩帶長，脫離公分尺數值化的部分，推廣成直接以連續量的條為單位進行操作。

問題 1：「你能把（24 公分）線段平分成 4 等分嗎？請用 4 個不同的刻度標示出來。」此時學生能透過等分除解題，並在刻度上下分別以公分與條作為單位予以標示。

問題2:「你能把(24公分)線段平分成3等分嗎?請用3個不同的刻度標示出來。」此時學生能透過等分除解題,並在刻度上下分別以公分與條作為單位予以標示。

問題3:「你能不能找到一個共同單位,分別讓 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{4}$ 是那個刻度的倍數?」此時學生可透過8公分和6公分的共同單位是2公分或1公分,找到 $\frac{1}{3}$ 條和 $\frac{1}{4}$ 條相應的共同單位是 $\frac{1}{12}$ 條或 $\frac{1}{24}$ 條。

問題4:「 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{4}$ 如何用共同單位 $\frac{1}{12}$ 來表示?」「 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{4}$ 如何用共同單位 $\frac{1}{24}$ 來表示?」當共同單位是 $\frac{1}{12}$ 條(2公分),學生透過將8公分和6公分分別表示為「4個 $\frac{1}{3}$ 」和「3個 $\frac{1}{4}$ 」,找到 $\frac{1}{3}$ 條和 $\frac{1}{4}$ 條相應的表示方式是「4個 $\frac{1}{12}$ 」和「3個 $\frac{1}{12}$ 」,紀錄為「 $\frac{1}{3}=\frac{4}{12}$, $\frac{1}{4}=\frac{3}{12}$ 」。當共同單位是 $\frac{1}{24}$ 條(1公分),運用相同方式,可找到等值分數「 $\frac{1}{3}=\frac{8}{24}$, $\frac{1}{4}=\frac{6}{24}$ 」。

問題5:「 $\frac{1}{3}$ 條比 $\frac{1}{4}$ 條多多少條?請用條為單位來計算。」學生可能紀錄為「 $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{12}$ 」或「 $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{8}{24} - \frac{6}{24} = \frac{2}{24}$ 」。

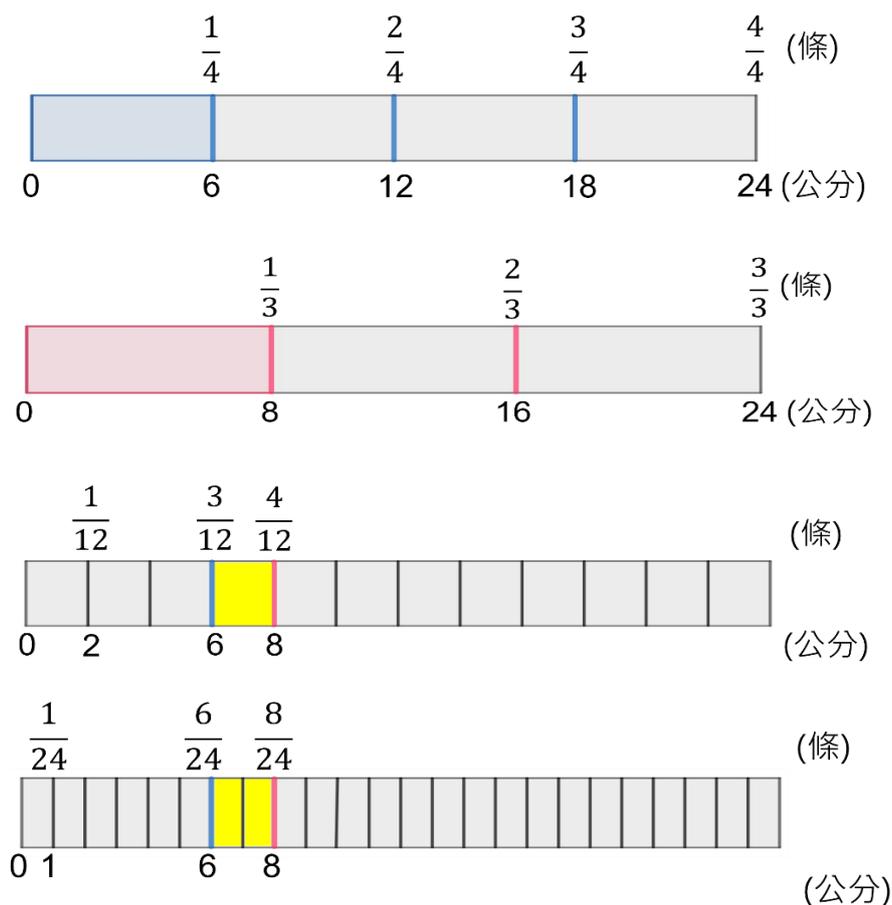


圖2 用24公分尺解異分母分數減法問題

由上可知，將公分尺引入異分母分數加減教學之原因，除了公分尺是使用公分將連續量離散化，可利用先前離散量經驗解決連續量問題外，尚有下列兩部分：(一)公分尺上的刻度可視為巢狀刻度，其啟發如何去找共測單位。所謂「巢狀概念」可以大包內有中包，中包內有小包的糖果包裝作為類比，此時中包可視為由小包構成的全體，中包也可視為構成大包的部分。在上例問題 4 中，8 公分和 6 公分一方面可視為由 2 公分或 1 公分這些共測單位構成的全體，另一方面其也是構成 24 公分此一全體的部分。同樣的， $\frac{1}{3}$ 條和 $\frac{1}{4}$ 條一方面可視為由 $\frac{1}{12}$ 條或 $\frac{1}{24}$ 條這些共測單位構成的全體，另一方面其也是構成 1 條此一全體的部分。此一在公分尺上找共測單位的歷程，有助該概念具體化。(二)公分尺上同時有公分和毫米兩種單位，一刻度可同時使用此兩單位描述，如 1 公分 = 10 毫米，此對於可在其上分別使用原單位及共測單位描述同一刻度有所啟發，如問題 4 的等值分數。

肆、利用線段長表徵各種量以具體化方程式和比例概念，讓學生操作表徵解決問題

凡是可單位化，可以被比較的量，如比大小、比先後，皆可以被表示成直線。由是，離散量，如人數、個數、錢數等皆可以用線段長來表徵。另外，國小量與實測範疇的這些量，包括長度、面積、體積、重量、角度、容量、時間等由於皆可單位化，故亦皆可再表現成為長度。例如：時間再表現成為長度是指將鐘面的圓周長拉直成為長度，當短針從刻度 1 走到 4，表示時間是 3 小時。體積再表現成為長度是指將體積視為 1 立方公分之積木個數併排成一直線，當從刻度 1 到 4 表示體積是 3 立方公分。又如，面積再表現成為長度是指將面積視為 1 平方公分之方格個數併排成一直線，當從刻度 1 到 4 表示面積是 3 平方公分。

由上可知，當學生理解尺的刻度結構時，即可透過長度將這些量加以數值化，此時，除了可以把幾個同類量的關係展現在同一線段圖上，亦可在相同長度的線段圖上展現不同類量。前者可用來具體化方程式概念，後者則可具體化比例概念。以下分別說明之：

一、利用線段圖將方程式概念具體化，作為代數概念前置

整數四則問題能化約為方程組問題，透過代入消去法、加減消去法等來解題，過程中涉及等量公理，對國小兒童較為抽象。當學童能將其他量的測度再表現成為長度，即

可將問題由抽象的文字具體化成為線段的具體關係，等量關係就可以用等長來表示，再利用對具體關係的操作來解決問題。亦即把聯立方程組的運作透過利用線段圖的表示方式來解題。此一作法之優點為促進兒童以具體運作的方式來解決原本要使用等量公理來解決的抽象聯立方程組問題。以下以雞兔同籠問題為例。

問題：兔和雞共有 10 頭，共有 24 隻腳，兔和雞各有幾頭？

首先，以聯立方程組來解題：

將兔子設為 x 頭，雞 y 頭，

原問題可寫成聯立方程組(1) $x + y = 10$ ，(2) $4x + 2y = 24$

將(2)重組變成 $2(x + y) + 2x = 24$ ，

(1)利用等量公理，兩邊同時乘 2 變成 $2(x + y) = 20$ 代入(2)

(2)變成 $20 + 2x = 24$

再利用等量公理 $2x = 24 - 20$ ， $2x = 4$ ， $x = 2$ ， $y = 8$

接著，改以線段圖將上述聯立方程組之運作歷程具體化（如圖 3）：

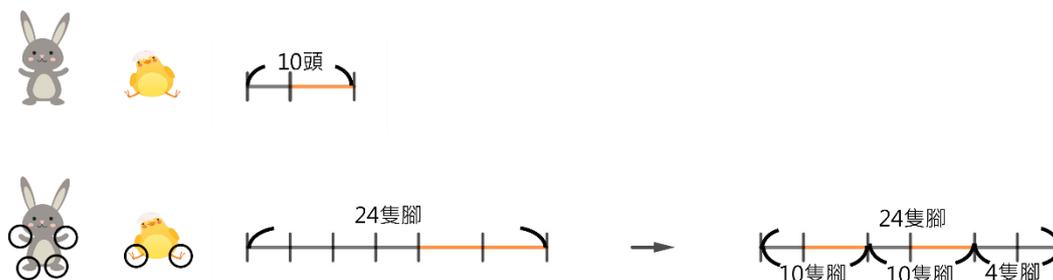


圖 3 雞兔同籠的線段圖解題歷程

(1) 以灰線段代表兔子頭數，橘線段代表雞頭數。

(2) 將題目中的每個關係敘述一一表徵為灰色和橘色線段間的具體關係。如以灰線段和橘線段合起來是 10 單位，表示兔和雞共 10 頭。一隻兔子有 4 隻腳，兔子總腳數可看成左前腳、左後腳、右前腳、右後腳個別總數的合成，由於左前腳、左後腳、右前腳、右後腳個別總數皆與兔子頭數一樣多，故兔子總腳數可視為 4 段灰線段。同樣地，一隻雞有 2 隻腳，雞的總腳數即為 2 段橘線段；再以 4 段灰線段和 2 段橘線段合起來是 24 單位，表示雞和兔的總腳數是 24 隻腳。

(3) 操作灰色和橘色線段間的具體關係來解題。由於灰線段和橘線段合起來是 10 單位，故將第二個線段圖加以重新組織，總腳數變成 2 組灰、橘線段和剩下的 2 段灰線段。此時，剩下的 2 段灰線段為 4 單位 ($24 - 20 = 4$)，1 段灰線段即為 2 單位，亦即兔

子 2 頭。由此可求出雞 8 頭。

除了上述雞兔同籠問題外，怎樣解題教材中的年齡問題，基準量與比較量教材中的母子和、母子差等未知數問題亦皆可以變成線段關係圖，等量關係就可以用等長來表示，透過操作具體關係來解題，使方程式(組)概念具體化。

二、利用線段圖將比例概念具體化，解決速度、濃度、密度問題

速度、濃度、密度等內涵量是由比值來定義，涉及兩個量的複合問題，欲了解這些概念，須先了解「統計的平均數」，然此概念是兒童較為缺乏的。以生活情境中的開車速度為例，在高速公路、交流道、市區等的速度限制與交通狀況不盡相同，過程中車子並非勻速的(會忽快忽慢)，故總距離除以總時間求得的速度事實上是平均值，僅意味著該車的速度可以該平均作為代表，此時可以進行已知距離與時間的兩車車速比較。至於單一車子的速度計算，唯有想像在一條沒有紅綠燈的路上勻速直線前進，題目才有意義。由上可知，在速度、濃度、密度等內涵量問題中，「均勻分布」是解題的基本假設。為協助學生跨過均勻分布的想像困難，此處利用線段圖直的概念來具體化，亦即將速度、濃度、密度等再表現成相同長度的不同量單位的比例關係。以下使用線段圖使速度概念具體化。

問題：車子 3 小時行駛 150 公里，時速是多少？



圖 4

時速問題的線段圖解題歷程

由圖 4 可知，相同長度的線段圖，上面代表行經距離 150 公里，下面代表所花時間 3 小時。當將下面的 3 小時分割成 3 段 1 小時，每段 1 小時上面對應的是 50 公里，即時速 50 公里，線上每一點的速度都是時速 50 公里。

由於此種形式的線段圖是距離對時間的表達線，每一點都是速度，是比值，且每一點上的速度都是一樣的，故可以進一步讓學生視覺上感受到，同一速度，不論是時速、分速或秒速，其實都是同樣的速度，只是線段圖下方的時間單位不同，而造成上面的距離不同，此應可協助解決學童在速度單位互換時選用乘法或除法上的困難。以下以分速換秒速的問題為例。

問題：小明 2 分鐘走 120 公尺，分速是多少？秒速是多少？

請學生依題意畫出一線段圖（如圖 5），上面標示 120 公尺，下面標示 2 分鐘後，教師進行關鍵提問，學生回應並同步分割線段圖。首先，教師提問「2 分鐘是幾個 1 分鐘？」「在每個 1 分鐘，小明移動多遠？」（學生作答如圖 5 步驟 1，即分速是 60 公尺）。其次，教師提問「1 分鐘是幾個 10 秒？」「在每個 10 秒鐘，小明移動多遠？」（學生作答如圖 5 步驟 2）。接著，教師提問「10 秒能不能再細分成 1 秒？」「在每個 1 秒鐘，小明移動多遠？」（學生作答如圖 5 步驟 3，即秒速是 1 公尺）。由於線上每一點速度都一樣，故分速 60 公尺 = 秒速 1 公尺。由圖 5 可知，分速換成秒速是由大刻度變成小刻度，用除法。相反地，秒速換成分速、分速換成時速皆是由小刻度換成大刻度，用乘法。

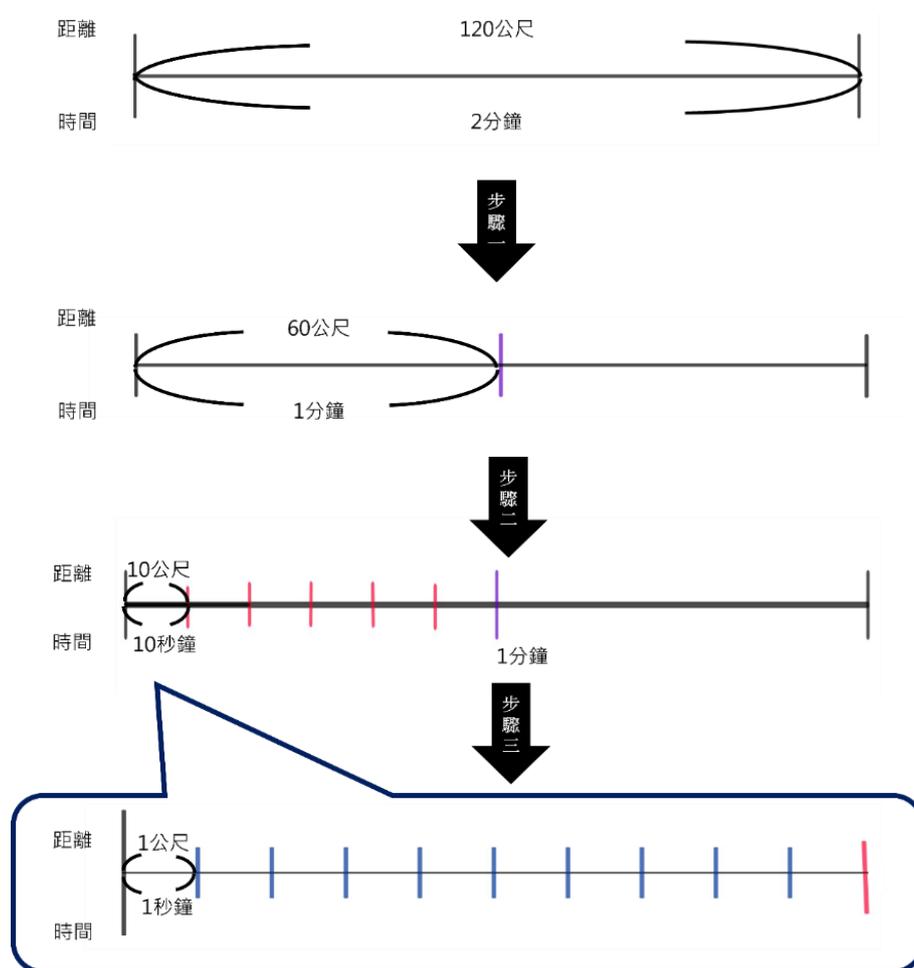


圖 5 分速換秒速的線段圖解題歷程

值得一提的是，除了使用線段圖，針對數學學習困難的學生，可以進一步將資訊科技融入教學，如製作能同時呈現時刻變動和位置變動的影片，上面是人走路產生的位置

變動，底下可以同步看到鐘面刻度的變化，如此應會讓學生對速度以及不同速度單位間的換算更有感。

此外，線段圖除了可用來計算個別的速度、濃度、密度外，亦可進一步用來比較彼此間之關係。以下以濃度比較為例。

問題：媽媽用 1 罐蘋果原汁加 4 杯水調成蘋果汁，小伶用 2 罐蘋果原汁加 6 杯水調成蘋果汁，誰調的蘋果汁比較甜？

必須先說明的是，濃度問題亦預設了蘋果汁裡面的原汁和水都均勻分布。相同長度線段上下可以是不同量的單位，如圖 6 線段圖下方是原汁，單位是罐；上方是水，單位是杯。當以線段圖來表現時，原有蘋果原汁和水兩種變因簡化為長度的變因，就可因著不同人的配方，用相似來放大或縮小。

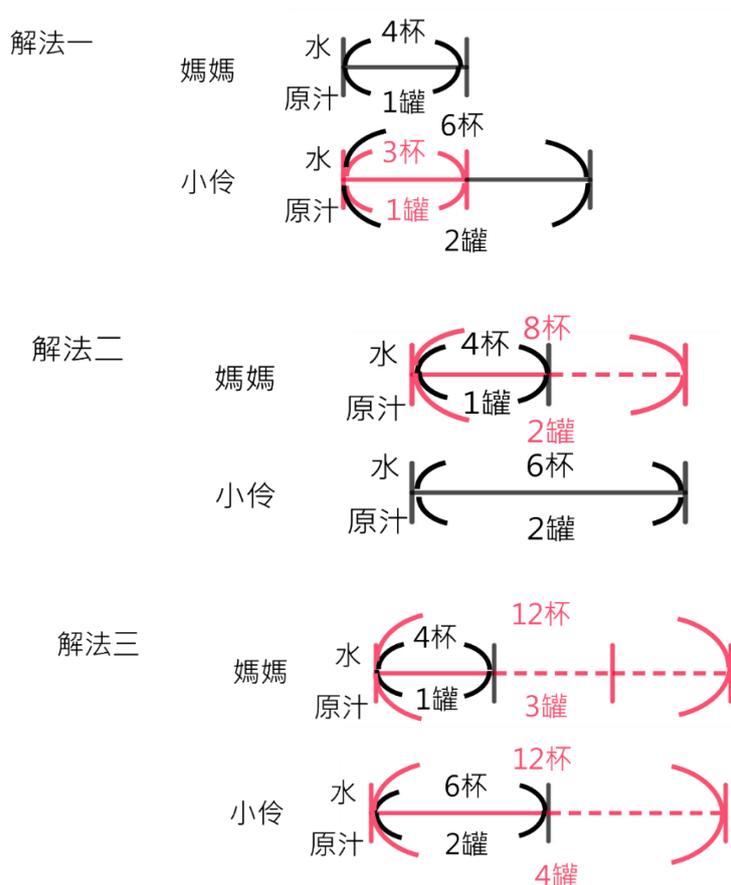


圖 6 用線段圖解濃度比較問題的三種解法

圖 6 解法一和解法二皆是固定原汁，比較水量的作法；解法三是固定水量，比較原

汁的作法。以下說明之：解法一是將小伶的 2 罐原汁分割成 2 段，每段是 1 罐原汁，上面對應的是 3 杯水，而媽媽 1 罐原汁用的是 4 杯水。相同原汁下，小伶用的水比較少，故小伶的較甜。解法二是將媽媽的 1 罐原汁拉長成 2 段，2 段是 2 罐原汁，上面對應的是 8 杯水。而小伶 2 罐原汁用的是 6 杯水，故小伶的較甜。解法三是將媽媽的 4 杯水拉長成 3 段，3 段是 12 杯水，下面對應的是 3 罐原汁。同時亦將小伶的 6 杯水拉長成 2 段，2 段是 12 杯水，下面對應的是 4 罐原汁。相同水量下，小伶用的原汁比較多，故小伶的較甜。

伍、結語

本文將數學素養的目的指向改善生活環境及擴大社會參與，並從該觀點來看長度概念與教材發展，提供六個發展階段可進行的教學活動與提問。另外，本文亦探究長度在表徵上的運用，包括利用線段圖將抽象的分數共測單位、方程式和比例概念具體化，藉以降低問題難度。所謂具體化是指將文字題中的各種量再表現成為視覺可見的長度，並將量與量間的關係用長度逐一表現出來，進而操作長度關係來解題。由於長度被進一步使用變成學生解決問題的工具，亦即學具，故教學生自己製作線段圖來解題亦是本文所強調的。

致謝 本文原始素材源自甯平獻教授主講的台中線上讀書會，感謝魏嘉伶小姐提供逐字稿。