序言

梁淑坤教授

中山大學教育研究所所長

TAME 的 TJMT 第六期要出刊了！

這一次代表教師專業成長的著作，由關心數學教育工作的熱心一群合作無間，共同付出及參與研究後，再更上一層樓及具有分享成果的熱誠投稿，編者喜見刊出一群熱心教師、教授、研究員合作的書面報告。

這一期的書面報告，是有熱誠分享成果的動作，更難得的是，投稿者包括中國廣西桂林，香港中文大學也有國內作者以外語溝通成果。相信第六期的文稿，可以大量被國內外閱讀中外語的讀者引用，可提供給研究及實務人士參考。

細讀文稿之後，敬佩實務者在百忙中仍抽空從事研究。香港中文大學孫旭花老師提及到自己的心路歷程，透過數學日記協助「反思」及「再反思」，她具體以中學學生的數學日記介紹其做法。另外，國內的李玉文老師、姚如芬老師報告平行四邊形包含概念的理解，這兩篇報告均是教學者本人或與指導教授的教學研究篇。餘下的兩篇報告，均是大學教師(唐劍嵐、林素微)及國立教育研究院研究員(周筱亭)合作的作品。其中一篇是研究教師，另一篇則是談學生的信念，內容有包括理論背景。例如，唐老師討論信念對學生的四種學習信念影響及三個影響信念的因素，而林素微、周筱亭研究者介紹 case 手法的共同探究四階段架構。

最後，從本期的文稿來自香港及中國大陸，足見 TJMT 的吸引力不止是在國內，也達成中外學術交流的目的。期望下一期期刊是更豐富的分享園地。

『方形』非『平行四邊形』？！

─如何促進學生四邊形包含概念的理解

李玉文[1]　　姚如芬[2]

[1]國立虎尾高中、[2]國立嘉義大學數教所

摘要

在一個偶然的機會中，研究者遇到了兩位對於平行四邊形的包含概念有困擾的學生，因此研究者安排適合他們倆人的教學活動『運用吸管拼湊出平行四邊形』，在活動中除了讓這兩位學生看到平行四邊形的具體表徵外，並且利用這個平行四邊形，使他們看到平行四邊形內角角度改變的歷程。教學活動完成後，學生不單對於平行四邊形基本概念更加的清楚，而且對於平行四邊形包含概念的迷思也消失了。這個教學活動在課室中相當容易實施，教學成效也相當顯著，因此希望能提供給其他教師參考。

關鍵字：平行四邊形、包含概念

一、　前言

在日常生活中，四邊形隨處可見，而且在我們的課程中也把四邊形做了一連貫的介紹，以國小四年級而言，在教育部頒布的九年一貫數學學習領域課程綱要（第五版草案）中，針對四年級的幾何能力指標特別明確的指出：（4-s-02）學生能透過操作，認識基本三角形與四邊形的性質，例如：平行四邊形的基本性質。（4-s-06）理解平面上直角、垂直與平行的意義。（4-s-07）能夠運用直角、垂直與平行的概念，認識簡單平面圖形，可以辨認三角形、梯形及平行四邊形等圖形。

通訊作者：李玉文 x7w3439@yahoo.com.tw

雖然透過現行的四邊形課程設計中，能使學生看見許多具體四邊形圖形，但是根據相關研究（吳貞祥，1980；沈佩芳，2002；林軍治，1992；張英傑，2001；謝貞秀，2002；Burger＆haughnessy,1986；Clement＆Battista,1992；Elizabeth,1995；Wilson,1990）指出學童在學習四邊形時，常常有許多的迷思概念，尤其是對於平行四邊形的包含概念，更是感到相當困擾。研究中指出，學生無法清楚了解各種四邊形之間的包含關係的主要原因有幾項：一、學生不了解四邊形的基本性質。二、學生知道各種四邊形的基本性質，但是在判別平行四邊形時，常常無法以性質去判別四邊形；三、受到了視覺的影響，無法去把四邊形做分類，更何況是更進一步做相關性的連結。常見的例子有： Monghan（2000）的研究發現學生會認為長方形不是平行四邊形，因為一般平行四邊形的原形擺設都是這樣

呈現，所以學生無法把長方形及正方形視為平行四邊形，認為長方形及正方形是一個特殊四邊形，因此容易混淆四邊形的包含概念。但是四邊形相關概念在數學課程中佔了很大的一部份，其中的包含概念，除了在幾何以外，學生在高中學習集合概念時，亦有相關的概念結構，因此加深學生對平行四邊形的包含性質關係的理解，將會對學生的數學思考更加有利。

數學的學習是一連串探索及連貫的過程，讓學生在經過設計的教學情境中去觀察、發現問題、做出假設，並進而找出解答，將可以訓練學生的邏輯思考能力。另外如果讓學生從活動當中去驗證自己的想法，建立由自己理解且獲得的知識，這樣的知識將會使學生記憶深刻，並進而提昇學生問題解決的能力。美國教育學家杜威博士倡導學習應該以學生為主題，讓學生在做中學，由做中思考，在實際活動及生活歷程中，使學生知與行，如此一來，學生獲得知識將是一種行動而非冥想。因此學生的數學學習不應只是單純由教師傳輸知識的模仿活動，應該是以學生自主產生的探究活動為主軸。然而數學學習更應是個連貫、不間斷的過程，必須要奠定紮實的基礎，才可以往下一個概念邁進。如果學生在學習一個新概念的時候，有某一個部分概念無法理解，將來學生在學習更深一層的概念時，必定

會有一個很大的鴻溝，很難跨越過去，更無法在不同概念間做相關性的連結。然而在學習的過程中，如果所獲得的知識能夠與舊知識做恰當的連結，那麼這個知識將不再只是一些片段的記憶，而是一個完整的概念。因此讓學生動手操作、自我探索，遇到學生有疑惑出現時，老師從旁提示、指導，幫學生搭一個鷹架，可以讓學生馬上獲得回饋，老師也能立即發現學生的迷思，矯正學生的錯誤，使學生能有效的學習，獲得知識。因為如何使學生有效的學習，有系統組織的知識，這是所有教師最大的期望，也是最終的目標。

在一個偶然的機會中，研究者接觸到兩個小五的學生：小盈及大偉（化名）。小盈就讀雲林縣的國小，學業成績優異；大偉就讀於南投縣的國小，學業成績中等，因為這兩個學生都已經在四年級時學過四邊形的相關概念，研究者認為這兩個學生對於平行四邊形的相關概念應該不會有太大的問題，但是實際的情形，總是跟想像有一大段的差距，雖然這兩個學生數學理解能力不同，但這兩個學生對於平行四邊形的包含關係都有迷思，無法清楚了解四邊形彼此間的關係。有鑑於此，研究者期望能夠以一個簡單的教學活動，透過讓學生自己動手做的過程中，幫助學生補救平行四邊形的包含概念，使學生除了了解平行四邊形基本性質外，也能夠由具體物的操作中，加深平行四邊形概念。

二、教學活動設計

本研究期望由學生自己動手做的過程中，使其看到四邊形的具體表徵，促使學生知道平行四邊形的基本性質（對邊相等），並且透過具體平行四邊形的角度變化過程中，去發現具有同樣邊長的兩個平行四邊形，會因為內角角度的改變，而變成不同的平行四邊形，藉由讓學生看到平行四邊形內角改變的歷程中去補救學生四邊形包含概念的迷思。雖然四邊形在生活中隨處可見，但是多數學生常常遺忘必須要具備有兩雙相等的對邊，才可以構成平行四邊形。因此學生無法理解長方形及正方形都是平行四邊形。如果加強學生平行四邊形的包含概念，將可以

讓學生真正理解四邊形間的包含概念，不再混淆。整個教學活動主要的目標是使學生了解平行四邊形的基本性質為主，進而讓學生看到平行四邊形內角的變化，而發現包含關係。活動流程總共分為兩部分進行，第一部份以加強學生平行四邊形的基本概念為主，第二部份以加強學生平行四邊形的包含概念為要，進行步驟如下：

（一）1. 給予學生 6 根吸管（2 枝 6 公分、4 枝 4 公分），讓學生在這六根吸管中任意拿出 4 根吸管，排出四邊形。

2. 學生把排出的四邊形畫下來，並從這些四邊形中，找出平行四邊形。

3. 學生檢視平行四邊形的構成要素，並且能知道如何去判別平行四邊形。

4. 透過操作，讓學生試著利用這些線段，問可建構出哪些不同的平行四邊形。

（二）教師找出其中一個平行四邊形，並且調整平行四邊形的角度，讓學生看出平行四邊形內角的變化。

在整個教學活動中，研究者依據教學現場實況，對學生進行提示以及提問，並且逐步去加強學生的概念，讓學生去歸納出平行四邊形的性質，以及包含的概念。研究者期望能夠藉由這個教學活動，讓學生在動手操作以及教師提示的教學情境下，去加深學生本身的平行四邊形概念，並且明白了解平行四邊形相互包含關係。

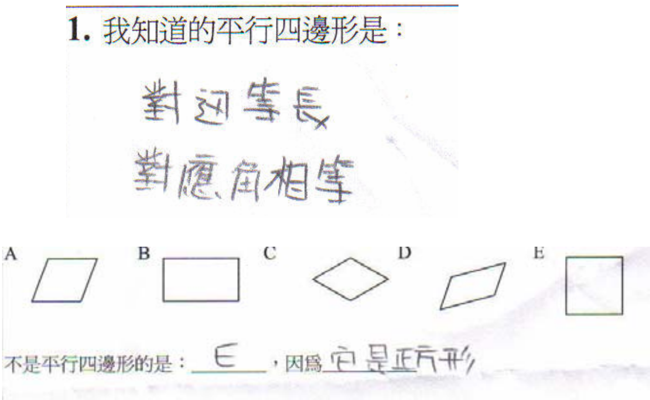
三、教學實踐結果

本研究主要目的是以加強學生平行四邊形的基本概念為主，使學生在動手操作的學習情境中，發現自己的問題，同時老師再依現場活動情況從旁提示，除了可以增強學生對於平行四邊形的基本性質概念外，並藉由平行四邊形內角轉變的過程，促使學生去發現長方形、正方形是平行四邊形的一個特例，進而使學生可以去體會出平行四邊形的包含性質。整個教學發現分述如下：

（一）教學活動進行前，學生習慣以視覺去判別平行四邊形，較少由性質去判別。

學生習慣由視覺的角度為圖形做分類或者判別，認為近似平行四邊形的圖案，就是平行四邊形，不會依據平行四邊形性質去判別圖形；或者知道平行四邊形的基本性質，卻對於正方形或長方形這種特殊圖形也會是平行四邊形的概念，仍無法理解，本研究個案小盈就是屬於這一類的情形。

如下圖（一）為小盈教學前的答題表現，由答題表現中，研究者發現小盈對於平行四邊形包含的概念不是很清楚，縱使知道平行四邊形的基本性質，但是，卻無法將平行四邊形的性質當成判別的依據。



（圖一）小盈前測

因此研究者藉由教學前的已知結果，對小盈進行訪談，希望由訪談中，找出小盈對於平行四邊形的真正迷思所在。下列為研究者對小盈訪談的部分原案：

（941224 小盈訪談原案）

研究者：什麼樣的四邊形是平行四邊形？

小盈：只要對邊相等、對角相等就是啦。**我們老師有說過**。

研究者：【指著 E】這個圖形呢？

小盈：他是正方形啊(很肯定的說)

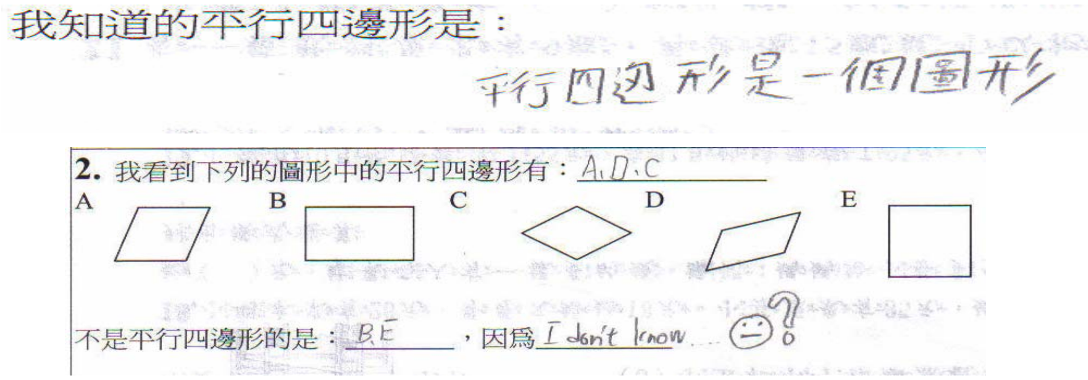
研究者：這是不是平行四邊形啊。

小盈：當然不是啊。他就是正方形啊，還能是什麼圖形嗎？**(不容質疑的口氣)**

由上述訪談中發現：對小盈而言，她確實知道平行四邊形的基本性質，並且

可以在圖（一）小盈的回答中，發現她可以看出長方形這個圖形（B）兩組對邊相等，因此由平行四邊形的性質判別出長方形亦是平行四邊形。雖然小盈了解平行四邊形的基本性質，但卻又認為正方形是特殊圖形，根本完全無法判別出正方形也是平行四邊形，由此可知小盈只是去強記老師所敘述的平行四邊形的性質，但卻無法把這個性質當成所有平行四邊形的判別依據。

另外，由另一個案大偉的教學前的表現（見圖二），研究者則是發現大偉對於平行四邊形的概念完全缺乏，只是習慣由視覺去判別，根本無法真正了解平行四邊形的基本性質，可見平行四邊形對他而言只是一個生活中的圖形而已，完全不具任何意義。



（圖二）大偉前測

研究者對大偉進行訪談以確認大偉的迷思概念以及大偉對於平行四邊形基本概念認知的多寡，並且希望能夠針對大偉真正的迷思概念做補救教學。下列為研究者對大偉訪談的部分原案：

（941228 大偉訪談原案）

研究者：爲什麼 B 和 E 不是平行四邊形？

大偉：因爲 B 是長方形、E 是正方形啊，長方形、正方形跟平行四邊形是不一樣的圖形啊。

由上述訪談中不難發現大偉對於平行四邊形的概念十分不足，他只是覺得平行四邊形是一個平面上的圖形，所以對平行四邊形的判別，只是由直覺及視覺去判斷，完全不知所以然。因此他認為長方形、正方形是特殊的四邊形，不是平

行四邊形，根本無法正確去判別哪一種圖形是平行四邊形，更無法發現包含的概念。

（二）透過以吸管拼湊平行四邊形的活動，學生可以輕易理解平行四邊形的對邊長相等的關係，對平行四邊形的基本性質概念的了解也更加的深刻

教學活動進行時，研究者從旁觀察小盈以及大偉的活動表現，並在適時給予提問及提示，讓他們兩個人在活動中可以思考，並且建構本身對於平行四邊形的正確概念。由小盈在教學前的表現，我們發現小盈對於平行四邊形的概念不夠完整，尤其是包含概念。因此小盈的補救教學還是由教學活動的「以吸管拼湊平行四邊形」的活動開始進行，目的是希望使小盈複習平行四邊形的基本概念，並且對於這個概念，能夠有強化的效果。以下為小盈跟研究者在活動進行中對談的部分原案：

（小盈原案 941225）

小盈：我如果拿的是 4446 就沒辦法拼出一個平行四邊形，所以我一定要拿一對一對的吸管。我想我可以拿 4444 和 4466（4 根 4 公分的吸管，2 根 4 公分的吸管及 2 根 6 公分的吸管）。

研究者：那如何去拼湊？

小盈：4444 比較好拼，圖形如果 4466 就比較不好拼。

研究者：爲什麼？

（小盈思考了 2 分鐘後，並且利用吸管排出四邊形，接著解釋她的想法）

小盈：如果是 4444 就只有一種拼法啊，4466 就有兩種 4466 以及 4646 排法（四邊形的邊長順序），但是 4466 這樣沒有辦法拼成平行四邊形。

在拼湊四邊形的過程中，不難發現小盈在教學前，已經了解平行四邊形的對邊相等的關係，但是卻無法把這個性質當成平行四邊形的判別依據，但是在排吸管的活動中，她會思考如何才可以拼成平行四邊形的圖形，進而強化他本身對平行四邊形的了解。由此可知，小盈藉由具體物的操作再加上研究者的提問以及自我思考歷程中，強化了平行四邊形的基本概念，使得小盈對於平行四邊形的基本

性質能夠更加的熟悉，並且可以澄清平行四邊形的迷思概念。因此對於一般不是很了解平行四邊形性質的學生而言，運用吸管拼湊圖形，可以加深本身平行四邊形的基本概念。

至於另一個案大偉，研究者在教學前發現大偉對於平行四邊形的概念並不是很清楚，大偉只是知道這是一個平面上的一種四邊形。然而經過了教學後，我們可以發現他初步具備了平行四邊形的基本概念。在研究者與大偉在活動進行中的對談中，我們可以發現在活動之初，大偉無法知道四個邊長相等的四邊形亦是平行四邊形（大偉：我覺得好難歐，我排了好久，只有找了一個平行四邊形(4646)。沒有其他的了，你準備太少的吸管啦。）因而研究者只好多準備兩根 3 公分的吸管，讓大偉可以多排一些平行四邊形並且能找出平行四邊形的性質，大偉拿到吸管之後，共排出了三組平行四邊形（4646、3636、3434），接著研究者利用大偉排出的平行四邊形，與他有了這樣的互動：

研究者：這些平行四邊形有什麼特質？

大偉：我想一下(2 分鐘後)，有兩組一樣長的邊，相對的邊要一樣長。

研究者：很好，那你幫我解決一個問題，4444 可不可以排成平行四邊形？

大偉：恩，可以分兩組邊，相對的邊一樣長，這樣可以排得出來。

從大偉的活動表現以及跟研究者的對談中，發現儘管大偉一開始對平行四邊形的性質不了解，無法知道平行四邊形對邊相等的性質，因此對於四邊等長的四邊形亦是平行四邊形的概念無法清楚了解，但是讓大偉拼湊的過程中，透過具體操作的歷程，可以幫助研究者察覺大偉的迷思概念，並且給予恰當的協助，大偉對於平行四邊形的概念，也正逐步的建構中，由（圖三）大偉後測中，我們可以看出，此時他已經了解平行四邊形對邊長相等的關係，並且知道這是平行四邊形必備的基本性質，這也是一大進步啊。

平行四邊形有什麼特色？	請說說看如何知道一個圖形是不是平行四邊形？ 你是怎麼判斷？

相對的邊一樣長	鏑相對的邊是同等長

（圖三）原案大偉後測 941231

（三）學生在實際的操作過程中，由於看見平行四邊形內角角度的改變，使其更加清楚地了解正方形以及長方形亦是平行四邊形的包含概念

學生在學習四邊形的概念中，對於包含的概念時常會有迷思概念，往往無法清楚辨別平行四邊形的包含關係，尤其以長方形及正方形這兩個圖形。學生會認為長方形及正方形是特殊四邊形，根本不是平行四邊形，最主要的原因是他們對平行四邊形的基本性質概念不夠清楚。然而在這整個補救教學活動歷程中，研究者運用使學生具體操作，讓學生先理解平行四邊形的性質，再利用吸管拼湊而成的平行四邊形，可以輕易的改變角度的性質，使學生在把平行四邊形的邊長性質確定後，由角度改變的過程中，他們就發現到正方形以及長方形都是平行四邊形，進而加強他們平行四邊形的包含概念。以小盈及大偉這兩個學生而言，他們對於包含的概念都不足，但是經由補救教學活動之後，他們可以清楚的理解到如何去判別平行四邊形。下列為研究者與小盈在活動進行中對談的部分原案：

（小盈原案 941225）

研究者：4444 真的只能拼出一種平行四邊形嗎？如果我把你的平行四邊形壓扁呢？(研究者把平行四邊形的內角改變)

小盈：那有很多種不同的平行四邊形ㄟ，只要角度不一樣(小盈一直在調整平行四邊形的內角)。我如果把角度變成 90 度？應該也會是平行四邊形吧。（思考中）

研究者：那 4 個邊都相等，4 個角都是 90 度。是什麼圖形啊？

小盈：啊！我知道了，正方形也是平行四邊形。

由上述對談中發現，研究者在活動中運用改變平行四邊形角度的策略，讓小盈看到角度的改變。由於小盈已經知道平行四邊形的基本性質，可以了解角度改變以後的平行四邊形依然是平行四邊形，因此知道了正方形亦是平行四邊形。在

這整個活動完成後，研究者發現在教學活動前，原本對於平行四邊形的包含概念不了解的小盈，經過教學活動中看到角度的改變，使得他完全了解了平行四邊形的包含概念。

至於另一個案大偉，他在教學前，對於平行四邊形性質完全不懂，更何況是包含概念更是不了解，可是在教學活動中，大偉明瞭了平行四邊形的基本性質，而在接續的教學活動中，研究者藉由大偉自己提出的疑問中，適時引導大偉去發現內角角度改變之後的平行四形依然還是平行四邊形，讓大偉看到具有同樣邊長的平行四邊形，會因為角度的改變，而呈現出許多不同的平行四邊形，當然在角度的變化過程中，也讓大偉發現正方形以及長方形都是平行四邊形，大偉也因此了解到平行四邊形的包含概念。下列為研究者與大偉在活動進行中對談的部分原案：

（大偉原案 941228）

大偉：我覺得好難歐，我排了好久，只有找了一個平行四邊形(4646)。沒有其他的了，你準備太少的吸管啦。

研究者：(拿著他排的平行四邊形調整角度)這樣是平行四邊形嗎？

大偉：恩，是啊！那我把角度變一下，就有好多平行四邊形。所以我的邊長不要改變，角度變，就可以啦。那還是一樣是平行四邊形。

大偉就開始玩了起來，但還是無法發現長方形也是平行四邊形。所以研究者幫他把平行四邊形的角度調成了 90 度。

大偉：變成了長方形ㄟ，那邊長不變，他還是一樣是平行四邊形。我剛才寫的答案好像錯了。

研究者：很好，那你幫我解決一個問題，4444 可不可以排成平行四邊形？

大偉：恩，相對的邊一樣長，這樣可以排的出來。如果角度是 90 度的也可以。剛剛有說過那這樣就變成的正方形。

研究者：那正方形是不是平行四邊形啊？

大偉：對啊，我了解啦。

研究者：那你可以跟我說什麼是平行四邊形？

大偉：相對的邊一樣長就是平行四邊形啊。

由（上述）發現，活動中<u>大偉</u>看到了平行四邊形內角的改變，使得他發現了平行四邊形的包含關係。而<u>大偉</u>從一開始對平行四邊形的概念模糊不清，到由拼湊平行四邊形的教學活動與研究者的對答過程中，以及看到平行四邊形的內角角度改變，逐漸地加深平行四邊形的相關概念。我們可以由（圖四、五）發現<u>大偉</u>對於平行四邊形的概念以及包含概念，已更加的清楚，而且迷思概念也消失了，這樣的教學活動對這位學生而言是成功有效的。

長方形▭ 是不是平行四邊形？為什麼？ 是因為長方形相對的辺都一樣長	正方形□ 是不是平行四邊形？為什麼？ 是因為正方形相對的辺都等長

（圖四）<u>大偉</u>後測原案 941231

這個活動我學到了： 讓偶更了解如何去判別是不是平行四辺形，長方形、正方形也素平行四辺形的一種

（圖五）<u>大偉</u>後測原案 941231

四、結語

對許多的學生而言，平行四邊形的包含關係令他們感到困擾、恐懼以及排斥，而研究者所找的這兩個個案，正是有這樣的問題，因此研究者為這兩位學生安排適合他們的教學活動，利用這個活動幫這兩位學生進行補救教學，由活動中加深學生的數學概念，並且希望加強學生的上課興趣。在這整個教學活動中，針對這兩位學生個別的需求，採取一對一教學。在這樣教學情境下，研究者可以真

正的看到每一位學生的迷思，並且適時的給予協助。小盈這個學生在教學活動前，原本已經具備平行四邊形的基本概念，但是對於平行四邊形的包含概念卻無法完全理解，但在教學活動中小盈看到了平行四邊形內角角度改變的歷程，讓小盈對於平行四邊形的包含概念迷思消失了，而另一個個案大偉在教學前對於平行四邊形的概念完全模糊不清，但研究者利用機會提出問題，讓大偉思考並且發現正確的答案，逐步的去加強大偉的平行四邊形基本概念，另外大偉也因為看到了平行四邊形內角角度改變的歷程，而發現到長方形及正方形都是平行四邊形，對於平行四邊形的包含概念亦更加的清楚，因為這樣的一個教學活動，讓大偉對於平行四邊形的基本概念更加清楚了解，而平形四邊形的包含概念迷思也消失了。

戲法人人會變，巧妙各有不同，一個小小的活動，也會有大大的功效產生。運用固定的線段去拼湊出多種四邊形的教學活動，在課室中很容易去施展，不需要太多的器材，就可以使學生獲得強大的學習效果。運用具體平行四邊形角度的改變，讓學生實際去體會幾何概念，比起老師在黑板上說的口沫橫飛，更加的可以加深學生的概念，使學生容易理解平行四邊形的性質。雖然平行四邊形包含概念對於多數的學生而言，比較難以理解，因為他們一直覺得正方形及長方形是特殊的四邊形，無法真正去理解彼此的關係。但是運用學生動手操作與教師的提示，可以在學生已知平行四邊形的情況下，讓學生看到角度改變，更容易加深學生對平行四邊形的了解，並且可以讓學生發現以前未曾注意到的平行四邊形的包含性質，讓學生由具體實物去了解數學的抽象概念，在心中加深印象，成為自己的知識。

五、參考文獻

吳貞祥（1973)。新數學圖形教學。國民小學教師科學教育小叢書。台北縣：台灣省國民學校教師研習會。

沈佩芳（2002)。國小高年級學童的平面幾何圖形概念之探究。未出版之碩士論文。國立台北師範學院數理教育研究所，台北。

林軍治（1992）。兒童幾何思考之 Van Hiele 水準分析研究-VHL、城鄉、年級、認知型式與幾何概念理解及錯誤概念之關係。台中：書恒。

張英傑（2001）。兒童幾何形體概念調查及診斷教學之研究（國科會專題研究計劃成果報告編號：NSC89-2511-S-152-022）。台北：中華民國行政院國家科學委員會。

謝貞秀（2002）。國小中年級學婷平面幾何圖形概念之探究。未出版之碩士論文。國立台北師範學院數理教育研究所，台北。

謝金助（2002）。國小六年級學童四邊形迷思概念的診斷研究。未出版之碩士論文。國立台北師範學院數理教育研究所，台北。

教育部（2003）。九年一貫數學學習領域課程綱要（第五版草案）。

Burger,W.F.,＆Shaughessy,F.M.（1986）Characterizing the van Hiele levels of development.Journal for Research in Mathematics Education,17（1）,31-48

Clements,D.H.& Battista,M.T.（1992）.Geometry and spatial reasoning.In Grouws,D.A.Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.420－427.

Elizabeth.W.（1995）.Facility with Plane Shapes：A Multifaceted Skill.Educational Studies in Mathematics,28（4）649－672

Mason,F.（2000）What difference does it make ？Child's views of the differences between some quadrilaterals.Educational Studies in Mathematics 42,179－196.

Wilson,P.S.（1990）.Inconsistent Ideas Related to Definitions And Examples.Focus on Learning Problems in Mathematics,31-37.

數學日記之管窺

孫旭花

香港中文大學課程與教學系博士生

一、緣起

筆者有過片斷的中學教書的經驗，曾經體會最深的是作業，發現作業較難獲得學生“學”（主要是解題情況）的資訊，學生抄作業並不少見， 因為人多（一個班 50 多人）， 作業也只是打著“×”和“√”，對錯的原因很難弄清楚，深感交流越來越流於形式，嘗試在數學作業以外，拓寬交流的廣度，深度，信度的其他載體或者形式----書信，基於這個目的，我嘗試：只要是有話和老師說，有問題問，就可以寫個“字條”給老師，我在課室掛了個信箱，定時收看。起初收到的“字條”多是提意見的，例如，“能否用粵語講課”，“能否講課大聲點”，多數問問題的。當時的總體體會最深的是，和同學的感情不斷升溫，後來也把意見收集起來，適當回饋，課堂表揚問題提得好的同學，表揚意見和建議提得好的同學，被表揚的同學，均有更好的表現，問題提得越勤，意見和建議更合理，我感到同學和我心貼得很緊，雖然最初還後悔自找麻煩，但後來使我對教學和學生的認識越來越深，也就欲罷不能，我對同學瞭解更深，教學改進也貼近“源頭”，同學也進步很快，課堂也彷彿注入了特別的活力，看對自己教學的“回饋字條”活動頗深體會。

後來也發現美國課堂也有類似數學交流的媒介（Stewart & Chance, 1995；Miller, 1992)，名稱有時稱為數學日記（mathematics journal）有時稱為數學寫作 （mathematics writing），曾撰文介紹（見孫旭花，1997,）。類似研究

通訊作者：孫旭花sunxuhua@cuhk.edu.hk

發現數學寫作的有效性在於增加回饋管道，補救和輔助教學（劉祥通、黃國勳，2005），對學生認知和對教師教學方面均有正面效能（林姿飴、楊德清，2005）。

本文的數學日記和劉祥通、黃國勳（2005）所介紹的數學寫作活動的類型與實例（解釋寫作、偵錯寫作、編擬文字題寫作、總結式寫作）稍有不同，這裏介紹的"另一種版本"的數學寫作-----探詢型數學日記和反思型數學日記，是筆者借鑒美國數學教育中的數學日記及其操作，嘗試適合中國國情的數學日記實踐探索，更為"本土化"的兩類數學寫作。根據"內容"側重點，分為探詢型數學日記和反思型數學日記兩個類型，因為試驗[1]的時間短（1 個學期），加上沒有經驗借鑒，我們僅僅獲得操作兩個類型數學日記的幾點膚淺體會，以下分別介紹。

二、"反思型數學日記" 之管窺

"反思型數學日記"是為提高學生對數學學習計畫、檢查、補救的自我反思目的數學日記。為達到加強學生後設認知的目的。比林姿飴、楊德清（2005）數學寫作更具體一些，更針對後設認知的目的。

1、"反思型數學日記" 實施的理論依據

"反思型數學日記"是為提高學生對數學學習計畫、檢查、補救的自我反思實施的數學日記的形式。

為達到加強學生後設認知結構的目的，"反思型數學日記"同時兼顧後設認知結構的後設認知知識、後設認知體驗、後設認知監控的各個方面（林崇德和辛濤，1996）。即：

[1]被試選自於廣州三十四中初二（1）班，（5）班，共 32 個同學

- 後設認知結構
  - 後設認知知識
    - 任務 A
    - 自我 B
    - 策略 C
  - 後設認知體驗
    - 交互作用 D
    - 認知體驗 E
    - 情感體驗 F
  - 後設認知監控
    - 制訂計畫 G
    - 實際控制 H
    - 檢查結果 I
    - 採取補救措施 J

2、“反思型數學日記”的內容設計

“反思型數學日記”的內容設計與具體操作步驟如下

（1） 訓練學生對整節課的反思習慣。

課堂留下 5 分鐘，要求同學合上課本，對整節課內容進行簡要小結，小結內容包括：

1. 這節課我學到什麼，總結為一句話（包含後設認知結構 B，E，I）
2. 這節課還有什麼不懂，哪里更感興趣？（包含後設認知結構 A，G，H）
3. 不懂的地方何時，如何弄清楚（包含後設認知結構 G，H，J）
4. 你對老師的建議（師生交流內容，對老師回饋）

該設計的目標是使學生越認知層面，對本節自我數學認知的再認知。使其每節課都習慣於反思，檢查自我數學認知結構，清楚進一步學習任務，自行進行學習計畫，補救薄弱環節。並最終形成自我管理、自我教育的學習策略。即逐步形成反思--檢查--計畫--補救--再反思--的學習習慣。

（2）培養對“錯題”“不會題”的反思與領悟

“錯題”、“不會題”，往往是認知結構的斷鏈處，影響後繼課的學習，又是提高後設認知能力的最佳契機。我們要求在“錯題”、“不會題”旁寫出自己思路被卡的情況並分析成因，及從中得到的經驗和體會，這既是對解題思路補充的反思，是後設認知的落實，又是幫助學生裝跨越學習高原的一個視窗，對自我思維進行“思維”，實施思維昇華的“機制”。具體分三步進行：

1、怎樣走進“死胡同”（包含後設認知結構Ａ，Ｂ，Ｅ，Ｉ）

讓學生回顧自己的思路方法，推敲每步的邏輯依據。

2、為什麼會走進“死胡同”（包含後設認知結構Ｃ，Ｅ，Ｆ，Ｇ）

讓學生分析走進“死胡同”原因

3、領悟了什麼（包含後設認知結構D,H,G）

思路對比，豁然貫通某個關節點，達到領悟階級，跨越學習高原。

該設計的目的是讓學生反思自我思維癥結，認知缺陷，瞭解自我認知體驗，自我認知監控，總結自我思維經驗。

（3）培養學生對每一章的總結反思習慣

設計如下：

1.列出本章的知識網路圖（包含後設認知結構Ａ）

2. 把本章做錯的作業，練習，測試題小結（包含後設認知結構 B、G、I、H）

3. 針對本章自己的錯題，出一份試題解答（包含後設認知結構 C，H，J）

4. 制定進一步復習的計畫 （包含後設認知結構 G）

本設計讓學生在學全一章後，在自我數學認知建構中瞭解自我數學認知結構，瞭解自我數學認知結構的薄弱點（即斷鏈處），自我計畫再建構，在出題，解題，思維互逆過程的思維思路連通中，“把握”自我數學認知結構的建構，在思維元形成“群”狀結構的思維中，對自我思維進行再思維。

（4）自我學習策略的培養

設計如下（每週一次）：

1. 你認為目前學習方法是否有效？為什麼？（包含後設認知結構 B,C,E,I ）

2. 計畫是否清楚？（包含後設認知結構 D,E,H ）

3. 如何改變？（包含後設認知結構 C,H,J ）

4. 如何檢查計畫，何時檢查？（包含後設認知結構 C,H,I,J）

該設計是促進學生對自我學習方法的反思，學習過程學習結果再認識，總結穩定自我學習風格，清楚進一步學習任務與策略，即瞭解自我學習策略的局限性和有效性，即對自我學習的再認知。

3、初步發現

我們發現反思型數學日記的小實驗效果非常明顯（見孫旭花，2002）。實施反思型數學日記實驗組與對照組的差異十分顯著，實驗組幾何比代數差異更為顯

著，（因初二代數學習需要更多的基礎知識支援），而幾何幾乎是立竿見影。實驗組自我監視水準比對照組有所提高，更有“自知之明”，對自我學習更有自我意識。（實驗仍存在一定的局限性。例被試偏少，被試一般為實習生的輔導生，實驗時間短短 6 周）。

我的學生（師範生）“反思型數學日記”的訓練推廣到家教輔導，事實證明更有效，例某個案例，廣州南武中學初三學生，經過一年的“反思型數學日記”的訓練，使其奇跡般突破平時成績極限（80 分左右），以中考數學 128 分，考入省實驗中學。（其他各科均有不同程度的進步）。當然“反思型數學日記”需要大量、更細緻的研究。

探詢型數學日記也有特別之處，下麵介紹操作探詢型數學日記的幾點體會。

三、「探詢型數學日記」之管窺

這裏“數學日記”（mathematics journal ）是指讓學生以日記的形式，記下他們自己對每次數學教學內容理解,評價及意見包括自己在數學活動中的真實心態和想法。探詢型數學日記則是針對“探詢”（Inquiry），是通過讓學生提出數學問題，或對數學教學內容、教學方式的探詢，培養數學問題意識，整合數學教與學矛盾的數學日記。

1、探詢型數學日記內容類別及基本目的

內容類別	**設計的基本目的**
提出數學問題	提供學“問”的機制
教學方式的探詢	整合數學教與學矛盾的窗口
教學內容的探詢	提供認知、創新的突破口

探詢型數學日記具體操作如下：每次課後作業的附錄，分三個欄目寫感受。包括根據學習內容，提出有價值的問題，對數學教學內容、教學方式的探詢和建議，我們主要以自願的形式參加（主要為了避免學生應付了事）。

探詢型數學日記		
根據這節課所學，你能否提出有價值的問題？	你對這節課所學數學內容的疑問？為什麼？	你是否喜歡這節課，為什麼？你對教學方法的疑問和建議？

以下是我們獲得的初步體會。

2、初步體會：

（1）“探詢型數學日記”中的“深層資訊”

教師通過“探詢型數學日記”，更容易發現學生數學認知結構“斷鏈處”，從而通過解疑使之彌補。例某內向的後進生在探詢型數學日記中提出 *“$a^2+2ab+b^2$ 有個公因數 2，原式可分解為 2(a+ab+b)”，“（-2）加（-4）負負得正應等於正 6 而不是負 6”等“怪”問題*，從而暴露他認知結構中“指數、係數不分”“乘法法則用到加法中”這一平時作業難以發現的問題（的確這些錯誤，遠出乎我的意料，使我看見在課堂和作業所“看不見的東西”！）。

的確，數學解題是盲目、無目標，可以超越理解與意義建構，湊出看似合理答案的過程，“結構的”“系統的”“整體的”基於本土文化的數學態度、價值觀、

思維範式、問題解決策略、自我調適手段的數學意義的觀念系統，而教學卻常常忽視“源頭”。

儘管作業也可同樣獲得這些學生“學”（主要是解題情況）的資訊，但因為作業極少包含學生的解釋，教師容易發現答案的對錯，但是對錯背後複雜的原因很難弄清楚，而這又恰恰是教師專業素養最重要的一環，無疑“對症下藥”，對學生理解的洞察，是教學設計的基礎，教學經驗和教學知識積累的重要環節，然而反思教師的日常教學，除了作業和考試外，教師又有多少機會，深入瞭解學生“原汁原味”的數學思考，探詢型數學日記無疑提供這一教師專業發展的契機。

概括而言，“探詢型數學日記”以下四方面的收穫。1、更深層地理解學生意義觀念體系背景和第一手經驗。2、捕捉自己尚未意識到的資料。3、捕捉學生尚未意識到的資訊。4、瞭解學生數學建構的主觀過程, 再現學生看待數學,數學思維的全部視角和方式。任何數學行為表面上是單獨的、分離的，但事實上，任何數學行動都是一個行動系統中元素，任何行動發生在一定處境之下，受觀念系統的支配，隨自己數學需要傾向（need-disposition）而發生結構變化,是各種數學行為的“整合性組織”。從這個角度，無疑“探詢型數學日記”提供較比作業“深層”的資訊空間。

（2）學生對“探詢型數學日記的點評”的洞察：先“自我評價”，後“任務評價”。

學生通過“探詢型數學日記的點評”，對自我重新評價，進一步激發對數學的興趣，自信心的提升。

例如，某學生在學完二等分線段，即作垂直平分線，及四等分線段後在探詢型數學日記中，提出*能否將任何線段三等分線段*，筆者告訴他該問題在數學史上的價值，並指出這是個了不起的問題，該生興奮得落下眼淚。後來該生懷著巨大的興趣，探索*三等分線段，並閱讀大量*數學史資料，激發對數學史的興趣，我們發現這個學生特別感興趣幾何作圖問題。

我們發現學生面對數學問題，往往不是任務評價，而是自我評價。（學生面對“這是個了不起的問題”的評價語，對於數學而言，這似乎是多餘的廢話，但對於學生而言，這似乎是多麼正面的自我肯定！），數學學習過程不僅僅單純的認識過程，而是數學的意義與價值形成與凝聚的過程，是數學的情感體驗、發展過程，數學理解實現過程，學習自信心的不斷提升過程。或許這些是數學“雙基”以外對學生生命發展、人格形成更為重要的基礎，也是基礎教育應關注的基礎的“基礎”。

(3) 探詢型數學日記的後勁：學生的“問”，帶動教師“想”的“教學相長”空間

探詢型數學日記，很多時候，會收到學習困擾與迷思概念等資訊，教師對情緒方面的回饋意見需要更多的認同和鼓勵，迷思概念方面需要跟進瞭解學生的深入想法，從而澄清概念，同時這種深入訪談，也確實為教學相長提供發展空間。例如

某生在探詢型數學日記中提出，x^6-1 *的因式分解結果和我的為什麼不同？*

老師的解法：

$x^6-1=(x^2)^3-1$

$=(x^2-1)(x^4+x^2+1)$

$=(x+1)(x-1)(x^4+x^2+1)$

學生的解法：

$x^6-1=(x^3)^2-1$

$=(x^3+1)(x^3-1)$

$=(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)$

經過師生共同研討,發現x^4+x^2+1通過添項x^2、再減去x^2可獲得與$(x^2-x+1)(x^2+x+1)$一致的答案。師生共同發現了一個新的因式分解的方法,除了學生感到數學解題方法多樣與統一外，教師也拓寬了視野，達到教學相長的境界。

根據探詢型數學日記所發現的迷思概念，和錯誤思路，很自然為課堂改錯，糾錯提供最好的素材，“有的放矢”地彌補教學漏洞，有效提升教學效果提供可能。某種意義上，我們常常重視學生的發展，而忽視教師的發展，往往不能更遠的，以學生的發展帶動教師發展，進一步以教師的發展帶動學生發展互動迴圈空間，某種意義上，這只是個教育理想，但探詢型數學日記也讓我們看到這個理想的現實性和可能性。

(4) 探詢型數學日記的情感效應：先“親其師”，後“信其道”。

某生在探詢型數學日記中寫道：*數學課太枯燥無味，能否增加數學題比賽，課堂多些氣氛*。我們根據這個建議，在練習時開展男女對比，小組競賽，筆者切身體會到這個建議調控課堂氣氛和課堂管理技巧有所參考價值。

很多時候，我們認為數學是理科，講道理，講邏輯，講演繹，講證明，忽視情感部分,而事實上,學生是人,不少學生先喜歡數學老師,才喜歡數學,先“親其師”，後“信其道”。而不是先喜歡數學，才喜歡數學老師,即所謂的 先“信其道”，後“親其師”。教學上，很多教師對學生無精打采，漠不關心,卻希望學生喜歡數學課的例子也不少見。

當然，對教師而言，探詢型數學日記無疑給自己添了很多批改閱讀的負擔，而且時時挑戰自己的教學和數學解題能力，某種意義上，實在是自找麻煩，筆者的經驗證實“探詢型數學日記”，不僅為學生也為教師自己，提供了探詢的視窗，不失為良策之一。

四、再反思

班級授課本是機械化社會的產物，教師工作被某種程度上的社會化和機械化也合乎其理，但是看到學生盲從，隨波逐流，不懂裝懂，有問題不問，有“書雲亦雲”“師雲亦雲”“人云亦云”的傾向，學生對數學知識很少“自己的理解”、“自己的思考” “自己的體驗”，才萌發“探詢型數學日記”的想法。後來慢慢發現原來我們還是可以不必坐等待斃！“數學日記”也還可以在機械化的流水線找到“人性化的切入點”，進一步發展出一種心靈期盼的默契，“數學日記”仍有其現實意義，慢慢發展出“親其師，信其道”的和諧，原來教與學都其內在的平衡。 一般说来，因材施教是教育成功的必有之路，而班級授課的最大弊端是難以因材施教，這裏我們看到，數學日記對班級授課與因材施教矛盾整合、教與學矛盾整合、認知與情感矛盾整合的提供一個可行的切入點，數學日記作為數學交流的工具、評價的工具、教學的工具、研究的工具，都有特別的視角，也必將成為數學教育文化的一股特別力量。

後記

本文特別寫給對數學教學失望的教師。我自己捫心自問，為什麼好希望寫出這篇文稿。其實這裏埋藏我一段重要的心路歷程，一段令我心好痛的一段經歷，

後來發現，這是所有的新入職，從事數學教學的教師，都可能會遇到的困惑：我滿腔熱情懷著一個夢，來到三尺講臺，面對改不完的作業，改不完的考卷，喧鬧的教室，快速行進的課程，我有說不出來的難過。和我理想中的教學，相差好遠，現實數學教學是的的確確的流水線：初始我感到手足無措：快速行進備課，快速行進評改，我潛意識感到我失去了什麼？失去了什麼？我來不及想清楚，我只是機械地教，機械地改作業，心裏覺得有莫名的失落！教書曾是我一度的夢想，但我教了幾個月時，確實有夢“破碎”的感覺，覺得自己不是“靈魂的工程師”，不僅教不透“公式” ，也更教不會解題，“學生不會就是不會”，我是起不了多少作用的“教書匠”，心裏感到很失敗，但數學日記使我又重燃教學“激情”，重新找回滿足感的地方，重新找回教與學都其內在的平衡的時刻，數學日記使我感到“學生是有靈有肉”的“小可愛”，有思想有熱情的“小精靈”。在教學上，不必害怕，不必驚慌，不要放棄，願與大家共勉。

參考文獻

Stewart, C.& Chance, L（1995）Journal Writing and Professional Thinking Standards ,*Mathematics Teacher*，1995 ,Feb. p. 182—189。

Miller L. D.,(1992) Teacher Benefits from Using Impromptu Writing Prompts in Algebra Classes *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 23, No. 4 (Jul., 1992), pp. 329-340

孫旭花（1997）。 美國數學教育中的數學日記操作兩例。《 數學教師》，1 期，39—42 頁 。

孫旭花 （2000）。質疑，認知、創新的突破口。《 數學教學》，2 期，27 頁—29 頁。

孫旭花、袁和姝、蒲建然和周振蜀（2002）。利用反思數學日記加強數學元認知結構實驗研究 刊於《評核與數學教育——數學課程全面檢討之後又如何？研討會跟進論文集》（黃毅英編）。

劉祥通、黃國勳（2005） 數學寫作活動的類型與實例- 台灣數學教師（電子）期刊創刊號

林姿飴、楊德清（2005）淺談數學寫作 台灣數學教師（電子）期刊創刊號

林崇德　辛濤（1996）智力的培養　杭州：浙江人民出版社 129 頁—134 頁

Email: sunxuhua@cuhk.edu.hk

學生數學認識信念：一個值得關注的領域

唐劍嵐

廣西師範大學數科院

摘 要

基於最近西方關於學生數學認識信念的研究成果,探討了學生數學認識信念對數學學習的情感體驗、行為參與、認知過程以及數學學業成績的影響。分析了社會文化傳統、學校教學環境以及學生自身的數學實踐活動的經驗等因素對學生數學認識信念形成与发展的影響。研究指出，研究學生數學認識信念是認識與理解學生數學學習過程的關鍵成分之一。這是一個值得關注的領域。

關鍵字: 數學；認識信念；領域

壹、引言

當我們碰到學生有“我不是學數學的料，花時間學，也是白搭，還不如學別的”、“數學對將來的生活或職業沒有什麼用”、“在數學上獲得好成績就得做大量練習題”、“學校裏學習的數學主要是為了考試，與日常生活沒有多大的聯繫”等想法時，如何解釋學生的這些想法，以及如何解決這些想法帶來的學習問題呢？這在認知領域或情感領域是難以找到答案的。這是屬於認識論或認識信念的問題。學生的這些對知識和知識認識過程的素樸看法或信念，深刻地影響了學生數學學習過程；同時，學生的數學學習過程反過來又影響了其認識信念的形成與發展。本文試探學生數學認識信念與數學學習的關係，指出研究學生數學認識信念是認識與理解學生數學學習過程的關鍵成分之一，這是一個值得關注的領域。

貳、認識信念與數學認識信念的內涵與結構

學生認識信念的研究是屬於個體認識論（personal epistemology）研究範疇。個體認識論研究致力於回答兩個基本問題:個體對知識(knowledge)本質的認識是怎

通訊作者：唐劍嵐 tjlwxt@126.com

樣的？個體對知識是如何獲得的認識，即認識過程(knowing)的認識是怎樣的(Hofer & Pintrich,1997）？界定學生的數學認識信念（epistemic beliefs about mathematics）,見仁見智。教育心理學領域裏的研究者主要基於量的研究方法，透過操作化（operationalization）定義，研究學生認識信念系統的多維結構。最有代表性的如 Schommer(2004)的嵌入系統模型(embedded systemic model)。Schommer 認為學生認識信念系統包括兩大子系統：關於知識的信念系統和關於學習的信念系統，而且各個子系統具有多個維度，各個信念維度或多或少是相互獨立的。關於知識的信念系統包括知識的來源維度（從知識來自權威、課本或教師到知識來自自己的經驗和推理）、知識的確定性維度（從知識是永遠不變的到知識是不斷發展變化的）、知識的結構性維度（從知識是孤立的、片斷性的事實、概念等到知識與其他知識和生活實際沒有內在聯繫）、知識的判斷維度（從憑主觀觀察、憑感覺或基於權威的判斷到運用一定探究規律或專門知識的評價進行判斷）。學習的信念系統主要包括學習能力維度（從先天註定的到後天可以改善的）、學習速度維度（從學習是很快就完成的到學習是循序漸進的）。

數學教育研究者主要基於質的研究方法，探討了學生數學認識信念的概念化（conceptualization）定義以及成分。研究者主要運用數學信念(mathematical 或 mathematics belief）的名稱來涵蓋學生的數學認識信念。最典型的代表是 Schoenfeld（1989）的研究。Schoenfeld 認為學生的數學認識信念是指學生對數學以及數學任務採用何種方法解決的認識。學生數學認識信念成分由情感與認知相互交叉部分組成，主要包括三部分：⑴學生對自我與數學學習、問題解決關係的看法，譬如普通學生要想理解數學沒指望，他們最多只能背些數學知識，而不是理解它們，同時他們只能機械地運用自己學過的數學知識；⑵學生對數學本質、數學學習、問題解決的看法，譬如數學問題只有一個正確答案；⑶學生對數學活動中的社會情境的看法，譬如學校學的數學與現實世界沒有或很少有聯繫。Muis（2004）綜述了教育心理學和數學教育領域關於數學認識信念的研究，指出人們討論數學認識信念的成分基本上對學生學習是無效的，即數學認識信念阻礙了學生的數學學習。事實上，信念可能促進了學生的數學學習，也就是說學生的認識信念是一個從無效到有效的

連續體，所以當談及學生數學認識信念時，主要指影響學生數學學習過程和結果的數學認識信念系統。這個信念系統的成分包括學生對數學知識本質、數學知識確認和數學知識來源的信念以及對數學學習的信念。

教育心理學領域裏關於數學認識信念的界定這為研究學生數學認識信念系統提供可操作性的思路，數學教育領域的研究揭示了學生數學認識信念系統的實質性內容。因為研究學生信念系統的目的不僅在於揭示學生信念的成分及其內在結構，厘清該成分和結構中各種維度的發展規律，另一個更重要的目的是要探索學生信念系統與其他心理因素的關係，譬如與情感領域、認知領域的關係。所以各種理論與方法相互滲透、共同支撐，才能真正建構學生認識信念的理論體系，從而真正彰顯其教育功能。

參、學生數學認識信念對數學學習的影響

學生數學認識信念深藏在他們的行為表現、認知過程、情感體驗的背後，像一隻無形的手，指引著學生數學學習過程，深刻影響著數學學習結果。歸納學生數學認識信念對其數學學習的影響主要有四個方面：對數學學習情感體驗、行為參與、認知過程以及數學學業成績的影響。

一、學生數學認識信念對數學學習情感體驗的影響

情感貫穿於學習過程的始終，每個學生學習總帶著自己的某種情感進行學習，在學習過程中又伴隨著情感體驗。學生數學學習的情感體驗是一個連續體，常常表現從為積極的情感到遵守規範的情感再到消極的情感。積極情感主要表現在數學學習的興趣感、快樂感、成就感等。遵守規範的情感主要表現在數學學習的順從感等。消極的情感主要表現在數學學習的厭倦感、焦慮感、挫敗感等。學生的數學認識信念對學生的數學情感體驗的各個方面都有一定的影響。相信“學習數學可以使人們變得更聰明”的學生可能對數學學習充滿強烈的愛好和興趣，他們經常在解答數學題中體驗快樂感與成就感。相信“數學知識來自權威、課本或教師”的學生，即使他們對某個數學問題解決的方法對了，還是傾向於順從或接受成績好的學生或老師

或課本上的方法，而不相信自己的“真理性”。認為“數學在日常生活中沒有多大價值，學習數學是為了考試”的學生，他們可能願意多做書本的數學問題或考試試題，而不願付出努力去關心生活中的數學問題。相信“數學學習的能力是後天可以改善的，透過努力是可以在數學上獲得好成績”的學生對數學學習可能滿懷信心，而正確對待數學學習過程出現的焦慮感、挫敗感。

當然，學生的信念與情感不總是有“因果關係”，但總會有一定的相關關係，而且主要是一種相互作用與相互影響，以至對學生數學學習產生影響。Eccles 等人（1993）研究表明，小學生剛開始上學時，認為學習數學是很重要的事情，對數字和數學是很感興趣的，對學好數學充滿信心和樂趣。但到了小學結束與中學開始時，很多學生已經改變對數學的這種看法。他們屢屢感到數學學習的挫敗，從而逐漸產生了一種害怕數學的情感，而且這種情感可能會持續一生。也有很多學生認為學好數學是很重要的，然而他們不明白為什麼。他們看不到或很少看到數學的用處，感覺學數學好像是一種“高風險”的投資，從而逐漸形成一種“數學焦慮”，這導致他們對學業失去信心，不願付出努力。同樣，Schommer 等人（2005）研究指出，如果中學生持有數學對他們將來的生活或職業沒有用的信念，他們是不願努力和花時間去學習數學的。

二、學生數學認識信念對數學學習的行為參與的影響

學生數學學習的行為參與主要指學生在數學學習過程的外現行為，譬如堅持學習、逃避學習、參加討論、高度集中、選擇挑戰性問題、努力程度強且持續性高、鑽研、付出時間等。學生的數學認識信念非常強烈地影響其在數學學習活動中的行為參與。Schoenfeld（1989）研究指出，有效的信念通常自覺或不自覺地影響學生數學活動的行為參與，但無效信念對學生數學學習活動的行為參與具有強有力的並且通常產生消極影響，不利於他面對新的和富有挑戰性的問題時採用多種視角去思考並堅持到底。譬如，相信“學習數學是個人獨立學習”的學生，他們在數學合作學習中是很勉強地參與討論的；認為“學好數學需要做大量練習題”的學生，他們會花大量時間做大量的練習題。如果學生相信數學問題解決是快速完成的事情，他們很少有對數學問題解決進行諸如“檢查、省思”的後設認知行為；如果學生相信

知識來自課本和教師的學生,他們很少發生具有建構意義的學習行為(Muis,2004)。

信念與行為也似乎不是誰左右誰的事情,更多的是相互影響,相互作用。良好的、有效的行為極大的促進無效信念的轉變。有時人們寧願“相信自己做的事情”而不去“做自己相信的事情”,這意味著信念不是固定不變的,也經常基於行為而改變。譬如,經常省思自己的數學學習的學生,會認為“學好數學需要不斷省思”是一個真理。這事實上,也可歸為後設認知活動的結果。經歷社會調查、存款等社會性實踐活動的學生,也許會產生“數學不只是課本上的符號,而與社會生活息息相關”的信念。

三、學生數學認識信念對數學學習的認知過程的影響

數學學習中認知過程包括感知、記憶、思維、問題解決、運用學習策略方法等。Muis(2004)的研究表明,學生的數學認識信念直接或間接地影響了數學認知的理解、問題解決過程、遷移以及學習策略方法的選擇。比較成熟或有效的數學認識信念指引學生有效的數學認知,不成熟或無效的數學認識信念卻妨礙學生的數學認知過程。Hiebert 等人(1992)研究指出,如果學生持有“數學是一個由多種表徵組成,且各種表徵是相互聯繫的有機體”的信念,他們就會採用多種表徵(如符號、圖形、語言)來增進數學理解,當然這種理解反過來促進學生更加認為數學內部與外部是相互聯繫的整體。Muis(2004)綜述指出,學生越是持有“知識是孤立的、片斷性的事實、概念”等信念,那他們在數學問題解決時,就越可能不發生遷移,因為遷移是一種相互聯繫的心理過程。學生越是持有“知識是永遠不變的”信念,他們就越可能認為數學問題解決只有唯一的正確答案。學生越是持有“學習是快速完成的”信念,他們就可能在數學問題解決時付出越少的時間和努力。學生越是持有“後天的努力可以改善解決問題能力”的信念,當他們面對困難時,他們就越可能運用多種學習策略去克服,而不是簡單放棄。Lerch(2004)研究指出,如果學生持有“某類問題的解答依賴於相應的策略”的信念,當他們碰上陌生問題時,他們傾向持續運用不成功的策略解決問題,而不能監控自己走出誤區。

比較對其他認知過程,學生的數學認識信念對學生如何學習數學,即學習策略方法的選擇有更深遠的影響。一般的,學生的學習策略方法分為為淺層次、深層次和

依賴策略三個變數。淺層次策略主要指依靠記憶、多練習、多測驗的等比較機械的方法。相信“數學知識是孤立的、片斷性的事實、概念、公式等堆積物”的學生，經常持有“背出基本的公式和方法是最重要的，對於數學學習來說最重要的是練習，只有反復練習才能學好數學，沒有練習就沒有數學”等信念。Schommer 等人（1992）研究顯示，學生越是具有“數學知識是孤立的、片斷性的事實、概念”的信念，就越可能採用與此一致的策略，他們就越可能集中注意力來記住這些事實，當他們能夠背誦這些事實後，就可能認為自己懂了，事實上，他們並沒有理解數學。深層次策略主要指依靠有意義的理解學習和進行具有後設認知意義的學習，譬如對學習內容進行歸納、總結與省思，對問題解決進行一題多解和多題一解，採用“概念圖”學習與記憶等。相信數學知識是相互聯繫的，相信自己能夠學好數學的學生，大都選擇深層次的學習策略與方法。依賴的策略主要指學習數學依賴家長、老師和課本的方法，經常表現為“學生一有問題，就找家長；老師怎麼教，我怎麼學”等。相信“知識來自課本和教師”的學生，他們大都選擇依賴的策略。當然，在課堂教學的情境下，選擇依賴策略學習的學生主要體現為依賴教師，如果教師在課堂中注意學習策略方法的教學，這種學生的學習策略方法也許會得到改善。

四、學生數學認識信念對數學學習成績的影響

關於學生的數學認識信念對數學學習成績的影響，多數研究者認為這是一種間接的影響，主要透過影響學生的情感體驗、行為參與和認知過程等而影響了學習成績（Muis,2004）。Mason（2003）的研究表明，關於數學學習能力的信念和關於數學學習速度的信念能夠預測學生的學業成績。譬如，如果學生越持有“只要努力，就會提高數學能力”的信念，他們的數學成績就越好[14]。Muis（2004）綜述研究顯示，學生的數學認識信念對數學學習成績有顯著的預測效應。譬如，如果學生越是持有“知識是孤立的、片斷性的事實、概念”和“知識是永遠不變的”信念，他們的數學成績就越糟。如果學生持有“數學知識相對論或建構觀”的信念，他們的數學成績比較那些持有“數學知識二元論或接受觀”信念的學生成績要好。

肆、影響學生數學認識信念形成與發展的因素

從上可以發現，學生的數學認識信念對學習主要產生消極影響，即學生所持有的信念對促進學習是無效的。為什麼會出現這種情況，影響學生認識信念的形成與發展究竟有哪些因素？學生的數學認識信念不是與生俱來的，形成和發展為成熟而有效的認識信念不是自發的。歸納起來，影響學生數學認識信念的形成和發展主要有三個因素，即社會文化傳統、學校教學環境以及學生自身的數學實踐活動的經驗。

一、社會文化傳統對學生數學認識信念形成與發展的影響

一定時間和地域內積澱的社會文化傳統必然烙印學生的數學認識信念。這在很大程度上應被看成是一種文化繼承行為。Schoenfeld（1992）研究指出，東方社會(特別是中、日等國)對於數學學習普遍的高期望；而相對立，美國公眾普遍認為，數學學習方面成績的差異主要應歸結於先天的能力，而非後天的努力或是否有學習機會。譬如，美國家長比日本人更相信這個觀點。那些相信“要麼你能行，要麼你不行”的家長與那些“如果你努力去嘗試，你就能成功”的家長相比，前者更鼓勵自己的孩子去努力學習數學。這些文化深刻烙印學生的數學認識信念，中國的學生認為數學學習必須刻苦，而美國學生卻不以為然。這些深深紮根於學生頭腦的文化信念的“基因”，如果數學教師在教學中不加以糾正或強化，而聽任由之，對學生形成有效的數學認識信念是沒有幫助的。

二、學校教學環境對學生數學認識信念形成與發展的影響

對學生數學認識信念影響最深遠的莫過於教師與學生共處的教學環境（Muis,2004）。首先，教師自身的數學認識信念潛移默化地感染了學生。因為教師自身的數學認識信念決定了他所創設的教學環境的性質，這一環境反過來影響了學生對數學的認識，而且教師所持有的信念往往會影響到幾代教師，於是在很大程度上，便形成了教學認識上的“惡性循環”。譬如，教師如果持有“命題的正確性是人們早已知道的，因此，證明僅用於驗證已知為真的知識，數學證明與數學發現的過程毫無關係”的信念，那麼他也許在教數學證明的過程中只關注證明的演繹，而

忽視證明過程的猜想、模擬等合情推理。這種教學不僅會使學生形成“數學證明只不過是用來檢驗教師或課本提出的命題”的信念，甚至對證明產生厭倦等情感（Schoenfeld,1992）。其次，教師的教學過程、方法等深刻了影響了學生數學認識信念。如果教師經常基於建構主義的教學方法進行教學，學生對數學的信念主要表現為：數學知識不是簡單事實堆積的，而是相互之間存在密切聯繫的；生活中數學無處不在；基於同伴的合作學習數學是有效的方法等（Muis,2004）。很多研究表明，如果在數學課堂鼓勵學習共同體的社會協商、對話、小組合作學習，與傳統教學環境相比，這種教學環境不僅促進了學生信念轉變得有效，發展了學生的信念，而且學生信念對數學常規題和非常規題的解答以及數學學習成績的影響變得更加有效（Muis,2004，Francisco,2005）。但有時，教師的教學行為與自己的信念存在潛意識的不一致，教師覺得自己的教學策略方法是一種更建構性的，但實際情況可能事與願違。Schoenfeld（1998）研究表明，在高中數學課上，有一些教師願望很好，要求學生去理解和思考數學，但實際的課堂教學方法卻強化和鼓勵了記憶，不但沒有促進學生有效信念的形成，反而強化了無效的數學信念，譬如機械記憶問題解決的方法步驟，而不去理解和運用解決問題的方法。這進一步說明教學環境對學生信念形成與發展的影響。

三、學生自身的數學實踐活動對其信念形成與發展的影響

“實踐出真知”。學生自身的數學實踐活動的經驗對自身的數學認識活動具有直接的影響，從而產生自認為真正的、可靠的“信念”。學生個人的經驗常常使學生產生“數學是一門學科，而非一門科學”的信念（Schoenfeld,1992）。很多學生相信“學習數學需要做大量的練習題，因為熟能生巧”，這不僅僅受古訓的影響，更多的是自己親歷了做大量的數學題而體驗得出的結果。那麼為什麼很少人相信“熟能生笨”呢？因為自身的數學學習活動中難以體驗到“熟能生笨”的結果。學生自身的數學實踐活動主要有三大類，即行為性實踐、認知性實踐、社會性實踐。行為性實踐主要是學生自己運用觀察、操作、實驗等行為完成數學活動的實踐。學生可能會透過行為性實踐，而獲得具有直接經驗意義的數學認識信念。譬如，經常運用「動態幾何繪圖板」學習數學的學生，也許會認為“數學與物理、化學一樣，

也是可以透過做實驗來學習的”的信念。認知性實踐主要是學生運用記憶、感知、思維、問題解決等完成數學活動的實踐。無疑，學生進行認知性實踐時也捲入了自身的認知活動，透過認知性實踐，學生可能會獲得大量直接體驗的認識信念。譬如，試圖透過記憶數學方式學習數學的學生，會感慨數學知識是難以機械記憶的，從而形成數學需要理解和做題的信念。經常省思自己的數學學習的學生，會認為“學好數學需要不斷省思”是一個真理，這事實上，也可歸為後設認知活動的結果。在課堂上，積極主動地進行建構性學習的學生很少認為數學是孤立、片段的事實（Muis, 2004）。參與社會性實踐是一種綜合性實踐活動，這裏主要指學生在社會實踐中的數學應用活動。學生透過社會調查、銀行存款等社會性實踐，也許會產生“數學不只是課本上的符號，而與社會生活息息相關”的信念。

伍、 結語

在數學教育研究領域裏，隨著對數學學習的影響因素研究的深入，研究者一致認為：如果要加強對數學學習本質的理解，我們即要去研究認知因素，又要深入地去探索學生的情感、信念、價值觀等。這些因素常常以一種“隱喻”的形式對學生的認知過程及其數學學習行為產生引導和調節（Leder & Forgasz, 2002）。如果簡單的說，認知領域解決學生“知與不知”的問題，情感領域解決學生“願與不願”的問題，而認識信念或認識論領域則解決學生“信與不信”的問題。從以上看出，這三個領域都相互關聯和相互影響，如果要全面認識和理解學生的學習問題，“信與不信”的問題也應該是一個十分關鍵的問題。如果不能解決好學生“信與不信”的問題，這將深刻影響“願與不願”和“知與不知”的問題的解決，反過來亦然。這足以可見學生認識信念研究的意義與價值。

自從美國的《學校數學課程標準》建議將學生的數學信念的評估作為學生數學知識評估的關鍵成分之一後，美國的教育心理學和數學教育領域對學生認識信念進行了以上廣泛的研究（Muis, 2004）。其他西方國家，譬如義大利、法國等也相應做了較多研究。而在中國大陸以及港、奧、臺灣，這方面的重視和研究顯得十分單薄。

當然，學生信念問題的研究畢竟是“舶來品”，有適合它的文化土壤。跨文化研究永遠是科學心理學發展的一條途徑，只有跨文化的比較研究，才能探索人類心理的共性（林崇德,2005）。從前面所述可知，學生所處的文化背景深深關聯著學生的認識信念，再譬如，基於西方文化背景下 Schommer 的認識信念系統及各個維度，在儒家文化圈中卻可能會有一定的變異(Chan & Elliot,2003)。所以，在借鑒非本土文化的研究成果時，特別要關注文化的特殊性和文化的普遍性。

陸、參考文獻

林崇德(2005)。 *試論發展心理學與教育心理學研究中的十大關係*。心理發展與教育，*1*，1－6.

Chan K, Elliot R G.(2003). Exploratory study of Hong Kong teacher education students' epistemological beliefs: Cultural perspectives and implications on beliefs research.. *Contemporary Educational Psychology*, *27*(3), 392–415.

Francisco, J. M.(2005) .Students’ reflections on their learning experiences: lessons from a longitudinal study on the development of mathematical ideas and reasoning. *Journal of Mathematical Behavior* , *24*(1),51–71.

Hofer, B., Pintrich, P. R. (1997). The development of epistemological theories: Beliefs about knowledge and knowing and their relation to learning. *Review of Educational Research*, *67*(1),88–140.

Hiebert, J., Carpenter, T.P.(1992). Learning and teaching with understanding. In D.A. Grouws (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, pp.65–97,New York: Macmillan.

Lerch, C. M.(2004). Control decisions and personal beliefs: their effect on solving mathematical problems. *Journal of Mathematical Behavior*, *23*,21–36.

Leder, G.,Forgasz, H.(2002) Measuring mathematical beliefs and their impact on the learning of mathematics: a new approach, Beliefs: A hidden variable in mathematics education?, pp.95–113, Kluwer,The Netherlands.

Muis, K.R.(2004). Personal Epistemology and Mathematics: A Critical Review and Synthesis of Research. *Review of Educational Research*, *74*(3),317–380.

Mason, L.(2003). High school students' beliefs about math, mathematical problem solving, and their achievement in math: A cross-sectional study. *Educational Psychology*, *23*,73–85.

Schommer, M.(2004). Explaining the epistemological belief system:Introducing the embedded systemic model and coordinated research approach. *Educational Psychologist*, *39*(1), 19–29.

Schoenfeld, A. H.(1989). Exploration of students' mathematical beliefs and behavior. *Journal for Research in Mathematics Education, 20,*338–355.

Schommer, M., Duell,O., Hutter,R.(2005). Epistemological Beliefs, Mathematical Problem–Solving Beliefs, and Academic Performance of Middle School Students. *The Elementary School Journal*, *105*(3),289–304.

Schommer,M.,Grouse,A., Rhodes, N.(1992). Epistemological beliefs and mathematical text comprehension: Believing it is simple does not make it so. *Journal of Educational Psychology, 84*(4), 435–443.

Schoenfeld, A. H.(1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning, pp.334–370,New York: Macmillan.

Schoenfeld, A. H.(1988). When good teaching leads to bad results: The disasters of "well-taught" mathematics classes. *Educational Psychologist*, *23*(2),145–166.

通訊作者：唐劍嵐，廣西師範大學數科院，中國大陸 廣西桂林，541004，tjlwxt@126.com

Using Case Methodology for Professional Development in Mathematics Teaching

Su-Wei Lin[1] Marie Cheo[2]
National Hualien University of Education[1]
National Academy for Educational Research[2]

Abstract

Current mathematics education emphasizes active teacher and student participation in discussion to negotiate mathematical meaning. However, teachers were not exposed to innovative curricular areas and teaching methods in their formative education, nor given adequate professional development opportunities. This study used cases to familiarize teachers with the curriculum innovations. We discussed teaching strategies with teachers in math, and then used the videotapes of their teaching as cases for discussion at professional development workshops. In this study, many of the teachers had only used traditional lecturing method in the past, therefore, participating in the learning was a great challenge to their teaching, and a clash with many of their teaching beliefs and beliefs about mathematics learning. They also found the necessity of reflecting upon their math content knowledge and pedagogical content knowledge.

Keywords: case study, mathematics teaching, professional development

通訊作者：Su-Wei Lin swlin@mail.nhlue.edu.tw

Teaching is an art. Effective teaching can inspire kids' thinking. Playing the role of posing problems and guiding students' learning, teachers are the key persons who control the tempo and quality of teaching. Current mathematics education emphasizes active teacher-student interaction to negotiate mathematical meaning. It is a process in which both teacher and students are part of the learning community that engage in social interaction to construct mathematical representation, language, procedures, and meaning. In this way, teachers transfer the control of learning to students gradually. However, this approach is unfamiliar to most teachers, so the purpose of this study is to collaborate with classroom teachers to increase students' autonomy in mathematics learning, and to explore how it can be implemented in the elementary school classroom. We also want to understand this as a process in school teachers' professional development.

&

Choosing Case Methodology

Professional development associated with the new math curriculum in Taiwan has largely been traditional workshops in which one after another expert gives individual lectures on educational theories and teaching methods, interspersed with workshops in which teachers produce math teaching plans or assessment type worksheets following the direction of experts. Discussions are rare, often because they are considered too time consuming, and also because many people believe that experts know more about curriculum and teaching than teachers do. Discussion has not been a common mode of teaching and learning in Taiwan. Teachers have been schooled in the traditional lecture and recitation format.

Thus, we want to explore the issue with schoolteachers. Moreover, when it comes to create the social interactive climate in mathematics classroom, which is unfamiliar to most of us, we all need a common experience, going through the process of math interaction together, and working out our common meaning of social interaction in math teaching.

We decide to use case methodology because cases can present theoretical and practical knowledge simultaneously. Since most math teachers have never encountered an interactive inquiry based classroom, they need to experience the atmosphere and the setting of interactive math inquiry from seeing the events in action, we chose to develop cases that include videos. Narratives would not be able to give the first hand impressions that videos can give.

More important, we wanted case discussions to focus teachers on specific aspects of teaching and learning mathematics. Videotapes have long been a part of professional development in Taiwan, but most of them have been rehearsed simulations of exemplary classroom teaching intended to serve as a model for teachers to emulate. These exemplars were supposed to be self-explanatory, and it was assumed that teachers would imitate the master teacher. However, most observers paid more attention to aspects that they already understood, such as classroom management, or delivery of the subject matter. They would fail to notice the subtle teacher-student interactions crucial to the new aspect of teaching that we hope they might learn.

Sykes & Bird (1992) had described four uses of cases that Merseth (1995) developed into a conceptual framework with three categories of cases: cases as exemplars, cases as opportunities to practice analysis and contemplate action, and cases as stimulants to personal reflection. In this study, we are concerned with Merseth's second and third categories of cases. We want to create cases not as exemplars of ideal math teaching, but as situations that help teachers reflect upon specific details that will deepen their understanding of social interaction in mathematics teaching. In other words, we are developing cases that would provide teachers with opportunities to think about how to negothate mathematical meaning with their students, and to examine their own teaching in collaboration with their colleagues.

Developing the Cases

We adopted the Four Phase Framework of the Collaborative Inquiry Process suggested by Bray, Lee, Smith, & Yorks (2000). The Framework is shown in figure 1. Twenty-one teachers accepted our invitation to collaborate as co-researchers and executors of our rationale over a period of three years, together with some math educators and researchers. We considered possible teaching approaches, worked out teaching plans, conducted the classes, and reflected collectively on the results. We met regularly in small and large groups, collected teaching plans, conducted interviews, and examined the literature. We analyzed documents and audiotapes from our own meetings, and examined the videos from our teaching efforts.

Our cases are developed in four broad phases that are iterative, and overlap each other in time: understanding math teachers' concepts about social interaction; observing math classroom teaching and discussing the teaching; collaborating with math teachers on teaching plans and trial testing the teaching; trial testing and revising the cases.

1. **Understanding math teachers' concepts and difficulties about social interaction.**

   First, we asked teachers attending our mathematics workshops to fill in an open-ended questionnaire, describing what they think about the function of social interaction in math classroom, how they would strengthen the interaction between teacher and students, and what the difficulties would be in the curriculum. On the other hand, we conducted focus group discussions in which teachers, master teachers, supervisors, and school principals would share their views on social mathematics interaction according to the questionnaire that they filled in. After sharing their ideas in small groups, each group produced a concept map for social mathematics interaction.

2. **Observing math classroom teaching and discussing the teaching.**

   We formed a research team with researchers and classroom teachers. The number of teachers fluctuated from one semester to another due to constraints of their teaching schedules. The researchers went to the schools to observe the classes taught by the teachers. Before and after the classes, we asked the teachers to describe their original expectations, and to reflect upon their teaching in the observed sessions: whether she/he had planned for math teaching, whether she/he observed the interaction among the students, how she/he might change the teaching strategies to encourage more interaction, and so on. Some of the class sessions were videotaped and reviewed in the discussion. All classroom sessions and discussion sessions were videotaped. These observations and discussions helped us make choices and decisions regarding the nature of active teacher and student participation in math discussion. They helped us form images and representations of the cases that we might create later on.

3. Collaborating on math lesson plans and trial teaching.

We added more schoolteachers to our research team for developing and trial testing our cases. We worked together on lesson plans, then the schoolteachers would teach the lessons. These classroom trials were professionally taped and transcribed. Members of the team would watch the videotapes and transcriptions. Ultimately, some of the edited videotapes would serve as cases for the next phase of the production.

4. Trial testing and revising the cases.

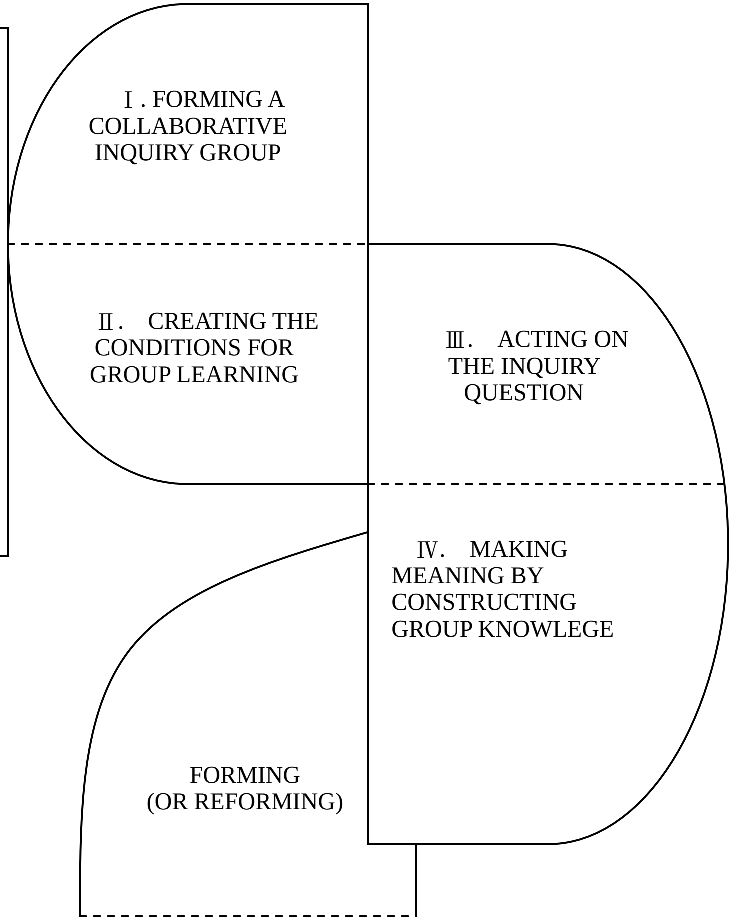
During this phase, we showed the cases to teachers who had attended our workshop in mathematics teaching, and led them in case discussions. The researchers facilitated the discussions with teachers. The discussions were audiotaped and transcribed. We then reviewed the transcriptions, revised the way the cases were used, and gradually developed facilitation guides for the case discussions.

PHASE Ⅰ: FORMING

- Initiating/Co-Initiating a Group
- Obtaining Institutional Consent
- Establishing a Physical Context
- Ensuring Diversity
- Orienting the Group
- Developing the Inquiry Project
- Framing the Inquiry Question
- Designing the Inquiry Project
- Transitioning to Collective Leadership
- Reflecting on Group Process

PHASE Ⅱ: CREATING

- Agreeing on a Constitution for Collaboration
- Repeating Cycles of Action and Reflection to Generate Learning



PHASE Ⅲ: ACTING

- Putting Plans and Design Into Practice
- Keeping Reflective Records
- Respecting Group Ownership of Ideas
- Questioning Honestly
- Practicing Dialogue and Reflection

PHASE Ⅳ: MAKING MEANING

- Capturing the Group's Experience
- Understanding the Experience
- Selecting a Method for Interpreting Experience
- Constructing Knowledge
- Avoiding Flawed Meaning Making
- Guarding Against Groupthink
- Checking Validity
- Celebrating Meaningful Collaboration
- Communicating in the Public Arena

Figure 1. A Four-Phase Framework of the Collaborative Inquiry Process

We have been trying to achieve our goal through collaboration and discussion. Researchers guided the discussion. Teachers tried to understand teaching materials and presented ways to improve their instruction through discussion. The following section presents one episodes of the discussion.

Mr. Wang: My students do not quite understand the diagram on page 89.

Researcher: page 89？Which part do you say that your students do not fully understand?

Mr. Wang: $9/2 \div 3/5$ turns to be $9/2 \times 5 \div 3$, try to draw a linear section diagram to explain it.

Researcher: It happens to be taught by Ms. Hsu, we will ask Ms. Hsu to talk about this part later. Ms. Hsu, how is the situation of your students in class in learning reversed multiplication?

Ms. Hsu: I find that there is a big problem here. When we taught students to draw a linear section diagram in grade 5, we were not informed to pay attention at the following points: such as, what is divided by? What number will be multiplied in a reversed manner? We only read from the diagram.

Researcher: I am concerned about the part 'divided by 5 is to multiply 1/5 or divided by 1/5 is to multiply 5'.

Ms. Hsu: Since the computation is done by using the unit fraction of the divisor, thus, as a dividend is divided by 1/5, it is required to immediately connect with multiplying 5. If a dividend is divided by 1/4, one has to immediately connect with multiplying 4. One must bear this connection in mind. Therefore, I want to remind my colleagues to let their students practice it as much as possible before teaching this.

Researcher: What to practice as much as possible?

Ms. Hsu: When a dividend is divided by a proper fraction, it has to time.........

Ms. Hsu: What should we do as a dividend is divided by a whole number? When the students were at the 5th grade, we only taught them to draw line section diagrams without displaying the division number sentence, so the students did not know the connection. At that time, the students drew in a mess and they hated it desperately. So did the teachers. We did not know that we should handle it in this way.

Researcher: In other words, teachers feel that though the students seem to learn well, they don't fully understand the concept in detail.

In the discussion, teachers would present their perplexities in instruction, exchange teaching experiences and discuss students' problem solving strategies. Those teachers met every weekend to exchange opinions in teaching materials, ways of teaching and students' problem solving strategies. As early as 1904, John Dewey argued that teachers who are proficient in the skills of teaching but who lack an inquiring mind will have their professional growth curtailed (Dewey,1904/ 1965). Teacher education that is conducted in a setting that promotes investigation and inquiry into the problems of mathematics teaching seems to hold promise for assisting preserve teachers in becoming inquiring reflective mathematics teaching. Creating learning opportunities in which the learner could engage in reflective thinking about mathematics teaching and learning is essential.

Summary

This paper describes ongoing work to produce cases that would help teachers understand how to teach mathematics. Discussion is not a common mode of teaching and learning in Taiwan. Teachers have been schooled in the traditional lecture and recitation format.

In this study, many of the teachers who tried to interact with their students in learning communities had only used traditional lecturing methods in the past, so participating in this study was a great challenge to their teaching, and a clash with many of their teaching beliefs and beliefs about mathematics learning. They also needed to reflect upon their math content knowledge and pedagogical content knowledge. In this study, we created an environment that allowed the pre-service teachers to interact with knowledge, beliefs, attitudes, experiences and expectation to develop their interpretation and understandings of mathematics. We feel that there is a need for further collaborative research, and research into the professional development of teachers.

Reference

Bray, J. H., Lee, J., Smith, L. L., & York, L. (2000). *Collaborative inquiry practice: Action, reflection, and making meaning.* CA: Sage.

Cheo, M., Chao, C. C., Wu, R., and Huang, M. T. (2005). Inquiry into inquiry. Paper presented at the Conference on Educational Research, Sanhsia, Taiwan.

Merseth, K. K. (1995). Cases and case methods in teacher education. In J. Sikula (Ed.), *Handbook of research on teacher education, 2nd ed..* (pp. 722-744). New York, NY: Macmillan.

Short, K. G., Harste, J. C., and Burke. C. L. (1996). *Creating classrooms for authors and inquirers. 2nd ed.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Sykes, G., and Bird, T. (1992). Teacher education and the case idea. In G. Grant (Ed.), *Review of research in education* (Vol. 18, pp. 457-521). Washington, DC: American Educational Research Association.

Thier, H.D, with Daviss, B. (2001). *Developing inquiry-based science materials: A guide for educators.* New York, NY: Teachers College Press.