ISSN 1815-6355

台灣數學教師(電子)期刊

Taiwan Journal of Mathematics Teachers

第7期

台灣數學教育學會

2006年9月

台灣數學教師(電子)期刊
Taiwan Journal of Mathematics Teachers
2006 年 09 月出版
NO.7 2006

發行人： 林福來教授

出版者：台灣數學教育學會

地址：台北市 116 汀州路四段 88 號國立台灣師範大學數學系 M212

電話：02-29307151

電子郵件信箱：tame@math.ntnu.edu.tw

網址：

http://www.math.ntnu.edu.tw/~tame/index.htm

總編輯：楊德清 dcyang@mail.ncyu.edu.tw

地址：嘉義縣民雄鄉文隆村 85 號

國立嘉義大學數學教育研究所

電話：05-2263411-1924

發行宗旨

一、本刊為一實務性的數學教育刊物，出版目的如下：

1. 積極發揚台灣數學教育學會之成立宗旨：研究、發展、推廣數學教育，使台灣學生快樂學好數學。
2. 提升數學教師教學品質、數學教育研究品質及促進數學教學策略與方法之交流。
3. 探討數學教育的學術理論與實務現況，以促進理論與實務之結合，進一步提升數學教學之內涵。
4. 提供數學教育課程、教材與教法等實務經驗，包括數學遊戲、DIY 教具之分享，以供未來之教學與研究參考之用。
5. 針對多數學生特定迷思概念之教學引導，如學生易有的錯誤型態及如何釐清觀念等。
6. 介紹國內外數學教育現況。

二、本刊內容以充實高中、國中與小學數學教學、課程與教材為主，以提供所有關心數學教育人士之教學資源與參考依據。

三、本期刊以季刊方式（3 個月一期，一年共 4 期）發行，分別於每一年的 3、6、9、12 月發行。

四、本期刊採電子與紙本方式同時發行。

ISSN 1815-6355

台灣數學教師（電子）期刊
Taiwan Journal of Mathematics Teachers

第 7 期

2006 年 9 月

台灣數學教師（電子）期刊

目錄

第 7 期 2006 年 9 月

ISSN 1815-6355

序言

TJMT 需要老師們的回響 – 請用你的實務來評論學理

李源順
台北市立教育大學數學資訊教育學系

回想多年前，我在上林福來老師的課的時候，林老師時常用學理來剖析我們所提出的問題。當時我心裏一直在想，我的實務經驗是它有許多的例外情形，學理不可能永遠都是對的。之後自己在進行研究的過程中，有一天，我的同事告訴我一件事，「他覺得學理和實務不一樣，一點都ＸＸ不通。」學理和實務的不一致似乎存在你和我之間。

這些年來對教學實務的研究，讓我對學理和實務有一點初淺的體認。理論在某時候是可以幫助教學實務，使教學可以教得“更好”，但是要去體會真的很不容易。同時，個人發現許多人都是用學理來評論教學實務，出發點當然很好。但是，我們也可以反向思考「用你我的教學實務來評論學理」，讓大家知道學理在運用時所可能遭受到的困難，讓學理做一些“調整”，或者讓學理說明清楚“假設條件是什麼”(把邏輯推理若 P 則 q 中的 p 說得更清楚一點)。

我也知道要在教學實務現場的老師提起筆來有點困難。第一：一般的老師不太敢評論學者的研究；第二：很多老師真的很忙；第三：有些老師不寫文章很久了。但是這件事和學理一樣：「凡事總有例外」。總有一些老師勇於說出自己的想法，有一些老師不是永遠沒空，有一些老師的文筆不錯。TJMT 請這些老師為大家發聲吧！TJMT 請這些老師造福其他不敢發聲的老師吧！

TJMT 請這些老師們，說出、寫出、並投出你們教學上的困難在那裏，你試著怎麼改進，又碰到什麼困難？好讓學者思考如何解決教學上的困難。TJMT 請這些老師們評論你們對教學研究上的看法，教學研究上的學理，在你的教學上有那些困難？請具體的說出來，不限文章格式。

本期的內容有四篇：楊德清的「從兒童迷思概念談數常識之教學經驗分

享」、王劍和武海蓬的「哥德爾：數學和邏輯領域中的跋涉者」、閻依萍的「一個國小教師對『九九乘法』的看法」、以及陳志瑲的「三年級面積概念之應用」，這四篇都是具有教學實務和學理的文章。我們期待大家（老師們、學者）對這些文章提出一些回應。也期望大家提出一些老師們常碰到的問題，大家共同思考問題的癥結在那裏？例如，老師在黑板上畫了各式各樣的四邊形，然後問學生什麼是四邊形（第一次問這個問題）？有些學生回答，有四個邊，四個角，四個頂點（可能是一個學生回答，也可能是分由不同學生回答），之後，有學生說「有兩個邊一樣長」,「四個角合來是 360 度」。請問老師思考學生反應和教學上的一些問題。

TJMT 需要老師們的回響 – 請用你的實務來評論學理。

從兒童迷思概念談數常識之教學經驗分享

楊德清

國立嘉義大學數學教育研究所教授

壹、 前言

數常識之教與學已被許多國家視為小學數學教育的主要目標之一，而其教學精神更與九年一貫的理念相契合(徐俊仁和楊德清，2000)。因此如何發展數常識相關之教學活動以融入數學課程中，以及發展能夠有效率地進行這些教學活動，進而幫助兒童發展數常識能力之教學模式，實為當務之急。

數字常識並不是數學課程中的一個新主題，而是教與學方法上的改變。數常識教學重視學習者的學習過程，主張兒童應該有意義地學習數字與運算的概念，並且能夠將此種理解應用於日常生活情境中，而不只是汲汲於尋求「標準答案」；重視學生思考層面的多元化，而不只是機械式的使用公式或規則以獲得答案；同時鼓勵兒童發展「創造式」的解法，而不只是教師「供給式」的學習模式（Reys,et al., 1991）。

貳、 兒童迷思概念之探討

數常識教學之所以受到重視，乃是由於傳統的數學教育太過於強調程序性技能的獲得，因而忽略了陳述性知識的培養，以致於兒童缺乏思考、判斷的能力。誠如許多數學教育家的主張：思考的過程要比答案的獲得更重要，數學的學習應該是強調概念的理解，而不只是機械式地練習以尋求正確的答案(Altizer-Tuning, 1984; Bezuk & Cramer, 1989; Cherry, 2001; Markovits & Sowder, 1994; Sowder, 1988)。因此在教學的過程中，教師應重視的是如何協助兒童概念的發展，而不是熟稔計算的技能，畢竟正確的答案並不代表理解。例如：例如，楊德清（2000, 2002）的研究顯示，當要求學生不需使用紙筆計算的方式去判斷 534.6×0.545＝291357 之小數點的位置時，多數的學生皆提供了錯誤的答案，經研究者進一步的追問，以深入瞭解學生的

通訊作者：楊德清 dcyang@mail.ncyu.edu.tw

思考過程，乃發現了問題的癥結之所在：

> ***這個 534.6 有 1 位小數，而 0.545 有 3 位小數。則這兩個數目相乘的結果應該有 1＋3＝4 位小數，所以答案是 29.1357。***

或

> ***這個數字(**指 534.6**)有 1 位小數，而這個數字(**指 0.545**)有 3 位小數，所以相乘的結果應該有 1＋3＝4 位小數，所以我想答案應該是 2913.57。***

雖然少數學生可以給予正確的答案，但是其解題過程仍無法跳脫算則的巢臼：

> ***被乘數有 1 位小數，乘數有 3 位小數，所以本來應該有四位小數才對。因為 6×5＝30，因為 0 沒有寫上去，所以小數點變為 3 位。所以答案為 291.357。***

從上述的結果可以發現兒童的迷思概念乃在於傳統的教學裡，教科書習慣性地告訴兒童：「**當兩數相乘時，其乘積之小數位數乃是由被乘數與乘數之小數位數相加所得，同時由右至左數其位數以決定小數點之位置**」。此迷思概念正反應了：過度的強調算則的教學或計算技巧，將侷限了兒童對數字與運算的理解，以及思考與判斷答案合理性的能力，亦即阻礙了兒童數常識能力的發展(Burns, 1994; Markovits & Sowder, 1994; Reys & Yang, 1998)。

參、 教學經驗之分享

誠如許多數學教育家的主張：思考的過程要比答案的獲得更重要，數學的學習應該是強調概念的理解，而不只是機械式地練習以尋求正確的答案(Altizer-Tuning, 1984; Cramer, et al., 2002; Cherry, 2001; Sowder, 1988)。 因此在教學的過程中，教師應重視的是如何協助兒童概念的發展，而不是熟稔計算的技能，畢竟正確的答案並不能代表真正的理解。

那麼教師應如何有效的運用數常識教學活動於教室，以協助兒童發展數常識呢？教學並沒有唯一的捷徑，亦沒有唯一正確的教學法，唯端賴教師們從教學行動

中不斷的反省檢討，不斷的學習，以修正我們的教學方法。以下將從研究者多年的實務與研究經驗，分享教學心得：

一、培養自己隨時具教學反思能力的教學者

NCTM(2000)之學習原則認為：有效率的學習者能夠從錯誤中反思與學習。同樣地，有效率的教學者亦能從教學中進行反思，隨時掌握學習者的狀況，能夠隨時隨地發現問題，並尋求解決的策略。教師在教學中或教學後嘗試寫下反思札記，以隨時讓自己有機會進行反思是不錯的方式。例如：

> **有時研究者雖然想有效地引導學生發表自己的解題方法，但卻仍有許多不盡理想之處。例如：在教學時，研究者對「$\frac{1}{4}$和$\frac{2}{8}$是不是同樣的大小？」這樣的教學方式，應該改為「$\frac{1}{4}$和下面哪一個答案是同樣的大小呢？」，我想會是較理想的方式**（890929 反省札記）

藉由上述的教學反省札記，教師可以經常反省以思考如何改進教學。

二、教師必須為學生創造良好的學習情境，方能幫助學生學習

許多學者（Anghileri, 2000; Reys, et al.,1991; Yang, 2002, 2003; 楊德清，2002)主張數常識教學應強調學習的過程。教師應營造自然的學習情境與愉快的室內對話氣氛，以鼓勵學生積極從事數學概念的探索、參與討論的意願，以啟發學生思考和推理的能力，讓師生從質疑與辯證的互動中，檢視過程或答案的合理性。因此，欲鼓勵學生進行有意義的學習，教師必須創造一個良好與安全之學習情境，提供學生探索問題的空間，讓學生有思考、辯證、質疑的機會，從討論的環境中發展與修正自己的觀點，發展屬於自己的知識，引導學生成為自己學習的主宰者，如此之教學情境對兒童數常識之發展，才是最好的途徑。誠如美國數學教師協會在「學校數學原則與標準」(PSSM)之 教學原則中所提到的：「有效率的數學教學必須瞭解學生所要學的知識及如何學習，並且要不斷的挑戰及支持他們，讓他們能學習的更好。」（NCTM, 2000，p.16）。

三、教師在有效率的教學過程中扮演一個極為重要的角色-佈題者，引導者，而非解題者(NCTM, 2000)

教師在教學的過程中應清楚的瞭解本身所扮演的角色，為佈題者，以及鼓勵同學進行合作解題，分享彼此的想法。是引導學生學習，而不是為他們解題。誠如Sowder（1992）的主張：我們應該運用一種非直接的教學方法，以協助學生發展數常識。而此種非直接的教學法即是重視學生的學習過程，是一種幫助學生察覺、探索、思考、了解的學習歷程。因此教師於教學的過程中是引導者，引導學生往正確的方向前進。此正與九年一貫數學學習領域之課程目標的精神「數學學習活動應讓所有學生都能積極參與討論，激盪各種想法，激發創造力，明確表達想法，強化合理判斷的思維與理性溝通的能力，期在社會互動的過程中建立數學知識」相呼應。例如：下列之教學討論中，教師扮演的角色是追問者：「**為什麼呢？**」以及

S3：$\frac{3}{10}$ **比較接近** $\frac{1}{2}$ 。

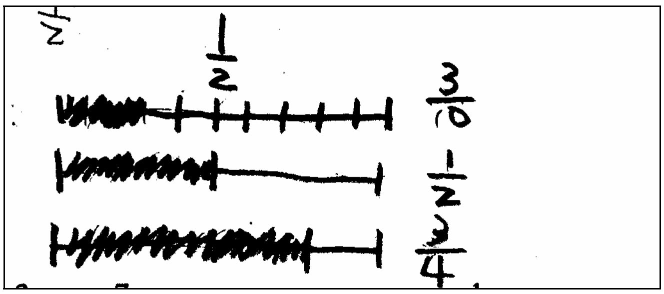
T：**好，為什麼呢？**

S3：**請看我們的圖形(參考<u>圖 1</u>)因為** $\frac{3}{10}$ **差** $\frac{2}{10}$ **就是** $\frac{1}{2}$ **了。**

T：**耶，**$\frac{3}{10}$ **差** $\frac{2}{10}$ **就是** $\frac{1}{2}$ **了，然後呢？**

S：**可是** $\frac{3}{4}$ **離** $\frac{1}{2}$ **感覺就較遠了，所以答案是** $\frac{3}{10}$ **比較接近** $\frac{1}{2}$ 。

(891027 之教學活動)



<u>圖 1</u>： 以圖形及符號表徵的方式解釋

引導者，鼓勵學生發表想法，而不是為學生解題。

四、運用「重覆」與「回應」技巧，引導班級討論的進行

研究者認為教師在引導班級進行討論時，若有必要時應協助學生清楚的表達（重覆）想法，使得每一位學生都能聽得清楚，並藉以集中學生注意的焦點；如果學生回答的內容太過粗略，教師為了讓問題更明確，也為了引導學生能夠使用數學語言來溝通，所以可運用「回應」（Resnick, 1983）技巧，將學生所提出的問題，傳達出更精確的意義，以引導討論的進行。例如：學生的發表不夠清楚時，教師可適時協助學生釐清發言內容。

S：（第四組的杰陞）這裡才$\frac{1}{10}$啊（指箭頭的另一端）！

T：好，這裡才$\frac{1}{10}$，那這裡有沒有可能是$\frac{5}{10}$？

S：不可能。

T：為什麼不可能呢？

S：因為$\frac{5}{10}$比$\frac{1}{10}$大。（有些同學回答）

五、請學生寫「數學日誌」以記錄學習心得，如此可以幫助學生自我反省

數學日誌可以幫助學生反省學習心得，培養學生寫作的技巧，亦可以紀錄他們在課堂進行中沒有表達出來的想法。學生的數學日誌更可以幫助教師做為反省教學方式，教學內容與改進教學之用。同時數學日誌更可用以幫助教師瞭解學生的學習心態，學習成效，與確定教學活動是否有助於他們的學習。例如:

我們以前的觀念，就是$\frac{1}{5}$比$\frac{1}{6}$大，那$\frac{4}{5}$就比$\frac{5}{6}$大，可是我們聽到上一次聖茲解釋說，如果剩下的$\frac{1}{5}$比$\frac{1}{6}$大，那用去的部分就會比較小，$\frac{1}{6}$比$\frac{1}{5}$小，那用去的部份就會比較大。這時我們就用聖茲說過的，用剩下的來比較。」 （筱詩的數學日誌）

但是我聽班上的聖茲說$\frac{5}{6}$剩下的部份比$\frac{4}{5}$小，所以$\frac{5}{6}$大。」

（俊億的數學日誌）

藉由上述的數學日誌可以幫助教師更清楚的瞭解學生的學習情形。

六、教師必需具備充足的數常識

數學教師必需具備深厚的數學背景與能力已被非常重視，誠如 Ma(1999)在她的一本書「***Knowing and teaching elementary mathematic***」中已清楚明白地強調學科知識的重要性，特別是數學教師應具有的數學素養。研究者亦認為教師欲幫助兒童發展數常識能力，則教師必須首先具備穩固的與深厚的數常識。由於數學教室的學習情況是千變萬化的，教師必須從學生的討論中隨時掌握情況，瞭解學生的迷思概念，問題癥結之所在，並在適當時機適時介入以引導學生獲得正確的數學知識。例如：「當沒有任何一小組的同學可以提供正確答案時，教師仍須有耐心地等待與聆聽學生的解題方法與解釋，並思考如何配合學生的反應以引導學生發展正確的數學概念。教師唯有具備堅實的數常識概念，方能知道何時與如何引導學生發展正確的思考方向(891027 教學反思)」。

肆、 結論

教學是一門藝術、亦是一門學問，它沒有固定的模式，教學之妙，存乎一心；更何況教學情境因人、事、時、地、物之不同而有顯著之差異存在。故如何營造良好之學習情境，以利學生之學習，以及協助兒童發展數常識能力，端賴教師臨場之應變與反思能力。

子曰：「學而不思則惘，思而不學則怠」，意思是說只知學習而不思考所學為何，此種學習只是惘然而已；**…**。此種情境猶如傳統的數學教學，只知一昧地強調熟稔數學公式的重要，強調解題速度、解題技巧、與快速地獲得答案。然而此種不重視學習歷程，不強調理解，其學習結果往往是知其然而不知其所以然？的確，教師在教學過程中應該思考如何讓學生能夠”學而後思，思而後學”，兩者並行，使學生的學習達到完美的境界，以發揮教學的功效。

參考文獻

徐俊仁，楊德清（2000）：從數字常識的觀點探討九年一貫數學學習領域「數與計算」

的能力指標，**科學教育研究與發展季刊**，21，51-67。

楊德清 (2002)：從教學活動中幫助國小六年級學生發展數字常識能力之研究，**科學教育學刊**，10(3)，233-260。

Alitzer-Tuning, C. (1984). One point of view: Crisis in arithmetic teaching:The future is here. *Arithmetic Teacher*, 32, 2.

Burns, M. (1994). Arithmetic: The Last holdout. *Phi Delta Kappen*, (Feb.), 471-476.

Cramer, K. A., Post, T. R., & delmas R. C. (2002). Initial fraction learning by forth-and fifth- grade students: A comparison for the effects of using commercial curricula with the effects of using the rational number project curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(2), 111-144.

Ma, Liping (1999). Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum

Markovits, Z., & Sowder, J.T. (1994). Developing number sense：An intervention study in grade 7. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(1), 4-29.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *The Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Reys, B. J., Barger, R., Dougherty, B., Hope, J., Markovits, Z., Parnas, A., Reehm, S., Sturdevant, R., Weber, M., & Bruckheimer, M. (1991). *Developing Number Sense in the Middle Grades*, Reston, VA: NCTM.

Reys, R. E. & Yang, D. C. (1998). Relationship between Computational Performance and Number Sense among Sixth- and Eighth-Grade Students in Taiwan, *Journal for Research in Mathematics Education*, 29, 225-237.

Sowder, J. (1992). Estimation and number sense, in D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.371-389). New York: Macmillan.

Sowder, L. (1988). Children's solution of story problems. *Journal of Mathematical Behavior,* 7, 227-238.

Yang, D. C. (2002). Teaching and Learning number sense: one successful process-oriented activity with six grade students in Taiwan, *School Science and Mathematics Journal*, 102(4), 152-157**.**

Yang, D.C. (2003). Teaching and Learning Number Sense－An Intervention Study of fifth grade students in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education. 1(1)*, 115-134.

紀念哥德爾誕辰一百周年！

哥德爾：數學和邏輯領域中的跋涉者

王劍　山東師範大學數學科學學院　講師

武海蓬 山東師範大學數學科學學院

摘　要

哥德爾作為繼亞裏斯多德、萊布尼茨以來最偉大的邏輯學家，從正面或反面部分地解答了 20 世紀初在數學和邏輯領域最根本的問題。他的成果影響和推動影響和推動了數學基礎和數理邏輯近 70 年的發展，同時對電腦科學和科學哲學等眾多學科領域已經產生並將繼續產生深刻的影響。

關鍵字：哥德爾、數學、邏輯

壹、 前言

2002 年美國《時代週刊》上列出了 20 世紀震撼人類思想的四大偉人，他們是愛因斯坦、圖靈、凱恩斯和哥德爾。對於物理學家愛因斯坦、電腦專家圖靈以及經濟學家凱恩斯的工作，一般人都略知一二，但大多數人對作為數學家和邏輯學家的哥德爾的思想就知之甚少。哈佛大學在授予哥德爾榮譽博士學位的時候，稱他為“二十世紀最有意義的數學真理的發現者（指哥德爾不完全性定理，作者注），……，近一個多世紀以來，唯一把真正基本的科學貢獻與異常深奧準確的哲學探討相結合的人”[1]，由此就可以看出他思想成果的重要性。下面我們就追尋哥德爾走過的學術道路，感受他在數學和邏輯學領域所進行的思想跋涉。

通訊作者：王劍 7676dyj@sina.com

貳、 走進數學和邏輯的殿堂

庫爾特.弗雷德里希.哥德爾 (Kurt.Friedrich.Gödel)於 1906 年 4 月生於奧匈帝國的布爾諾。他的才智及其對理論問題的濃厚興趣很早就顯露出來，由於他經常提出問題，家裏人稱他“為什麼先生”。

1924 年哥德爾到維也納大學學習。在維也納大學，哥德爾的興趣和聰明才智得到了充分的施展。他參加了以攻讀 B.羅素的專著《數學的哲學導論》為中心的討論班,這使他得到了良好的數學和邏輯的思維訓練。在 1926—1928 年期間哥德爾還參加了維也納 M.石裏克的哲學討論班，但他並不贊成石裏克的邏輯實證主義，並且很快建立了自己的哲學觀點。在這兩個小組的經歷使得哥德爾養成了從哲學層面思考數學和邏輯問題的習慣，引領他開始走進數學和邏輯的神聖殿堂。哥德爾的老師 H.哈恩對於哥德爾走上數學和邏輯的研究之路也有重要的影響，哈恩的研究興趣主要是集合論、數學基礎、邏輯和科學哲學，這在知識背景方面給了哥德爾直接的影響。

但是，時代背景對於哥德爾確定研究方向、開始數學和邏輯的人生跋涉之旅，起了決定性的作用。20 世紀初，集合論悖論特別是羅素悖論的出現，震動了整個西方數學界和邏輯學界。羅素悖論的通俗形式為理髮師悖論，即一個理髮師宣佈只給自己不給自己理髮的人理髮，問這個理髮師是否給自己理髮？，理髮師是否給自己理髮是個不能判定的問題。它徹底摧毀了人們對於邏輯學是絕對真理的幻想，因為只要對它稍作分析，就會發現只要用邏輯術語來代替集合論術語，羅素悖論就要直接牽涉到邏輯理論本身，從而衝擊了數學和邏輯這兩門一向被認為嚴謹的學科。為了解決集合論悖論給數學基礎帶來的危機，希爾伯特及其學派制定了一個把數學建立在可靠基礎上的方

案，這一方案是要把數學理論進行形式化處理，建立起相應的形式公理系統，並且用有限方法研究形式系統的完全性（由公理出發能得到所有的相關真命題）、相容性（公理集和定理集都無矛盾）和判定性等問題。這些形式公理系統共同的邏輯基礎是一階古典謂詞演算。當時人們已證明了謂詞演算的可靠性(或一致性)，即任意一個邏輯定理在所有的解釋(或賦值)下都是真的(或普遍有效的)。但是，謂詞演算是否具有完全性呢？也就是說，謂詞演算中的普遍有效命題是否都為邏輯定理呢？這是 1920 年前後人們關注的一個重大理論問題，直至 1928 年它仍然沒有獲得解決。這個難題吸引著當時最優秀的數學家和邏輯學家。時代的呼喚使得哥德爾勇敢地選擇了這個難題作為自己的博士論文，從此他也真正開始了自己的數學和邏輯人生。

1929 年夏季， 23 歲的哥德爾肯定地解決了這一問題，證明了謂詞演算的完全性定理：對於謂詞演算的任一命題集合 S 而言， S 是相容的當且僅當 S 有模型。這一結果對於希爾伯特方案是一個有力支持，因為它表明了希爾伯特所依據的邏輯基礎是既可靠又完全的一門獨立數學理論。證明完全性定理的關鍵在於哥德爾敢於突破當時的數學傳統（即元定理只允許使用有限方法給出證明，不允許使用排中律與無限方法)，大膽地採用無限方法。對此，哥德爾曾在給王浩的信中說道，“我解決完全性定理在於我的哲學思想先進，不拘泥於有限方法，而並不是我的數學方法比別人高明。”[1]這就啟發我們在數學教育中要鼓勵學生敢於對原有的數學知識和方法做出批判， 從而培養學生的創新精神。由此，哥德爾在 1930 年 2 月獲得了博士學位。

哥德爾完全性定理（Gödel’s completeness theorem）是關於形式系統的整體特徵性定理，它在謂詞演算的語法概念與語義概念之間架起了一座橋樑，

這裏語法概念指形式系統，語義概念指數學模型，也就是說，哥德爾定理在形式系統與數學模型之間架起了一座橋樑。這對於試圖以公理化化方法構建數學基礎的形式主義學派是一個莫大的鼓舞。希爾伯特，形式主義學派的領軍人物，確信他的元數學（證明論）將會成功地確立全部數學的相容性和完全性。1930 年夏天，在柯尼斯堡接受“榮譽市民” 的受禮儀式上，希爾伯特堅定地說出一句話：“我們必須知道，我們必將知道。” [2] 哥德爾的完全性定理似乎表明曙光就要到來。

參、 站在數學和邏輯的頂峰

但就在 1931 年，哥德爾發表的論文卻打開了“潘朵拉的盒子”。在《論〈數學原理〉及有關系統的形式不可判定命題》的論文中提出了兩個驚人的結論：第一不完全性定理（任何包含自然數的形式系統，如果是相容的，則是不完備的）和第二不完全性定理（如果一個包含自然數的公理系統是相容的，那麼這種相容性在該系統內是不能判定的）[3]。這篇論文是哥德爾最重要的學術論文，標誌著他的數學和邏輯人生到達了輝煌的頂峰。第一不完全性定理所指的自然數形式系統也就是皮亞諾算術系統（記為 P），定理的意思就是：如果 P 是相容（無矛盾）的，則存在一個算術的形式命題 A（A 為 P 中一個命題）和 A 的否定（$\neg$A）在 P 中都不能被證明。第二定理是第一定理的一個推論，也就是說一個公理系統的相容性必須在更大的公理系統內才能證明。

哥德爾不完全性定理（Gödel’s incompleteness theorem）是哥德爾在解決懷特海提出的一個邏輯問題時所得出的一個否定性思想成果。集合論悖論出現以後，羅素與懷特海創立了邏輯主義學派，試圖消除集合論悖論。他們的

一個基本思想就是讓原先那個包含悖論的邏輯體系作為更大的邏輯體系的子集合，在新的邏輯體系中就消除了原來的悖論。這樣做的結果，新的邏輯體系又會產生新的悖論，於是懷特海就提出了下面的問題：這樣的邏輯體系一層一層地構造下去，以至於無窮，是否就可消除悖論呢？哥德爾不完全性的定理回答就是使用層層外延法擴張形式邏輯體系並不能清除其總和的悖論！

哥德爾不完全性定理的證明思想和結果都有超乎尋常的重要意義。哥德爾在闡述定理的證明思想時說過："我們可以注意到一個形式系統的公式在形式上都表現為基本符號（變數、邏輯常項、括弧或中斷號）的一個有限序列，從形式的觀點看，所謂證明實際上就是公式的一個有限序列。對於元數學來說，究竟用什麼東西作為基本符號當然是沒有關係的。我們不妨就用自然數作為基本符號，如此，一個公式就是一個自然數的有限序列，而證明便是一個有限的自然數序列的有限序列。據此，元數學的概念（命題）也就變成了關於自然數或他們的序列的基本概念（命題），從而就可以（至少是部分地）在（物件）系統本身的符號中得到表示，特別是人們可以證明'公式'、'證明'、'可證公式'等都可在物件系統中加以定義。"[2]

我們可以看到，哥德爾把精深的哲學思想和精緻的數學方法巧妙結合起來，開創了用數學方法（通過映射和遞迴函數）證明邏輯問題的新時代。對於數理邏輯等領域來說，哥德爾提供了一種數位化的研究方法（映射），能夠方便地把一些物件（如符號和公式）轉換為自然數或自然數的函數，從而用自然數的理論來研究有關問題。

哥德爾不完全性定理是一階邏輯的基本定理，它宣告了形式主義和邏輯主義等學派的失敗，數學知識不可能完全由形式公理化方法得到，一個形式

公理系統要麼不完備，要麼有矛盾，換句話說數學不可能有一勞永逸的邏輯基礎。對此，外爾曾經悲歎地說道："上帝是存在的，因為數學無疑是相容的；魔鬼也是存在的，因為我們不能證明這種相容性。"[1]

哥德爾第一不完全性定理是最重要的，它有多個不同的版本。比如下面的兩種說法：

"如果一個形式系統足以容納數論且無矛盾，則該系統必定是不完備的。"

"任何一個相容的數學形式化系統中，只要它強到足以定義自然數的概念，就可以構造出在該體系中既不能證明也不能證偽的命題。"

下面我們分析一些對該定理常見的誤解，澄清一些模糊認識，以便加深對整個數學的理解，從而形成正確的數學觀，更好地從事數學教育。

誤解一："所有的公理系統都是不完備的"，這是最常見的錯誤。歐氏幾何就可以被公理化為一個完整的形式系統。

誤解二："所有包含自然數的公理系統都是不完備的"，這也是錯誤的。第一不完全定理僅假設公理系統能"定義"自然數，很多包含自然數的系統，例如"實數"和"複數"都有完備的公理化系統。

誤解三："我們永遠無法證明一個公理系統無矛盾"，這同樣是錯誤的。該定理只表明我們不能從系統的內部證明相容性，但可以通過其他系統和方法給出證明。例如，數論中的皮亞諾公理不能在數論範圍內被證明，但可在集合論系統中被證明。這就啟發我們要引導學生從聯繫的觀點考慮問題，在解決一個領域的數學問題時要善於引入別的領域的概念和方法，善於利用不同數學分支的工具和思想解決問題。

哥德爾不完全性定理是數學和邏輯研究的一個里程碑。

首先，它在人類歷史上第一次分清了真理和可證是兩個不同的概念。從語法上講，A 與┐A 都是不可證的，而從語義上，A 與┐A 必然有一個是真的。對於形式系統而言，“可證性是一個機械的思維過程，而真理性則是一個能動的和無窮的思維過程，二者具有質的不同。”[4] 。

其次，它揭示出任何形式系統都不能把所有的經驗知識都包括無遺，總有一個問題從形式系統的公理出發得不到判定，這深刻地揭示了形式化方法的局限性，把人們對數學真理的認識推向了一個嶄新的層次。但這並不代表公理化方法失效了，更不能得出用“哥德爾不完全性定理”革“公理化體系之命”的謬論！如果哥德爾不完全性定理表明公理化方法失效了，那麼我們如何去相信這本身來自於公理化方法的哥德爾不完全性定理呢？哥德爾不完全性定理也不能成為一些教育極端主義者在數學課程改革中隨意處理數學內容、甚至讓數學變的無形式化和無邏輯化的理論根據。

最後，哥德爾不完全性定理的影響是穿越時空和跨學科的。2002 年北京國際數學家大會，著名物理學家霍金的報告就是《哥德爾與M理論》。霍金認為，建立一個描述宇宙的大統一理論是不可能的，霍金說他的這一推測正是基於數學領域的哥德爾不完全性定理。

哥德爾不完全性定理由於其對數學和邏輯產生的巨大影響而在 20 世紀科學史上留下了濃重的一筆。著名物理學家 J.惠勒評論道：“如果到了西元 5000 年，宇宙仍然存在，而且知識仍然放射出光芒的話，人們就將仍然把哥德爾和科恩的工作（指哥德爾的不完全性定理和科恩的連續統假設相對於集合論公理的獨立性證明）看作是一切知識的中心。”[2]

肆、 開創數學和邏輯研究的黃金時代

由於不完全性定理的重要影響，從 1931 年起，哥德爾與馮.諾伊曼、P.伯奈斯、 E.F.策梅羅和 A.塔斯基等著名數理邏輯學家建立了良好的關係。他們的交流促進了數理邏輯的發展，擴大了這一學科的影響，並使哥德爾開創的方向到現在仍然是這一學科的主要研究領域。哥德爾深刻的思想和超凡的洞察力使他的研究始終面向數學和邏輯領域中的根本問題。

1932 哥德爾發表論文“對於理論邏輯判定問題的一個特別情況”，說明了邏輯判定問題的可解情況。1933 年發表論文“關於謂詞邏輯演算的判定問題”給出了謂詞演算中可判定問題的最重要表達形式。所謂謂詞演算的判定問題就是尋找一個一般的方法，對於任意給定的命題，我們都可以在有限步驟內判定它是否為真。這些結果對於數學形式系統可判定性問題做出了奠基性工作，對數學、邏輯和電腦等學科都產生了重要影響。1935 年哥德爾證明了選擇公理對於通常集合論公理系統的相容性，這對於公理化集合論的研究也是一個新的突破，大大加深了我們對公理關係的理解。1936 年，哥德爾證明了加速度定理（或證明長度定理），即對於類型和強度都逐漸增加的系統：S1，S2，…，Sn，Sn＋1，…，在 Sn 與 Sn+1 中都存在多個命題，它們在系統 Sn 與 Sn+1 中都是可證的，但在 Sn+1 的證明長度要比 Sn 中的長度短得多,這一結果對於電腦科學有著重要影響，將會大大提高電腦的運行速度。1942 年哥德爾做出了“在有窮類型論中選擇公理的獨立性證明”,這同樣對於增加我們對集合公理的理解有重要意義。這段時間，哥德爾還對直覺主義邏輯等領域做出了重要貢獻。1944 年，哥德爾在他的一篇哲學性論文“羅素的數理邏輯”[2]中著重分析了羅素的邏輯思想發展，指出了數理邏輯在實際發展中曾採取的方法，他說“…最重要的簡單類型論和公理化集合論，它們二者至少在這個範

圍內是成功的，即它們允許推導現代數學同時避免一切已知的悖論‧但許多跡象只是更加清楚地表明，一些原始的概念尚需進一步闡明”[5]，這是對邏輯主義中肯的評價。

1940 年前後，哥德爾對連續統問題所作的探索是繼不完全性定理以後做出的又一重大貢獻。由康托提出的連續統的基數(勢)到底等於什麼呢？這是一個未解決的重大數學問題，也是希爾伯特提出的指引 20 世紀數學發展的 23 個數學問題中的第一個問題。連續統問題可表述為每個實數集合 R 的無窮子集合，或者與自然數集合對等(存在一一映射，即兩者的基數相等)，或者與全體實數組成的集合對等。對於這一問題，哥德爾所取得的重大成果是（廣義）連續統假設與集合論的通常公理系統(包括選擇公理)是相容的，也就是說連續統假設不假。在證明過程中，哥德爾引進了可構成集合、可構成公理等重要概念，從而開創了集合論研究的新方法和新方向（內模型方法，相當於用歐氏幾何去構造非歐幾何）。在這些結果與方法的基礎上，P.J.科恩在 1963 年創立了力迫方法，證明了廣義連續統假設相對於通常集合論公理是獨立的（即連續統假設不真）。哥德爾和科恩的工作表明連續統假設在目前的集合論公理中是一個不可判定命題，這就是 100 多年以來，人們連續統假設的主要認識。

值得指出的是，早在 1947 年，哥德爾就憑藉超凡的洞察力指出連續統假設可能是一個不可判定命題。在“什麼是康托爾的連續統問題？”這一篇重要的哲學論文中，哥德爾指出：“對於 ZF 公理系統來講，連續統問題的最終解答很可能就是一種不可判定性性，這一結果並不代表問題的解決，只是意味著現行的公理系統沒有包括那個實在的完全描述，可能存在就其證明的結果來說是如此豐富的其他公理，它照亮整個領域並產生這樣強有力的解決問題的

方法，……與大量的蘊涵連續統假設的否定似乎真的命題相反，沒有一個已知的似乎真的命題蘊涵連續統假設，……在新的公理系統中有可能否證連續統假設。”[5]哥德爾 60 多年前的論斷，仍然是當今集合論學者研究的中心課題。哥德爾的這些工作，開創了數學基礎和數理邏輯研究的黃金時代。在他思想的指引下，人們得出了一系列關於數學和邏輯的深刻成果，形成了許多數學和邏輯的分支，大大加深了我們對於數學本質和邏輯的認識。

伍、 從數學和邏輯走向哲學

1943 年以後，哥德爾逐漸把注意力轉向數學哲學、科學哲學乃至一般的哲學問題。當然他仍然密切關注著數學和邏輯的進展，比如 1958 年他研究了有限方法的擴充，1963 年審閱並推薦了 P.J.科恩的論文“連續統假設的獨立性”， 1973 年評述了 A.魯賓遜創立的非標準分析。哥德爾的這些評述對數理邏輯的發展起到了積極的推動作用。

哥德爾把注意力轉向哲學是他進行數學和邏輯跋涉的必然歸宿。因為他在數學和邏輯領域所做的探索都是著眼於根本性的問題。這就要求他必須進行深刻而細緻地哲學思考才能得到問題的解決方案，因此，他的每一個學術成果，都蘊含著豐富而深刻的哲學思想。哲學思考已經成為了哥德爾的一種探索問題的基本態度。事實上，在數學哲學研究領域，哥德爾一般被認為是一個客觀主義者，魯賓遜稱他是當代最傑出的柏拉圖主義者。在到達數學和邏輯的頂峰以後，對自己和別人的成果進行哲學思考、探究其中更本質的原理也就成為哥德爾一個自覺的行動，可以說，對於科學本質的孜孜追求，促使哥德爾必然把精力投向哲學。在哲學中，哥德爾所推崇的 5 種好品格“善取捨、

求準確、棄偏見、慎試驗、有膽魄”，也正是他獻身數學和邏輯研究的真實寫照。

需要強調的是，從表面看來，哥德爾的這種研究轉向是從輝煌到平淡的回歸，其實這是哥德爾為了追尋數學和邏輯乃至一般自然科學和社會科學根本原理的必然選擇，是另一段輝煌的開始。限於篇幅，在這裏不作詳細介紹，筆者願意另行撰文探討。有興趣的讀者可以閱讀《哥德爾文集》，通過該文集，我們必將更加深入地走進哥德爾的精神世界，進一步感悟他在數學和邏輯領域的思想歷程。

綜上所述，哥德爾作為繼亞里斯多德、萊布尼茨以來最偉大的邏輯學家影響將是深遠的，他的工作從正面或反面部分地解答了 20 世紀初在數學基礎方面最根本的問題。他以精闢的哲學思想和精湛的數學方法把數學和邏輯結合起來，使它們從較為分散的研究工作擴大為獨立的學科，並且產生了若干研究分支，影響和推動了數學基礎和數理邏輯近 70 年的發展，同時對電腦科學和科學哲學等眾多學科領域已經產生並將繼續產生深刻的影響。

參考資料

王浩、哥德爾和康宏逵譯（1997）。上海譯文出版社

劉曉力（2000）。邏輯人生—哥德爾。上海譯文出版社。

胡作玄（2000）。20 世紀數學思想。山東教育出版社。

李文林（2002）。數學史概論。高等教育出版社。

《哥德爾文集》第一卷、第二卷、第三卷和第四卷。

老師教得有感覺，學生學得有意義！

一個國小教師對『九九乘法』的看法

閻依萍

國立台北教育大學附設實驗國民小學

最近新聞炒得很熱的話題是小二回復教九九乘法，在我與同事交換心得感想是新聞媒體並沒有全面性了解國小教師在教學現場的實際狀況。回頭翻翻教育部 64 年版國民小學數學課程標準、82 年國民小學數學課程標準、91 年國民中小學數學學習領域暫行綱要及 92 年國民中小學九年一貫課程綱要正式版，試將有關初步引入乘法學習整理如下：

64 年版	第二學年：理解使用乘法的情境而構成乘法九九
	教材綱要→乘法的初步意義。2 到 9 的乘法表的構造。
82 年版	低年級目標：瞭解乘法的意義，並應用乘法表解決問題。
	二年級教材綱要→2 到 9 的基本乘法。查乘法表寫出計算結果。
91 年暫綱	分段能力指標 N-1-4 能理解乘法的意義並解決生活中簡單（積≤100）的整數倍問題。
92 年正綱	N-1-03 能理解乘法的意義，並解決生活中簡單整數倍的問題。 N-1-06 九九乘法 N-1-07 能理解乘法直式計算
	二年級分年細目→ 2-n-06 能理解乘法的意義，使用×、＝作橫式記錄，並解決生活中的問題。 2-n-08 能理解九九乘法。

通訊作者：閻依萍 Sunny0618@mail.nttclbs.tp.edu.tw

	三年級分年細目→ 3-n-03 能熟練三位數乘以一位數的直式計算，並解決二位數乘以二位數的乘法問題。

綜合以上教育部所頒行有關乘法學習目標看來，在運用九九乘法前都要能理解九九乘法的意義，並不是盲目的讓學生沒有意義的背誦「二一得二、二二得四…二九一十八」。這是在教育現場的老師都知道的事情，唯一比較不同的是 82 年版九九乘法是用查表的方式，強調學生必須先理解再背誦，不要因為強調九九乘法而忽略情境與意義的了解。

對一個不懂九九乘法的小孩來說，他要強背九九乘法的困難，就有如我們要背底下的表格。以下的表格是擷取 NCTM(2003)和 Fuson(2003)在非負整數運算中發展數學能力中提出的表格:想想看，我們能知道其中的規律嗎?如果沒有了解規律原理原則就要我們背起來，這樣的難度就像要小孩強背九九乘法表而不告訴他背後原理原則的困難是一樣的。

表一：從數字 C 到 CL 的乘法表。

	C	D	E	F	G	H	I	J	K	CL
C	C	D	E	F	G	H	I	J	K	CL
D	D	F	H	J	CL	CD	CF	CH	CJ	DL
E	E	H	K	CD	CG	CJ	DC	DF	DI	EL
F	F	J	CD	CH	DL	DF	DJ	ED	EH	FL
G	G	CL	CG	DL	DG	EL	EG	FL	FG	GL
H	H	CD	FJ	DF	EL	EH	FD	FJ	GF	HL
I	I	CF	DC	DJ	EG	FD	FK	GH	HE	IL

J	J	CH	DF	ED	FL	FJ	GH	HF	ID	JL
K	K	CJ	DI	EH	FG	GF	HE	ID	JC	KL
CL	CL	DL	EL	FL	GL	HL	IL	JL	KL	CLL

從表一我們可以看出用有限的機械方法「記憶乘法事實」觀點會有的問題。表一.使用一張類似字母表的表格來呈現乘法乘積：假定你將學習一個新的乘法組合的計算表(C、D、E、 F、G、H、L、J、K)。我們假裝你並不知道這項任務的答案。注意這表格，且明白全部和學習這些機械性記憶的兩個刺激物有關事實回應的干擾。那些任務是難以應付的，因為那些「數字」看起來非常的相似(對年輕的孩子來說，他們就像 1、2、3、4…等等一樣)。注視這表格一會，並想想你可以怎樣以另一種方法去著手這項難以應付的任務。看看你是否能找到的全部規律。你看見乘以 C 的規律嗎？(注意最上排或最左列)。你看見乘以 CL 的規律嗎？(看最後一列或最後一排)。注意有趣的 G 的規律。你能找到 D 的規律嗎？E 和 F 的規律更令人難解。K 有一種令人驚嘆的規律；你能解釋它嗎？

表格裡的一些規律如下：

一、C 只是複製和所乘以相同一樣乘積的數目。

二、乘以 CL 則只是加上 L，因此 D 變成 DL，E 變成為 EL…等等。

三、G 的乘積則是在個位的位置由 G 和 L 交替出現；十位的位置則有兩次 C、兩次 D，兩次 E…等等。

四、在 K 的規律中，十位的位置增加一，個位的位置則減少一個；十位和個位的和是 K。

這種規律的發生是因為任何值$(n\times9)$只不過是$[(n\times10)-(n\times1)]$。用英語數目單詞和數目來看，2 個 9 是 2 個 $10-2=20-2=18$，3 個 9 是 3 個 $10-3=30-3=27$…等等。

在解釋上面的規則是否有加深你的印象呢？比其一開始什麼都不知道的情

況，現在是不是好背了一些呢？至少知其所以然吧！

再者，小朋友在學習乘法的情境都是由加法而來，一開始在學生沒有學到×符號時，學生依照自己舊有的經驗，當然是用加法做紀錄，

舉例：一隻手有 5 根手指頭，兩隻手有 5+5=10 根手指頭 一隻青蛙有四條腿，八隻青蛙有 4+4+4+4+4+4+4+4=32 條腿

加法的算法是老師還沒有正式教學前每位學生都會的方式解題，此時老師再引導學生「倍的概念」，如青蛙問題中有八個 4，就是「4 的八倍」，計成「4×8」。學生要學習使用「×」來做紀錄，但是計算過程方面還是可以用他們所熟悉的「連加法」。當連加法計算繁複且容易在計算過程中出錯誤，造成一個環節錯，全盤皆錯的情況下，了解連加法是較耗時又耗力情況下，「九九乘法表」的價值就會創造出來的。學生知道這項投資是穩賺不賠的，就會心甘情願的去背誦九九乘法表。許多家長常跑來問老師：九九乘法要不要背？當然要背！在四年級除法的直式計算時，也要靠乘法的經驗才能加速學習。只是我們要問的是學生是在什麼情況之下被要求去背九九乘法表？過與不及都不好，在教學現場呈現兩極化的現象。有些學生早在家長及補習班的「不能輸在起跑點上」的觀念，在小一或是幼稚園階段就開始背誦「九九乘法表」，這樣的學生進入教室中，當老師出個題目給他（她），他就直覺寫出答案，你請他解釋，學生反應：「就是這樣啊，因為背過九九乘法，答案就出來了。」短時間看來，這樣好像也不錯，這單元學得真好，但是如果老師稍微在題目中多加一個無關的條件或是一張考卷中有加法、減法及乘法，只有死背九九乘法的學生可能就會開始跌倒了，因為在平常訓練有素的情況下是不需要去思考題目的，這單元是「乘法」，就全部用乘的，肯定沒問題。不及的部份則是大家所詬病的「葡萄算法」，因為沒有要求背「九九乘法表」，所以慢慢加，82 年版一直到第三階段(6-7 年級)能力指標才有「能嘗試理解乘、除的直式算則」，也就是在六年級前都要忍受學生慢慢加的策略，甚至有些老師認

為課本所提供的所有策略學生都要學會且習作都要配合習作來寫步驟,造成學生與家長的困擾，大家有數學越學越倒退的感嘆。

以下就列出小朋友在用九九乘法表常見的錯誤分析：

$$\begin{array}{r} {}^{2} \\ 12 \\ \times\ 6 \\ \hline 81 \end{array}$$

因為「位值概念不清」，背二六得 12，紀錄成「寫 1 進 2」，然後再六一得六。加 2，等於 8。

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times\ 5 \\ \hline 50 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 130 \\ \times\quad 8 \\ \hline 1048 \end{array}$$

「加法」影響,「5×5」算成「5+5」、「8×0」算成「8+0」。

以下列出讓學生熟練九九乘法表的一些方法：

一、讓學生完成九九乘法表的表格，讓學生去發現規律的地方。如被乘數和乘數顛倒不會影響答案。如 9×3 忘記了，可以從 3×9 去想。

二、自己製作九九乘法表的小卡,正面寫 $\boxed{4\times5}$ ，背面寫答案 $\boxed{20}$ 可以獨自學習或是兩兩合作競賽，以遊戲方式來背誦九九乘法表，讓學生將答案提取的過程變成自動化。

三、利用學生喜歡上網玩電腦遊戲的心理，網站打入關鍵字-九九乘法軟體，可以馬上小試伸手。

四、老師每天上數學課前，全班抽問九九乘法表。

五、老師以數學日誌的方式，給一個算式，要學生利用算式設計題目，檢驗單位量與單位數是否清楚。

九年一貫正式綱要已經在小一正式登場了,暑假過後升上小二的學生開始要學習乘法,我們希望看到的是理解與運算並重,九年一貫總體目標是要培養學生的演算能力、抽象能力、推理能力與溝通能力。以往台灣最引以為傲的數學計算

能力我們希望能帶起來外，在國際評比的重要指標之一是解決問題的能力，也要能夠提升。陳竹村(民 92)提到台灣學生在國際評比測驗 TIMSS-1999 報告書是名列前茅，但是調查結果台灣數學教育偏於講述式教學、且學生喜愛數學的程度並沒有跟評比成績成正比，且這樣的教學法會降低學生的推理能力與、解決非例行性的能力與降低學生的創造力。

因此在教學評量中鼓勵放進一些非例形性題目，讓學生在不同真實情境中應用問題，而不只是磨練計算能力。要學生「知其然，知其所以然」，有成功解題經驗，學生成就感與信心自然會提升。

參考文獻

教育部（1975）。國民小學課程標準。台北：作者。

教育部（1993）。國民小學課程標準。台北：作者。

教育部（2000）。國民中小學九年一貫課程暫行綱要－數學學習領域。台北：作者。

陳竹村(民 92)。TIMSS1999 台灣名列前茅及可能因素探討。教育研究，108，133-146。

蔣治邦、謝堅、陳竹村、吳淑娟、林昭珍（2002）。國小數學教材分析-整數的乘除運算。台北：教育部台灣省國民學校教師研習會。

Fuson, K. C. (2003). Developing Mathematical Power in Whole Number Operations. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, and D. Schifter, (Eds.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics*, (pp. 68 - 94), Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

三年級面積概念之應用

陳志瑲

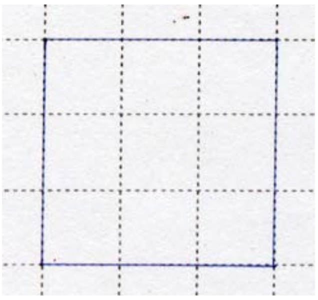
南崁國民小學

壹、 前言

面積是用來表達一固定區域的覆蓋程度或覆蓋面大小的量感。三年級的面積教學單元流程主要是先讓學童進行無空隙的平面鋪設的經驗，再利用疊合、切割及移補來比較兩相異平面圖形的大小，進而培養面積的量感，最後透過平方公分板進行面積的實測。但是教材中的平面圖形都是學童較常見且有規則的四邊形（正方形、長方形、菱形、平行四邊形及等腰梯形），其計算方法主要是以點算法【圖 1：正方形、長方形】和移補法【圖 2：平行四邊形、菱形、箏形及等腰梯形】為主，對於不規則多邊形面積的求法並未提及。不過教材中的教學活動有提出正方形能切割成兩個大小相等的直角三角形，來讓學童了解直角三角形面積是正方形面積的一半【圖 3】，教師若能進一步推演出長方形面積和直角三角形面積的關係【圖 4】，不但可以強化學童紮實的三角形面積概念，學童還可以利用直角三角形面積概念來與其它多邊形面積進行連結，使學童從不規則多邊形面積的求法的操作中，利用直角三角形面積和多邊形圖形面積之間的特性，建構思考如何解決多邊形面積的問題。本單元中由於大部分的學童都是利用點算 1 ㎝^{2} 的正方形面積和切割移補（二個相等面積的直角三角形可以形成一正方形面積或長方形面積）的方法來求出圖形面積，對於不規則的多邊形面積就無法提出解決策略，故教師若能利用長方形（正方形）和直角三角形之間的關係，就可以提供學童運用不同的方法來解決多邊形圖形面積大小的問題。

通訊作者：陳志瑲 chiang013@yahoo.com.tw

圖 1-1 正方形(點算法）

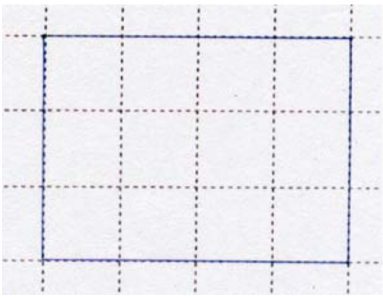


作法：

① 3 × 3＝9

Ans：12 ㎝ ^{2}

圖 1-2 長方形（點算法）

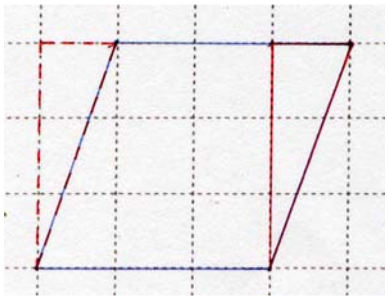


作法：

① 4 × 3＝12

Ans：12 ㎝ ^{2}

圖 2-1 平行四邊形（移補法）



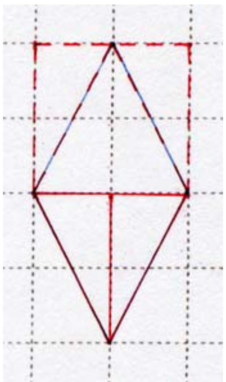
作法：

①將右方的一個三角形移到左方填補一個三角形，即形成一個長方形。

②長方形面積 3 × 3＝9

Ans：4 ㎝ ^{2}

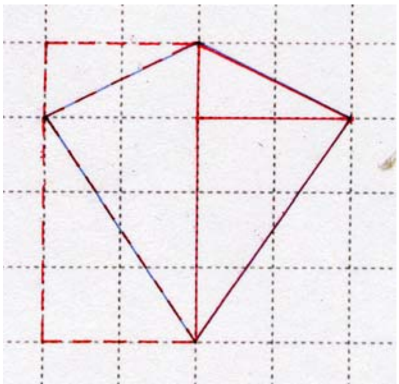
圖 2-2 菱形（移補法）



作法：

①將下方的二個三角

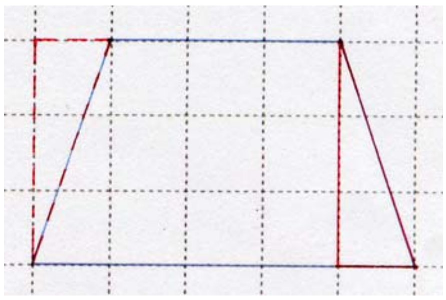
圖 2-3 箏形（移補法）



作法：

①將右方的二個三角形移到

圖 2-4 等腰梯形（移補法）



作法：

①將右方的一個三角形移到左

形移到
上方填補二個三角
形，即
形成一個正方形。
②正方形面積 $2\times 2=4$
Ans：4 ㎝^{2}

左方填補二個三角形，即
形成一個長方形。
②長方形面積 $2\times 4=8$
Ans：8 ㎝^{2}

方填補一個三角形，即形成
一個長方形。
②長方形面積 $4\times 3=12$
Ans：12 ㎝^{2}

圖 3：透過正方形切割成二個全等的等腰直角三角形，使學童理解正方形面積是由兩個全等
的等腰直角三角形拼湊在一起，建構等腰直角三角形的面積是正方形面積的一半。

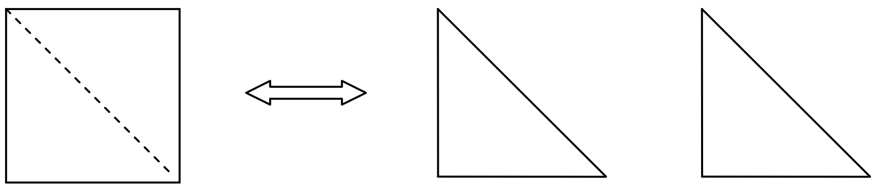
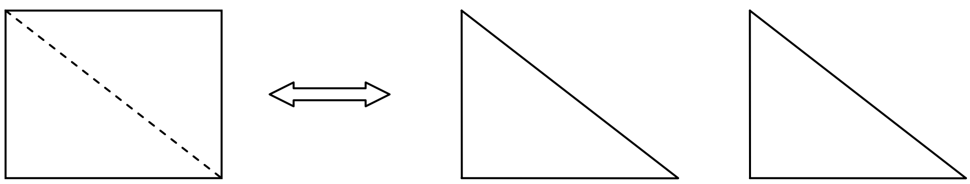


圖 4：透過長方形切割成二個全等的直角三角形，使學童理解長方形面積是由兩個全等
的直角三角形拼湊在一起，建構直角三角形的面積是長方形面積的一半。



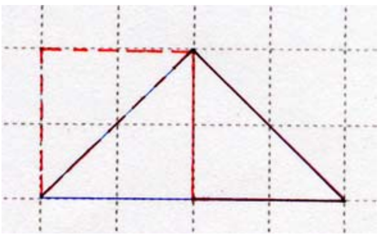
<u>由圖 3 和圖 4 歸納：直角三角形面積可由長方形面積（正方形面積）的一半求得。</u>

貳、 設計動機

三年級的面積教學單元中，主要是以點算法和移補法為主的教學方法，來計算出圖形面積的大小。布題上如果出現不規則的幾何平面圖形，學生並無法利用上述兩種方法來解決問題，部分的教師同樣會出現該如何解決不規則平面圖形的疑惑，於是為了解決多邊形圖形的面積大小問題，於是針對不規則多邊形圖形做為本單元的延伸活動，利用直角三角形和長方形（正方形）的關係提出累加法、填補扣除法和扣除法來提供給各位教師作為參考，希望能對大家有所助益。茲以三角形【圖 5】、四邊形【圖 6】、五邊形【圖 7】為例，活動分述如下：

一、 透過平方公分板的切割進行三角形面積的實測

圖 5-1：**移補法**



作法：

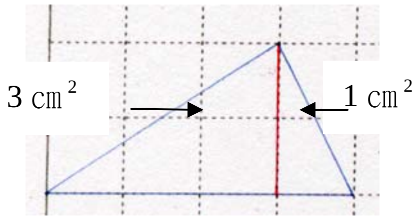
① 將右方的一個直角三角形移到左方填補

一個直角三角形，即形成一個正方形。

② 2 × 2＝4

Ans：4 ㎝ ^{2}

圖 5-2：**累加法**



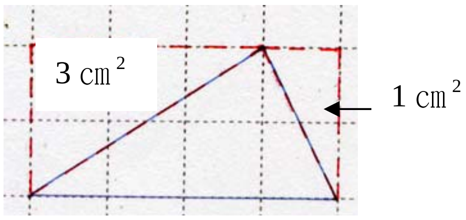
作法：

① 切割成二個三角形後，再相加

② 3＋1＝4

Ans：4 ㎝ ^{2}

圖 5-3：**扣除法**



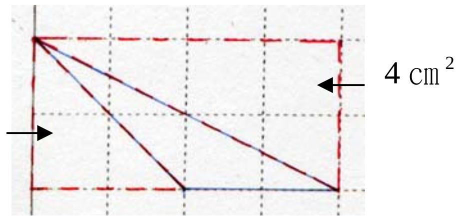
作法：

① 算出長方形面積 $4 \times 2 = 8$

② $8-(3+1)=4$

Ans：4 cm²

圖 5-4：**全體扣除法**



作法：

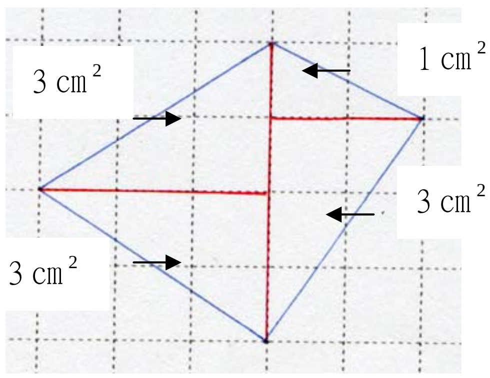
① 算出長方形面積 $4 \times 2 = 8$

② $8-(4+2)=2$

Ans：2 cm²

二、 透過平方公分板的切割進行四邊形面積的實測

圖 6-1：**累加法**



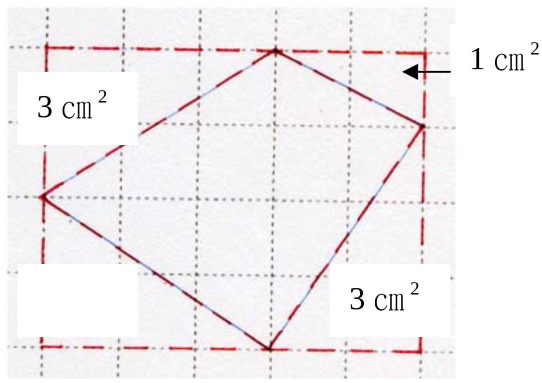
作法：

① 切割成 4 塊直角三角形

② $3+3+1+3=10$

Ans：10 cm²

圖 6-2：**全體扣除法**



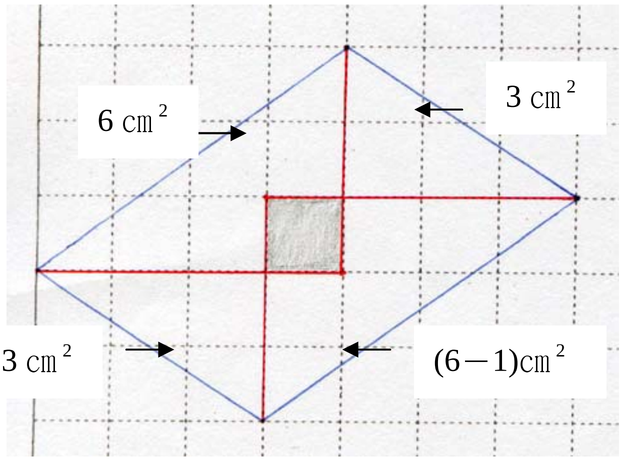
作法：

① 長方形面積 $5 \times 4 = 20$

② $20-(3+3+1+3)=10$

Ans：10 cm²

圖 6-3：**填補扣除法**



作法：

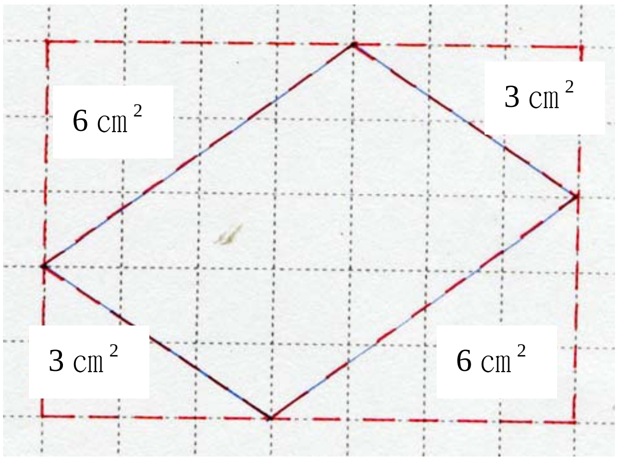
①填補黑色圖形部分擴展成直角三角形，

再扣除 1 cm² 的正方形

② 6＋3＋3＋(6－1)＝17

Ans：17 cm²

圖 6-4：**全體扣除法**



作法：

① 長方形面積 7 × 5＝35

② 35－(6＋3＋6＋3)＝17

Ans：17 cm²

三、 透過平方公分板的切割進行五邊形面積的實測

圖 7-1：**累加法**

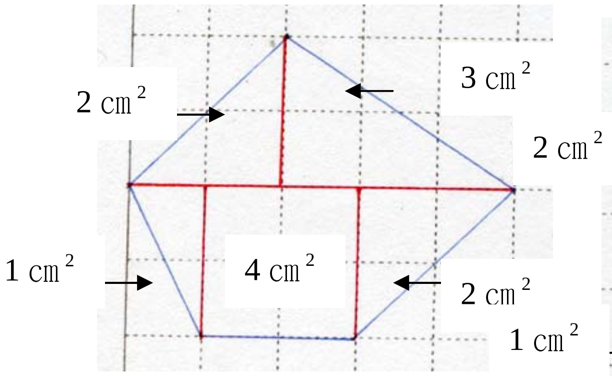
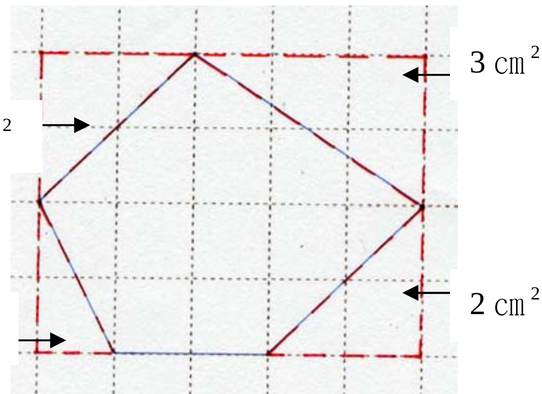


圖 7-2：**全體扣除法**



作法：

① 切割成 4 塊直角三角形和一個正方形

② (2＋1＋3＋2)＋4＝12

Ans：12 cm²

作法：

①長方形面積 5 × 4＝20

② 20－(2＋1＋3＋2)＝12

Ans：12 cm²

圖 7-3：**累加法**

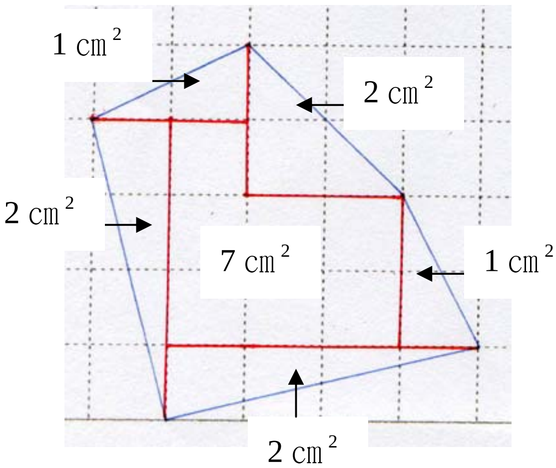
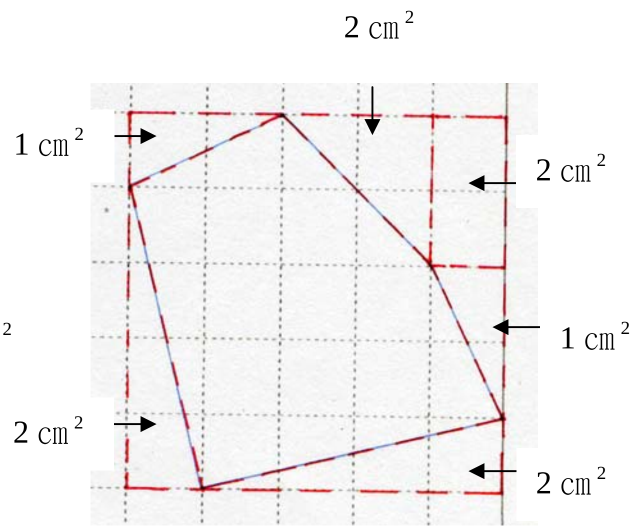


圖 7-4：**全體扣除法**



作法：

① 切割成 5 塊直角三角形及中間區塊

② (1＋2＋2＋1＋2)＋7＝15

Ans：15 cm²

作法：

① 長方形面積 5 × 5＝25

② 25－(1＋2＋2＋1＋2＋2)＝15

Ans：15 cm²

圖 7-5：**填補扣除法**

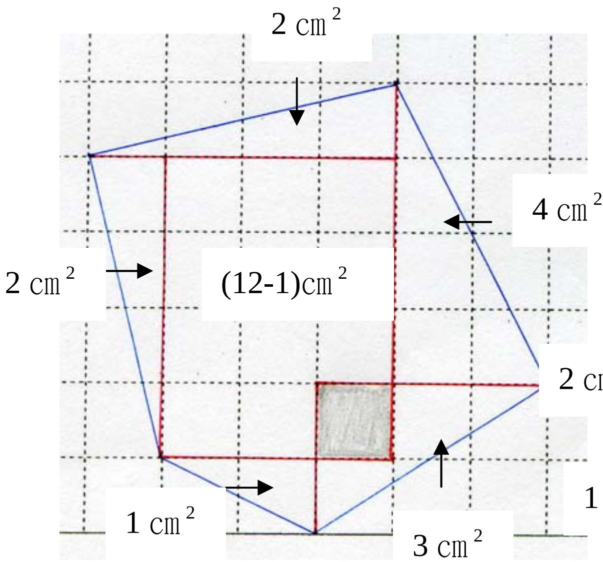
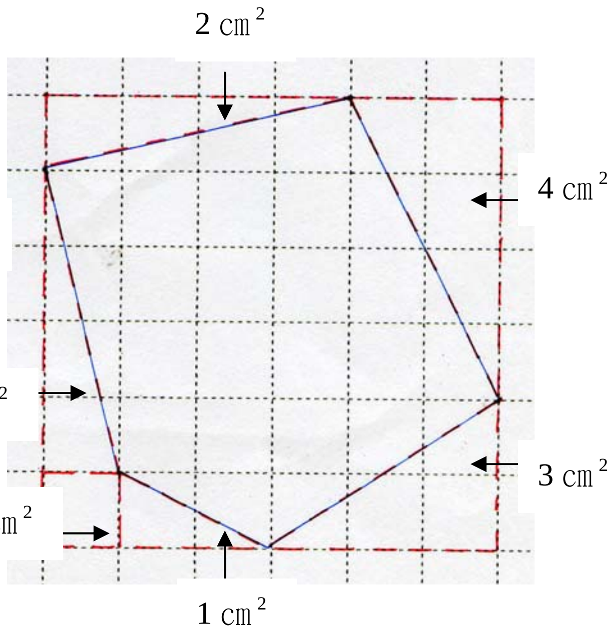


圖 7-6：**全體扣除法**



作法：

① 填補黑色圖形部分擴展成長方形，再扣除

1 cm² 的正方形

② 2＋4＋3＋1＋2＋（12－1）＝23

Ans：23 cm²

作法：

① 長方形面積 6 × 6＝36

② 36－（2＋4＋3＋1＋1＋2）＝23

Ans：23 cm²

參、 結語

三年級學童從平分公分板的大小來培養面積的量感，從直接比較二圖形面積的大小開始學習面積的意義，進而學會點算 1 平方公分來實測面積的大小，並在本單元的教材中長方形（正方形）和直角三角形之間的概念關係有進一步的了解，所以對較有規則圖形面積大小的點算較沒有困難。但對於不規則圖形的面積

求法感到困難而無從下手，當學會從圖形的內部進行切割，再將各區塊的直角三角形（有時會有數個小正方形）加在一起而求出答案，對教材內容才有更多一些的認知，但有時切割難度太高【註 1】及不能剛好都切割成直角三角形而發生問題【註 2】，因為必須填補成直角三角形（或長方形），再進行扣除填補的區塊，以計算出多邊形的圖形面積。雖然大多數的學童都能了解切割－填補－扣除的意義，但常常會忘記扣除重複的圖形的面積，而使得計數發生錯誤，無法正確算出答案，造成面積點算的迷思【註 3】。

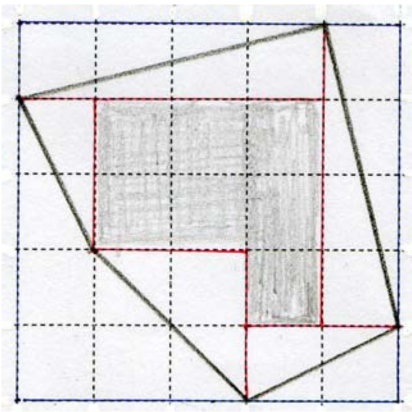
本活動主要是透過直角三角形的特性來介紹移補法、累加法、填補扣除法及全體扣除法，所以在進行之前必須讓學童先建立直角三角形和長方形（正方形）的關係，然後透過切割才能求面積的大小。本活動主要是要利用全體扣除法的策略來進行面積的實測，在實測之前必先將多邊形圖形框成一長方形，再將圖形外部的直角三角形（有時會有數個小正方形）扣除，以求出答案。希望學童在利用全體扣除法的時候，可以與移補法、累加法及填補扣除法互相比較，建立平面圖形面積的多樣的解法，並從操作中學習思考多邊形面積其它的解題方式，以提昇學童的解題策略與思考推理的能力。

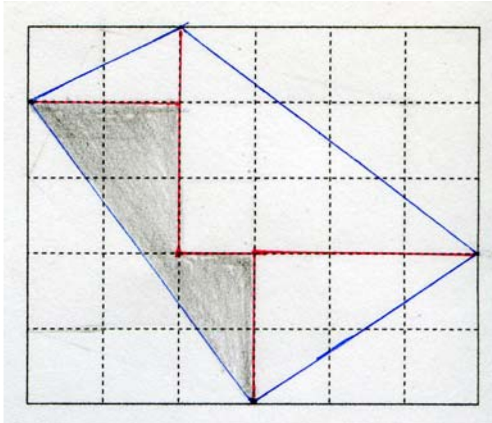
【註 1】**<u>切割難度太高</u>**

切割成 5 塊直角三角形後，剩下的部份可點算出 1 cm^2 的正方形個數而求出答案，但切割的難度太高，不是學童能輕易就切割成功。

【註 2】**<u>無法全部切割成直角三角形</u>**

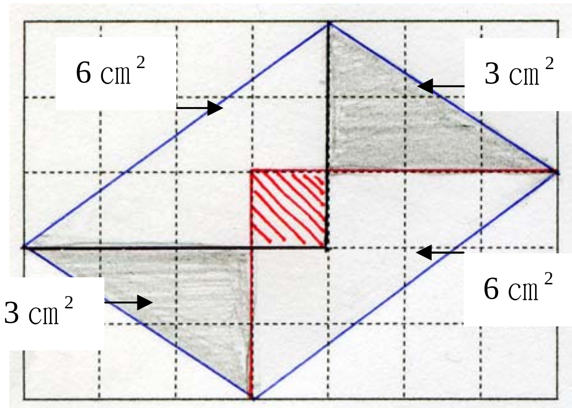
切割成 3 塊直角三角形後，第 4 塊無法形成直角三角形而不會計算。





【註 3】**<u>錯誤的迷思</u>**

下圖中的四邊形由內部切割成4塊直角三角形，但中間的紅色斜線部分面積是重複的區塊，大多的學童常會忘記扣除，而無法算出正確答案，因而造成學童的迷思現象。



作法：①6＋3＋6＋3＝18

② 18－1（常忘記扣除）＝17 ㎝²

活動報馬仔

一、 2006/12/14~2006/12/16

第二十二屆中華民國科學教育學術研討會

地點：國立臺灣師範大學公館校區

二、 2006/11/03~2006/11/04

2006 數理教學及師資培育研討會：統整課程教學及師資培育

地點：國立彰化師範大學白沙大樓國際會議廳

三、 2006/11/29

「創意數學教學」研討會

地點：國立屏東教育大學應用數學系

四、 2006/11/11~2006/11/12

國科會科教處數學教育成果發表會

地點：國立臺灣師範大學

五、 2006/12/05~2006/12/19

屏東教育大學邀請 Dr. J. W. Wilson 講學

主題：當代資訊融入數學教學之新趨勢

地點：國立屏東教育大學數理教育研究所

稿 約

一、本刊徵選之數學教育刊物為：

（一）本刊以徵選實務性的數學教育刊物為主，舉凡任何數學創新教學之方法或策略、數學教學實務經驗、數學課程設計與實踐之心得分享等皆為本刊之首要選擇標的；

（二）研究文章（包括以實驗、個案、調查或歷史等研究法所得之結果，和文獻評論、理論分析等）；

（三）短文（包括研究問題評析、數學教育之構想、書評、論文批判等）；以及

（四）其他符合本刊宗旨之文章。

二、本刊所刊之文章，需為報導原創性教學或研究成果之正式文章，且未曾於其他刊物或書籍發表者（在本刊發表之文章未經台灣數學教育學會同意，不得再於他處發表）。

（一）來稿請注意下列事項：

1. 來稿請以中文撰寫，力求通俗易讀，須為電腦打字，每篇以不超過 6000 字為原則（特約稿不在此限），以電子郵件傳送。
2. 來稿請附中英文篇名、作者姓名及服務機關，作者姓名中英文並列，若有一位以上者，請在作者姓名及服務機關處加註（1）、（2）、（3）等對應符號，以便識別，服務機關請寫正式名稱。
3. 來稿請附中英文摘要，並於摘要後列明關鍵詞彙（key words），依筆劃順序排序（以不超過五個為原則），英文關鍵詞彙則須與中文關鍵詞彙相對應。
4. 文稿若為譯文，請附原文影本及原作者同意函，並請註明原文出處、原作者姓名及出版年月。
5. 凡人名、專有名詞等若為外語者，第一次使用時，請用（）加註原文。外國人名若未有約定成俗之譯名，請逕用原文。
6. 附圖與附釋請於文後，並編列號碼，並在正文中註明位置。
7. 文末參考文獻依作者姓氏分別編號排序：中、日文依筆劃多寡排列；西文（英、法、德…等）依字母順序排列；若中、日、西文並列時，則先中、日文後西文。至於參

考文獻之寫法如下：

（1）期刊論文，請依下列順序書寫：作者、出版年（西元）、論文篇名、期刊名稱、卷期、頁數。

例：張湘君（1993）。讀者反應理論及其對兒童文學教育的啟示。*東師語文學刊，6*，285-307。

（2）圖書單行本，請依下列順序書寫：作者、出版年（西元）、書名、版次、出版地、出版社、頁數。

例：張春興（1996）。*教育心理學*。台北：東華。頁64-104。

8. 稿件順序為：首頁資料（題目、作者真實姓名及服務機關、通訊地址及電話；若需以筆名發表，請註明）、中文摘要、正文（包括參考文獻或註釋）、末頁資料（以英文書明題目、作者姓名及服務機關、並附英文摘要）及圖表（編號須與正文中之編號一致）。

（二）本刊對來稿有權刪改，不同意者請在稿件上註明。

（三）來稿刊出，版權為台灣數學教育學會所有。

（四）作者見解，文責自負，不代表本學會之意見。

（五）來稿請 e-mail 至：dcyang@mail.ncyu.edu.tw