ISSN 1815-6355

台灣數學教師(電子)期刊

Taiwan Journal of Mathematics Teachers

第12期

台灣數學教育學會

2007年12月

台灣數學教師(電子)期刊
Taiwan Journal of Mathematics Teachers
2007 年 12 月出版
NO.12 2007

發行人： 林福來教授

出版者：台灣數學教育學會

地址：台北市 116 汀州路四段 88 號國立台灣師範大學數學系 M212

電話：02-29307151

電子郵件信箱：tame@math.ntnu.edu.tw

網址：
http://www.math.ntnu.edu.tw/~tame/index.htm

總編輯：楊德清 dcyang@mail.ncyu.edu.tw

地址：嘉義縣民雄鄉文隆村 85 號
　　國立嘉義大學數學教育研究所

電話：05-2263411-1924

發行宗旨

一、本刊為一實務性的數學教育刊物，出版目的如下：

1. 積極發揚台灣數學教育學會之成立宗旨：研究、發展、推廣數學教育，使台灣學生快樂學好數學。
2. 提升數學教師教學品質、數學教育研究品質及促進數學教學策略與方法之交流。
3. 探討數學教育的學術理論與實務現況，以促進理論與實務之結合，進一步提升數學教學之內涵。
4. 提供數學教育課程、教材與教法等實務經驗，包括數學遊戲、DIY 教具之分享，以供未來之教學與研究參考之用。
5. 針對多數學生特定迷思概念之教學引導，如學生易有的錯誤型態及如何釐清觀念等。
6. 介紹國內外數學教育現況。

二、本刊內容以充實高中、國中與小學數學教學、課程與教材為主，以提供所有關心數學教育人士之教學資源與參考依據。

三、本期刊以季刊方式（3 個月一期，一年共 4 期）發行，分別於每一年的 3、6、9、12 月發行。

四、本期刊採電子與紙本方式同時發行。

ISSN 1815-6355

台灣數學教師（電子）期刊
Taiwan Journal of Mathematics Teachers

第 12 期

2007 年 12 月

台灣數學教師（電子）期刊

目錄

第 12 期 2007 年 12 月

ISSN 1815-6355

小學一般智能資優資源班新生數學解題歷程與策略之分析

黃家杰[1]　梁淑坤[2]

（1. 高雄市明華國中　2. 國立中山大學教育研究所）

摘要

本研究透過 Schoenfeld 數學解題歷程六階段，分析小學一般智能資優生數學解題歷程及解題策略，再提供教師具體的教學建議。六位參與者為小學三年級表達能力較佳的資優生。研究者以專家效度方式篩選出四題非例行性數學問題，再讓學生以放聲思考的方式進行數學解題，並採專家信度進行原案分析。

研究結果發現，第一，在解題歷程階段與成敗方面，資優生數學解題大都符合 Schoenfeld 解題歷程，其中四位呈現較多階段歷程比較會解題；更有一位在各題解題過程中皆無驗證階段，答對二題；還有一位則較少出現分析、計畫、探討、與驗證階段，僅答對一題。第二，在資優生的解題策略方面，資優生的解題策略具多元性且靈活，並非僅嘗試單一策略。研究者發現，資優生在各題解題過程中靈活運用抽象表徵、繪圖表徵、逆推、替代、及嘗試錯誤等策略，來輔助瞭解及探索題意完成解題。

至於教學建議，六位學生雖然皆為資優生，但並未所有的一般智能資優生其探討、計畫、與驗證等能力都具備。所以，建議未來資優教育的教學，可利用數學來訓練學生探討、計畫與驗證等能力；善用團體討論的方式，讓學生獲得更多的解題策略。藉由數學解題，培養資優生高層次的思考能力。

關鍵字：資優教育、數學解題

通訊作者：梁淑坤　law@mail.nsysu.edu.tw

壹、緒論

一、研究背景

我國資優教育自 1973 年實驗計畫至今，歷經三十餘年。吳武典（2003）提到特殊教育基本理念在因材施教，注重個別化教學，無論是能力分班、分化性課程或加速，均可提高資優教育這一類「特殊教育需求」，學生挑戰性經驗或充實的機會，以盡展所能。現今小學階段大都由以往集中式的數理資優班轉為招收一般智能（general intellectual ability）資優資源班， 採分散式的模式來進行教學，而不再以「數理」資優生為主。所謂的一般智能資優生（gifted student）依據教育部頒鑑定標準第十四條規定是指在記憶、理解、分析、綜合、推理、評鑑等方面較同年齡具有卓越潛能或傑出表現者，其智力或綜合性向測驗得分在平均數正一點五個標準差或百分等級九十三以上者。在小學階段以發展資優生潛能，拓展資優生在應用、分析、綜合、評鑑等方面高層次的思考能力訓練，而不應僅停留於知識記憶與理解的課程訓練。

強調以個別化與高層次思考能力訓練的資優教育觀點，我們發現無論在國內或國外資優教育文獻（Gallagher, 1985; 毛連塭，2001）都強調學生問題解決（problem-solving）能力的培養，它是一種思考能力的訓練。在資優教育教學歷程當中，「數學」也用來訓練學生問題解決與發現問題的能力（Gallagher, 1985）。

本研究主要探究國內小學資優班新生在數學解題上的表現，有利於未來資優班教師在規劃從數學解題來訓練小學資優生問題解決思考能力的課程，並讓普通班教師了解資優生在數學解題方面的思考模式。

二、研究目的

根據上述研究背景，本研究目的針對高雄市經一定程序鑑定出來小學一般智能資優班新生，探究資優生數學解題歷程（process）；及探究資優生數學解題的策略（strategies）。

貳、文獻探討

一、解題歷程與相關研究

Polya (1945)、Schoenfeld (1985)、Lester (1985)及梁淑坤(1999)皆曾提出數學解題歷程。研究者深入各學者所提出的解題歷程的內容發現，其彼此之間是相似的，只是階段分類不同。以 Schoenfeld 的解題歷程六階段的分類較為詳細，易於分析小學生的解題歷程，其分別為讀題、分析、探討、計畫、執行、及驗證，適合作為資優生數學解題歷程分析的理論依據。

表 1 數學解題歷程理論比較表

<table>
<tr><th>理論提出者</th><th>階段一</th><th>階段二</th><th>階段三</th><th>階段四</th><th>階段五</th><th>階段六</th></tr>
<tr><td>Schoenfeld (1985)</td><td>讀題</td><td>分析</td><td>探討</td><td>計畫</td><td>執行</td><td>驗證</td></tr>
<tr><td>Polya (1945)</td><td colspan="2">了解問題</td><td colspan="2">擬定計劃</td><td>執行計劃</td><td>回顧解答</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Lester (1985)</td><td colspan="3">定向</td><td>組織</td><td>執行</td><td>驗證</td></tr>
<tr><td>問題覺察</td><td>目標分析</td><td>問題理解
歷程評估</td><td>計畫發展</td><td>執行</td><td>解答評估</td></tr>
</table>

根據數學解題歷程相關研究(Sriraman, 2003; 孫達剛，1992；劉貞宜，2001)發現，數學能力高的學生都能符合數學家所提出的解題歷程。就 Schoenfeld (1985)的解題六階段而言，一般智能的資優生，其思考能力優於一般人，在普通班的數學成績亦在全班前 20%。所以，資優生的解題歷程應該也符合讀題、分析、探索、計畫、執行、驗證等六階段。

二、解題策略與相關研究

Schoenfeld (1985)在 Mathematical problem solving 一書提到，他在加州大學 Berkeley 分校針對大學生所做的解題相關研究發現，這群大學生常用的解題策略

包括：類推、引入輔助元素、輔助問題、歸謬法、由已知來推論、分解或重組、執行相關問題、畫圖、類化、使用反論、特殊化、簡化、間接證明、變化問題，逆推。他的研究是針對大學生，而且題目比較複雜。然而，本研究所運用的題目困難度要需與參與者能力相當，小學生能否完全應用上述策略於解題過程，值得疑義。

劉貞宜（2001）綜合 Kilpatrick (1967)的解題策略及 Webb (1975)的特殊解題策略歸納成十五種策略。除此之外，劉貞宜（2001）針對建中三位數理資優生研究發現，數學資優生常利用解題策略來理解、探索方向及突破困難，且解題策略的使用多元，也常利用解題策略來幫助自己理解、思考、探索、聯結及推理，讓整個解題變得更順暢及快速。另外，劉貞宜發現能力特優的數學資優生使用策略明顯多於能力中上即能力稍弱的資優生。Cohen 和 Stover (1981)發現，資優學生在解題時，會自行將較難的字彙換掉，將句子的長度縮短，將無關資料刪除及作出輔助圖表。

綜合以上所述，及根據研究者之教學經驗，研究者發現資優生曾應用過的解題策略如：繪圖表、逆推、引入輔助元素（替代）歸納找尋規律及嘗試錯誤等策略，符合上述學者所提之數學解題策略。

參、研究方法與設計

一、研究方法

本研究之研究方法採質性研究的方法，以放聲思考（thinking aloud）與紙筆測驗蒐集學生解題歷程的資料，並輔以訪談蒐集相關資料。將資料依據 Schoenfeld (1985)的「讀題、分析、探討、計畫、執行、驗證」等數學解題六階段編碼分析以了解學生的解題歷程，並分析學生解題歷程中所使用的策略與情意特質。在信效度方面，數學題目的效度採專家效度，另外，採專家評量一致性來增加原案分析之信度。

二、研究對象

本研究以高雄市 2003 年度鑑定合格的某小學三年級資優生為對象。考量研究之方便性，以研究者方便取樣之學校為樣本對象。因學生為鑑定合格之一般智能資優生，其成績表現皆在班級前 20%，團體智力測驗在 1.5 個標準差以上。所以，研究對象挑選以語言表達能力較佳的學生為主，有利於放聲思考之資料蒐集。研究對象一共挑選六位學生，其中男生三位，女生三位。

三、研究工具

問題以非例行問題為主，所謂非例行性問題，就是解題者未曾練習過的問題，或者是曾經練習過但時間已久而全然忘記的問題。問題設計主要參考二年級及三年級數學奧林匹克（徐則洲、陳潔雲、李金生、李濟元，2000a，2000b）、黃敏晃（2000）撰寫的*規律的尋求*，解題相關研究文獻（Schoenfeld, 1985; 謝淡宜，1998，1999）等。研究者挑選出十題非例行性問題，並將該十題問題之數學能力區分為：尋求規律、數的概念、邏輯推理等三類。

接著，研究者請三位任教於國小低年級五年以上且具碩士學位之教師，依據自訂問題篩選標準及學生語文能力與數學能力，篩選出適合且非學校內數學教學的例行性問題，也就是非例行性問題。從三位教師勾選的八題題目中挑選六題得票數較高的問題（見表 2。題號：2、3、1、8、5、10）進行預測。在進行預測之前，研究者先請六位三年級普通班學生進行數學題目語意的修正，以符合三年級學生在數學問題題意的理解。題意修正完畢後，研究者請二位資優生進行預測（pilot study）篩選出四題（題號：3、1、8、5）題目作為本研究解題佈題的「數學題目」。題目分別如下：題號一，為九宮格題「請將 1、2、3、4、5、6、7、8、9 這九個數字填入空格中，使橫、直、斜加起來的和相等。」題號三，為月曆題「2003 年 3 月 1 日是星期三，請問 2003 年 7 月 9 日是星期幾？」題號五，為直式加法「下面直式加法算式中△、☆、□這三個符號各代表 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 中的某一個數字，△、☆、□這三個符號代表的數字不可以重複，請找出△、☆、□這三個符號各代表哪一個數字？ 」

$$
\begin{array}{cccc}
 & & \triangle & \text{☆} \\
+ & & \text{☆} & \square \\
\hline
 & \text{☆} & \square & \text{☆}
\end{array}
$$

題號八，為蝸牛題「一個井有 10 公尺深，一隻蝸牛總是在白天往上爬 5 公尺，而在夜晚時往下滑 4 公尺。如果這個蝸牛從井底開始爬，請問蝸牛幾天後就可以爬出井外？（蝸牛爬到井口後就不會再往下滑了）。」

表 2 數學題目分析表

數學能力	題號	問題名稱	備註
尋求規律性	2	數三角形	練習放聲思考題
	3	月曆	本研究數學題目
數的概念	1	九宮格	本研究數學題目
	8	蝸牛	本研究數學題目
邏輯推理	5	直式加法	本研究數學題目
	10	挑水	學生常誤解題意，不列入本研究題目。

經三位國小低年級老師勾選後，挑選六題數學題目，請六位三年級學生進行語意修正後，並請二位三年級資優生預測後，篩選出四題作為本研究佈題的數學題目。其中挑水題學生較易誤解題意，不列入本題研究。而三角形題，學生都直接看圖直接在數三角形，且容易數錯，亦放棄該題，將該題列入解題前的放聲思考練習題。其餘月曆、九宮格、蝸牛及直式加法等四題經預試後發現較適合本研究之數學題目。並依其難易度「蝸牛、直式加法、月曆、九宮格」為排序讓學生進行解題。學生在解題過程並無時間限制，主要是要瞭解學生的整個解題歷程，整個解題歷程完成的時間則以學生自行決定該題已完成解題或停止繼續作答。

四、資料分析

根據相關研究文獻分析與研究目的，本研究主要探討一般智能資優生在解題歷程、解題策略等方面為主要架構。在解題歷程方面，探究小學一般智能資優新生在各階段解題歷程表現情形。解題歷程依據 Schoenfeld (1985)「讀題、分析、探討、計畫、執行、驗證」六大階段為主要觀察分析架構。在數學策略方面，主要是分析學生在解題歷程中擅用哪些策略輔助解題，根據文獻整理在數學解題方面的策略包括：繪圖表徵、逆推、歸納找尋規律、嘗試錯誤及替代等。

肆、研究結果與分析

本研究針對六位三年級一般智能資優資源班學生為研究對象，採立意取樣選取三位女生：小姮、小茹、小珍等；三位男生：小迅、小揚、小涂等。施予蝸牛、直式加法、月曆、九宮格等四題非例行性問題。以放聲思考蒐集資料並撰寫文字稿。研究者根據逐字稿進行分析，並抽取小姮蝸牛、小珍月曆、小涂直式加法、小迅九宮格等四題，請曾修過數學解題之研究生，進行專家一致性的信度檢定，二者分析結果完全一致。本研究主要分析資優生「數學解題歷程」與「數學解題策略的應用」等二部分。

一、數學解題歷程分析方面

本研究發現（表 3），三年級資優班新生在解題過程，解題成功較多者，如小姮、小茹、小迅、小涂，他們大都會出現如 Schoenfeld（1985）所題的讀題、分析、探討、計畫、執行、驗證等階段。而解題成功機率較少的小珍可以發現，她較少有分析與計畫的階段。深入探討小珍的解題歷程發現，小珍一看完題目就立即著手解題，四個題目都有一個共同的特徵，就是小珍會讀題後立即寫上數字運算式子，或立即在九宮格上填上數字，結果都會發現自己錯了。在解題後被問各題各種解題方式時，其皆回答「亂猜」的，或是「直覺」要這樣寫，由此可知，其未經過深思的分析與計畫就立即執行解題。至於小揚，則在四題解題後皆無驗證階段。就整體而言，研究者發現，這六位資優生在解題時，不是每次都會出現

外顯的計畫階段。雖然，本研究希望學生將心中所想的儘量說出來，也透過練習題讓學生練習放聲思考的解題，但在解題過程未顯現出計畫的階段亦未表示學生完全無計畫階段，或許已在心中產生而未外顯表達出來，在本研究中並未對此深入探究，此乃本研究之限制。另外，本研究結果，與劉貞宜（2001）針對三位建中數學資優生的研究結果發現相同，也就是，能力越高的學生解題路徑越多，所呈現的歷程階段越多，而能力較弱的小珍則常常使用無系統的假設或嘗試錯誤來探索題目。

表 3 解題歷程階段統計表

題目	蝸牛						直式加法						月曆						九宮格					
歷程　學生	姮	茹	珍	迅	揚	涂	姮	茹	珍	迅	揚	涂	姮	茹	珍	迅	揚	涂	姮	茹	珍	迅	揚	涂
成敗	成	成	敗	成	敗	成	成	成	成	成	成	成	成	成	敗	敗	敗	成	成	敗	敗	成	成	成
讀題	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
分析	*	*		*		*	*	*		*	*		*			*	*		*	*	*	*	*	*
探討監控	*	*	*	*	*	*	*	*		*	*	*	*	*		*		*	*		*	*	*	*
計畫		*		*				*			*		*				*	*	*	*	*	*	*	*
執行	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
驗證	*	*		*		*	*	*		*		*		*		*		*	*			*		*

本研究的解題歷程圖（圖 1）是依據 Schoenfeld（1985）的方式表示。因受限於篇幅，僅以抽象表徵的小迅為例。根據圖 1 可以發現，小迅符合 Schoenfeld(1985)讀題、分析、探討、計畫、執行、驗證等六個階段階段，唯計畫階段較不明顯。我們亦可發現，小迅依循著讀題、分析、計畫、執行、驗證之順序進行。小迅都以抽象表徵的方式來完成。如「先扣除最後一次直接跳上去的蝸牛」、「十位數著手邏輯推理的直式加法」、「除七餘五的月曆」、「九八七要分開

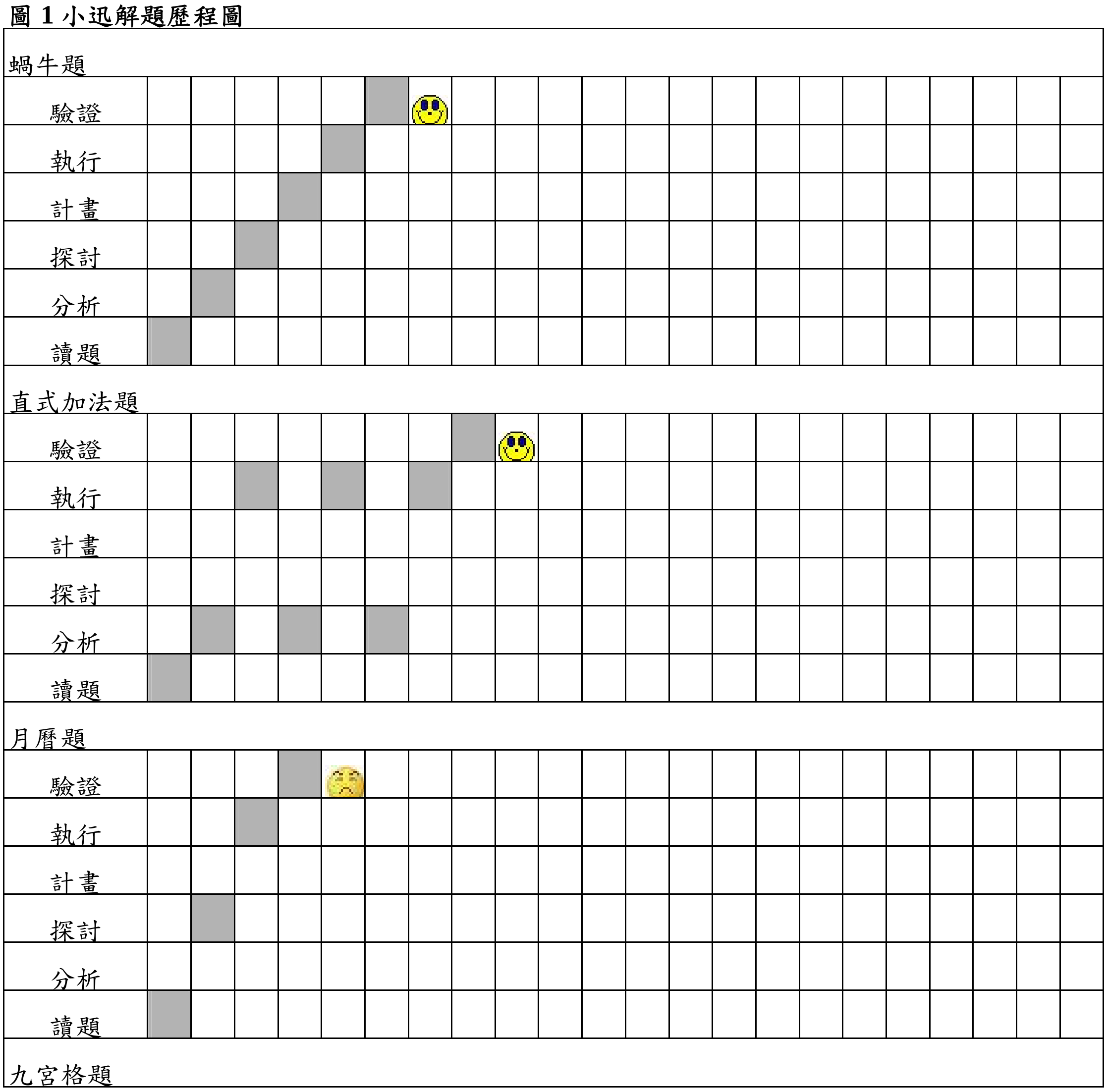
的九宮格」等四題。

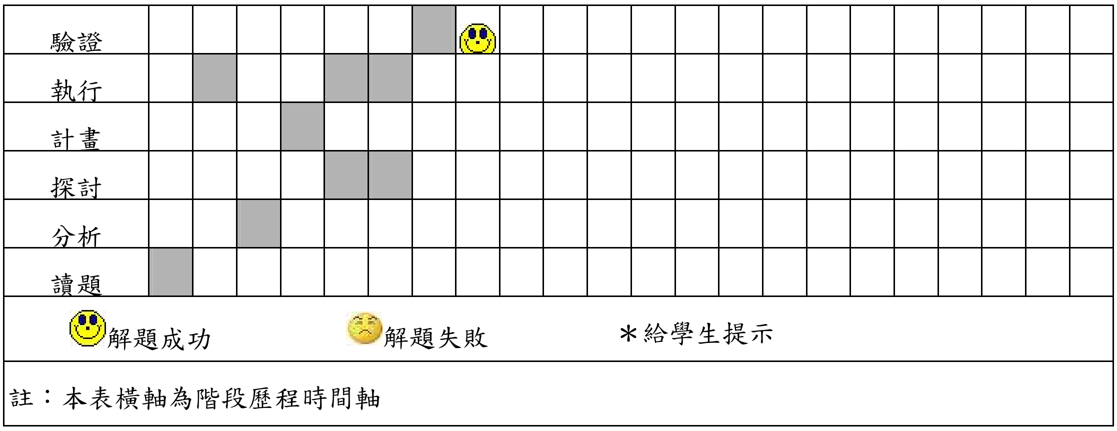
第一題：先扣除最後一次直接跳上去的蝸牛

「*一個井有10 公尺深，一隻蝸牛總是在白天往上爬5 公尺，而在夜晚時往下滑4 公尺。如果這個蝸牛從井底開始爬，請問蝸牛幾天後就可以爬出井外？(蝸牛爬到井口後就不會再往下滑了)。*」

小迅在蝸牛題的解題歷程依循著讀題、分析、計畫、執行、驗證等歷程與順序進行，並在過程中展現監控探索階段的行為。然而，在小迅的解題歷程逐字稿中發現，其讀題後，停了一會，就分析並提出計畫說「*它說一個井有十公尺，可是蝸牛白天往上爬五公尺*」,「*那牠最後一次要爬的時候牠直接跳上去，就不會再*

圖 1 小迅解題歷程圖





往下滑了」，小迅注意到問題的所有條件，亦搜尋條件和目標的關連性。於是小迅以抽象表徵的方式執行，先將他認為最後一次會直接跳上去的計畫，將十公尺先減掉最後一次白天往上爬的五公尺。接著以白天所爬的距離五公尺，減掉晚上滑下的四公尺，得到每天早晚僅能上升一公尺，將扣除最後一次白天爬升五公尺所剩餘的距離，除以每天僅能上升的一公尺，求得剩餘距離需花五天的時間來完成。將五天再加上最後一次往上爬的時間，共花費六天時間來完成。之後，小迅重新檢查其整個計算過程，驗證確定無誤後，表示完成。小迅在整個蝸牛題的解題過程，已覺察並瞭解到題目強調的「蝸牛爬到井口後就不會再往下滑」，並依照其一定計畫，先扣除最後一次白天往上爬的距離來執行完成解題，其所採取的行動具有方向與重點，符合探討階段之行為。另外，筆者發現，小迅在看完題目後，停了一會才進行，筆者認為小迅在那個時間，針對題目進行初步分析與計畫。

第二題：十位數著手邏輯推理的直式加法

「*下面直式加法算式中△、☆、□這三個符號各代表 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 中的某一個數字，△、☆、□這三個符號代表的數字不可以重複，請找出△、☆、□這三個符號各代表哪一個數字？* 」

$$\begin{array}{cccc} & & \triangle & \star \\ + & & \star & \square \\ \hline & \star & \square & \star \end{array}$$

小迅在本題的解題過程，在讀題後，以分析與執行等二階段相互交替的方式進行解題。小迅從十位數著手，分析發現二個十位數字相加，其進位不會超過二，於是執行推得和的百位數字星形為一。接著分析個位數的線索以尋求正方形的答

案為目標，小迅提出「*一加多少會是一樣？*」，接著執行求得正方形為零。最後再依據三角形加一等於十的方式，求得三角形為九。整體解題行動而言，具有一定的方向，且有掌握到該題解題之重點，符合探討之行為，另外，小迅還是會將整個解題過程在檢查一次後，結束其解題活動。唯在本題解題歷程中，未明顯見到小迅有計畫之行為。

第三題：除七餘五的月曆

「*2003 年 3 月 1 日是星期三，請問 2003 年 7 月 9 日是星期幾？*」

小迅在本題的表現，亦未聽到明顯的計畫階段，但其仍可依照一定的方向與重點的探討監控階段特質來進行解題。整個解題歷程大至仍依循著讀題、分析、執行、驗證等順序與階段。小迅讀題後，並未立即解題，其停了一下，分析探討大月、小月的日數，與月曆經驗相結合。執行由三月一日到七月九日一共有一百三十一天，以每週七日為單位，將一百三十一除以七，餘五。小迅由星期四開始分配剩餘的五日，答案為星期一。最後小迅檢視自己的計算過程驗證後，並未覺察一百三十一天包含三月一日，剩餘的五日應由星期三開始計算，本題正確答案應為星期日，而非小迅所計算的星期一。

第四題：九八七要分開的「九宮格」

「*請將 1、2、3、4、5、6、7、8、9 這九個數字填入空格中，使橫、直、斜加起來的和相等。*」

小迅在本題的解題歷程，可以看出其充分表現出讀題、分析、計畫、執行、驗證、探討監控等六個階段。小迅讀題後，想了一下，分析「一」到「九」數字間的關係，因為五在這列數字的中間位置，於是決定將五放置在九宮格中間，並計畫從九、八、七等三個較大數字著手，認為這三個數字不會在同一線上。依據此目標開始執行其計畫，一開始尋求以和為十六的組合，不斷地嘗試各種組合尋求解答，後來更改和為十五一次就成功解出。在過程中，小迅不斷地監控其計算過程是否有誤。並且在最後解出答案時，仍將橫直斜再加總一次，以驗證答案是否正確。

二、數學解題策略之分析

本研究發現這六位一般智能資優班新生最常善用的策略為抽象表徵、逆推、歸納尋找規律性、及嘗試錯誤（表 4)。除此之外，可以發現資優生利用解題策略來理解問題、探索方向，且策略也較為多元（表 5)，此結果與劉貞宜（2001）針對建中三位數學資優生的研究結果相符合。劉貞宜（2001）表示資優生利用解題策略來幫助自己理解、思考、探索、聯結及推理，讓整個解題更舒暢與快速。

表 4 解題者在各題使用的解題策略

策略 ＼ 題號／學生	蝸牛	直式加法	月曆	九宮格
抽象表徵	媗、珍、迅、涂、揚			
繪圖表徵	茹、涂		涂	
逆推	迅	茹、迅	媗	
歸納尋找規律性			媗、茹、迅、揚	媗、珍、迅、揚、涂
嘗試錯誤		茹、珍、涂	珍	媗、茹、珍、迅、揚、涂
替代		媗、茹、揚		

表 5 六位解題者使用的解題策略

策略 ＼ 學生	小媗	小茹	小珍	小迅	小揚	小涂
抽象表徵	*		*	*	*	*
繪圖表徵		*				*

逆推	*	*		*		
歸納尋找規律性	*	*	*	*	*	*
嘗試錯誤	*	*	*	*	*	*
替代	*	*			*	

以「蝸牛題」與「月曆題」為例：

（一）蝸牛題：

六位解題者在本題的解題策略大致可分為二類：一為抽象表徵；二為繪圖表徵。另外，還有應用逆推的策略。

1. 抽象表徵：小姮、小珍、小迅、小揚利用抽象表徵的方式進行解題，根據問題「蝸牛白天往上爬五公尺，夜晚往下滑四公尺」，以「加五」代表往上爬五公尺；以「減四」代表往下滑四公尺。另外，小涂雖以繪圖表徵來進行解題，但其亦採用抽象表徵的方式來進行驗證。
2. 繪圖表徵：小茹、小涂以繪圖表徵的方式進行解題，他們依題意先畫下一口十公尺的井，再從井底每日往上畫五公尺、往下畫四公尺，以求得答案為六天。
3. 逆推：這六位解題者當中，小迅還應用了逆推的策略。小迅「*那他最後一次要爬的時候他直接跳上去，就不會再往下滑了。他之前無法一口氣跳到上面去，一次只能先跳五公尺，所以十要先減五。*」。以目標十公尺先扣除最後一次往上爬行的距離五公尺。剩餘的五日再逐日爬行。

（二）月曆題：

六位解題者在本題的解題策略的應用大致可分為四類：一為繪圖表徵；二為逆推；三為歸納尋求規律性；四為嘗試錯誤。

1. 繪圖表徵：小涂以繪製月曆的方式來求得七月九日為星期日。
2. 逆推：小姮「我本來要用一百除以七，但是這樣很難，所以我就改成七乘以

九等於六十三，然後七乘以五等於三十五，然後加二等於一百，再加二十九天就是一百二十九，這樣就可以開始算是星期幾。」

3. 歸納尋求規律性：小姮、小茹、小迅、小揚皆以一週有七天的週期規律性來解題。如小姮、小迅以除七的方式，而小茹、小揚則以加七的方式來解題。
4. 嘗試錯誤：小珍以嘗試錯誤的方式解題，有時加七，有時加每個月的天數，用直覺在解題。

伍、結論與建議

本研究之主要待答問題為：在資優生的解題歷程中，根據 Schoenfeld (1985) 的數學解題六階段，資優生的解題的歷程為何？使用哪些解題策略？

（一）解題成功率高的資優生程符合 Schoenfeld 解題六階段

解題成功較多者大都會出現如 Schoenfeld (1985)所提出的讀題、分析、探討、計畫、執行、驗證等階段。而解題成功機率低者，較少出現分析與計畫的階段。

（二）資優生的解題策略靈活且多元

本研究發現這六位一般智能資優班新生最常善用的策略為抽象表徵、逆推、歸納尋找規律性、及嘗試錯誤。策略應用上亦較為靈活且多樣性，並不會僅嘗試單一策略。另外，由上述「蝸牛題」與「月曆題」為例得知，解題者在各題的解題策略應用亦有所差異。

最後，研究者根據研究結果，提出教學方面的建議：

（一）加強訓練探討、計畫、與驗證等能力

本研究發現，雖然這六位學生皆為資優生，但並未所有的一般智能資優生其探討、計畫、與驗證等能力都具備。然而，資優教育著重思考能力的訓練，更需加強其探討、計畫與驗證的能力。所以，在數學方面的教學，可訓練學生探討、計畫與驗證等能力。

（二）討論分享的機會增進解題策略的學習與應用

資優生的解題策略多元且靈活，可藉由討論分享的機會來促進其他成員藉由同儕學習的方式獲得更多的解題策略，靈活學生的思考。學生能解此搭便車的方式增廣其解題策略的能力與應用。

參考書目

毛連塭（2001）。**如何實施資優教育**。台北：心理出版社。

吳武典(2003)。三十年來的台灣資優教育。**資優教育季刊，88**，1-5。

孫達剛（1992）。**雄中、雄女學生數學解題之研究**。國立高雄師範大學數學教育研究所碩士論文，未出版，高雄。

徐則洲、陳潔雲、李金生、李濟元(2000a)。**小學奧林匹克讀本(二年級)**。新竹市：凡異出版社。

徐則洲、陳潔雲、李金生、李濟元(2000b)。**小學奧林匹克讀本(三年級)**。新竹市：凡異出版社。

梁淑坤(1999) 。從擬題研究提出數學教學建議。**新典範數學**(184-220). 高雄: 高雄市政府公教人力資源發展中心。

黃家杰(2004) 。**國小一般智能資優資源班新生數學解題歷程之分析**。國立中山大學教育學系研究所碩士論文。

黃敏晃(2000)。**規律的尋求**。台北：心理出版社。

劉貞宜(2001)。數學資優生的解題歷程分析—以建中三位不同能力的數學資優生為例。**資優教育研究，2**(1)，97-120。

謝淡宜(1998)。小學五年級數學資優生與普通生數學解題時思考歷程之比較。**臺南師院學報**，31,225-268。

謝淡宜(1999)。國小數學資優生及普通生「數學解題」歷程之比較(四年級)。**臺南師院學報**，32,297-367。

Cohen, S.A. & Stover, G.（1981）. Effects of teaching sixth grade students to modify format variables of math word problems. *Reading Research Quarterly, 16*, 175-199.

Gallagher J.J. (1985). *Teaching the Gifted* (3rd). Newton, MA:Allpn and Bacon Inc.

Goldin G.A. (1982). Department of Mathematical Sciences Northern Illinois University. In F.K. Lester & J. Garofalo, *Mathematical Problem Solving Issues in Research*（pp.87-101）. Philadelphia, Pa.: Franklin Institute Press.

Kilpatrick, J. (1967). Analyzing the solution of word problems in mathematics: An exploratory study. *Dissertation Abstracts International, 28*(11), 4380A.

Polya, G.（1945）. *How to solve it*. New York: Doubleday.

Schoenfeld, A.H.（1985）.Mathematical problem solving. Orlando, Fla.: Academic Press.

Sriraman B. (2003). Mathematical Giftedness, Problem Solving, and the Ability to Formulate Generalizations: The Problem-Solving Experiences of four Gifted Students. *The Journal of Secondary Gifted Education, 3*(14), 151-165.

Webb, Norman. L. (1975). *An Exploration of Mathematical Problem Solving Processes*. (ERIC Document Reproduction Service No. ED106148)

螺旋變式數學課程之還原理念簡介－以青浦變式教學中“以新歸舊”概念理解教學實踐[1]為例

孫旭花

香港教育學院院校協作與課堂學習研究中心

近年，中國內地和香港學者都有個共識，變式[2]教學反映了中國數學教學的某些合理之處。如，鮑建生、黃榮金、易淩峰、顧泠沅（2003），(Huang, 2002)，顧泠沅、黃榮金、馬頓 （2005）(聶必凱，2004)，鄭毓信（2006），（張奠宙，2007），(孫旭花，2007b； Wong, 2007; Wong, Lam, & Sun, 2006)，等研究。變式（Variation)，一瞬間成為數學教育領域的熱點研究，出現上述相關研究。事實上，筆者認為變式在數學教育研究中，具有突出地位，主要因爲變式，通過“變中發現不變”來學習抽象化，和“以不變應萬變來”學習公理化，貼近地強調了，數學教學的中心問題----- “抽象化”和“公理化”，而“公理化”和“抽象化”一直是數學教學的難點。變式的角度，因培養數學的眼光，保證了在數學教與學的位置（孫旭花，2007a)，變式研究因有助於“公理化”和“抽象化”學習，“數學教學”重要部分。大陸方面，變式教學主要從教學角度，研究數學知識的有效傳播之方法。

另一方面，變式也一直是學習領域的主要陣地，如朱新明，李亦菲，朱丹（1997)，司馬賀 （1986）,Copper & Sweller (1987)., Anderson (1989)等大量認知心理學，也通過“變中發現不變”和“以不變應萬變來”，研究“遷移”是否發生，“推理”是否發生，變式研究因有助於“遷移”和“推理”學習，成為“學習領域”重要部分。其中，以 Marton 為首的歐洲現象圖示學習理論學派，特別注意“變與不變”的變異對教學的啓示，出現系列研究，如 Marton & Booth (1997), Marton & Tse

1 本文為筆者的博士論文中的一小部分。愿此文献给顧泠沅教授，以及千千万万寻找中国自己数学教育道路的“土学者”。感谢导师黄毅英林智中教授对本文的指導和大力支持。

[2]本文泛指“变中发现不变元素”。

通訊作者：孫旭花 sunxuhua@gmail.com

(2005);Runesson (1999) , Lo, Pong, & Chik (2005)，該學派主要成果之一，現象圖示學的變易理論(theory of variation)，從學習領域，解釋如何設置"變異空間"，有助於區分變中的不變要素。變異理論主要從學習角度，關注了"變易"設計是學習的發生之條件。

有趣的是，在香港，東方遇到西方，當教學理論遇到學習理論，變式教學遇到變異理論，《螺旋變式數學課程設計》便是兩者結合的產物，相遇的結晶。螺旋變式課程設計，基於數學問題之間的"變"與"不變"的角色、結構和功能（孫旭花、黃毅英、林智中、張奠宙，2006），分析了中國內地數學課程中的合理元素之一----變式題組，以這個基礎，參照了東方青浦課堂教學實踐和西方變異理論（Marton & Booth, 1997），結合了數學和數學學習過程的本質，歸納出螺旋變式課程設計模型，強調有系統地"變"，利用問題組，"結構"教學，實現概念連接，從而達成知識的"深、廣、透"設計，圍繞"變中發現不變"來學習抽象化，和"以不變應萬變來"學習公理化的設計理念，以分數除法、速度、體積課程設計為例進行設計，並在香港 21 班級，實驗證明顯著有效（孫旭花，2007b；Wong, 2007; Wong, Lam, & Sun, 2006）。

目前中國大陸大部分數學變式實踐，以變式練習為主，如《人教大綱版課後習題變式思維（初中三年下冊）》（韋靜雅，2004），但系統地把變式引入到新授課的課堂教學，目前成功且形成一定規模，並可以考證的案例只有顧泠沅領導的青浦變式，青浦變式體現國內數學教育特點，強調實踐，特別注重課堂教學的實踐，理論層面相對較弱（而西方數學教育則恰恰相反），螺旋變式課程設計基本思路之一就是,嘗試基於實踐進行理論升華，這樣基於實踐之根的理論，才更可能真正服務課堂，服務教學，步入實踐驗證理論，理論指導實踐的發展道路。

華人數學教育受到的最大批評之一就是，"機械練習死記硬背，導致的記憶而不是有意義的理解，Ma（1999）的研究發現美國教師的知識"是一點一點的"，而中國教師的知識"是一組一組" 的知識包，運用實證地有力諷刺了美國數

學教育的概念理解，刻畫了一個令美國數學教育尷尬的數學知識比較的畫面，這個研究在一定程度上，説明概念的連接與否似乎是美國數學教育薄弱環節之一。缺少連接，當然知識是“一點一點的”，而不是“一組一組的”的原因之一，教學如何把新舊概念連接，是數學概念理解的教學之重要環節。

90年代數學教育的口號“數學理解”（80年代數學教育的口號問題解決），數學理解作為教學的目標，得到數學教育界的一致認可(Hiebert & Carpenter ,1992)，強調理解地學數學，學習為了理解，學好了就意味著理解了，都意味理解是數學學習的目標、理解是數學學習的手段、理解是數學學習的評價。因此，教學不能實現數學概念理解，一切將沒有意義。然而說了好像等於沒說，理解的意義任何人都明白，關鍵并沒有提出導致概念理解**有法可依的**任何指導。

螺旋變式課程設計[3]，努力的方向之一就是，為課堂教學提出**有法可依**的指導，其中還原理念，即「以新歸舊」就是教學要注意的方法之一，相對難以理解，因爲以往中國數學教學僅僅強調「以舊引新」的去路，而較少關注「以新歸舊」的回路，雖然大家都知道，學習者也不可能像白紙一般，而是會帶著已有的觀念，去接觸新觀念。透過學習活動，讓新舊知識融合，新舊經驗銜接，新舊概念接軌，建立整體一致的理解。但是，新舊知識重新編輯，進行概念的還原的回程，對於剛剛接觸學習內容的學生至關重要，教師的知識結構，已經建立了兩個方向的連接，而學生可能剛剛建立一個方向的連接，需要在「以舊引新」基礎上，反復強調「以新歸舊」，才可能實現新舊概念的真正接軌。「以舊引新」，一般學者教師都知道，而「以新歸舊」較少學者教師知道，而不用說「以新歸舊」的實踐。

例如，很多教師常常「以舊引新」，會從加法引入減法，從加法引入乘法，

3 這裡做一個比喻，以期達到通俗易懂，深入淺出之目的。概念還原好像旅遊路綫的**回程**路綫，一般教學較爲重視**去程**路綫，即「以舊引新」環節，往往認爲既然去程知道，回程**“自然”**掌握，其實教學未必“自然”，因爲對於遊客而言，仍然是全新視野，「以新歸舊」仍需要大量教學支持。這裡概念還原也看為一種廣義的逆向思維。

從減法引入除法，從乘法引入乘方，但反過來，把很少會減法看為一個特殊的加法，把乘法看為一個特殊的加法，把除法看為一個特殊的減法，把乘方看為一個特殊的乘法，雖然表面只是解釋有少許出入，但對初學者而言，去程和回程出入很大，雖然同一條路徑，眼睛方向不同，視野全然不同，旅遊時，去程迷路很少，而回程迷路卻多，因此「以新歸舊」對教學至關重要。因爲當前的教學上有意識，強調「以新歸舊」的概念還原[4]，卻沒有受到「以舊引新」同等程度的重視。而且「以新歸舊」理念在以往數學教學理論層面強調不多，而且教學著實需要這方面的指導，螺旋變式課程設計還原理念，針對這個實踐的理論。我們認爲螺旋結構和序進結構不同在於，所有的概念都要還原爲「中心軸」，螺旋與序進描述，差異主要在於是否回到「中心軸」，這對於概念理解教學理論層面拓展，具有一定的積極意義。

這裡不是提出一個很新的理論，這裏僅僅把中國本土數學教師下意識使用的方法，熟悉的教學處理，顯然成立的實踐，合理的要素挖掘，提升到理論層面，把本土實踐理論化，以便使更多不會用、下意識用教師，而經常用、有意識地實踐，指導教學，從而步入實踐—理論---再實踐的循環。因此很可能本文例舉的方法，老師都熟悉，並不新奇，只是教學常常相對忽視，不常用，不多用這「**以新歸舊**」的概念還原理念去教學，雖然僅僅解釋上變了個角度，對於初學者，而是培養一個新舊知識連接的眼光，而形成一個整體理解，整體理念，還原理念是螺旋變式課程設計重要部分之一。

另一方面，在數學解題上，「**以新歸舊**」是一個重要思想方法，即化歸思想，把新問題轉化爲舊問題，在歷史上，周髀算經“以類和類”“以類通類”，也有「以新歸舊」之意義。但以往教學理論上，強調不多，以往變式教學實踐強調不多，當時青浦教學改革的主要成果，可概括爲四條基本原理：情意原理、

4 這裡做一個比喻，以期達到通俗易懂，深入淺出之目的。概念還原好像旅遊路綫的**回程**路綫，一般教學較爲重視**去程**路綫，即「以舊引新」環節，往往認爲既然去程知道，回程“**自然**”掌握，其實教學未必“自然”，因爲對於遊客而言，仍然是全新視野，「以新歸舊」仍需要大量教學支持。這裡概念還原也看為一種廣義的逆向思維。

序進原理、活動原理、回饋原理"，其中"序進原理" 強調課與課之間建立精當的序列關係，實施方法是變式教學。而青浦變式數學教學實踐中，提供了不少的「以新歸舊」的概念還原教學實踐，當時理論層面概括，強調不足，這裡螺旋變式課程設計，提出「以新歸舊」，也是基於這個背景，基於這樣的方向，基於這樣的努力。

螺旋變式課程設計的理念之一，強調概念還原，即所有的新概念，必須「還原」到舊的概念體系之中，原概念成爲「中心軸」，新概念都圍繞「中心軸」而「螺旋式」前進。例如，除法還原為乘法「中心軸」，分數除法還原為整數除法「中心軸」(孫旭花，2007b)， 這樣的理念不是空中樓閣的理論，來源實踐，來源於青浦變式教學回到「中心軸」的實踐，這樣的實踐不僅是變式教學的精華，又恰恰補充原來理論概括的不足，這裏以青浦課堂實錄變式教學中的概念理解教學方法，以新歸舊為例子說明，解釋螺旋變式數學課程設計的還原理念。讀者可能要問為什麼選擇青浦課堂實錄？

選擇青浦課堂實錄原因主要是：

"本土化"。一般說來，教育的繼承和發展，需從理論到實踐，再從實踐升華理論的反複，周而復始的發展，極少"無中生有"的理論和實踐，得以長期發展存活。大多數心理學、教學論、思辨哲學研究領域的研究成果，這些研究成果並不能直接應用到課堂，主要因為"理論"是從"實驗室"獲取的理論，本身限制於"個體水平""實驗室條件"，而不能推廣到教學的"群體水平"。理論一定要從實踐中來，課程理論一定要從課程實踐中來，而不是來自實驗室，從實踐中來的課程理論，才更"自然"，更有"生命力"，有著長期存活並符合本土文化的土壤。

文革以後，中國教育改革一直學習蘇聯，學美國，學德國，大部分教改往往曇花一現，而難以持續發展，其中原因之一是"不服水土"，不符合本民族自己的歷史、社會、文化、哲學的"土壤"。"青浦教改"總結的經驗是"中國本土已

有的，有效經驗的總結”（青浦實驗教學小組，1991，16 頁）。從這個意義上，“青浦教改”代表中國數學教學“精華中的精華”，因此，本文選擇青浦教學實錄作為實踐源泉，更具民族的數學教學文化意義。

“有效”。青浦變式教學改革的突出試驗效果，也說明教學具有合理的要素。自解放後，在中國教學改革歷史上，時間之久，規模之大，極少能和青浦教學改革相媲美。歷時二十年之久，說明經過時間和實踐的考驗(顧泠沅,1994）。

“以全縣上下教改合力爲後盾，我們的數學教改獲得了初步的成功。尤其作為義務教育最後階段的初中畢業班成績，從 1979 年平均 32.5 分，合格率 16%，在逐年穩步上升，至 1984 年以來連續多年保持在較高水準線上，1986 年平均分 79.2，合格率達到 85%，80 分以上學生比率 62%......”（青浦縣數學教改實驗小組，1991,13 頁）。

因為 1979 年和 1984 年兩次評估的對象不同，評估工具已經不同，因此這個數據很難説明確定的效果，但數據説明至少不是失敗教學改革，效果背後，必有合理的成分。

“鮮活”。青浦課堂實錄，在課堂內較爲靈活地綜合應用了“變式教學”，需要根據教學內容與學生水平，設計變式“變”的度，恰如其分點撥學生思考，恰如其分發揮作爲腳手架的特質，更自然呈現教學全過程的模式。而以往的變式練習，直接用於課堂教學並不可行。

“代表性”。雖然變式教學在中國大班課堂教學實踐較為普遍化，已被一些學者意識到，如鮑建生等（2003）認爲變式教學在中國內地由來已久，被廣大教師自覺或不自覺的運用，也如聶必凱（2004）變式的實施是中國內地數學教學普遍的教學現象，但變式練習，多以例題—習題的鞏固模式。變式練習，在一定程度的泛化，加上限制於“練習”的怪圈，“不自覺”的怪圈，不太容易爲課堂設計提供可行的方向。青浦變式教學，恰如其分發揮了教學作爲學生學習腳手架的特質，同時在中國內地大班課堂的環境下，兼顧知識系統建構，和兒童

發展，突破變式只是用於練習課的課堂教學，系統地把變式引入到新授課的課堂教學，青浦課堂實錄是較為自覺和系統地、靈活地綜合應用變式的代表性案例。

青浦變式教學中的概念理解教學：以新歸舊的例子。

這裏首先呈現青浦變式課堂教學實錄（青浦教學實錄的9個例子）中，概念還原的例子。我們以幾節“原汁原味”的最“真實”青浦變式課堂教學的“即時”實錄──《學會教學》課堂實錄（青浦教改實驗小組， 327頁-363頁），呈現變式教學“活著”的青浦變式教學的模式。

青浦變式教學設計，除了循序漸進，從已知到未知因素以外，還包括大量概念還原，從未知到已知因素，即雙方向建構路綫。例如：

課堂實錄1：

一般有理數的加法法則，是小學自然數擴充到有理數後的學習算法法則，大部分教學都會強調「以舊引新」，即小學自然數“加法法則”，注意有理數加數的符號與自然數的區別，注意1、和的符號，2、和的絕對值，引入有理數加法法則。但青浦變式課堂教學特別強調「以新歸舊」，把新知識有理數加法“加法法則”和原來算術裏數的加法法則比較，還原新知識“加法法則”學習為原來舊知識（自然數算法法則）的理解。例如：

課堂實錄1：“當兩個加數都是正有理數或零時，有理數運算與算術裏的加法運算是一致的。而有理數除了正有理數或零即算術裏的數以外，還有負的有理數，數的範圍已經擴充了，所以，有理數的加法法則實際上是算術裏，數的加法法則的推廣”。

----（課堂實錄1：333頁）。

分析：在思維方向方面，和原來思維由算術中數的加法法則，到有理數的加法法則思維方向相反，把有理數的加法法則看爲算術裏數的加法法則的推廣，思維方向爲：從有理數的加法法則到算術裏數的加法法則，強調注意了“加

法法則”學習**<u>還原為</u>**原來算法法則的理解。

和一般教學不同的是，有理數的加法法則中，“異號有理數加法法則”是難點，青浦變式課堂教學採用的“抵消”概念更充分體現了概念還原思想，(例如，（+5）+（-5）=0 並附坐標圖，見圖1，看爲正與負的全部“抵消”（+1）+（-1）=0。例如：

“…（+5）+（-5）=0，(（+5）和（-5）正好全部抵消了，而（+5）+（-6）是抵消了一部分，實際上我們可以把-6看成-5和-1兩個部分，，(（+5）和（-5）正好全部抵消了，-1就是結果。”

----（課堂實錄1：332頁）。

分析：和原來思維由有理數的加法到合幷，把“部分抵消”看為一個數拆成同號數的和（例如，(-6）拆成（-5）+（-1），那麼（+5）+（-6）=（+5）+（-5）+（-1）= -1，其中（+5）+（-5）=0，先合幷，餘下（-1)，看做“部分抵消”運算)，其中，(-5）表徵為數軸左移5個單位，(+5）表徵為數軸右移5個單位，（+5）+（-5）表徵為合併未移動。思維方向爲：合幷到從有理數的加法，注意認知建構的“概念還原（雙向建構）”。因為“異號有理數加法法則”是難點，而理解該難點建立“抵消”的概念，教師出的問題直觀地建立了“全部抵消”的概念。(+5）+（-5）=0，直觀地建立了“部分抵消”的概念,（+5）+（-6）=（+5）+（-5）+（-1）= -1 並附坐標圖，即（+5）+（-5）已全部“抵消”，還餘（-1）未“抵消”。促使學生加深對異號相加的技巧和理解深入，培養了把一個數拆成同號數的和，又形成從直觀到抽象的過渡。

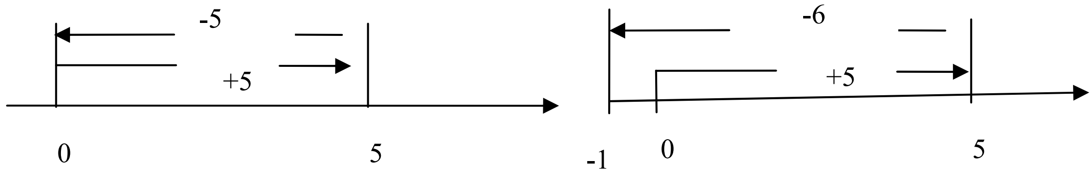


圖 1 全部“抵消”與部分“抵消”示意圖

課堂實錄 2：

在同底數的冪的乘法教學中，青浦變式教學和一般教學不同的是特別強調，還原冪運算的算理。例如：

生：$a^3.a^7=a^{10}$

師：你是怎樣算出來的？

生：a^3.是3個a 相乘，a^7.是7個a 相乘，一共是10個a 相乘，所以$a^3.a^7=a^{10}$

（課堂實錄2：335頁）。

分析：和原來思維由$a^3.a^7=.a^{10}$單項式乘法到冪運算，把a^3.是3個a 相乘，a^7.是7個a 相乘，思維方向爲：冪運算到分解為單項式乘法，注意還原了冪運算的算理，注意了數學認知建構的"概念還原"。可能有些老師也會先下意識提醒把a^3.是3個a 相乘，a^7.是7個a 相乘，避免死記公式，但是有意識地，常常注意"概念還原" 教師，並不多。

課堂實錄3：

用拆添項法分解因式教學，青浦變式教學和一般教學不同的是特別強調，還原因式分解的思想，即多項式乘法的逆運算。即：

生：$(x^2 -x+1)(x^2 +x+1)= \{(x^2 +1)-x\}\{(x^2 +1)+x\} =(x^2 +1)^2-x^2 = x^4+2x^2+1-x^2= x^4+x^2+1$

師：上面的演算可知，x^4+x^2+1確實可以分解為$(x^2 -x+1)(x^2 +x+1)$，到底如何分解呢？請同學試試看，誰能最快發現新的分解方法？（課堂實錄3：342頁）。

分析：和原來思維由$(x^2 -x+1)(x^2 +x+1) = x^4+x^2+1$多項式乘法變為，$x^4+x^2+1$到底如何分解呢？思維方向爲：因式分解到多項式乘法，注意了把因式分解思想還原為多項式乘法，最初因式分解思想，從而實現認知建構的"概念還原"，以及因式分解與多項式乘法的雙向連接。可能有些老師也會先下意識注意了把因式分解思想還原為多項式乘法，但針對任何新知識有意識地，常常注意"概念

還原”教師，並不多。

課堂實錄7：

一般三角形的內角平分綫性質的教學，教學往往把利用輔助綫和平行線分線段成比例定理，來證明。但青浦變式教學和一般教學不同的是，把三角形的內角平分綫性質看為平行線分線段成比例定理特例，還原為平行線分線段成比例定理思路。

課堂實錄7：三角形的內角平分綫性質

角平分線性質定理：三角形的內角平分綫分對邊所得的兩條綫段和這個角的兩邊對應成比例。

如下圖，在三角形⊿ABC中，AD平分∠A，求證：AB：AC=BD：DC

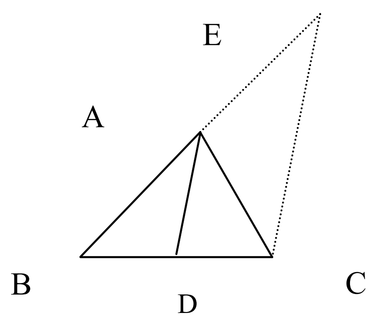


圖 2 角平分線性質定理圖示

證明：做輔助綫ＡＥ。過C作AD的平行綫交BA的延長綫於E，如圖2，

因爲AD平分角∠A ，所以∠BAD=∠DAC

AD || EC，所以∠BAD=∠E， ∠DAC= ∠ACE

所以∠E =∠ACE ,得出AC=AE

根據平行綫定理AD || EC，得出AB：AE=BD：DC

所以：AB：AC=BD：DC

從圖上看，右邊AC是角平分線分對邊，證明的時候我們把角平分線AC轉到

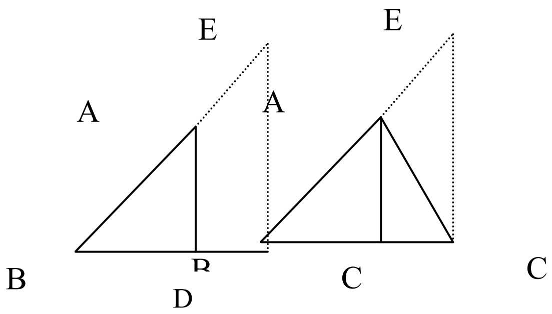


圖 3「角平分線性質定理」還原爲平行線分線段成比例定理示意圖

AE的位置，AD平行EC，得到的圖形與左邊相同。所以角平分綫性質定理，可以直接從這條平行綫分綫段成比例定理推導出來，如圖3（課堂實錄7：383頁）。

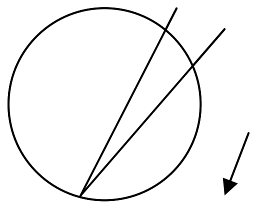
分析：和開頭引入的思維，由平行線分線段成比例定理到角平分線性質定理，轉變為角平分綫性質定理，可以看作直接從這條平行綫分綫段成比例定理推導出來，即思維方向爲：角平分線性質定理到平行綫分綫段成比例定理，注意認知建構的"概念還原（雙向建構），把角平分線性質定理還原為平行線分線段成比例定理"，而不是強調一個新"角平分線性質定理"定理，雖然這裡僅僅解釋變了一點點，但重要的是，對初學者而言，培養了一個把新舊知識連接起來，而形成一個整體，而知識前後一致，至關重要。

課堂實錄 8：

課堂實錄 8：弦切角。一般弦切角的教學，教學往往從圓周角引入弦切角，但青浦變式教學和一般教學不同的是，把弦切角看為圓周角的特例，還原為舊知識。

師：……弦切角與圓周角是不同概念的兩種角，但卻有著密切聯繫，它們的頂點都在圓上，當圓周角的一邊轉到切綫位置時，圓周角就變爲弦切角，所對的弧變爲所夾的弧，而它（指圓周角）的度數都等於該弧度數的一半。（注：

教師期望進一步引出弦切角的度數是否等於所夾弧度數的一半，這一新的課題。)（課堂實錄8：391-392頁）



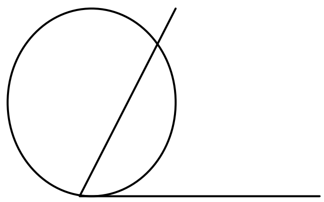


圖 4 圓周角就變爲弦切角示意圖　　弦切角圖

分析：和教學開頭引入的思維方向，由弦切角到圓周角，轉變為弦切角可以看作直接圓周角的一邊轉到切綫位置時，即圓周角特例，即思維方向爲：圓周角到弦切角，注意認知建構的“概念還原（雙向建構）”，把弦切角還原爲舊的圓周角概念，而不是介紹一個新的概念。雖然這裡僅僅解釋弦切角概念變了一點點，但重要的是，初學者而言，培養了一個把弦切角和圓周角連接起來，而形成一個整體，這樣有助於理解弦切角和圓周角深層關係結構。

概念還原（雙向建構）因素的理論解釋。

皮亞傑建構主義[5]強調，可逆(inverse)是心理運算特徵。皮亞傑(Piaget, 1971)綜合地研究了社會學、數學、經濟學、生物學、物理、邏輯之後，指出“所有的知識建構都具有群結構的三個要素：整體性、具有轉換規律或法則、自身調整性；結構就是由具有整體性的若干轉換規律組成的一個有自身調整性質的圖式體系（Piaget，1971，P.6 ）”。

一個數群，如正負整數群，是一個諸元素（這裏是正負整數）的集合或整體（wholeness)。在這個整體裏，元素由組織規律連接起來（這裏是加法)，用這個轉換規律加在任何元素上，得到的總是正負整數，這樣一個正向的運算，可以用一個對等的反向(inverse)運算來還原（這裏是減法)，回到出發點，即

[5]皮亚杰一生出版的 91 本书，其中《结构主义》再版了 7 次。

「單位元」(這裏是零)。任何元素和它結合起來所得的仍舊是那個元素，而且在這個結構或群裏的幾個元素結合起來，還服從加法結合律，表明可以經由不同路徑達到同一目的或結果，使新知識不受路徑的制約，回到中心知識點（neuter identity)，所有的知識點必須回到出發點，也就是所有的認知結構的元素必須逆回到原來的知識點，建立可逆程式的結構。如果運算的結果還不能逆回去，只是一種半邏輯，缺乏邏輯的另一半（Piaget，1971，P.16)，其中，在轉換關係的可逆性中，體現了普通邏輯原理的不矛盾原理，而中性元素的恒定性保證了普通邏輯的同一性原理，轉換關係的結合性保證了普通邏輯的排中性原理，而三條邏輯規律：不矛盾原理、同一性原理、排中性原理，保證了邏輯思維的確定性。這裡我們看到，概念還原（雙向建構）因素，實質上，符合所有的知識建構的基本規律，有着邏輯建構的合理元素。

小結

這裏我們看到青浦教學設計結構“以新歸舊”的設計，表面來看呈“序進”結構，即教學設計地按照理解的容易程度，形成循序漸進直線性“概念”序列，但所有的新概念，都圍繞原概念“螺旋式”前進，又“還原”到了舊的概念體系之中，青浦教學設計結構不僅是序進結構，而且是一種螺旋式的序進結構。因此，青浦教學設計更應準確地概括為“螺旋結構的變式模型”（限於篇幅，恕不展開，螺旋結構的變式模型論述，詳見（孫旭花， 2007b)。

縱觀國內外的課程設計，均強調“以舊引新”，即由舊知識引出新知識，而“以新歸舊”強調相對不夠，強調把新知識還原為舊知識，是“螺旋結構的變式模型”課程設計的精華部分。無論由舊知識引出新知識，把新知識還原為舊知識，這些可看為數學教學的小策略， 然而這個問題變式卻有普遍意義。即，

任何新概念還原

整體數學概念的新舊連接

大而言之，任何數學內容都可以借助“螺旋結構的設計”,使得新舊的數學知

識連接，推廣到全部數學內容教學，則是一種數學教學的大智慧。

本文以青浦變式教學中“以新歸舊”概念理解教學實踐為例，解釋螺旋變式數學課程之還原理念。任何實踐，要得以長遠發展，需要形成相應的理論，由實踐提升爲理論，再由理論指導實踐，進一步，由實踐補充理論，然而多年來，中國內地的數學教學，以實踐為重，理論相對空白，形成發展的缺環，大家只知變式教學有一定教學效果，並不知背後的原因，前研究大多缺少實證支持，缺少說服力。多少年來，中國內地的數學教學，摸著石頭過河，我們嘗試邁出一小步，建構基於實踐的理論解釋，至少是一次有益的嘗試。任何發展需要起點，任何理論都需要不斷完善，但千里之行，總是始於足下。

參考文獻

Anderson, J.R. (1989). The Analogical Origins of Errors in Problem solving. In D. Klahr & K. Kotovsky (Eds.), *21st Carnegie Symposium on Cognition,* 343-371.

Copper, G. & Sweller ,J.(1987). Effect of Schema Acquisition and Rule automation on Mathematics Problem-solving Transfer , *Journal of education psychology*.79(4),347-362

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and Teaching With Understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *A Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 65-100). New York: Macmillan Library Reference Simon &Schuster Macmillan.

Huang, R. J. (2002). *Mathematics teaching in Hong Kong and Shanghai: A classroom analysis from the perspective of variation.* Unpublished phD thesis. HongKong: The University of Hong Kong.

Lo, M. L., Pong, W. Y., & Chik, P. P. M. (2005). *For each and everyone: Catering for individual differences through learning studies.* Hong Kong :The Hong Kong University Press.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States.* Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Marton, F., & Booth, S. (1997). Learning and awareness. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Piaget, J. (1971). Structuralism. New York: Harper & Row. 倪連生、王琳譯《結構主義》北京：人民教育出版社。

Runesson, U. (1999). Variationens pedagogik: Skilda sätt att behandla ett matematiskt innehall (the pedagogy of variation: Different ways of handling a mathematical topic). Goteborg: *Acta Univertsitatis Gothoburgensis.*

Wong, N. Y. (2007). Confucian Heritage Cultural learner’s phenomenon: From “exploring the middle zone” to “constructing a bridge”. Regular lecture, the Fourth ICMI-East Asia Regional Conference on Mathematical Education, Penang, Malaysia, 18th to 22nd, June.

Wong, N. Y., Lam, C. C., & Sun, X. (2006). The basic principles of designing bianshi mathematics teaching: A possible alternative to mathematics curriculum reform in Hong Kong [in Chinese]. Hong Kong: Faculty of Education and Hong Kong Institute of Educational Research, The Chinese University of Hong Kong.

司馬賀 （1986）。《人類的認知—思維的信息加工理論》。北京：科學出版社。

孫旭花（2007b）。《螺旋變式數學課程設計：理論與實踐》香港：香港中文大學未發表的博士論文。

孫旭花、黃毅英、林智中（2007a）。變式的角度，數學的眼光。《數學教學》，第 10 期。

孫旭花、黃毅英、林智中、張奠宙（ 2006 ）。問題變式結構與功能的統一。《課程・教材・教法》，第五期。

張奠宙（2007）。《中國數學雙基教學》。上海：上海教育出版社。

朱新明，李亦菲，朱丹（1997）。*《人的自適應學習示例學習的理論與實踐》*。北京： 中央人民廣播大學出版社。

聶必凱（2004）。《數學變式教學的探索性研究》。上海：華東師大博士論文。

鄭毓信（2006）。變式理論的必要發展。《中學數學月刊》，1 期，頁 1-3。

青浦縣數學教改實驗小組（1991）。《學會教學》。 北京：人民教育出版社。

顧泠沅、黃榮金、馬頓 （2005）。變式教學促進有效的數學學習的中國方式。載範良火，黃毅英，蔡金法，李士錡（編），《華人如何學習數學》。(頁 247-273)。南京：江蘇教育出版社。

顧泠沅（1994）。《教學實驗論——青浦實驗的方法與教學原理研究》。北京：教育科學出版社。

鮑建生、黃榮金、易凌峰、顧泠沅（2003）。變式教學研究。《數學教學》，第一期，頁 6-12。第二期，頁 11-12。第三期, 頁 6-10。

一個隨機遊戲中的機率概念

陳仁義　　魏志安　　鄭信源

南華大學資訊管理系、中正大學統計科學研究所

摘要

在國民中小學九年一貫課程的數學學習領域中,「統計與機率」部份已加入電腦科技的輔助性學習，是相當符合時代潮流的。尤其在社會多元文化之際，形成問題的複雜度不斷提高,「不確定性」普遍存在而強烈的被人們感受到。因此，若在課程當中將隨機性的基礎科學模型，可有效展現開來是非常重要的。在我們生活周遭有漸增的「機率語言」之呈現，例如，中秋佳節的臺北市「下雨機率」為百分之九十、公益彩券「中頭獎機率」為五百二十四萬五千七百八十六分之一、…等等，這些機率語言所描繪的現象，到底是帶領著我們增廣一些重要訊息，抑或促使得人們陷入另類的迷思？我們將從一個簡單而有趣的隨機性遊戲 (Monty Hall) 為平台，來加以探索「機率概念」的奧妙和迷思之處，運用科學方法來說明理想中的狀態，也可以用「直觀法」來釐清問題本身，進而我們讓同學們利用一個簡單的亂數表，來具體操作這個「隨機模擬」的實驗，以體會遊戲中所蘊含「機率概念」的奧妙之處，這些同學們在極短時間內就有顯著的學習成效，而置身其中的迷思所在和相關問題，也將加以討論。

關鍵詞：機率概念，不確定性，隨機模擬。

通訊作者：陳仁義　zychen@mail.nhu.edu.tw

一、前言

日常生活中我們常會接觸到機率或機會這個名詞，但人們往往也會被誤導或迷惑。例如，中秋佳節天氣預報說台北市的「降雨機率」為百分之九十，那麼當日帶傘出門的人可能很多；然而台灣在 2002 年 1 月底開始發行公益彩券，前幾期的熱賣程度只能用瘋狂兩字來形容，但是彩券中獎機率卻非常的低；此外，在 70 年代美國非常著名的電視節目「Monty Hall」，是個隨機性的簡單型機率遊戲，且具高額的獎金（獎品），參賽者並不難如願以償，因此吸引很多人參加，並造成美國各地一陣風靡，甚至觀眾私下模擬其遊戲規則，模擬如何進行才能容易得到大獎。有此可見，「機率概念」逐漸地影響著人們的日常生活，藉以做出一些理性的決定，但有時卻也帶來迷惑。本文就以「Monty Hall」為例（Friedman, 1998；Gillman, 1992；Morgan et al., 1991），試著探索其中所蘊含的豐富且多樣、隨機而簡單、條理卻反常的多種特性，並加以瞭解機率概念的「迷思」（陳新民和劉祥通，2001），透過隨機模擬實驗來釐清機率概念，我們利用簡單的亂數表之具體操作實驗，在極短的時間內就有顯著的成效來呈現「機率概念」的奧妙之處。

為了瞭解一般國中生的隨機概念，我們進行抽樣調查，觀察一些國中學生對此遊戲的反應，並且統計他們的決定意向，以瞭解一下他們決定的可能因素和背景，在第二節中有詳細的整理。由資料中呈現出看似簡單而有條理卻又反常的現象，如何用科學方法來釐清，以證明在一些條件限制的理想狀態下，「機率概念」如何引導參賽者選擇較高的中獎機會，我們在第三節中有詳細的樹狀圖歸類法和表列法呈現，可適度呼應「科學思維」所呈現的理想狀態。第四節則利用一個簡單的亂數表，來讓同學們從具體操作中親身體會其中的奧妙之處，自動化程式 R codes (R Development Core Team, 2005)則放在附錄中，可供多位參與同學來確認具體操作的結果。最後第五節中有個簡單結論。

二、問卷的設計與分析

此研究的進行方式為針對一般國中生作問卷調查，設定遊戲規則：主辦單位準備了三個門的箱子，門上分別以 I、II、III 數字區別之，只有在其中一個門後放著超級獎品。主持人知道獎品的所在位置，而參加者並不知情，在遊戲過程中獎品並不會更換位子。遊戲開始後參加者在 I、II、III 當中擇一，主持人正式公

布得獎與否之前會先賣個關子，將沒有被參加者選中的兩個門之一，打開給大家看確定沒有獎品。接下來，主持人就問參加者：「要不要換成尚未被打開的那一個門？」，設想填寫問卷的同學是一位參加者，請他們各自回答：(1) 你會不會改變心意來換門？(2) 為什麼？ 請簡述您決定的理由。(3) 可能的話，請簡述一下您對此問題的一些看法或想法。

在此問卷中除了第一個問題有預設答案(「是、否」換門)之外，其他則以簡答題的方式，讓同學們將內心的想法自然表達出來。從回收的 417 份問卷裡發現：其中有 22 個同學「會更換」、383 個則「忠於原味」、2 個沒有明確的表達、以及 10 份為無效問卷。我們進一步分析第一群的 22 份問卷中，有的受訪者認為主持人可能是故意跟參賽者玩心理遊戲，不換時心裡會毛毛的，所以選擇換比較好；有些則認為他們的第一直覺向來不是很準，所以決定要換；其他則認為一開始選中獎品的機會是 1/3，當主持人打開一個沒有獎品的門之後，只剩下 2 個門，所以提高了中獎的機會為 1/2。其次是最為多數的第二群，從 383 份「忠於原味」問卷的整理中我們則發現，大部份的受訪者認為相信自己的第一個直覺是最為可靠，因為主持人開門的動作，只是用來對參加者「混淆視聽」而已，或許試圖降低參加者的中獎機會，因此寧可相信自己，不受他人左右，就算是錯也無妨。但有許多同學認為，當主持人開了門之後，「換、不換」均有一半的機會得到大獎，所以相信自己的第一個選擇。

我們從問卷的簡答內容中發現，一些有趣而多樣的答話很值得我們來深思，例如，「因為選了就選了，要對自己有信心，何必要換呢？」、「此問題還不錯，因為可以測驗出有沒有對自己有信心」、「肯定自己的決定，就別輕易放棄！否則到時候後悔就來不及了！」、 「堅持己見，否則聽任別人的話而改變自己原來的選擇，如果選錯了，就會很後悔的！」、「相信原來的答案才不會後悔！」、「如果換了，等一下答案是你之前選的，會氣死的，所以堅持不換。」、「因為主持人會一直要人改變心意使禮物沒人中獎，所以我會堅持。」、「主持人不想讓別人猜到車子，故意賣關子讓別人猜不到。」、「主持人也可能會騙人。」、「因為這是憑自己的直覺，當然要相信自己的直覺而且心意已決，就沒必要換・・・」、「因為一開始的直覺是最準，說不定換了還會拿不到獎品，這樣不一定是最好的，就相信自己的直覺賭一睹！」、「相信自己的直覺，就算沒獎品也沒差，因為嘗試過了。」、

「我相信我的直覺和運氣。」、「我決定就不變」、「沒有獎品也沒關係，因覺得好玩！」、「因為換不換都是 1/2 的機率，只能靠運氣，看自己是不是真的會那麼幸運。是我的，跑也跑不掉；不是我的，留也留不住。」、等等。這兒摻雜著很多的背景因素和面向，或因為心理層面、或想遊戲一下、或為「當下」的決定、或認為主持人的言語影響、或賭賭運氣、或中獎機率會由原來的 1/3 變成 1/2、等等。在主持人開啟一個沒有獎品的門之後，大部份同學會認為「當下」的決定變成為「二擇一」的機會，也就是中獎機率由原來的 1/3 變成 1/2，這是無庸置疑的。然而，「機率概念」所要解釋和延伸的範疇，並非僅止於「一個人」和「當下」的情況，而是無形中有一個「共同體」和「長期」的情境，在孕育著、互動著和變遷著，一路下來穩定的條理化狀態於焉形成，科學化的思維方法當可引用進來。

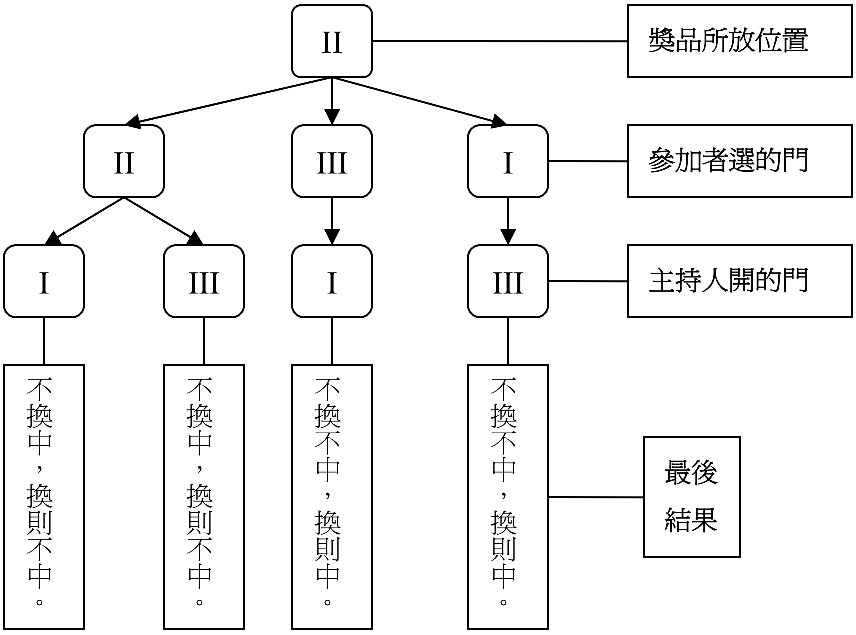
三、 科學化的思考方法

看似簡單的遊戲題材，如此豐富且多樣的想法一一呈現開來，隨機中蘊藏著條理，卻又見反常的決策現象。如何運用科學化的方法來釐清，以探索且發現條理性所在處，是個有趣的追尋、學習、認識、和體驗等整體過程。首先是一些合理的條件限制應該要加進來，相關定律、準則才能適時、適切的呈現出來，理想狀態下的條理性也就形成。在此遊戲題材中，如何運用「機率概念」來引導參賽者「合力」選擇較高的中獎機會，是我們努力以赴的。以下將從兩個不同角度來探索思考此問題，並假設**獎品放在門 II**，而參加者可以隨機選擇，亦即參加者選擇門 I、II、III 的機會是相等的；其他情形假設**獎品放在門** I、**門** III，推導過程是相類似的。

（一)、樹狀圖歸類法：

參加者選擇 II 門的機率為 1/3，延伸的三條路徑之一，如圖中的第一層路徑所示，接下來主持人有兩個選擇，分別是開啟門 I 或門 III，如圖中第二層路徑所示，由於開啟門 I 或 III 的機會是相同的，因此，一開始選定門 II 之後，不換而中獎的機會為：1/3*1/2*1.0（主持人開門 I）+ 1/3*1/2*1.0（主持人開門 III）= 1/3；換而中獎的機會為 1/3*1/2*0.0（主持人開門 I）+ 1/3*1/2*0.0（主持人開門 III）= 0。 其次是選定門 III 或門 I 之後，不換而中獎的機會為 1/3*1*0.0（選 III 開 I）

+ 1/3*1*0.0(選 I 開 III)= 0;換而中獎的機會則為 1/3*1*1.0(選 III 開 I)+ 1/3*1*1.0（選 I 開 III）＝ 2/3。我們可以整理如下,「不換而中獎」的機會是 1/3*1/2*1.0 + 1/3*1/2*1.0 + 1/3*1*0.0 + 1/3*1*0.0 = 1/3，其次,「換而中獎」的機會則為 1/3*1/2 *0.0 + 1/3*1/2 *0.0 + 1/3*1*1.0 + 1/3*1*1.0 = 2/3。值得注意的是從樹狀圖中演算下來，有些人會認為最後出現的結果有四種，其中不換門而會中獎占了兩個，換門而會中獎也是占了兩個，所以兩者中獎的機會是相等的。這種誤解應釐清的是四種路徑發生的機率並不相同，其中不換門而中獎的部份雖佔了兩個，但是主持人只能從第二層之兩個路徑擇一，發生機率應該分別乘上 1/2 才是正確的。



（二）、表列法：

以樹狀圖歸類法為基礎，運用較為嚴謹的「數學語言」來呈現 (貝氏解題，Kinney, 1997)，或許可以肯定「機率概念」所引導出來的理想狀態，也可作為理性決策的參考。但是對於只能參加一、兩次的遊戲者而言，似乎沒有多大意義和實質幫助。為了進一步較為實際性體會，我們將禮物可能隨機置放的位置表列出來成表 1 的三種情形，列出這三種足以代表整個遊戲過程所發生的可能情況。配合前面的假設**獎品放在門 II**，參加者可以隨機選擇，如果選擇了第 II 號門而主持人開門之後「忠於原味」時，則中獎機率為 1/3，亦即**表 1** 中的第二種情況；

若是參加者選擇了第 III (I) 號門之後「忠於原味」時，亦即**表 1** 中的第三(一) 種情況，中獎機率是分別為相同的 1/3。另一方面，假設參加者選擇了第 II 號門而在主持人開門之後「改變主意」時，中獎機率則會提升為 2/3，亦即**表 1** 中第一、三種情況之總和；若是參加者選擇了其他的 III、I 號門之一，而在主持人開門後「改變主意」的中獎機率也是分別為 2/3，亦即**表 1** 中第一、二種情況之總和、或第二、三種情況之總和。這種呈現方式，很像以小博大，但似乎是少了什麼具體感覺？為了填補這個空缺，我們運用一個簡單的亂數表來作多次的模擬實驗，例如附錄表一中 300 個亂數值來決定獎品所在的「門號」、或參加者所選的「門號」，三種情況均勻出現的次數各約 100 次，只是亂數表模擬出現的排列順序是隨機的，因此我們若是將其結果作適當的轉換重新排列之後，將會成為表 2 的三種情況均是重複呈現約 100 組模樣。

情況 \ 門	I	II	III
一	禮物	無	無
二	無	禮物	無
三	無	無	禮物

表 1: 隨機置放禮物的可能位置之表列法

情況 \ 門	I	II	III
一	104	0	0
二	0	92	0
三	0	0	104

表 2: 模擬實驗 300 次的均勻分配次數值

四、亂數表的具體操作

實驗的方法是以某國中一年級新生為研究對象，總共有 19 班，採常態編班方式，我們選取其中的一個班來作為具體操作實驗研究對象，另外一個班來作為常態性比對，兩個班級人數皆為 39 人，前一個班的目的是要研究同學們經歷過具體操作亂數表之後的效果，後一個班則是來檢測同學們在常態編班下具體操作前對此問題反應之一致性。

首先是來檢測實驗前兩個班同學們之反應是否一致性？我們分別在兩個班

級說明 Monty Hall 遊戲規則，並輔以實際互動式遊戲操作且給予獎品，讓同學們更加融入遊戲情境中，瞭解之後請他們填寫第二節中的問卷題目。問卷回收經過整理和統計，前一個班的 39 人當中有 5 個人改變心意『換門』；而對照組的 39 人中則只有 3 個人改變心意。兩者的比值 (5/39 vs 3/39) 經由比率值雙尾統計檢定 (e.g., prop.test in R) 之 p-value = 0.709，因此兩個班同學之反應是相當一致的。此外，問卷中的簡答內容，這些同學們所呈現的有趣而多樣之典型答話內容和第二節所整理出來的部份也是大同小異。

其次，我們就前一班的 39 位同學們進行亂數表之具體操作，以研究比較一次學習之後的效果。我們請同學們先認識一下附表一的亂數表，這些 300 個數值是均勻分佈在 [0, 1] 之間，我們劃分為三區，每一位同學隨機性給予亂數表中的一個不同數值，這個亂數值是作為個人具體操作之『作業初始值』，例如附表二中實驗次別 1 的亂數值 0.749，位於亂數表中的第 29 列和第 9 行 (i.e., [28, 8])。我們將此次的遊戲規則之獎品固定放在第 II 號門內，重複遊戲的實驗次數設定為 60 次，亂數表依序 (由上而下、由左而右) 而隨機呈現的數值是用來決定參加者所選擇的門號，我們依照選擇三個門之一的機率相等原則共同設定了決定條件：若亂數值落於 [0 , 1/3) 則選 I 號門、 落於 [1/3 , 2/3) 則選 II 號門、落在 [2/3 , 1] 之中則選取 III 號門。附表二中完整地呈現了作業初始值為 0.749 的 60 次結果，當亂數值選中 II 號門時，主持人可以開門的選擇有 I 或 III 號門；但是若亂數值選中 I (或 III) 號門的話，主持人只能開啟 III (或 I) 號門。在附表二中的最右兩行則以 0 或 1 代表『沒有中獎』或『中了大獎』的結果，最後統計一下分別中獎的實驗次數：『不換門中獎』的次數以及『換門而中獎』的次數，兩數相加的結果應該等於實驗總次數 60。

我們請每一位同學依照個人『作業初始值』回家練習一下，將個人具體操作的結果仿照附表二的呈現方式繳交一份報告。經過一週之後，我們收集了同學們繳交的報告且確定每一位同學均有練習，再度請同學們填寫第二節中的問卷題目以瞭解練習的成效。問卷回收後整理和統計結果，39 人當中從 5 人增加為 24 個人改變心意『換門』，若考慮同學們在具體操作『之前』、『之後』的兩種情況下，人數變動推移的詳細情形則呈現在表 5 中，可以利用列聯表統計檢定法 (e.g., McNemar.test in R) 之 p-value = 0.0001746，因此，具體操作『之前』、『之後』的學習成效是相當顯著的。

後 / 前	換	不換
換	3	2
不換	21	13

表 5：具體操作『之前』、『之後』的人數變動列聯表

此外，我們和同學們進行事後的分享活動，讓他們經由具體操作發表個人所學習到的心得和啟發，大部份同學已經可以從其他同學的類似但不完全相同的結果中，注意到不換門而中大獎機率為 1/2、1/2 想法已經動搖，進一步我們把第三節所呈現的兩種科學方法引用進來討論，樹狀圖歸類法帶領著他們反思一下個人的具體操作，也比較其他人的具體操作，逐漸地可以體會到『第 5 行主持人可**開門位置**』**(**附表二) 的規律和限制；表列法則提供了一個整體觀或直覺性的判斷，國中學生較難以在短時間完整掌握，若在老師適當的帶領下，利用附表三所提供的具體操作之電腦自動化版本，只要找到個人的**初始值位置**填入程式中 (R function: MontyHall)，即可對照自己的結果，也可看看其他同學的結果，甚至多加嘗試不同**初始值位置**的結果，整體觀可以逐步建立起來。

五、結論

在回收的問卷中我們發現，有部份學生認為生活中的機率問題，只是蘊含了相當大的運氣成份，而無法善用所學的科學化方法來解釋。目前在國民中小學九年一貫課程的數學學習領域中，「統計與機率」部份已加入電腦科技的輔助性學習，是相當符合時代潮流的。我們讓同學們透過一個簡單的亂數表，來具體操作這個「隨機模擬」實驗，以體會遊戲中所蘊含「機率概念」的奧妙之處，這些同學們在極短時間內就有顯著的學習成效，並可呼應和適度驗證「數學語言」所呈現的理想狀態。在此狀態中，「機率概念」所以要解釋和延伸的，並非僅止於「一個人」在「當下」的情況，而是有多個人或多次「重複性」在「長期」的情境中孕育著、互動著和變遷著，穩定的條理化型態逐漸成形，科學化思維才可適時引用進來，理想狀態於焉浮現。若在老師適當的帶領下，可以利用所提供的電腦化

輔助性學習，更可事半功倍。

這個有趣的猜獎遊戲也可以從直觀的方法來解釋，參加者選中獎品的機會是 1/3，沒有選中獎品機會是 2/3。若在主持人開門後，**堅持不換門**，會中獎的機率是不變的；如果「改變心意」換成另外一邊的機率（即參加者選定一門後的其他二門中獎機會是 2/3）也是不變的，這兩個門可中獎機率已經在主持人開了一門之後集中於**另外一個門當中**，因此，換了這個門而中獎的機率就會提升到 2/3。參考文獻 (8,9,10,11) 有四個網站可供進一步探究。

六、參考文獻

陳新民、劉祥通（2001）。從兒童迷思概念之文獻分析一 談機率單元的教學與課程。科學教育研究與發展季刊，第 26 期，40-51。

Friedman, D. (1998), "Monty Hall's Three Doors: Construction and Deconstruction of a Choice Anomaly," *The American Economic Review*, **88**, 933-946.

Gillman, L. (1992), "The Car and Goats," *The American Mathematical Monthly*, **99**, 3-7.

Morgan, J.P., Chaganty, N.R., Dahiya, R.C., and Doviak, M.J. (1991), "Let's Make a Deal: The Player's Dilemma", *The American Statistician*, **45**, 284-287.

Kinney, J.J. (1997), *Probability: An Introduction with Statistical Applications*, Wiliey.

R Development Core Team (2005). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL http://www.R-project.org.

Venables, W.N. and Ripley B.D. (1999), *Modern Applied Statistics with S-Plus,* 3rd Ed.New York: Springer.

"Answer to the Monty Hall Problem".http://www.comedia.com/hot/monty-answer.html

"Education, Mathematics, Fun, Monty Hall Dilemma".http://www.cut-the-knot.org/hall.html

"Monty Hall Puzzle". http://www.utia.cas.cz/user_data/vomlel/mh-puzzle.html

"The Monty Hall Problem". http://www.io.com/~kmellis/monty.html

七、附錄：　附表一　亂 數 表

亂 數 表 中 分成三組，個人起始值 設定之後，後續值 <u>由上而下、由左而右</u>：

	[, 0]	[, 1]	[, 2]	[, 3]	[, 4]	[, 5]	[, 6]	[, 7]	[, 8]	[, 9]
[0,]	0.372	0.044	0.710	0.658	0.250	0.300	0.585	0.333	0.622	0.546
[1 ,]	0.880	0.707	0.732	0.932	0.455	0.590	0.820	0.224	0.412	0.039
[2,]	0.701	0.957	0.213	0.661	0.923	0.796	0.071	0.389	0.406	0.659
[3,]	0.423	0.321	0.198	0.163	0.523	0.913	0.207	0.814	0.020	0.925
[4,]	0.435	0.442	0.761	0.333	0.394	0.233	0.072	0.913	0.772	0.108
[5,]	0.079	0.434	0.680	0.734	0.453	0.784	0.680	0.519	0.691	0.588
[6,]	0.815	0.810	0.610	0.993	0.843	0.716	0.019	0.305	0.883	0.941
[7,]	0.234	0.937	0.567	0.843	0.821	0.280	0.047	0.225	0.673	0.959
[8,]	0.685	0.776	0.776	0.983	0.010	0.953	0.323	0.428	0.134	0.018
[9,]	0.656	0.915	0.715	0.183	0.240	0.836	0.386	0.233	0.069	0.062
[10,]	0.125	0.023	0.392	0.860	0.718	0.339	0.081	0.037	0.773	0.995
[11,]	0.147	0.040	0.566	0.889	0.871	0.982	0.880	0.510	0.334	0.613
[12,]	0.398	0.140	0.079	0.550	0.261	0.810	0.545	0.474	0.664	0.092
[13,]	0.651	0.368	0.246	0.299	0.559	0.480	0.477	0.936	0.470	0.678
[14,]	0.934	0.274	0.947	0.313	0.876	0.167	0.469	0.652	0.034	0.435
[15,]	0.150	0.459	0.619	0.956	0.101	0.228	0.555	0.771	0.480	0.881
[16,]	0.968	0.690	0.867	0.560	0.305	0.999	0.293	0.903	0.042	0.599
[17,]	0.681	0.983	0.502	0.743	0.911	0.988	0.765	0.821	0.940	0.672
[18,]	0.907	0.762	0.486	0.250	0.359	0.009	0.236	0.106	0.611	0.205
[19,]	0.215	0.016	0.328	0.270	0.914	0.418	0.691	0.900	0.208	0.461
[20,]	0.606	0.563	0.277	0.226	0.984	0.098	0.880	0.233	0.772	0.472
[21,]	0.409	0.823	0.535	0.491	0.014	0.643	0.320	0.534	0.954	0.040
[22,]	0.285	0.492	0.481	0.438	0.438	0.186	0.945	0.145	0.779	0.813
[23,]	0.220	0.317	0.264	0.522	0.203	0.653	0.277	0.409	0.837	0.435
[24,]	0.254	0.856	0.220	0.186	0.022	0.465	0.297	0.189	0.668	0.281
[25,]	0.220	0.490	0.225	0.821	0.382	0.627	0.952	0.778	0.107	0.230
[26,]	0.217	0.693	0.597	0.279	0.443	0.897	0.054	0.664	0.829	0.752
[27,]	0.034	0.646	0.963	0.361	0.970	0.492	0.932	0.601	0.352	0.088
[28,]	0.182	0.110	0.368	0.009	0.079	0.299	0.586	0.703	0.749	0.314
[29,]	0.387	0.988	0.681	0.889	0.319	0.462	0.405	0.926	0.327	0.111

Generating method by R:> set.seed(101)

```
> rnum <- round(1000*(runif(300)))/1000
> rnmtrx <- matrix(rnum, c(30,10), byrow=T)
```

附表二

實驗次別	獎品位置	亂數值	參賽者選取位置	主持人開門位置	不換門而中獎	換門而中獎
1	2	0.749	3	1	0	1
2	2	0.327	1	3	0	1
3	2	0.546	2	1 or 3	1	0
4	2	0.039	1	3	0	1
5	2	0.659	2	1 or 3	1	0
6	2	0.925	3	1	0	1
7	2	0.108	1	3	0	1
8	2	0.588	2	1 or 3	1	0
9	2	0.941	3	1	0	1
10	2	0.959	3	1	0	1
11	2	0.018	1	3	0	1
12	2	0.062	1	3	0	1
13	2	0.995	3	1	0	1
14	2	0.613	2	1 or 3	1	0
15	2	0.092	1	3	0	1
16	2	0.678	3	1	0	1
17	2	0.435	2	1 or 3	1	0
18	2	0.881	3	1	0	1
19	2	0.599	2	1 or 3	1	0
20	2	0.672	3	1	0	1
21	2	0.205	1	3	0	1
22	2	0.461	2	1 or 3	1	0
23	2	0.472	2	1 or 3	1	0
24	2	0.040	1	3	0	1
25	2	0.813	3	1	0	1
26	2	0.435	2	1 or 3	1	0
27	2	0.281	1	3	0	1
28	2	0.230	1	3	0	1
29	2	0.752	3	1	0	1

30	**2**	**0.088**	**1**	**3**	**0**	**1**
31	**2**	**0.314**	**1**	**3**	**0**	**1**
32	**2**	**0.111**	**1**	**3**	**0**	**1**
33	**2**	**0.372**	**2**	**1 or 3**	**1**	**0**
34	**2**	**0.880**	**3**	**1**	**0**	**1**
35	**2**	**0.701**	**3**	**1**	**0**	**1**
36	**2**	**0.423**	**2**	**1 or 3**	**1**	**0**
37	**2**	**0.435**	**2**	**1 or 3**	**1**	**0**
38	**2**	**0.079**	**1**	**3**	**0**	**1**
39	**2**	**0.815**	**3**	**1**	**0**	**1**
40	**2**	**0.234**	**1**	**3**	**0**	**1**
41	**2**	**0.685**	**3**	**1**	**0**	**1**
42	**2**	**0.656**	**2**	**1 or 3**	**1**	**0**
43	**2**	**0.125**	**1**	**3**	**0**	**1**
44	**2**	**0.147**	**1**	**3**	**0**	**1**
45	**2**	**0.398**	**2**	**1 or 3**	**1**	**0**
46	**2**	**0.651**	**2**	**1 or 3**	**1**	**0**
47	**2**	**0.934**	**3**	**1**	**0**	**1**
48	**2**	**0.150**	**1**	**3**	**0**	**1**
49	**2**	**0.968**	**3**	**1**	**0**	**1**
50	**2**	**0.681**	**3**	**1**	**0**	**1**
51	**2**	**0.907**	**3**	**1**	**0**	**1**
52	**2**	**0.215**	**1**	**3**	**0**	**1**
53	**2**	**0.606**	**2**	**1 or 3**	**1**	**0**
54	**2**	**0.409**	**2**	**1 or 3**	**1**	**0**
55	**2**	**0.285**	**1**	**3**	**0**	**1**
56	**2**	**0.220**	**1**	**3**	**0**	**1**
57	**2**	**0.254**	**1**	**3**	**0**	**1**
58	**2**	**0.220**	**1**	**3**	**0**	**1**
59	**2**	**0.217**	**1**	**3**	**0**	**1**
60	**2**	**0.034**	**1**	**3**	**0**	**1**

最後統計一下分別中獎的實驗次數。

不換門中獎的實驗次數：共 __17__ 次；

換門而中獎的實驗次數：共 __43__ 次。

附表三：R code

```
MontyHall <- function(seedM=c(28,8), Gift=2, n=60)
{
    set.seed(101)
    rn = round(1000*runif(300))/1000
    rnM = matrix(rn, c(30,10), byrow=T)
    dat = as.vector(rnM)
    I = 1 + seedM[1] + 30 * seedM[2]                    #初始位置指標值
    cat("\n", "Your lucky number is: ", dat[I],"\n\n")  #初始位置亂數值
    if(I+n > 300)   dat = c(dat, dat)          #初始位置在後段需回到亂數表
左上角
    m = I
    resTab = matrix(0, nrow=(n+1), ncol=7)
    resTab[1:n, 1] = 1:n   ;   resTab[1:n, 2] = rep(Gift, n)
    winYC = winNC = 0

    for(i in 1: n)
    {
        resTab[i, 3] = dat[m]     #實驗次別所對應的亂數值
        k = ceiling(3 * dat[m])
        resTab[i, 4] = k          #由亂數值來決定參加者選擇的門號
        m = m + 1
        if (k == Gift)
        {
            resTab[i, 5] = -Gift ;   resTab[i, 6] = 1
```

```
            winNC = winNC + 1   #沒有換門而贏得大獎
        }
        else
        {
            resTab[i, 5] = (1:3)[-c(k, Gift)] ;    resTab[i, 7] = 1
            winYC = winYC + 1   #選擇換門而贏得大獎
        }
    }
    colnames(resTab) = c("次別","獎品","亂數值","選門","主持人","不換","
換門")
    rownames(resTab) = c(rep("實驗", n), "總數")
    resTab[n+1, 1:5] = rep("---", 5)
    resTab[n+1, 6] = winNC ;    resTab[n+1, 7] = winYC

    list(ResultTable = resTab)
}
```

活動報馬仔

一、 2008/02/20～2008/02/23

2008 年亞洲科學教育學術研討會

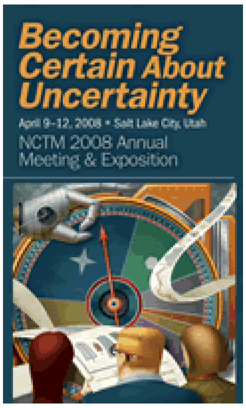
地點：高雄國賓大飯店

二、 2008/04/09～2008/04/12

NCTM 2008 Annual Meeting and Exposition

Becoming Certain About Uncertainty

地點：Salt Lake City, Utah



三、 2008/07/06～2008/07/13

11th International Congress on Mathematics Education

(ICME 11)

地點：Monterrey, Mexico

四、 2008/07/17(四)～2008/07/21(一)

32nd International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME32)

地點：Morelia, Michoac- Mexico

五、 2008/07/20～2008/07/25

XXIX International Congress of Psychology

地點：Berlin-Germany

六、 2008/09/16～2008/09/20

The 3rd IEA International Research Conference

地點：TAIPEI, CHINESE TAIPEI

稿 約

一、本刊徵選之數學教育刊物為：

（一）本刊以徵選實務性的數學教育刊物為主，舉凡任何數學創新教學之方法或策略、數學教學實務經驗、數學課程設計與實踐之心得分享等皆為本刊之首要選擇標的；

（二）研究文章（包括以實驗、個案、調查或歷史等研究法所得之結果，和文獻評論、理論分析等）；

（三）短文（包括研究問題評析、數學教育之構想、書評、論文批判等）；以及

（四）其他符合本刊宗旨之文章。

二、本刊所刊之文章，需為報導原創性教學或研究成果之正式文章，且未曾於其他刊物或書籍發表者（在本刊發表之文章未經台灣數學教育學會同意，不得再於他處發表）。

（一）來稿請注意下列事項：

1. 來稿請以中文撰寫，力求通俗易讀，須為電腦打字，每篇以不超過 6000 字為原則（特約稿不在此限），以電子郵件傳送。
2. 來稿請附中英文篇名、作者姓名及服務機關，作者姓名中英文並列，若有一位以上者，請在作者姓名及服務機關處加註（1）、（2）、（3）等對應符號，以便識別，服務機關請寫正式名稱。
3. 來稿請附中英文摘要，並於摘要後列明關鍵詞彙（key words），依筆劃順序排序（以不超過五個為原則），英文關鍵詞彙則須與中文關鍵詞彙相對應。
4. 文稿若為譯文，請附原文影本及原作者同意函，並請註明原文出處、原作者姓名及出版年月。
5. 凡人名、專有名詞等若為外語者，第一次使用時，謂用（）加註原文。外國人名若未有約定成俗之譯名，請逕用原文。
6. 附圖與附釋請於文後，並編列號碼，並在正文中註明位置。
7. 文末參考文獻依作者姓氏分別編號排序：中、日文依筆劃多寡排列；西文（英、法、德…等）依字母順序排列；若中、日、西文並列時，則先中、日文後西文。至於參

考文獻之寫法如下：

（1）期刊論文，請依下列順序書寫：作者、出版年（西元）、論文篇名、期刊名稱、卷期、頁數。

例：張湘君（1993）。讀者反應理論及其對兒童文學教育的啟示。*東師語文學刊，6*，285-307。

（2）圖書單行本，請依下列順序書寫：作者、出版年（西元）、書名、版次、出版地、出版社、頁數。

例：張春興（1996）。*教育心理學*。台北：東華。頁64-104。

8. 稿件順序為：首頁資料（題目、作者真實姓名及服務機關、通訊地址及電話；若需以筆名發表，請註明）、中文摘要、正文（包括參考文獻或註釋）、末頁資料（以英文書明題目、作者姓名及服務機關、並附英文摘要）及圖表（編號須與正文中之編號一致）。

（二）本刊對來稿有權刪改，不同意者請在稿件上註明。

（三）來稿刊出，版權為台灣數學教育學會所有。

（四）作者見解，文責自負，不代表本學會之意見。

（五）來稿請e-mail至：dcyang@mail.ncyu.edu.tw