

ISSN 1815-6355

台灣數學教師(電子)期刊

Taiwan Journal of Mathematics Teachers

第16期

台灣數學教育學會

2008年12月

台灣數學教師(電子)期刊
Taiwan Journal of Mathematics
Teachers
2008 年 12 月出版
NO.16 2008

發行人：林福來教授

主編：

楊德清 國立嘉義大學數學教育研究所

編輯委員 Editorial Panel

呂玉琴 國立台北教育大學數學教育研究所

李源順 台北市立教育大學數學資訊教育學系

林素微 國立花蓮教育大學數學系

金鈴 國立台灣師範大學數學系

梁淑坤 國立中山大學教育研究所

蔡文煥 國立新竹教育大學應用數學系

劉祥通 國立嘉義大學數學教育研究所

劉曼麗 國立屏東教育大學數理教育研究所

(依姓名筆劃順序排列)

封面設計：施乃文

出版者：台灣數學教育學會

地址：台北市 116 汀州路四段 88 號國立台灣師範大學數學系 M212

電話：02-29307151

電子郵件信箱：tame@math.ntnu.edu.tw

網址：

<http://www.math.ntnu.edu.tw/~tame/index.htm>

總編輯：楊德清 dcyang@mail.ncyu.edu.tw

地址：嘉義縣民雄鄉文隆村 85 號

國立嘉義大學數學教育研究所

電話：05-2263411-1924

發行宗旨

一、本刊為一實務性的數學教育刊物，出版目的如下：

1. 積極發揚台灣數學教育學會之成立宗旨：研究、發展、推廣數學教育，使台灣學生快樂學好數學。
2. 提升數學教師教學品質、數學教育研究品質及促進數學教學策略與方法之交流。
3. 探討數學教育的學術理論與實務現況，以促進理論與實務之結合，進一步提升數學教學之內涵。
4. 提供數學教育課程、教材與教法等實務經驗，包括數學遊戲、DIY 教具之分享，以供未來之教學與研究參考之用。
5. 針對多數學生特定迷思概念之教學引導，如學生易有的錯誤型態及如何釐清觀念等。
6. 介紹國內外數學教育現況。

二、本刊內容以充實高中、國中與小學數學教學、課程與教材為主，以提供所有關心數學教育人士之教學資源與參考依據。

三、本期刊以季刊方式（3 個月一期，一年共 4 期）發行，分別於每一年的 3、6、9、12 月發行。

四、本期刊採電子與紙本方式同時發行。

ISSN 1815-6355

台灣數學教師（電子）期刊
Taiwan Journal of Mathematics
Teachers

第 16 期

2008 年 12 月

台灣數學教師（電子）期刊

目錄

第 16 期

2008 年 12 月

序言.....	1
---------	---

李源順

「數Fun興中，舞動數學生命力」學校本位課程 的發展與實踐.....	2
---------------------------------------	---

侯雪卿、張根延、陳滢如、陳彩鳳、陳志峰

利用螺旋變式課程設計“一題多解”理念培養准 教師的數學興趣.....	15
---------------------------------------	----

孫旭花

數學寫作活動對八年級中程度學生解題的影響 之個案研究—以一元二次方程式應用問題單元 為例.....	33
---	----

黃麗紅、溫嫩純、施皓耀

活動報馬仔	50
-------------	----

序言

李源順

台北市立教育大學數學資訊教育系學(暨碩士班)

TIMSS 2007 的國際報告剛出爐不久。我國四年級和八年級學生的數學成績一如以往分別獲得第三名和第一名的佳績。但學子對數學的學習態度方面，也和往常一樣，四年級學生在 36 個列入排序的國家中敬陪末座，八年級學生則是在 49 個國家中排名第 39，兩項均顯著低於國際平均。

台灣數學教師電子期刊從 2005 年 3 月第一期出刊，到現在已四年了。在一個大學生活的時間裏，電子期刊提供了台灣數學教育工作者發表創作的園地。使台灣的數學教育可以一直延續下去，發展、創新下去。希望在可遇見的未來，我們的學子會因為大家的努力，不僅數學成就如往常一樣好，他們的學習興趣也因為大家的努力而提升許多。

興中國小的老師們運用行動研究，發展創新、資訊、行動、多元的課程，舞出數學的生命力。崇林國中的老師和彰師大的教授們利用數學寫作啟迪學生的能力。澳門大學的教授利用螺旋變式課程設計“一題多解”的問題培養准教師的數學興趣。這些有創新、融入資訊科技、數學寫作的活動、以及讓學生體認一題多解的策略，正可以讓培養我們的學子對數學學習的成就與興趣，有機會對所學的數學加以反思，有機會思考不同的解題策略。相信大家的努力會讓學子的學習態度轉向上向，感受到數學的美。相信大家的努力也一樣可以讓我們的學子保持一樣的好成績。

台灣數學教師電子期刊是大家的園地，需要大家的耕耘與灌溉。願這個園地能受到很好的照顧，使大家能在這邊學到、訴說與創新一些大家如何照顧學生學習成就與學習態度的好方法。

「數 Fun 興中，舞動數學生命力」學校本位課程的發展與實踐

侯雪卿¹、張根延²、陳澄如³、陳彩鳳⁴、陳志峰⁵

嘉義縣民雄鄉興中國民小學

摘要

民國 92 年，興中國小團隊教師有感於本校學生長期在數學學習的困境，因此，為了能讓孩子喜歡且提升數學能力，開始了在地化的數學課程行動研究。

課程發展分成四個階段逐步實施：（一）萌芽期（92-93 年）：設計能力指標題庫，評估學生數學能力（二）發展期（94-95 年）：設計主題數位教學，強化學生數學能力（三）茁壯期（96 年）：建構出「創新、資訊、行動、多元」課程願景共享，激發多元數學展能（四）綻放期（97 年）：課程融入了社區，發展「數 fun 興中，舞動數學生命力」學校本位數學課程，帶領孩子走出校園，從更多的角度展現數學學習活力。

六年來的努力，開啟了數學心門，舞動數學生命力，實踐了「創新、資訊、行動、多元」課程願景。

關鍵字：創新數學教學、數學學習、數學課程發展

「數 Fun 興中，舞動數學生命力」學校本位課程的發展與實踐

本文分成五個部分論述：方案發展的動機、方案發展的目的、方案發展的歷程、方案的具體成果、省思與展望。分述如下：

壹、 方案發展的動機

整個課程方案緣起於民國 92 年，這是一群教師為了讓孩子喜歡數學，進而提升數學能力的數學教學行動。其主要的動機有三點：

（一）改善數學學習的困境

興中國小位處嘉義縣、市的城鄉交界處，地理上屬於「不城不鄉」的尷尬位置，多數家長為從事農工的勞動階級，工作時數長，孩子放學在家，經常沒有父母陪伴在旁讀書，課業成就低落，尤其是數學成績表現呈雙峰狀態。除此外，2008 年遠見雜誌評筆嘉義縣在隔代教養、老年不識字、單親家庭...等各項弱勢指標位居全國第三名（遠見雜誌，2008），而興中國小在新移民子女、隔代教養位居嘉義縣之冠，文化弱勢的惡性循環之下，造成許多學生在學習數學上處於教育資源的弱勢，缺乏興趣，甚至感到困難，拒絕學習數學，數學儼然是許多學生學習的夢魘，因此，如何有效改善此一現象，成了本方案發展的動機之一。

（二）從傳統數學教學到創新數學教學的思變

自九年一貫課程實施以來，強調「能力本位」、「課程統整」、「彈性時間」的課程革新理念，活化了各領域的教學，知識的學習從零碎分化到統整（教育部，2000）。數學領域的教學亦從教師與學生的單一講述，轉化成討論、實作、動態評量的多元學習風貌（李坤崇、馮慧敏，2000、李坤崇，2002）。

然而創新的改變，引發社會各界人士的疑惑與質疑：「這樣是在學數學嗎？」「數學就是要多算、多練習，何必搞花樣？」，而家長的質疑更是首當其衝。多數的家長仍以數學測驗成績作為學習成效指標，殊不知厚實數學能力的培養，應該是多元學習，並與生活做結合（教育部，2000）。因此，如何引導家長從傳統數學教學到創新數學教學產生思變，成了本方案發展的動機之二。

(三) 從九年一貫精神找尋行動的起點

數學是科學的語言，在基礎教育中是核心科目。在九年一貫課程裡，數學教育強調應提供學生做有意義及有效率學習的機會，使學生能學好重要的「數學知識」和「數學能力」，成為日常生活及職場應具備的基本能力（教育部，2000）。

因此，本團隊意圖從九年一貫課程三大課程目標「人與自己」、「人與社會」、「人與自然」精神中找尋數學課程的行動起點，轉化三大目標為「數學與自己」、「數學與社會」、「數學與自然」，做為本方案的課程核心，冀望能以此三者為核心發展出本位化的數學課程，進而有效培養學生的「數學知識」和「數學能力」，成為帶得走的日常生活基本知能。

貳、 方案發展的目的

為了讓學生認識重要的數學概念及提昇厚實的數學能力，不再視數學為畏途，並改變家長對於創新數學教學的質疑，本團隊意圖從「亦城亦鄉」的學校本位精神出發，將數學與自己、數學與社會、數學與自然的關係作為課程的核心，應用多元智慧理論，融入校園景觀、鄉土資源等生活化題材，透過不斷設計、實施、回饋、省思的課程行動歷程，發展與實踐永續性的學校本位數學課程。

參、 方案發展的歷程

本方案自 92 年 9 月至今，課程發展分成四個階段萌芽期、發展期、茁壯期、綻放期逐步實施：

(一) 萌芽期（92-93 年）～「能力指標題庫，評估數學能力」

團隊教師為了瞭解學生的數學能力，於 92 年，從詮釋九年一貫課程數學領域能力指標著手（楊思偉，1999），再將能力指標的內涵依據五個主題「數與量」、「圖形與空間」、「代數」、「統計與機率」、「連結」轉化成知識、理解、應用、分析、評鑑、創作六種試題類型（余民寧，1997、李坤崇，2001），設計出一到六年級的評量題庫，並於課室實施，結果發現施測的學生有一半以上數學知識和了解上表現不錯，但是在分析、評鑑、創作等需要推理、思考、關係推演的高層次認知表現不盡理想。

表 1 能力指標題庫學生做題錯誤率之結果分析

	數與量	圖形與空間	代數	統計與機率	連結
知識	14.63%	11.28%	23.17%	9.81%	13.12%
了解	18.18%	15.39%	27.65%	15.56%	17.26%
應用	36.67%	29.16%	46.98%	24.11%	26.71%
分析	56.17%	62.89%	68.77%	45.16%	57.15%
評鑑	89.31%	91.08%	92.33%	68.33%	63.96%
創作	99.21%	97.73%	99.8%	85.24%	86.23%

(二) 發展期 (94-95 年) ~ 「主題數位教學，強化數學能力」

為了提升學生分析、評鑑、創作的數學能力，團隊教師決定設計中長期的數學課程，分階段逐步實施。發展期以六年級為優先，原因有二：一是六年級是最高年級，可以透過課程實踐，發現學生先備經驗的不足之處，進而分析現行教材的缺失，擬定教學策略和設計課程，二是透過發展期的課程實踐經驗，省思修正，進而作為數學課程向其他年級延伸的參考。

因此，團隊教師研發了「生活化、數位化」高年級創意數學主題教學課程，一方面利用生活素材（校園水生池學容量和體積，裝潢故事家學複合面積）的數學課程，統整學生的數學能力，另一方面結合 94 年度教育部資訊種子學校課程計畫，應用資訊科技輔助數學教學（例如：利用動畫展現圓形切割成扇形後組成平行四邊形，學習圓面積公式），帶領學生能使用資訊科技學習數學知識。

課程實施後，發現主題教學有助於數學學習的整體性，學生在分析與評鑑能力的能力有進步（詳見表 2），經驗到數學非片面一連串的計算與解題；數位教材讓教學省時、便捷，學習透過視覺化的效果更能集中學生的注意力。

表 2 學生在分析與評鑑的做題錯誤率前後之比較表

	數與量	圖形與空間	代數	統計與機率	連結
分析（前）	56.17%	62.89%	68.77%	45.16%	57.15%
分析（後）	42.56%	55.12%	60.07%	35.26%	45.88%
評鑑（前）	89.31%	91.08%	92.33%	68.33%	63.96%
評鑑（後）	80.28%	84.19%	86.03%	54.77%	48.11%

(三) 茁壯期 (96 年) ~ 「願景共享課程，多元數學展能」

有鑑於發展期的課程行動，團隊老師省思可以將數學課程學習對象延伸至其他年級，並擴充數學課程的廣度，帶動數學學習的風氣。

因此，團隊教師透過學校背景分析，建構出四大課程目標的共享願景：創意生活化、資訊數位化、教學行動化、學習多元化（名詞釋義，詳見表 2），並依據九年一貫課程綱要「數與量」、「代數」、「圖形與空間」、「連結」、「統計與機率」能力指標加以設計、擴充，發展出「活力興中，數學 e 起來」數學課程。

此時期的課程內容有數學繪本、數學嘉年華、數學 e-learning、親子共學創意數學闖關等教學活動的實施，藉以提昇數學學習的廣度和深度，並透過數學全方位成長護照，讓學生紀錄自己的學習歷程和成品作為形成性評量；數學百寶箱總結性檢核學習是否已達到能力指標。再利用問卷調查、學生心得、網誌交流、親師回饋單了解整個課程實施的現況與困境（結果如圖 1 和圖 2 所示）。

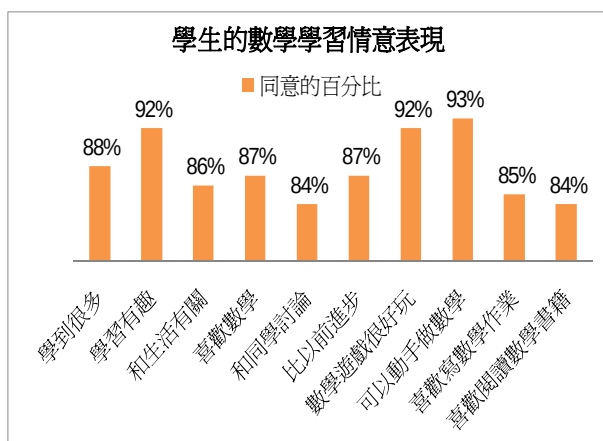


圖1 學生的數學學習情意表現

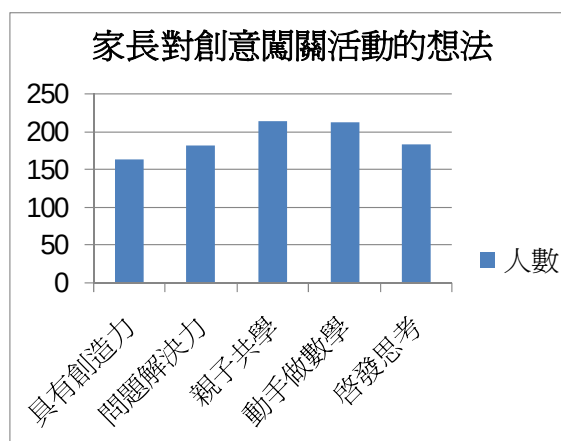


圖2 家長對創意闖關活動的想法

表 3 四大課程目標名詞釋義表

一	創意生活化	以九年一貫課程的「人與自己」、「人與社會」、「人與自然」為核心，透過教師專業對話、教材內容與校園環境及社區產業的結合、教學評量之創新性和生活化。使學生體驗「數學與自己」、「數學與社會」、「數學與自然」的關係，培養學生具有思考、推理、探索、創造、批判等能力，進而能靈活應用於生活問題的解決。
---	-------	--

二	資訊數位化	以數學領域的學習和教學為核心，旨在透過資訊科技的融入，增進教師數學教學專業能力，帶領學生能利用資訊科技學習數學領域的知識，將資訊科技融入生活的各個層面，有效提升學習成效。藉由網頁網路的傳播，分享與推廣課程發展的歷程。
三	教學行動化	以學校本位數學課程的發展為核心，透過教師進修成長、同僚專業對話及互享機制的建立、尋求與外部資源的聯盟與合作及參加相關競賽，以促進教學經驗與專業知識的交流，增進教師專業自主的能力，並提升課程與教學的品質。
四	學習多元化	以多元智慧理論為基礎，讓學生透過具體操作（動手）、發表討論（演說）、闖關活動（遊戲）、數學寫作（書寫）、e化（資訊融入）、語文理解（閱讀）等多元途徑來學習數學，以提升學生在數學學習的認知、技能、情意等層面之成效。

(四)綻放期（97 年）～「數 fun 興中，舞動數學生命力」

有鑑於茁壯期親師生的回饋：學生表示很喜歡「數學 e-learning」和「數學全方位成長護照」，可以自己學數學；家長肯定親子共學，能喚起兒時學數學的記憶，覺察孩子數學的學習方式；老師建議課程應結合社區資源，擴充孩子數學學習的視野。

因此，課程融入了社區環境與人文情懷，發展出「數 fun 興中，舞動數學生命力」學校數學課程。課程內容除了延續數學 e-learning、親子共學、數學全方位成長護照等課程活動，還加入二個課程，一是數學藏寶圖課程，利用校園中孩子常去的地方(辦公廳)或是具有歷史背景的景點(大象溜滑梯)，設計數數、乘除問題、時間拆解、幾何圖形和面積等數學教材，培養數學能力和愛校的情懷；二是高粱酒鄉興中情課程，與嘉義酒廠產學合作，從種高粱開始，經驗土地面積、統計圖、高粱成長高度、釀酒百分濃度，以及從酒精濃度學習比和比值、從折線圖探討酒駕肇事事事件，帶領孩子走出校園，從更多的角度展現數學學習活力。

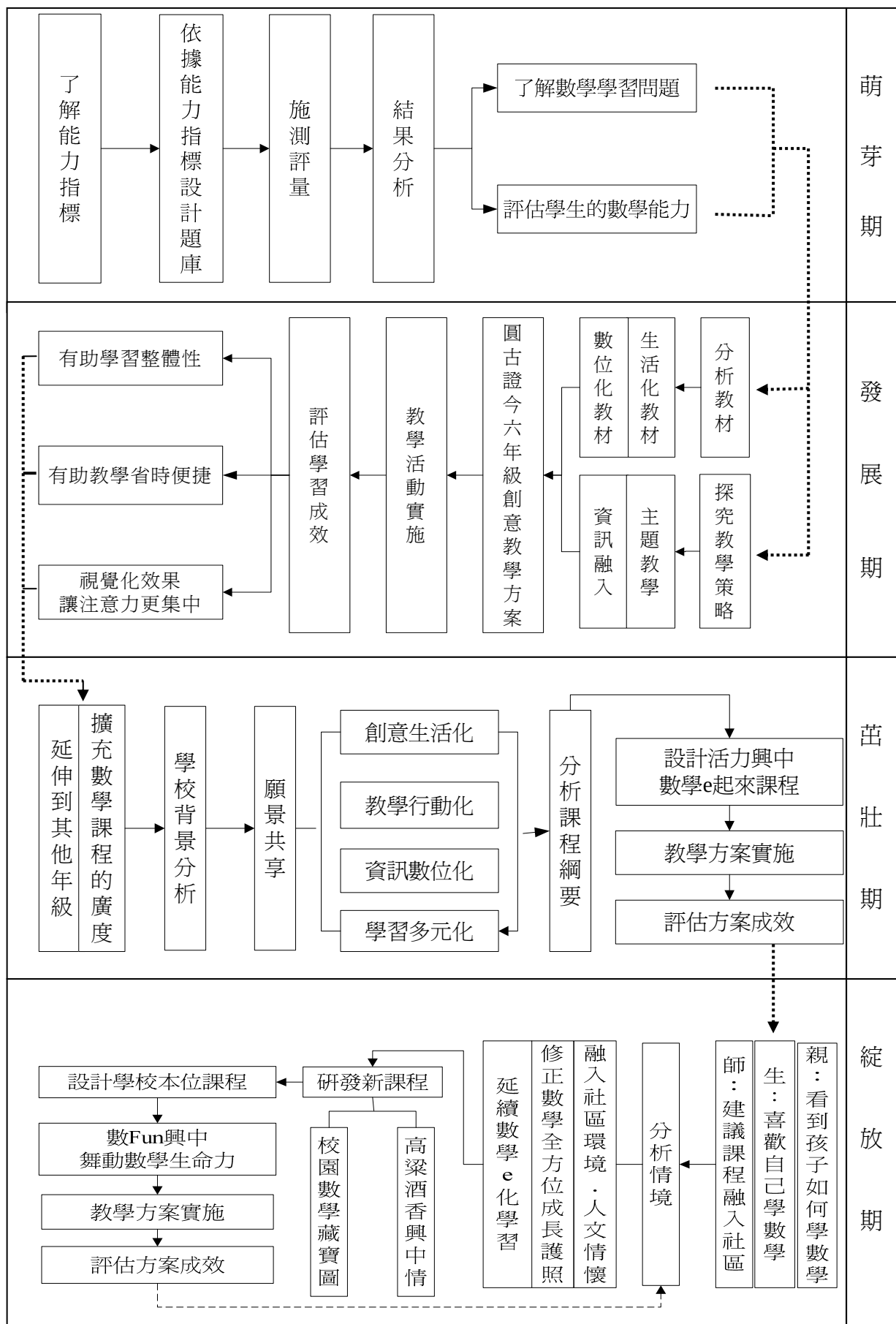


圖3 方案發展歷程圖

肆、 方案實施的具體成果

本方案歷經了五年多，在教學活動內容的研發、學習方法的突破，無處不是教師團隊的巧思與竭盡心力的付出。為了能實踐「創意生活化」、「資訊數位化」、「教學行動化」、「學習多元化」的四大課程目標，「生活魔數師」教師團隊在教學、教材、學習環境、評量等方面創新，透過發表、遊戲、具體操作、e-learning、寫作等多元的途徑啟發數學學習的創思性、推理性、有趣性，讓每一位想知道、想學習、想探索、想分享數學的師、生、家長都能獲得更豐富的數學知識。以下針對四大課程目標共有四層面的具體成果，進一步闡述之：

（一）實踐課程目標—創意生活化的具體成果

在創意生活化方面，本團隊以九年一貫課程的「人與自己」、「人與社會」、「人與自然」為核心，具體發展出「校園數學藏寶圖」、「數學全方位成長護照」、「高粱酒鄉興中情」三個數學課程方案，希望讓學生體驗「數學與自己」、「數學與社會」、「數學與自然」三者的關係。以下就此三方面分別加以敘述：

1、體驗「數學與自己」的關係，培養帶得走的數學知能

此套課程擺脫了文本的數學解題活動，將數學的學習與校園環境、鄉土資產和網際網路結合，落實了教材內容、教學環境、教學評量之創新性和生活化。且透過課程教學活動的實施後，學生也充分體驗了「數學與自己」的關係，提升了思考、表達、欣賞、批判等自身的數學能力。

2、體驗「數學與社會」的關係，主動探索數學與社會人文的互動

數學被公認為科學、技術及思想發展的基石，文明演進的指標與推手（教育部，2000）。數學與科學、文明之建築、工技與藝術作品，皆有不可切割之關係。本方案以「數學與社會」的觀點出發，成果豐碩，學生主動探索數學與社會人文的關係，體驗到人際尊重合作的重要性、產業行銷的意義性、校園歷史的文明性、網路文化的可用性、景觀建築的美學性。

3、體驗「數學與自然」的關係，進而反思自然環境的可貴

數學是人類認識自然的仲介，早在希臘時代，畢達哥拉斯學派即提出「萬物皆數學」，認為數是描述大自然的第一原理，數學、自然與科學，皆有不可切割之關係。本方案以「數學與自然」的觀點出發，實施成果豐碩，學生透過數學符號表徵與意義探索數學與家鄉自然產業的關係，從種高粱、製作稻草人、認識

校園景點等課程中，體驗到人在自然界的渺小和愛護自然環境資源的必要性。

(二) 實踐課程目標－資訊數位化的具體成果

在資訊數位化方面，本團隊藉由資訊科技的運用，具體發展出「生活魔術師」數學資訊網站、建置「教材下載區」、建置「學習精靈」學習平台，以促進學生學習成效、記錄團隊發展歷程與方案內容，進而達到分享與推廣的目的。以下就此三方面的成果加以敘述：

1、架設「生活魔術師」數學資訊網站 (<http://163.27.78.150>)，推廣方案課程與教學。

「生活魔術師」數學資訊網站內容包羅萬象，主要分成五大部分：

- (1) 數學團隊：團隊組織的介紹、個人專長與課程角色任務。
- (2) 發展軌跡：團隊運作的歷程、工作計畫和成果、得獎事蹟。
- (3) 數學課程：「數 Fun 興中，舞動數學生命力」數學課程的理念、課程架構圖、課程內容、實施成果、部落格心得分享。
- (4) 數學精靈：資訊融入學習，提供自編的互動式學習評量、其他 e 化數學學習平台的連結，配合「數學全方位成長護照」輔助學生學習數學。
- (5) 數學教材：提供能力指標題庫、教學簡報、學習單、教案設計方案、測驗評量的資源下載。

2、建置「數學教材」，分享數位教材

經過多年的努力，本校教師團隊依據「數與量」、「幾何」、「代數」、「統計與機率」四個主題設計各年段教學簡報、幾何動畫教材、學習單、教案設計方案等「數學教材」共 15 件，提供師生或他校老師參考運用。

3、建置「學習精靈」平台學習，讓學習 e 化

「學習精靈」是自行研發的互動式評量和有效連結其他 e 化的學習網站，共整理出低、中、高年級三大學習區，呼應「數與量」、「幾何」、「代數」、「統計與機率」四個主題，共二十多件互動式學習軟體，作為數學教學活動的資訊輔助學習平台。

(三) 實踐課程目標－教學行動化的具體成果

在教學行動化方面，本團隊透過教師的行動研究、尋求與外部資源的聯盟與合作及參加相關競賽，以落實學校本位課程、推廣數學教學、並為教學團隊的成長留下紀錄（詳見附錄四）。以下就此三方面的成果加以敘述：

1. 落實學校本位課程的週三教師團隊行動研究

本校自 92 年起，即開始進行一波又一波教師團隊行動研究，這五年多來，留下許多行動的痕跡.....

(1) 專業對話

1. 聘請嘉義大學數學教育研究所姚如芬教授做為本團隊數學課程諮詢教授
2. 聘請義竹農改場楊藹華博士做為本團隊高粱種植諮詢教授

(2) 專業研習

針對團隊教師的專業成長，這五年多來，辦理了「分組領域專業進修研習」、「資訊融入數學教學研習」、「高粱種植教師培研習」、「課程設計研習」，以提升教師的數學專業知能。

(3) 同儕互享（成果可見表 4）

1. 每學年定期在校內發表方案成果，分享經驗與回饋省思。
2. 團隊教師撰寫省思札記，分享課程設計的想法、困境或對外參賽後的收穫與省思。

(4) 對外參與各項競賽

自 93 年起團隊即開始參與各項競賽，落實教師團隊的專業行動化。

表 4 能力指標詮釋和評量題庫設計對數學教學的影響

項目	人數		人數
教學活動的設計	8	<u>數學課程精神與目標的理解與掌握</u>	10
教學策略的學習或修正	8	數學教材地位間的關聯	8
學生學習的評量	7	課程標準與評量二者間的呼應	8
數學知識的增進	10	教學熱忱	5

教學資源的獲得與使用	3	教學反省	8
學習理論於課室中的應用	5	其他	0
提供回饋給學生	5	教室經營與情境佈置	2

2、與學區內鄰近大學、嘉義酒廠合作推廣數學教學

嘉義大學教育學院民雄校區和嘉義酒廠座落於本校學區內，長久以來，就享有教育資源互享的地利性。這樣的關係，讓本校能夠與嘉義大學、嘉義酒廠保有良好的合作機會：

(1) 嘉義大學合作推廣數學教學

- 1.共同合作辦理「數學營」的學習活動
- 2.與師資培育中心、數學教育研究所進行多次數學領域教學觀摩
- 3.與嘉義大學數學教育所教授合作，進行一、二年級數學領域的診斷性評量，將分析的結果供給教師參考，進一步作為教學改進之道。

(2) 嘉義酒廠產學合作推廣高粱種植數學體驗課程

(四) 實踐課程目標—學習多元化的具體成果

在學習多元化方面，本團隊依據多元智慧理論，透過創新多元的學習方式，包含：具體操作、發表討論、遊戲、寫作、闖關、閱讀、e化等途徑，以提升學生在數學學習的認知、技能、情意等層面之成效。以下就此三方面的成果加以敘述：

1、認知層面的具體成果

本方案的數學課程呼應九年一貫課程五大主題「數與量」、「幾何」、「統計與機率」、「代數」、「連結」，透評量測驗實施測結果，學生在五大題有關知識、理解、應用的答錯率表現低於 30% 以下，有關評鑑、創作答錯率表現低於 70% 以下（結果分析詳見表 5），顯示透過本方案的實施，學生數學能力有提升的趨勢。

2、技能層面的具體成果

學生透過不同的表徵方式：操作（DIY）、發表（TALK）、寫作（WRITE）、閱讀（READ）、遊戲（PLAY）、實際體驗、製作部落格...充分展現了數學技能。

3、情意層面的具體成果

為了瞭解本方案實施後，學生、家長、老師的反應為何？教學團隊設計情意問卷，並分別於課堂及辦理親子數學闖關活動時進行調查，調查統計結果如下：

(1) **學生部分**：有超過六百多位學生(本校學校約 1200 人，參與課程實施 33 個班級)認為「數學學習有趣」、「數學遊戲很好玩」、「可以動手做數學」、「成績比以前進步」，顯示學生喜歡自己體驗數學，並且覺得能提升數學學習成就。

(2) **家長部分**：共有 253 位家長填寫問卷，有過半（150 人）的家長贊成本課程實施帶給學生正向的數學學習。(970315 家長回饋單 036)「**遊戲中體會數學的樂趣，好像數學沒那麼可怕。**」(970315 家長回饋單 156)「**因目前的家庭大多是小家庭，所以父母上班之餘與小朋友的互動學習時間相對的減少了，這次闖關遊戲增進了親子的互動及學習。**」

(3) **老師部分**：參與此次課程實施的老師共有 40 位，多數老師認為此課程活化數學學習，並且表示如果有機會願意加入教師團隊一起參與課程發展的行動中。

表 5 五大主題評量答錯率結果分析表

	數與量	圖形與空間	代數	統計與機率	連結
知識	12.13%	11.02%	20.16%	8.03%	11.79%
了解	16.53%	14.97%	25.25%	13.66%	17.08%
應用	26.35%	24.86%	29.14%	18.58%	20.36%
分析	49.22%	45.57%	60.23%	40.18%	48.98%
評鑑	64.51%	63.02%	66.24%	58.94%	53.12%
創作	67.85%	66.88%	69.98%	61.50%	59.91%

伍、 省思與展望

發展學校本位課程是一段富挑戰而永無止盡的路程，不斷透過行動的實踐，再修正、再擴充，永遠沒有畫下休止符的時候。然而，就算是無停止的行動歷程，發展以數學領域為本校本位課程方案，始終是「生活魔數師」教師團隊堅持的教育夢。

未來，本校的教師團隊還要為「數 Fun 興中，舞動數學生命力」學校本位課程方案持續努力，增加生力軍，並將學習的觸角繼續拉長、深入。在「創意生活化」方面，我們希望能以現有的低、中、高年級數學本位課程方案為基礎，修改

方案不盡理想之處，加強縱向連貫與橫向統整，有效輔助現行教材的教學；在「資訊數位化」方面，我們希望能擴大群性，利用網際網路進行校與校、甚至跨國性的數位交流；在「教學行動化」方面，我們希望擴散教學團隊同僚專業互享的氛圍，讓更多教師參與方案的推動；而在「學習多元化」方面，我們希望能規劃出朝向科展方向努力，深化學生推理探究的能力。

希望，有朝一日，只要在嘉義縣談起數學，便想起興中國小，讓數學與興中畫上等號。並且，持續用行動推廣「數 Fun 興中，舞動數學生命力」課程方案，讓更多學校和同僚教師，也能加入我們行列，舞動數學教育生命力！

陸、 參考文獻

- 余民寧(1997)。《教育測驗與評量》。台北：心理出版社。
- 楊思偉(1999)。《規劃國民中小學九年一貫課程基本能力實踐策略》。教育部委託專案研究報告。台北：台灣師範大學教育研究中心。
- 陳英豪、吳裕益(1991)。《測驗與評量(修訂一版)》。高雄：復文書局。
- 薛梨真(1999)。高雄市國小統整課程教學種子教師培育成果彙編，國小課程統整的理念與實務。高雄市：高雄市政府教育局。
- 李坤崇、歐慧敏(2000)。《統整課程理念與實務》。臺北：心理出版社。
- 教育部(2000)。《國民中小學九年一貫課程暫行綱要》。台北：教育部。
- 李坤崇(2001)：載於教育部(2001)主編，國小學校經營研發輔導手冊(6)教學評鑑與學習 評量實例導讀：教學評鑑與學習評量實例 (I-XII頁)。
- 李坤崇、劉文夫、黃順忠(2001)。國中學校本位課程發展與課程計畫之歷程、實例分析。
- 載於南一書局主編，國中學校本位課程發展與課程計畫之歷程、實例分析，5-144。台南：南一書局。
- 李坤崇(2002)。多元化教學評量理念與推動策略。《教育研究月刊》，91，24-36。
- 彭杏珠 (2008)。台灣有 50 萬個弱勢家庭 25 縣市弱勢指標大調查。《遠見雜誌》，2008 年 9 月號，21-30。

利用螺旋變式課程設計“一題多解”理念培養准教師的 數學興趣¹

孫旭花²

澳門大學教育學院

摘要

本文通過強調螺旋變式課程設計模型“一題多解”理念，以三角形中位線定理的推導為例，進行實踐嘗試，發現澳大學生能在創新解法同時，並對中位線定理證明孜孜不倦地探索，影響了他們的數學學習興趣，發現“螺旋變式課程”作為一種數學教學的智慧，對數學興趣培養存在重要意義。

關鍵字：螺旋變式課程，准教師，三角形中位線定理，數學興趣

壹、問題的提出

興趣是最好的老師。在西方，多數學者認為數學興趣屬先天，數學興趣不大可能後天培養，數學興趣往往也自生自滅。東方華人地區，數學教育多注重考試的成敗，極少注意興趣發展，一些老師也認為考試成功了，就更有信心，興趣自然而來，國內大陸數學興趣班，實際上多為數學競賽而準備，也是為另類考試而存在，華人地區的數學興趣的培養，多強調以外部獎勵而驅動，附屬於考試成功的成敗，而少靠數學本身魅力。因此無論東方、西方，數學興趣培養方面則是數學教育領域較少開發的處女地。數學興趣培養從哪里開始呢？波利亞說過，“教師首要的金科玉律是：自己對數學有濃厚的興趣，如果教師厭煩數學，那學生也肯定會厭煩數學（波

¹本文由筆者的博士論文中發展而來。此文早期成稿過程特別得到了香港中文大學黃毅英教授，香港教育學院林智中教授，香港教育學院盧敏玲教授、龐永欣教授，華東師大顧泠沅教授，瑞典 Ference Marton 教授，美國特拉華大學蔡金法教授諸多幫助和建議，特此鳴謝。

²孫旭花，女，山東莒縣，澳門大學教育學院，助理教授，香港中文大學課程與教學學系博士，聯繫方式：澳門：澳門大學教育學院 542 房，電郵 xhsun@umac.mo 研究方向：數學課程與教學方向。

利亞，1982；劉雲章，1992）”。簡單地說，沒有數學興趣的老師不可能培養出對數學有興趣的學生，從這個意義上來說，教師數學興趣培養，是興趣培養的源頭。然而數學教師，作為成年的學生，經歷無數次失敗，挫折，他們對數學學習興趣已定型，他們對自己數學信心已定型，如何再來培養數學興趣呢？的確，筆者常常遇到家長諮詢培養如何培養孩子的數學興趣，教師的數學興趣培養倒是更少受到關注。因此從這個意義上來說，教師數學興趣培養該數學教育的難題中的難題。

螺旋變式課程設計模型，是基於中國數學教學實踐的“揚長避短”的模型。主要根據中國數學教學中，自然地使用“問題變式”實踐策略：通過“一題多解”（解法變式）和“一題多變”（概念變式），實現“以舊概念引出新概念”（多數情境下的中國傳統教學利用“一題多變”引出新概念），由概念的聚焦，導出新概念，達成“變中發現不變”，並把這種逐步實現抽象化的問題變化，稱之為深度變式。再根據中國數學教學中“問題變式”自然的實踐策略：“一題多變”和“一題多解”，通過概念的發散，把“以新概念歸回到舊概念體系中”，幫助學生形成數學結構（多數情境下的中國傳統教學利用“一題多解”，形成結構），“以不變應萬變”，並把這種逐步實現公理化，的問題變化，稱之為廣度變式。無論深度、廣度變式（後來的研究，進一步拓展為深度、廣度變式、歸納、應用變式四類。其中歸納、應用變式見，孫旭花，2007a；Wong, 2007; Wong, Lam, & Sun, 2006），都是實現概念連接，方法連接達成概念的“通透”，方法組織的系統化的教學實踐。

由此我們把這種“一題多解”“一題多變”（孫旭花，待刊），這一中國內地數學課程中的無意識、潛意識的教學實踐的合理因素，升化為如下模型，

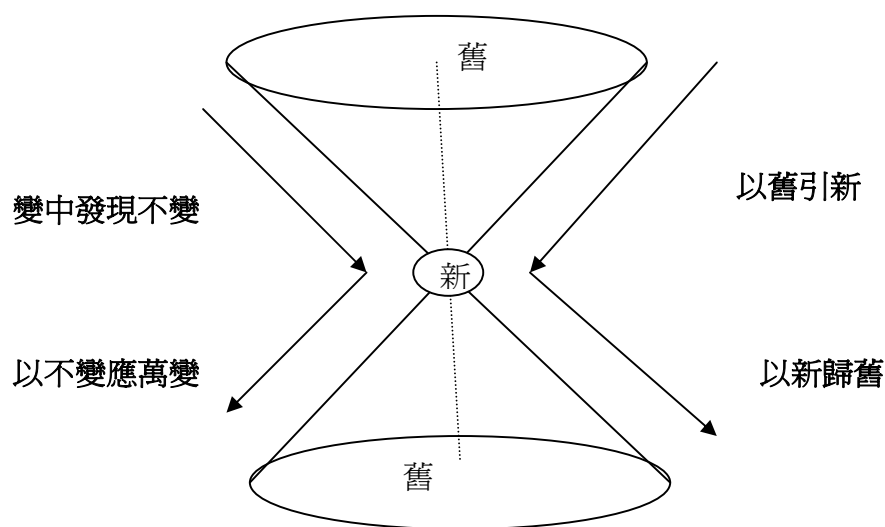


圖 1 螺旋變式課程設計理論示意圖³

總體而言，螺旋變式課程設計理論，主要強調“變中發現不變，以不變應萬變”角度（孫旭花，2007b），實現“以舊引新、以新歸舊”之概念連接（孫旭花，2007c），主要強調“一題多變”和“一題多解”兩種問題變化方式，教學也常常根據學生對具體概念熟悉情況，採取不同的問題變式，而不是任何教學同時涵蓋兩種變式。課程與教學也常常根據學生對具體概念的熟悉情況，採取不同的問題變式，而不是任何教學同時涵蓋兩類變式。

螺旋變式課程設計模型特別強調“一題多變”“一題多解”“以舊引新、以新歸舊”“以不變應萬變”“變中發現不變”幾個理念，本文特別是有目的、有意識地利用“一題多解”理念嘗試，通過證明方法的探索，培養准教師數學興趣的可能。該次探索仿佛打開了數學興趣的閘口，試過的班級同學大多顯示了對數學前所未有的衝動！現在舉一例，與同事分享。

³ 該模型根據筆者的博士論文《螺旋變式數學課程設計：理論與實踐》，加以訂正修改。

貳、研究方法

我們嘗試根據螺旋變式課程設計的“一題多解”的理念，在澳門大學教育學院教學，三角形中位線定理（三角形的中位線平行於第三邊，且等於第三邊的一半。）為例，進行嘗試，看是否有效呢？

教學時，讓學生用自己的方法“一題多解”推導三角形中位線定理，並強調黑板寫出並講解他們的解法，並以他們的名字命名解法，然後，不斷鼓勵學生給出不同於學生已經給出的新方法。

參、研究發現

以下是學生在課堂的現場解法，沒有創意的證明，也沒有興趣的生成，解法創意一定程度顯示了，他們推導三角形中位線定理非凡的興趣，具體介紹如下：

證明法一：清法⁴

$$AD=BD$$

$$AE=CE$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{2}$$

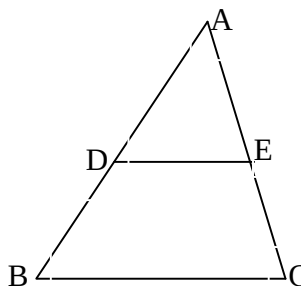
$$\text{而 } \angle A = \angle A$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{1}{2}$$

$$\angle ADE = \angle ABC$$

$$\therefore DE \text{ 平行 } BC$$



評注：這是最簡單直接利用相似的方法，幾乎兩步證畢，方法最簡潔而優雅。

⁴ 為了紀念學生的創意，本文以學生的名字，命名各方法，下同。

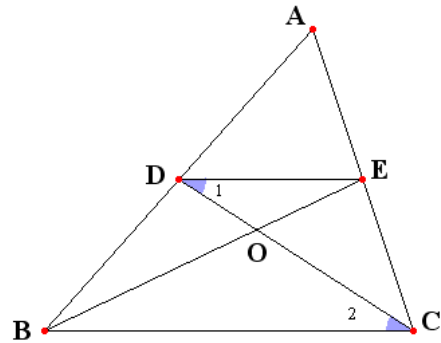
證明法二：賢法

三角形的中位線平行于第三邊，且等於第三邊的一半。

已知：三角形 ABC , D 及 E 分別為 AB , AC 的中點

求證： $DE \parallel \frac{1}{2}BC$

證：



連結 BE , CD ; 其交點 O 就是重心, 由重心定理可以得出

$$DO:OC = EO:OB = 1:2$$

所以在 $\triangle DOE$ 和 $\triangle COB$ 中,

$$\begin{cases} DO:OC = EO:OB = 1:2 \\ \angle DOE = \angle COB \end{cases}$$

所以可得 $\triangle DOE \approx \triangle COB$

由相似三角形可以得出以下結論:

$$\begin{cases} DE = \frac{1}{2}BC \\ \angle 1 = \angle 2 \Rightarrow DE \parallel BC \end{cases}$$

證畢。

評注：這是簡單直接利用相似的方法，幾乎兩步證畢，方法簡潔、精練。

證明法三：字法

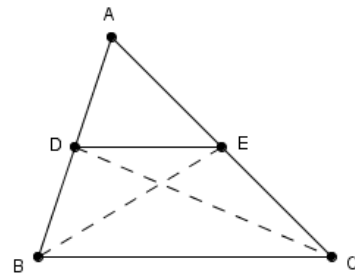
已知：在 $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分別是 AB 和 AC 的中點。

求證： $DE \parallel BC$ ， $DE = \frac{1}{2}BC$ 。

證明：(面積法)

連結 BE 和 CD 。

$\because CD$ 是 $\triangle ABC$ 的中線，



$$\therefore S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}。$$

$$\text{同理, } S_{\triangle BCE} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}, \text{ 則 } S_{\triangle BCD} = S_{\triangle BCE}。$$

又 $\because \triangle BCD$ 和 $\triangle BCE$ 有等高(等底),

$$\therefore DE \parallel BC。$$

另一方面, ED 是 $\triangle ABE$ 的中線,

$$\text{則 } S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} S_{\triangle BCE}。$$

又 $\because DE \parallel BC$, $\therefore \triangle BDE$ 和 $\triangle BCE$ 有等高,

$$\text{從而, } DE = \frac{1}{2} BC。$$

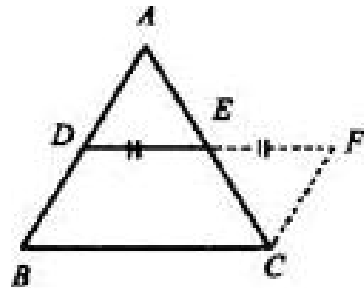
評注：這是簡單直接利用面積的方法，幾乎兩步證畢，方法簡約而別致。

證明法四：嬗法

已知： DE 是 $\triangle ABC$ 的一條中位線

求證： $DE \parallel BC$ 且 $DE = \frac{1}{2} BC$

證明：延長 DE 到 F ，使 $DE = EF$ ，連結 CF



因為 $\angle AED = \angle CEF$ $\langle$ 對頂角 $\rangle$

$$DE = EF$$

$AE = EC$ $\langle$ E為 AC 的中點 $\rangle$

所以 $\triangle ADE \cong \triangle CFE$ $\langle$ 邊角邊 $\rangle$

因為 $\angle DAE = \angle FCE$ $\langle$ 全等三角形，對應角相等 $\rangle$

所以 $AD \parallel FC$ $\langle$ 內錯角相等，兩直線平行 $\rangle$

且 $AD = FC$ $\langle$ 全等三角形，對應邊相等 $\rangle$

又因為 $AD = DB$ 且 $AD \parallel DB$

所以 $BD \parallel FC$ 且 $BD = FC$

又因為 $DE \parallel DF$ 且 $DE = \frac{1}{2} DF$

所以 $DE \parallel BC$ 且 $DE = \frac{1}{2} BC$

評注：這是利用作三角形，全等三角形性質的方法，方法簡單。

證明法五：峰法

已知： $AD = DB$ ， $AE = EC$

求證： $DE \parallel BC$ ， $DE = \frac{1}{2} BC$

作 $AF \perp BC$ ， $DG \perp BC$ ， $EH \perp BC$ 。

$\angle BGD = \angle BFA$

$DG \parallel AF$

$\angle BDG = \angle BAF$ ， $\angle B = \angle B$

$\triangle BGD \sim \triangle BFA$

$DG/AF = 1/2$ ，同理可證， $EH/AF = 1/2$

$DG = EH$ ， $DG \parallel EH$

$DGHE$ 是平行四邊形

$DE \parallel GH$ ， $DE = GH$

$DE \parallel BC$

$\angle ADJ = \angle DBG$

$\triangle ADJ \cong \triangle DBG$ (A.S.A.)

$DJ = BG$ ，同理可證， $JE = HC$ ，

因為 $DE = GH$

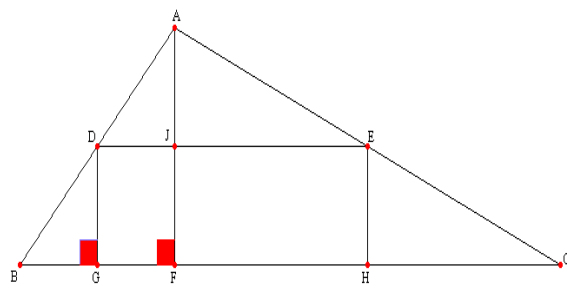
所以 $BG + HC + DE = BG + HC + GH$

$DJ + JE + DE = BC$

$2DE = BC$

$DE = \frac{1}{2} BC$

評注：這是作三條高，得到三矩形，利用全等三角形性質和矩形方法，方法簡單易明。



證明法六：柱法

已知：D、E 分別為 $\triangle ABC$ 上 AB 邊及 BC 邊中的中點。

求證：DE//BC 且 $DE = \frac{1}{2}BC$

證明：延長 DE 至 F，使 EF=DE，連結 AF，FC，CD，

因為 AE=CE，DE=EF，

所以四邊形 ADCF 為平行四邊形

所以 FC//AD 且 FC=AD，

因為 D 為 AB 中點，

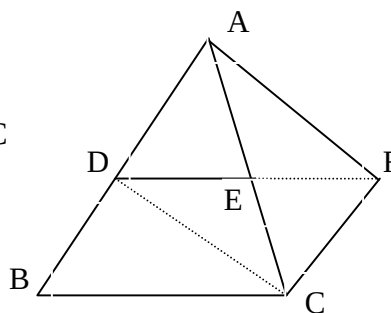
所以，BD=AD=FC 且 BD// FC，即 AD//FC

所以 BCFD 為平行四邊形，

所以 DF//BC 且 DF=BC

因為 $DE = \frac{1}{2}DF$ ，

所以 $DE = \frac{1}{2}BC$ 且 DF//BC



評注：這是最簡單直接利用平行四邊形的判定和性質，幾乎兩步證畢，方法簡潔而優雅。

證明法七：威法

已知：三角形 ABO，C 為 OA 的中點，D 為 BA 的中點。

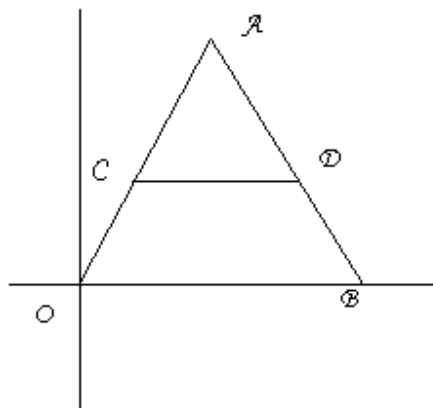
求證：CD 平行於 OB 及等於 OB 的一半

證：設點的座標 O(0,0)、A(x₀,y₀)、B(b,0)

則中點 C 及 D 的座標為

$$C\left(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2}\right), D\left(\frac{x_0+b}{2}, \frac{y_0}{2}\right)$$

$$OB = \sqrt{(b-0)^2 + (0-0)^2} = b$$



$$CD = \sqrt{\left(\frac{x_0 + b}{2} - \frac{x_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{2} - \frac{y_0}{2}\right)^2} = \frac{b}{2}$$

得到 CD 等於 OB 的一半，

又 OB 所在的直線斜率為 0

CD 所在的直線斜率為 0

故 CD 平行 OB，證畢。

評注：這是最簡單翻譯座標，通過解析幾何的方法，幾乎兩步證畢，方法簡潔而漂亮。

證明法八：減法

已知：三角形 ABC 中，AD=BD、AF=FC

求證：DF//BC 且 $DF = \frac{1}{2} BC$

證：(1)作過 C 點 CF 平行 AB，作過 A 點 AF 平行 BC, CF 和 AF 交於 F，且 G 點為 CF 的中點。(作法)

(2)因為 ABCF 為一平行四邊形(作法)，AB=FC, AD=BD，G 點為 CF 的中點。則 AD=FG

(3)所以 ADGF 為一平行四邊形 (AD=FG，AD//FG)

(4)同理 BDGC 為一平行四邊形

(5)得 AF//BC//DG

$$DG = BC = AF$$

(6)因為 1. $\angle AFD = \angle CFG$

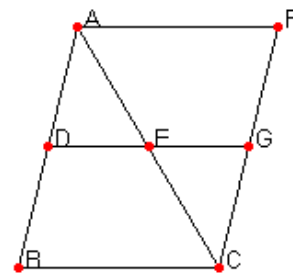
$$2. AF = FC$$

$$3. AD = CG$$

(7)所以三角形 ADF 和三角形 CGF 為全等三角形

(8)DF=FG

(9) $DF = \frac{1}{2} DG = \frac{1}{2} BC$ (BDGC 為一平行四邊形)



評注：這是利用作平行四邊形，全等三角形性質的方法，方法稍繁。

證明法九：浩法

已知：三角形 ABC，DE 為 AB、AC 邊上的中點。

求證： $DE = \frac{1}{2} BC$ ，且 $ED \parallel BC$

證明：

過 E 點作 AB 的平行線 MN，過 A 點作 BC 的平行線 AM

則四邊形 AMNB 為平行四邊形（作法）

$\therefore AM \parallel BN$ ，即 $AM \parallel BC$ ，

即 $\angle AME = \angle CNE$

又 $\angle AEM = \angle CEN$

$\therefore AE = EC$

$\therefore$ 三角形 AME 和三角形 CNE 全等(AAS)

即 $AM = NC$

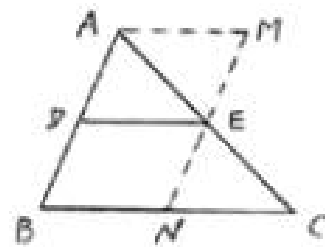
$ME = EN$

$\therefore AB = MN$ ，且四邊形 DENB 和 AMED 也為平行四邊形

即 $DE \parallel AM \parallel BC$

$\therefore AM = DE = BN = NC$

即 $ED = \frac{1}{2} BC$



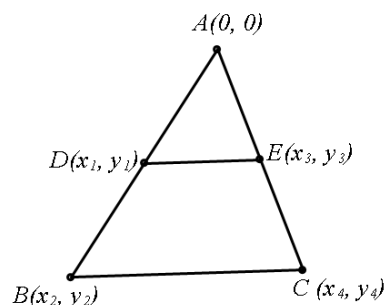
評注：這是利用作平行四邊形，全等三角形性質的方法，方法和證法三類似，稍繁。

證明法十：強法

已知： $\triangle ABC$, $AD = DB$, $AE = EC$

求證： $DE \parallel BC$, $DE = \frac{1}{2} BC$

證：設點



$A(0,0)$, $AD = (X_1, Y_1)$, $AB = (X_2, Y_2)$, $AE = (X_3, Y_3)$, $AC = (X_4, Y_4)$

$$\therefore DE = (X_3 - X_1, Y_3 - Y_1), BC = (X_4 - X_2, Y_4 - Y_2)$$

$$\because AD = DB, AE = EC \text{ (已知)}$$

$$\therefore 2X_1 = X_2, 2Y_1 = Y_2, 2X_3 = X_4, 2Y_3 = Y_4$$

$$\Rightarrow 2DE = BC$$

$$\text{即 } DE = 1/2 BC$$

$$KDE = \frac{X_3 - X_1}{Y_3 - Y_1} = \frac{2(X_3 - X_1)}{2(Y_3 - Y_1)} = \frac{X_4 - X_2}{Y_4 - Y_2} = KBC$$

$$\therefore DE \parallel BC$$

評注：這方法和上面類似，翻譯座標，通過解析幾何的方法，兩步證畢，方法簡潔。

證明法十一：豪法

命題：已知 D, E 分別為 $\triangle ABC$ 的中點，試求證 $DE \parallel BC$ 且 $DE = BC/2$ 。

作法：如圖，作線段 AB, AC 的垂直平分線，垂足分別為 D, E，且交點為 O。

作線段 AD, AE 的垂直平分線，垂足分別為 D', E'，且交點為 O'。

連結 OD, OE, OB, OC。

證明：考慮 四邊形 AD'O'E' 及四邊形 ADOE

顯然 四隻對應內角相等，得知它們是相似四邊形，

而且 A, O', O 三點共線。

再考慮 $\triangle AD'O'$ 及 $\triangle ADO$

顯然 D'O' 平行 DO，則三隻對應內

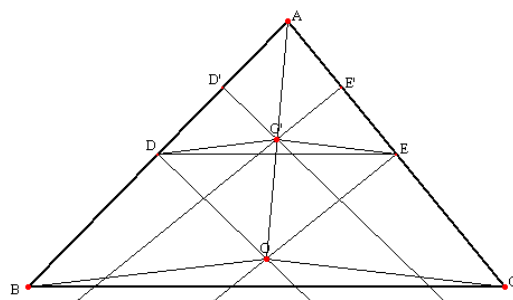
角相等，得知它們是相似三角形，

$$\text{而且 } \frac{AO'}{AO} = \frac{AD'}{AD} = \frac{1}{2}。$$

由於 O', O 分別為 $\triangle ADE$ 及 $\triangle ABC$ 的外心，構作 $\triangle ADE$ 及 $\triangle ABC$ 的外接圓

有 $O'A = O'D = O'E$ ， $OA = OB = OC$ ，

$$\text{並由此得出 } \frac{O'D}{OB} = \frac{O'E}{OC} = \frac{1}{2} \text{ --- (1), } \angle DOE = \angle BOC = 2\angle A \text{ --- (2)}$$



結合(1)、(2)得出： $\triangle O'DE \sim \triangle OBC$ ，

而且
$$\frac{DE}{BC} = \frac{O'D}{OB} = \frac{1}{2},$$

$\angle O'ED = \angle OCB$

另外，由於 $\triangle O'EA$ 與 $\triangle OBC$ 為有公共底角的等腰三角形

得出 $\angle O'EA = \angle O'AE = \angle OCA \Rightarrow \angle AED = \angle ACB \Rightarrow \boxed{DE \parallel BC}$

命題得證。

評注：該方法不構作任何與三角形邊的平行線來完成證明方法，利用了外心定理，2次利用相似性質，方法較其他方法較繁。

學生課堂解答，見附圖 2，圖 3，圖 4，圖 5。

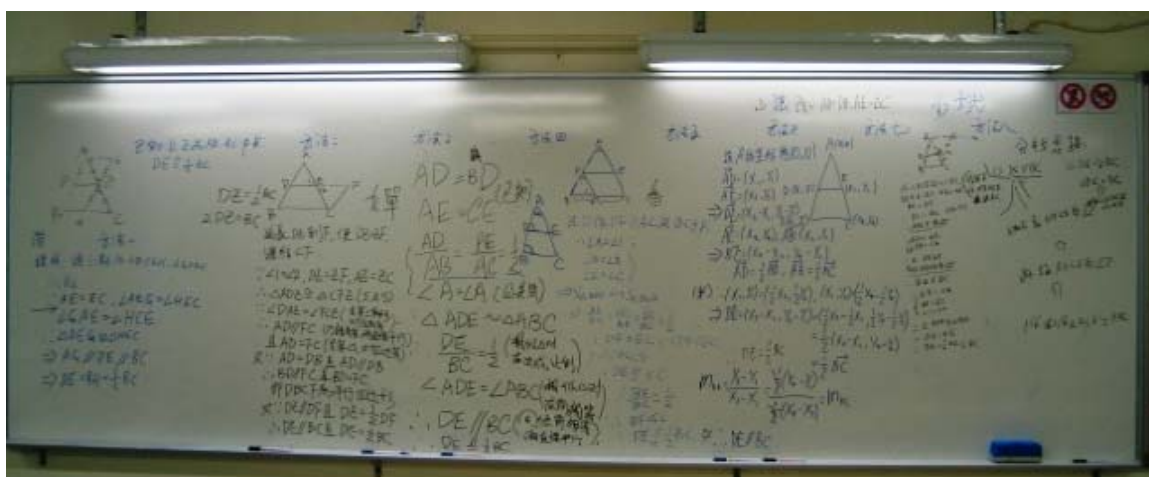


圖 2 澳門大學學生對三角形中位線定理的推導課堂白板

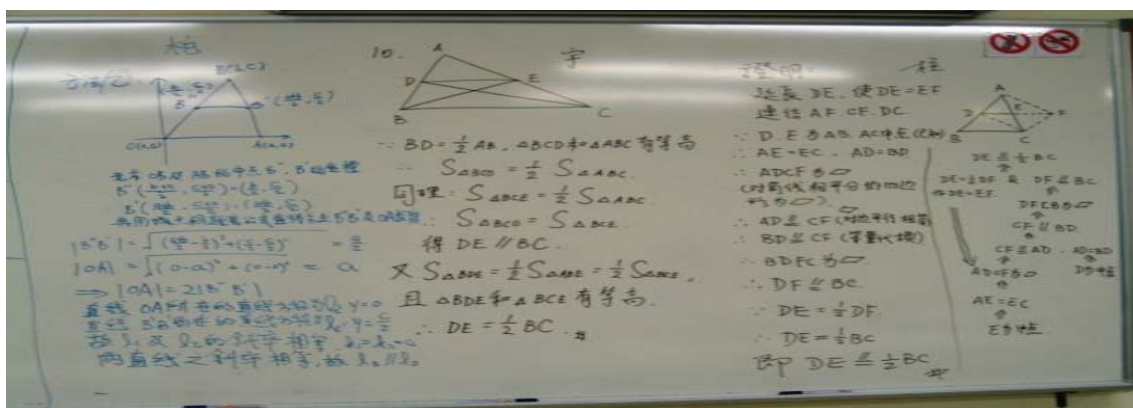


圖 3 澳門大學學生對三角形中位線定理推導課堂黑板圖

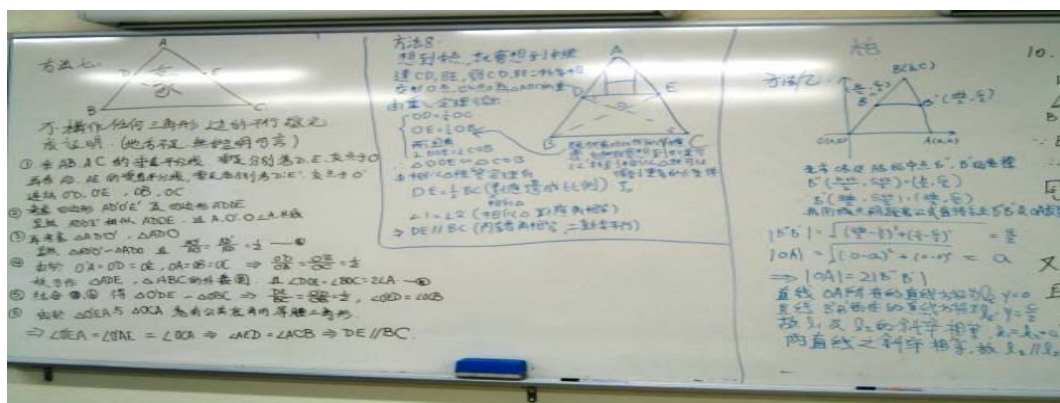


圖 4 澳門大學學生對三角形中位線定理推導課堂黑板圖

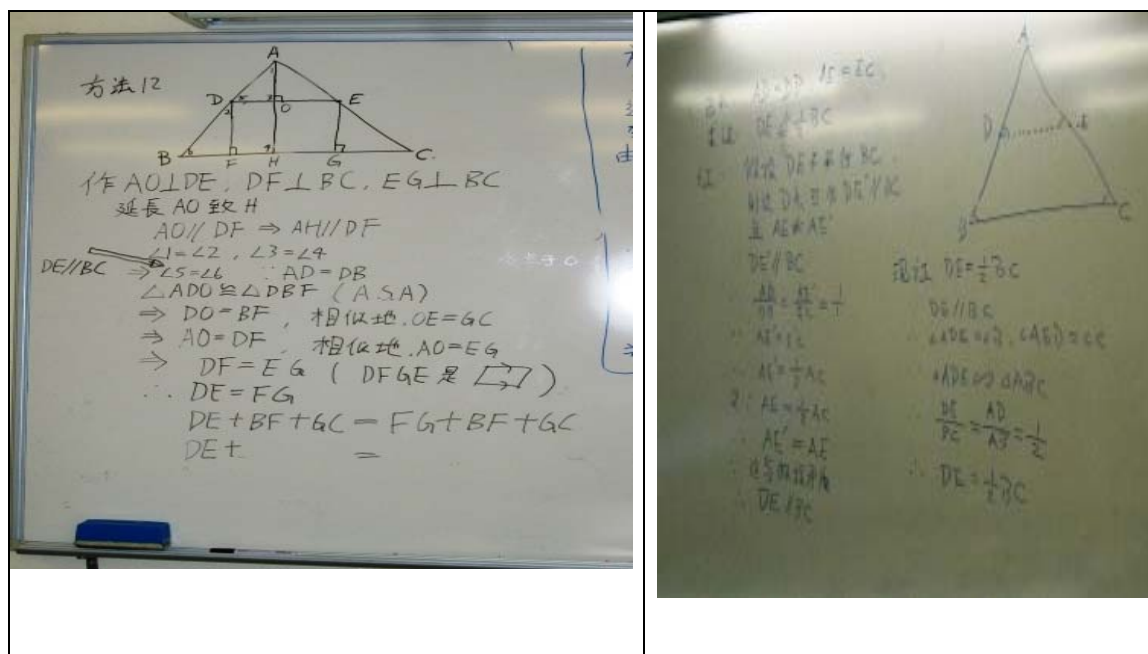


圖 5 澳門大學學生對三角形中位線定理推導課堂黑板圖

就證明方法而言，筆者認為前七種方法，都不超過四步，方法既精煉、簡潔又優雅！其中，證明法一：清法是最簡單直接利用相似的方法，兩步證畢，方法最簡潔而漂亮，不添任何輔助線。而證明法二：賢法直接利用相似的方法，證明法三：宇法直接利用面積比的方法，兩步證畢，方法既簡捷又優雅。而證明法四：嬋法，利用作三角形，全等三角形性質的方法，方法簡單，是一些教科書的方法。證明法五：峰法作高，得到矩形，借助全等性質，方法簡單，明瞭，證明法六：柱法，是簡單直接利用平行四邊形的判定和性質，兩步證畢，也是一些教科書的方法。而證

明法七：威法，簡單翻譯座標，通過解析幾何的方法，方法既簡潔又具普遍意義，事實上，很多平面幾何定理，都可以通過解析幾何的方法重新證明。其餘證明法八：斌法，證明法九：浩法，證明法十：強法，證明法十一：豪法，略微繁瑣，但能夠保持獨立思考，積極探索的精神仍然可佳。

就證明興趣而言，我們發現一開始，學生直接按照記憶，直接書寫下教科書的證明思路，無任何證明興趣。2個小時過後，每個學生都在尋找自己的方法中，對中位線定理重新迸發證明的激情，學生非常踴躍地展示自己的解法，每個學生深深陶醉發現證明的喜樂之中，每個學生對三角形中位線定理推理，都深深著迷，令人難忘。更為重要的是，學生通過參與公式的證明，感受到創造數學定理證明的源動力，我們注意到他們的興趣，建立在他們解法創造性上。

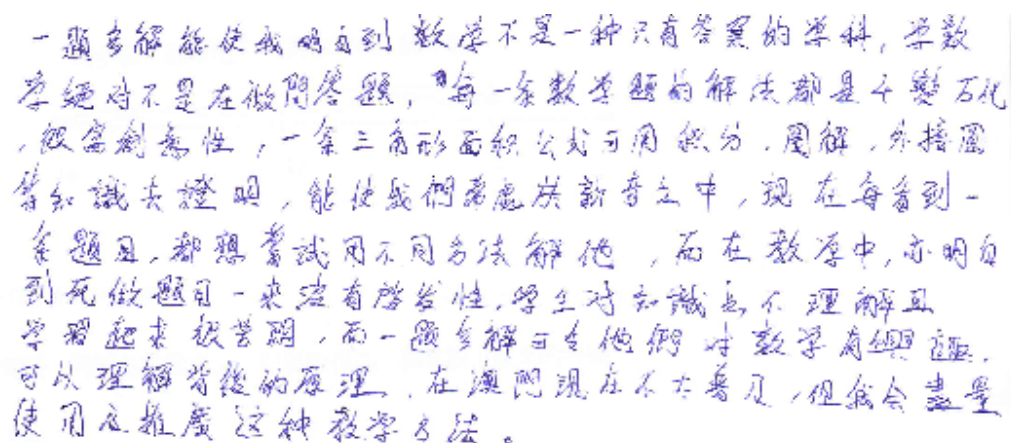
“一題多解”是中小學老師較為常用的教學方法，幾乎人人熟悉，但我們發現，但教師只是下意識地偶爾地使用。當我們昇華為理論層面，去指導教學實踐，發現原來實踐可以走更遠。14名普通澳門的大學生能給出三角形中位線定理，十多種創新解法，並對中位線定理證明樂此不疲，深深改變了他們對三角形中位元線定理認識，數學學習興趣的改變立竿見影。在推導的課堂瞬間，學生不斷創造新的證明方法，證明的同學感到前所未有的興趣和滿足，其餘同學紛紛舉起大拇指！祝賀發現新的證明方法的同學，全班一起融入創造、創新的喜樂氣氛之中，我自己也被這種氣氛感染。的確，極少文獻給出如此多方法證明三角形中位線定理，本節課不僅僅充分地發揮學生的創造能力，而且學生們因為親自發現到了數學本身的魅力，又激發了學生學習數學的興趣！真是一舉兩得。

經過幾節“一題多解”課的訓練，同學在課程總結體會中，告訴我他們的改變：

“我現在每當解題，都會嘗試看看還有沒有其他解法”，“我對數學有了全新的認識”！“我對數學重新有了興趣”！

一題多解能主動去令學生訓練自己的思維及創新的能力
令我自己對數學學習產生前所未有的興趣

“「一題多解」能使我明白數學不是一種只有答案的學科,學數學絕對不是在做問答題,每一條數學題的解法都是千變萬化,很富創意性。一條三角形面積公式可用圖解、外接圓等知識去證明,能使我們常處於新奇之中,現在每看到一條題目,都想嘗試用不同方法解它,而在教學中,亦明白到死做題目一來沒有啟發性,學生對知識不理解且學習起來很苦悶,而「一題多解」可令他們對數學有興趣,可以理解背後的原理,在澳門現在不太普及,但我會盡量使用及推廣這種教學方法”。



一題多解能使我明白到數學不是一種只有答案的學科,學數學絕對不是在做問答題,每一條數學題的解法都是千變萬化,很富創意性,一條三角形面積公式可用圖解,外接圓等知識去證明,能使我們常處於新奇之中,現在每看到一條題目,都想嘗試用不同方法解他,而在教學中,亦明白到死做題目一來沒有啟發性,學生對知識也不理解且學習起來很苦悶,而一題多解可令他們對數學有興趣,可以理解背後的原理,在澳門現在不太普及,但我會盡量使用及推廣這種教學方法。

學生的這些體會,使我感到巨大安慰,數學興趣的可以後天培養嗎?這次課後,筆者對教師的數學興趣這道數學教育的難題,看到一線曙光。

事實上,中位線定理是一個基礎定理。但多數教材都是簡單推導,引出定理,然後就通過練習,套用定理。這種採用死記硬背的方法,和上述的嘗試比較,學生少了親自發現定理證明的魅力與機遇,其實在中小學教材中,數學的大部分定理、概念、公式的引入,均採用死記硬背的方法,學生少了親自發現到了數學本身的魅力機遇,剝奪了數學興趣培養的機會,實在可惜。

肆、 幾點反思

數學興趣培養無處不在

多年來，課程範圍裏的數學問題，大多為掌握課程內容而設計，問題的答案封閉，能夠吸引學生，激發學生的數學衝動，少之又少，結合課程內容培養興趣的內容，則少之又少，而數學興趣培養，如老虎啃天，無處下口。筆者研究發現其實任何公式、定理、例題、問題都可嘗試一題多解，都可作為數學興趣培養的載體，從這個角度而言，螺旋變式課程的一題多解理念，使得數學興趣培養無處不在，正是一件好事。

數學興趣培養枯木再逢春之可能

這次嘗試使我看到原本對數學害怕、甚至恐懼，對數學沒興趣的人，幾個能力稍弱學生，也能把握了定理證明的精髓，給出創造性解法，並對證明重新產生興趣，平凡學生卻給出不平凡的創造解法。的確一些方法不夠新穎，仍應該表揚，畢竟自己思考的成果，新生數學興趣的嫩芽，值得呵護。

捨得給興趣“生長”時間

以往數學教學有個誤區，不捨得給“思考”時間，課堂“思考”時間總有點覺得浪費，不夠有效率，而事實上，大部分教學沒有給出學生探索證明的時間，大部分證明方法由老師“教”，課堂“教方法”時間才真的浪費學生“想方法”的時間，替代了“想”的時間，興趣“生長”的時間，真的不夠有效率，把學生思考時間，變成記住老師解法的時間。雖然教改提及需要重學輕教，但教學也總是基於教學任務，限於固定時間，講完，才有“效率”，完成教學任務，給“思考”時間，興趣“生長”時間，遠遠不夠。這堂課雖然比以往教學多了些時間思考，但我們注意到，證明“不講勝於講”，教學給“思考”時間，興趣“發生”時間，創造“生長”的空間，教學可能還原學生的創造力之教學根本，螺旋變式課程設計的“一題多解”理念，增大了學生探索定理證明的解法空間，還原學生原本的數學創造興趣，貼近了數學教學的最高境界。

這裏願意以一首短詩結束全文。

一題多解，我的秘方

-----2008 年 6 月 20 日根據夢中所記

讀書時

一題多解是我作秀的秘方

展示特別解法

帶我早把數學的自信品嚐

工作時

一題多解是我教學的秘方

展示特別解法

學生齊齊步入

數學創造的殿堂

親愛的同事

一題多解是數學興趣的秘方

展示特別解法

數學魅力

定要百花齊放

參考文獻

- 波利亞（1982）。歐陽絳譯，《數學的發現》。北京:科學出版社。 -
- 劉雲章（1992）。《數學解題思維策略—波利亞著作選講》。長沙: 湖南教育出版社。
- 孫旭花、黃毅英、林智中、張奠宙（2006）。問題變式，結構與功能的統一。《課程教材教法》，第五期，頁25-31。
- 孫旭花（2007a）。《螺旋變式數學課程設計：理論與實踐》。香港：香港中文大學未發表的博士論文。
- 孫旭花（待刊）。一題多變：中國數學課程問題概念組織之優勢----中美課程分數除法比較的發現
- 孫旭花、黃毅英、林智中（2007b）。變式的角度，數學的眼光。《數學教學》，第10期。
- 孫旭花（2007 c）。螺旋變式數學課程之還原理念簡介 -----以青浦變式教學中“以新歸舊”概念理解教學實踐為例。臺灣數學教師電子期刊 2007 年 12 期
<http://www.math.ntnu.edu.tw/~tame/tameteachers/TJMT12>
- Marton, F., & Booth, S. (1997). Learning and awareness. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Wong, N. Y., Lam, C. C., & Sun, X. (2006). The basic principles of designing bianshi mathematics teaching: A possible alternative to mathematics curriculum reform in Hong Kong [in Chinese]. Hong Kong: Faculty of Education and Hong Kong Institute of Educational Research, The Chinese University of Hong Kong.
- Wong, N.Y. (2006). From “Entering the Way” to “Exiting the Way”: In Search of a Bridge to Span “Basic Skills” and “Process Abilities”. In F.K.S. Leung, G-D. Graf, & F. J. Lopez-Real (Eds.), Mathematics Education in Different Cultural Traditions: The 13th ICMI Study (pp. 111-128). New York: Springer.
- Wong, N. Y. (2007). Confucian Heritage Cultural learner’s phenomenon: From “exploring the middle zone” to “constructing a bridge”. Regular lecture, the Fourth ICMI-East Asia Regional Conference on Mathematical Education, Penang, Malaysia, 18th to 22nd, June.

數學寫作活動對八年級中程度學生解題的影響之個案

研究一以一元二次方程式應用問題單元為例

黃麗紅¹、溫嫩純²、施皓耀³

台北縣崇林國中¹、

國立彰化師範大學科學教育研究所²、

國立彰化師範大學數學系³

摘要

本研究旨在探討國中八年級中程度的學生在經過一個月的數學寫作教學活動之後，對其解一元二次方程式應用問題中解題能力與解題策略的影響。透過研究者自編之一元二次方程式應用問題測驗，於數學寫作教學活動前後實施。使用放聲思考法與事後晤談方式蒐集四位研究對象於一元二次方程式應用問題前後測的資料，並採用專家信度進行原案分析，以了解學生解題改變的情形。研究結果發現，數學寫作活動有助於提昇學生數學解題能力並改善學生的解題策略。

關鍵字：數學寫作、數學解題

壹、研究動機與研究目的

Shield和Galbraith (1998) 認為學校教科書的寫作形態以及教學時提供的練習影響著學生寫作的形式, Beswick和Muir (2004) 也指出教學活動在於幫助學生發展有效及有意義的記錄思考的寫作方法。雖然, 研究者於教學時已融入解題的思考方法, 但於教學過程中發現, 當學生解決數學問題遇到困難或面對沒見過與不懂的問題時, 常常不知如何著手解題或者直接將題目中的數字隨意代入觀念或定理。另外, 劉祥通和黃國勳 (2005) 認為如果數學寫作活動能獲得重視與推廣, 學生的數學學習則會轉而「多省思」數學題目。因此, 本研究的主要目的是探討數學寫作活動對學生解題能力與解題策略的影響。

貳、文獻探討

將寫作活動融入數學課室中, 學習者透過寫作的方式, 表達自己的數學想法, 進而產生解釋、省思、回顧、組織或數學連結的綜合性活動, 都可稱為數學寫作活動 (劉祥通、周立勳, 1997)。

Sterrett (1992) 指出數學寫作能幫助學生成為主動的學習者, 而 Pugalee (2001) 與周立勳、劉祥通 (1998) 的研究也認同數學課室中融入寫作活動有助於數學解題, 何靜怡 (2006) 的研究指出幾何課中融入擬題寫作有助於提昇中程度學生的學習成效。所以, 數學寫作活動應能讓學習者主動學習並有助於數學解題。劉祥通和周立勳 (1997) 認為數學寫作的功用有: 寫作的歷程與解題相呼應、寫作是聯絡不同表徵的活動、寫作是建構知識的活動及寫作能促進後設認知能力的發展。另外, Schoenfeld (1985) 提及學生通常很少確認及檢驗答案, 但此階段卻是十分重要而且具有價值, 又張淑芳 (2000) 的研究指出唸題目、找重要字、畫圖表示、列算式和計算與檢查等解題策略有助於提昇解題能力, 陳建廷 (2006) 也指出有效利用圖形表徵輔助解題者的解題速度較快, 而賴佩伶 (2007) 的研究指出加強學生解題時的直覺與聯想力, 有助提升學生的數學解題能力, 所以解題策略的使用應有助於提昇解題能力。

國內外學者大多肯定數學寫作在學習數學中具有正向的功能, 而且使用解題策略有助於提昇數學解題能力。

喻平 (2002) 依數學觀演變的觀點, 提供數學教學兩點啟示: (1) 數學教學

應視為數學思維活動的教學，也就是「過程＋結果」的教學活動；(2) 數學的學習是學生主動建構知識的過程，教師的角色是建立一個讓學生能主動建構知識的環境，且指出解題學習較多是一種個人的行為，也正因為這個特性，使學習成為一種主動地自我建構過程。

所以，研究者藉由數學寫作活動建立一個讓學生主動建構知識的環境，並結合解題策略的使用，探討數學寫作活動對學生解題能力與解題策略的影響。

Shield 和 Galbraith (1998) 將數學寫作依實施的時間不同分成兩類，一類為週期性的寫作 (journal writing)，透過表達數學學習的想法及感受、反思學習的規律性寫作；另一類則是陳述、說明性的寫作 (expository writing)：描述及解釋數學的過程及結果。本研究採用的數學寫作活動屬於陳述、說明性的寫作類型。

有關數學解題能力評量方式，Charles 於 1986 年依學生的解題特徵所提出五點計分法（詳見下表 1）。

表 1 Charles 五點計分法

分數	學生的解題特徵
0 分	(1) 空白。 (2) 複製問題中的數字，對題意不了解。 (3) 不正確的答案且沒有顯示過程。
1 分	(1) 不合適的策略，沒有完成問題。 (2) 不成功的取向，且沒有嘗試不同取向。 (3) 企圖求出子目標但沒有成功。
2 分	(1) 不合適的策略，但顯示對理解部分的問題。 (2) 使用合適的策略，但沒有找到答案或求出子目標且沒有完成問題。 (3) 正確解答但沒有顯示過程。
3 分	合適的策略，但： (1) 忽視問題中的一個條件； (2) 沒有明顯理由的不正確的答案； (3) 不清楚的思考過程。
4 分	(1) 合適策略。 (2) 反思問題的結果。 (3) 抄寫或計算錯誤產生的不正確解答。
5 分	(1) 合適策略。 (2) 反思問題的結果。 (3) 正確的答案。

此評分法的理論基於解題者對問題的解答，存在一些比最終答案更重要的解題過程資訊，依據解題者對問題理解的程度到獲得解答的程度給予不同的分數，

較能真實呈現解題者找到答案的努力成果，讓教師靈活的評估學生的解題過程且不受單一解題策略及正確答案的限制 (McAloon & Robinson, 1988)。故，本研究採用此方法作為評量學生解題能力的依據。

參、研究方法與設計

本研究之研究方法採個案研究法，以放聲思考法與紙筆測驗並輔以訪談的方式蒐集學生在數學寫作教學活動前後解一元二次方程式應用問題的表現。依放聲思考原案在 Charles 提出的五點計分法的得分情形，探討學生在數學寫作教學活動前後解一元二次方程式應用問題解題能力改變情形，同時探討學生於一元二次方程式應用問題前後測解題策略的變化。在信效度方面，數學题目的效度採專家效度，且採專家評量一致性增加原案分析的信度，研究流程如圖 1。

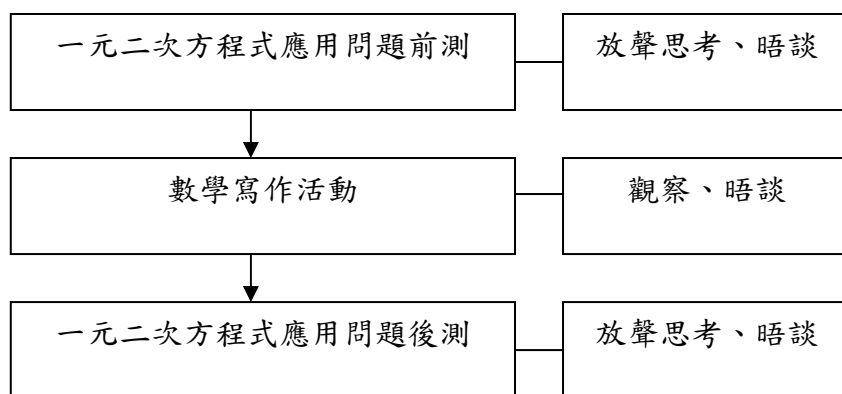


圖 1 數學寫作對解題影響的研究流程圖

一、研究對象

本研究以台北縣某國中八年級的學生為研究對象，採立意取樣方式選取樣本。依安置性評量測驗的結果，將研究對象班級區分為高程度（27%）、中程度（46%）與低程度（27%），以中程度學生為研究對象，挑選自願且時間能配合的學生為主，研究對象共四位，分別稱 M1、M2、M3 與 M4，以下就四位學生稍作描述：

（一）個案學生 M1

安置性評量的成績為 73 分，女生，該生平時在班上個性活潑，喜歡交朋友，學習數學態度認真，因為數學基礎不是很好，所以雖然認真學習，在數學的表現

上仍普通。

（二）個案學生 M2

安置性評量的成績為 63 分，女生，本身個性活潑，喜歡親近老師，愛開玩笑。但從小在數學學習成就上表現的不是很好，所以一直不喜歡數學。因此，學習數學較為被動，對於老師指定的作業，仍會按時完成。

（三）個案學生 M3

安置性評量的成績為 65 分，女生，個性文靜內向有禮貌，數學課堂上認真聽講，但幾乎不提問，數學學習的成就表現很不穩定，有參與數學課後補習班，在數學的表現上沒有太大的進步。

（四）個案學生 M4

安置性評量的成績為 67 分，女生，該生個性文靜內向，較不善於人際關係。數學學習上沒有接受補習班的課後輔導，常常自己解決數學問題，學習較主動，數學課總是認真的聽講，上課不了解的地方，也會於下課時間詢問老師，但在數學成績的表現上，仍處於班上中程度。

一、研究工具

本研究所收集的質性資料有一元二次方程式應用問題前後測放聲思考原案、數學寫作學習單及個案晤談資料。

一元二次方程式應用問題以非例行性問題為主，所謂非例行性問題就是解題者未曾學習過的問題，或是曾經學習過但時間已久遠而全然忘記的問題。問題設計主要參考國內國中相關一元二次方程式應用問題單元的試題，試題挑選主要考量解題者無法立即列出方程式、需經過思考而且無法立即套用公式求出答案的試題，挑選出解題結構類似前後測試題各六題，並依題目的類型區分為：面積概念、尋求規律及隱藏性知識問題三類。

研究者參考不同學者對解題策略（Polya, 1957、Schoenfeld, 1985）的建議，以及不同學者（Sterrett, 1992、Shield & Galbraith, 1998、劉祥通、周立勳，1997、林倉億，2000）對寫作活動的建議，設計寫作學習單，數學寫作活動內容設計敘述說明如下，範例請見附錄一：

（一）寫作活動 A1：將解題策略融入寫作活動中，培養學生解一元二次方程式應用問題的思考方法。第一部分設計中寫下題目的最終問題、找關鍵字及圖示題

目的方式能幫助學習者確認問題及理解題意，要求學習者聯想相關的數學知識，則希望學生透過聯想能找出題目中數量之間的關係，因而列出應用問題的方程式；第二部分則是，透過對題目的分析與提問，幫助學習者了解題意、分析題目，最後希望學習者能擬訂解題計劃或方程式，屬於解題策略寫作。

(二) 寫作活動 A2：配合寫作活動 A1 的應用問題，讓學習者於擬出解題計畫之後，能嘗試求出一元二次方程式的解，同時能檢驗應用問題的答案須符合題意，屬於日誌寫作。

(三) 寫作活動 A3：學習者將解題的過程依解題的四個步驟寫下，學習者學習呈現自己的解題過程並確實經歷完整的解題課程，並體會確認與檢驗的階段，屬於解題歷程寫作。

(四) 寫作活動 A4：透過找尋應用問題中可更改的文字敘述，幫助學習者找出應用問題的關鍵字詞，進而幫助學習者了解題意，故此學習單要求學習者嘗試改變不影響應用問題答案的文字敘述、自行設計題目並求出解答，屬於擬題寫作。

本研究所使用的數學寫作形式有融入解題策略的寫作、日誌寫作、解題歷程寫作以及擬題寫作等寫作形式。

學生於一元二次方程式應用問題前後測的解題時間沒有限制，主要是為了了解學生整個解題的過程，故由學生決定完成解題或停止作答的時間。

本研究的數學解題能力評量方式採用 Charles 於 1986 年提出的五點計分法。

二、資料編碼與意涵

本研究的質性資料編碼及代表的意涵，如表 2。

表 2 質性資料編碼與代表意涵

編碼方式	說明
Mn- FT	Mn 學生一元二次方程式應用問題前測放聲思考原案
Mn- PT	M1 學生一元二次方程式應用問題後測放聲思考原案
Mn -20080614-OV	Mn 學生 2008 年六月 14 日非正式訪談

肆、研究結果與分析

研究者以立意取樣的方式選取四位國中八年級中程度的學生為研究對象，以放聲思考的方式蒐集資料並轉成文字稿，也就是原案。研究者依據原案進行分析八年級中程度學生在數學寫作活動前後在解一元二次方程式應用問題的改變。

本研究主要探討數學寫作活動對解題能力與解題策略的影響。

一、數學寫作活動有助於提昇學生解題能力

四個個案學生的前後測在 Charles 提出的五點計分表中的得分情形，如表 3。

表 3 個案學生前後測的得分情形

個案學生	M1	M2	M3	M4
前測總分	13	19	9	13
後測總分	16	21	16	19
進退步	+3	+2	+7	+6

由表 3 中，可發現四位個案學生在一元二次方程式應用問題測驗的表現上，後測的表現均略高於前測的表現，且 M3 與 M4 進步比例高，故數學寫作活動應有助於提昇解題能力。

二、數學寫作活動有助於改善學生的解題策略

依據放聲思考原案整理四位學生在三種解題策略行為次數統計表，其結果如表 4。由表 4 可知，學生在三種解題策略的使用次數上，後測明顯高於前測，也就是說數學寫作活動有助於改善學生的解題策略。

表 4 解題策略行為統計表

個案學生	M1	M2	M3	M4
前測標記次數	17	9	1	0
後測標記次數	46	38	27	46
前測表徵轉換次數	1	4	2	3
後測表徵轉換次數	9	5	8	7
前測聯想次數	4	6	4	6
後測聯想次數	6	11	9	9

針對解題策略的變化情形，研究者以放聲思考原案、數學寫作學習單及晤談為判斷的依據加以分析，由於資料過多，僅呈現其中一試題的質料資料（表 5）。

表 5 前後測試題舉例

測驗	試題範例
前測	在同一個圓周上，不知有多少個點，點與點之間用直線連接，已知點與點之間的連線共有 105 條線，請問圓周上共有多少個點？
後測	某校舉行班際拔河比賽，規定每班必須與其他班級各比賽一場，經訓導處統計後，發現二年級總共要進行 66 場比賽，則該校二年級共有多少班？

(一) 標記行為

放聲思考原案中標記關鍵字相關記錄舉例如下，可發現學生經數學寫作活動之後，較習慣於標示關鍵字。

個案學生標記關鍵字行為，舉例如表 6。

表 6 個案學生標記關鍵字行為舉例

個案學生	標記標記關鍵字行為舉例
M1-FT	在同一個圓周上，不知有多少個點，點與點之間用直線連接，已知點與點之間的連線共有 105 條線，請問圓周上共有多少個點？
M1-PT	某校舉行班際拔河比賽，規定每班必須與其他班級各比賽一場，經訓導處統計後，發現二年級總共要進行 66 場比賽，則該校二年級共有多少班？
M2-FT	在同一個圓周上，不知有多少個點，點與點之間用直線連接，已知點與點之間的連線共有 105 條線，請問圓周上共有多少個點？
M2-PT	某校舉行班際拔河比賽，規定每班必須與其他班級各比賽一場，經訓導處統計後，發現二年級總共要進行 66 場比賽，則該校二年級共有多少班？
M3-FT	在同一個圓周上，不知有多少個點，點與點之間用直線連接，已知點與點之間的連線共有 105 條線，請問圓周上共有多少個點？
M3-PT	某校舉行班際拔河比賽，規定每班必須與其他班級各比賽一場，經訓導處統計後，發現二年級總共要進行 66 場比賽，則該校二年級共有多少班？

M1：就是看題目的時候，腦海中會顯示要找關鍵字，題目中的重點字或是數字會比較容易出現在腦中，會覺得好像要把字圈起來，關鍵字它會自己閃出來。

M2：有些題目，對於不熟悉的題目比較會找關鍵字，以前比較不會去找關鍵字。

M3：遇到難的題目或是比較沒看過的題目，比較會找關鍵字。

M4：不會題目，會畫關鍵字會特別框起來，然後會多讀幾遍，而且會愈畫愈多。

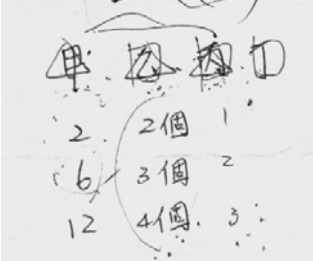
(M1、M2、M3、M4-20080614-OV)

(二) 表徵轉換行為

放聲思考原案中表徵轉換行為相關舉例記錄如下，可發現學生經數學寫作活動之後，較習慣於使用不同的方式理解題意。

個案學生表徵轉換舉例如表 7。

表 7 個案學生表徵轉換舉例

個案學生	前測第二題解題行為	後測第二題解題行為
M1	無	
M4		

M2：現在算題目時比較常畫圖，會把文字敘述轉換成圖形，也比較容易理解。

M3：之前比較少畫圖，現在會比較常一些，有時會整理題目的文字。

M4：遇到沒辦法直接算的題目，會畫圖試看看能否想出解法。

(M2、M3、M4-20080704-OV)

(三) 聯想行為

放聲思考原案中聯想行為相關記錄舉例如下，可發現學生經數學寫作活動之後，較能透過關鍵字聯想。個案學生聯想行為舉例如表 8。

表 8 個案學生聯想行為舉例

	前測第 2 題	後測第 2 題
M2	無	聯想實際比賽情形、點線面的問題
M3	無	聯想實際比賽情形

M2：這個題目跟點、線、面的問題有關。(M2-PT)。

M2：往比較多方面去想，可能說這一題跟這一題會用到什麼公式之類，就是說這一題可能用畢式定理，那這一題可能用某個公式算這樣，現在可能會想要用別的方法，之前根本不會去想別的方法。(M2-PT-OV)

M3：總共 20 班，所以每班要跟 19 個班，然後這裡是總共的班是 20，然後就會等於 66。(M3-PT)

M3：最大的差別是之前比較不會想那麼多，比較不會畫重點，想重點，而且不會整理重點，現在啊，而且自然就會畫圖、畫重點、整理重點且寫下來。(M3-PT-OV)

M4：計算四個班級比賽的場數。

M4：我覺得這一題好像跟上次的有點像。(M4-PT)

綜合質性研究資料與量化資料大致符合，顯示數學寫作活動有助於改善學生的解題策略，同時也有助於提昇解題能力，此結果與文獻中的實徵性顯示數學寫作活動能讓學習者主動學習並有助於數學解題相符合。

伍、結論與建議

本研究透過對四位八年級中程度學生實施數學寫作活動之後，比較學生於數學寫作活動前後在解題能力及解題策略的變化，在解題能力部分發現學生後測的表現略優於前測的表現，可推得數學寫作活動應有助於提昇學生的解題能力，與劉祥通、周立勳（1998）及 Pugalee（2001）的研究相符合，依據相關的質性資料可發現學生在解題策略的使用有增加的情形，故數學寫作活動應有助於增進學生的解題策略，與 Sterrett（1992）指出寫作能幫助學生成為主動的學習者的研究相類似，同時，學生也表示解題策略對數學解題是有幫助的。

最後，研究者根據研究結果提出建議：

（一）教學之中應適時地融入數學寫作活動，使用分段給分的評量方式：

藉由數學寫作活動讓學生主動學習，故教學時教師可適時地融入的數學寫作活動，促進學生成為主動的學習者，影響學生的作答方式及解題的思考方式。

在評量方式，建議採用分段評分，不僅可評量過程也可評量結果，避免因學生於解題過程中的粗心或計算錯誤而誤解了學生的學習情形。

(二) 實施數學寫作活動遭遇的困難與建議：

從事寫作活動時，因花費時間較多，宜給予較充足的時間，避免學生因時間因素影響寫作的意願，同時留意學生的反應且適時地調整寫作的次數與方式。另外，在實施寫作活動時，可先行說明並示範，引導學生將心中的想法以文字、圖示或符號的方式表達出來。

在寫作活動的形式上，可將周期性寫作或陳述、說明性的寫作輪流使用，並依目的的不同，使用不同的寫作形式，如自傳（對數學的想法或學習數學的經驗）、週記（本週學習心得、本週學習重點、等）、本研究中的不同寫作形式等等。

(三) 教科書的編寫上，考慮融入解題策略：

本研究的結果分析顯示，寫作形式影響學生的解題方式，與 Shield 和 Galbraith (1998) 提出學校教科書的寫作形態影響著學生寫作的形式相符合，故建議教科書編寫時，可適時地融入解題策略，培養學生的解題思路，讓學生有思考的機會。

陸、參考文獻

中文部分

- 何靜怡 (2006)。擬題教學融入九年級幾何數學之研究：以三角形和平行四邊形為例。國立彰化師範大學科學教育研究所碩士論文，未出版，彰化市。
- 林倉億(2000)。透過「寫作」促進數學學習。台北通訊，2(4)。
- 周立勳、劉祥通 (1998)。寫作活動對國小學生數學解題能力的影響。教育研究資訊，6(3)，46-62。
- 陳建廷 (2006)。國一學生一元一次方程解題歷程之研究。國立中山大學教育研究所碩士論文，未出版，高雄市。
- 張淑芳 (2000)。認知策略對國小輕度智能障礙學生數學解題能力影響之研究。國立彰化師範大學科學教育研究所碩士論文，未出版，彰化市。
- 喻平 (2002)。論數學解題的現代理論基礎。數學傳播，26 (4)，60-68。
- 劉祥通、黃國勳 (2005)。數學寫作活動的類型與實例。台灣數學教師期刊，1，2-11。

劉祥通、周立勳 (1997)。數學寫作活動-國小數學教學的溝通工具。《國民教育研究學報》，3，239-262。

賴佩伶 (2007)。改變九年級學生數學解題歷程中直覺與聯想力之研究。國立彰化師範大學科學教育研究所碩士論文，未出版，彰化市。

英文部分

Shield, M. & Galbraith, P. (1998). The analysis of student expository writing in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 35, 29-52.

Beswick, k. & Muir, T.(2004).Talking and Writing about the problem solving process.In I. Putt, R. Faragher, & M. McLean (Eds), *Mathematics education for the third millennium: Towards 2010: Proceedings of the 27th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*. (Vol 1, pp. 95-102)

Charles, R. I. & Lester, F. K. (1984). An evaluation of a process-oriented instructional program in mathematical problem solving in grades 5 and 7. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15(1), 15-34.

Mayer, R. E. (1992). *Thinking, problem solving, cognition* (2nd. ed.). New York: W. H. Freeman and Company.

McAloon, A. & Robinson, G. E. (1988). Assessing for learning: How do you evaluate problem solving? *Arithmetic Teacher*, 35(8), 49-51.

Polya, G. (1957). *How to solve it* (2nd ed.). Princeton, New Jersey: Princeton University Press. (Second Edition)

Pugalee, D. K. (2001).Writing, mathematics, and metacognition: looking for connections through students's work in mathematical problem solving. *School Science and Mathematics*, 101(5), 236-245.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

Sterrett, E. (1992). *Using Writing to Teach Mathematics*. Washington, DC :
Mathematical Association of America.

附錄一 寫作活動內容

寫作活動 A1

應用問題中，題目敘述常常很長，且包含文字、數字、符號等，解應用問題要先了解題目，才能幫助我們解題。若有寫錯，請在錯誤的地方打×，請勿塗黑或使用立可白。

1、小彥家門前有一片空地，小彥想在空地上用 40 公尺長的鐵絲圍成一個面積 75 平方公尺的長方形花圃，請問花圃的長、寬各是多少尺？

第一部分

1、讀完一遍題目之後，請問寫下本題最終問題的文字敘述？若有困難，請再多讀幾遍。

2、你認為與求得答案有關的文字敘述或字詞有那些，請在下列題目上清楚地畫線或用括號括起來。

小彥家門前有一片空地，小彥想在空地上用 40 公尺長的鐵絲圍成一個面積 75 平方公尺的長方形花圃，請問花圃的長、寬各是多少尺？

3、試著用你自己的方式重新呈現題目，可用文字、圖、表、、等。

4、想想看，你認為求得本題答案會用到那些數學知識呢？請寫下來。

5、嘗試看看，列出本題的方程式。

第二部分

一、先試著了解題目吧！

- (1) 題目中提到花圃是什麼形狀的呢？_____
- (2) 圍成花圃的鐵絲有多長呢？_____
- (3) 花圃的面積是多少呢？_____
- (4) 畫出圖形吧！

二、試著找出關係吧

- (1) 寫下長方形的面積與長、寬之間的關係_____。
- (2) 題目中提及長方形的面積為_____。
- (3) 結合 (1) (2)，可得_____
- (4) 題目中提及用多少公尺圍成一個長方形的花圃呢？_____公尺
這個長度與長方形的長、長方形的寬的關係為_____。
- (5) 綜合 (3) (4)，能否先假設一個未知數，並列出方程式

(6) 如果假設長方形的長為 x 公尺，則由 (5) 長方形的寬可表示為

_____。
由 (2)，可列出方程式_____

編號 A2 (配合 A1 的日誌)

一、請試著完成今天上課的各個題目，包含設未知數、列方程式、解出未知數，並寫出正確的答案。

1、小彥家門前有一片空地，小彥想在空地上用 40 公尺長的鐵絲圍成一個面積 75 平方公尺的長方形花圃，請問花圃的長、寬各是多少尺？
--

若有寫錯，請在錯誤的地方打×，請勿塗黑或使用立可白。

編號 A3

解題時，通常可分為理解問題、擬定計劃、執行計劃和驗證答案，在前二堂的寫作活動中，我們在閱讀題目時畫出重點、寫出未知數與已知數確認題目的問題、嘗試用自己的方式呈現問題，都是在理解問題，在聯想數學知識及嘗試找出未知數與已知數的關係，則是擬訂計劃的部分，接下來我們要學習將理解問題、擬定計劃、執行計劃和驗證答案的過程詳細寫下...

題目				
甲、乙兩隻螞蟻同時自洞口出發，甲螞蟻向東走，乙螞蟻向北行。已知乙螞蟻的速度每分鐘比甲螞蟻快 10 公分，又出發 2 分鐘後，兩隻螞蟻已相距 100 公分，則甲螞蟻每分鐘走多少公分？				
檢視解題步驟	確定了解題目了嗎	擬訂計畫 聯想相關數學知識 引入符號試試	執行計畫 確認步驟之間理由	驗證答案 答案是否付合題意,代回驗算
【解題過程】				
檢視自己的解題過程，對你解題的影響為何？				

寫作活動 A4

在以下題目的敘述中，想想看，那些文字改變之後，不會影響本題的解題呢？請在題目上，將可更改的文字敘述，用括號括起來，並依者我們之前的寫作活動，試者求出答案。

1、甲、乙二人騎腳踏車從一個十字路口同時出發，甲以每小時 14 公里的速度向北行，乙以每小時 $\frac{21}{2}$ 公里的速度向東行，請問幾小時後甲、乙二人相距 70 公里？

【解題過程】

【將可更改的文字敘述，發揮你的創意，設計一個新的題目吧】

Effects of mathematic writing on problem-solving process of the middle-level 8th graders.

Li-Hung Huang¹, Meichun Lydia Wen², Hao-Yao Shih³

(Taipei CunLin Junior High School¹, National Changhua University of Education Science Education Institute², National Changhua University of Education Math Department³)

Abstract

The purpose of this study was to investigate the effects of mathematic writing on problem-solving process of 8th graders after implementing a month of writing-to-learn activities. This study utilized case-study research methods involving 4 students of middle level achievement. Student's word problem test of quadratic equation was implemented at the beginning and the end of writing-to-learn activities. Qualitative data included four student's pre-post problem-solving process documents by thinking-aloud procedure and interviews with four students. Findings from the study indicated that mathematic writing activities had a positive impact on middle-level students' problem-solving abilities and was helpful to improve their problem-solving strategy.

Keywords: mathematic writing, problem solving

活動報馬仔

一、 2009/03/13(五)~2009/03/14(六)

2009 第一屆科技與數學教育學術研討會

(The First Conference on Technology and Mathematics Education)

地點：國立臺中教育大學

參考網站：<http://mathed.ntcu.edu.tw/TME2008/>

二、 2009/04/22(三)~2009/04/25(六)

NCTM 2009 Annual Meeting and Exposition

地點：Washington, D.C.

參考網站：<http://www.nctm.org/annual.aspx>

三、 2009/5/29 (五)~2009/5/30(六)

2009 年原住民學生數理教育學術研討會

地點：國立臺東大學(台東校區)

(95002 台東市中華路一段 684 號)

參考網站：<http://210.240.178.13/2009ISME/>

稿 約

一、本刊徵選之數學教育刊物為：

- (一) 本刊以徵選實務性的數學教育刊物為主，舉凡任何數學創新教學之方法或策略、數學教學實務經驗、數學課程設計與實踐之心得分享等皆為本刊之首要選擇標的；
- (二) 研究文章（包括以實驗、個案、調查或歷史等研究法所得之結果，和文獻評論、理論分析等）；
- (三) 短文（包括研究問題評析、數學教育之構想、書評、論文批判等）；以及
- (四) 其他符合本刊宗旨之文章。

二、本刊所刊之文章，需為報導原創性教學或研究成果之正式文章，且未曾於其他刊物或書籍發表者（在本刊發表之文章未經台灣數學教育學會同意，不得再於他處發表）。

(一) 來稿請注意下列事項：

1. 來稿請以中文撰寫，力求通俗易讀，須為電腦打字，每篇以不超過 6000 字為原則（特約稿不在此限），以電子郵件傳送。
2. 來稿請附中英文篇名、作者

姓名及服務機關，作者姓名中英文並列，若有一位以上者，請在作者姓名及服務機關處加註(1)、(2)、(3)等對應符號，以便識別，服務機關請寫正式名稱。

3. 來稿請附中英文摘要，並於摘要後列明關鍵詞彙(key words)，依筆劃順序排序（以不超過五個為原則），英文關鍵詞彙則須與中文關鍵詞彙相對應。
4. 文稿若為譯文，請附原文影本及原作者同意函，並請註明原文出處、原作者姓名及出版年月。
5. 凡人名、專有名詞等若為外語者，第一次使用時，謂用（）加註原文。外國人名若未有約定成俗之譯名，請選用原文。
6. 附圖與附釋請於文後，並編列號碼，並在正文中註明位置。
7. 文末參考文獻依作者姓氏分別編號排序：中、日文依筆劃多寡排列；西文（英、法、德...等）依字母順序排列；若中、日、西文並列時，則先中、日文後西文。至於參

考文獻之寫法如下：

(1) 期刊論文，請依下列順序

書寫：作者、出版年（西元）、論文篇名、期刊名稱、卷期、頁數。

例：張湘君（1993）。讀者反應理論及其對兒童文學教育的啟示。*東師語文學刊*，6，285-307。

(2) 圖書單行本，請依下列順序

書寫：作者、出版年（西元）、書名、版次、出版地、出版社、頁數。

例：張春興（1996）。*教育心理學*。台北：東華。頁64-104。

8. 稿件順序為：首頁資料（題目、作者真實姓名及服務機關、通訊地址及電話；若需以筆名發表，請註明）、中文摘要、正文（包括參考文獻或註釋）、末頁資料（以英文書明題目、作者姓名及服務機關、並附英文摘要）及圖表（編號須與正文中之編號一致）。

(二) 本刊對來稿有權刪改，不同意者請在稿件上註明。

(三) 來稿刊出，版權為台灣數學教育學會所有。

(四) 作者見解，文責自負，不代表本學會之意見。

(五) 來稿請 e-mail 至：

dcyang@mail.ncyu.edu.tw