

ISSN 1815-6355

台灣數學教師(電子)期刊

Taiwan Journal of Mathematics Teachers

第18期

台灣數學教育學會

2009年06月

台灣數學教師(電子)期刊
Taiwan Journal of Mathematics
Teachers
2009年06月出版
NO.18 2009

發行宗旨

發行人：林福來教授

主編：

楊德清 國立嘉義大學數學教育研究所

編輯委員

Editorial Panel

呂玉琴

國立台北教育大學數學教育研究所

李源順

台北市立教育大學數學資訊教育學系

林素微

國立東華大學數學系

金鈞

國立台灣師範大學數學系

梁淑坤

國立中山大學教育研究所

蔡文煥

國立新竹教育大學應用數學系

劉祥通

國立嘉義大學數學教育研究所

劉曼麗

國立屏東教育大學數理教育研究所

(依姓名筆劃順序排列)

封面設計：施乃文

出版者：台灣數學教育學會

地址：台北市 116 汀州路四段 88 號國立台灣師範大學數學系 M212

電話：02-29307151

電子郵件信箱：tame@math.ntnu.edu.tw

網址：

<http://www.math.ntnu.edu.tw/~tame/index.htm>

總編輯：楊德清 dcyang@mail.ncyu.edu.tw

地址：嘉義縣民雄鄉文隆村 85 號

國立嘉義大學數學教育研究所

電話：05-2263411-1924

一、本刊為一實務性的數學教育刊物，出版目的如下：

1. 積極發揚台灣數學教育學會之成立宗旨：研究、發展、推廣數學教育，使台灣學生快樂學好數學。
2. 提升數學教師教學品質、數學教育研究品質及促進數學教學策略與方法之交流。
3. 探討數學教育的學術理論與實務現況，以促進理論與實務之結合，進一步提升數學教學之內涵。
4. 提供數學教育課程、教材與教法等實務經驗，包括數學遊戲、DIY 教具之分享，以供未來之教學與研究參考之用。
5. 針對多數學生特定迷思概念之教學引導，如學生易有的錯誤型態及如何釐清觀念等。
6. 介紹國內外數學教育現況。

二、本刊內容以充實高中、國中與小學數學教學、課程與教材為主，以提供所有關心數學教育人士之教學資源與參考依據。

三、本期刊以季刊方式（3 個月一期，一年共 4 期）發行，分別於每一年的 3、6、9、12 月發行。

四、本期刊採電子與紙本方式同時發行。

ISSN 1815-6355

台灣數學教師電子期刊 2009, 第十八期

台灣數學教師（電子）期刊
Taiwan Journal of Mathematics
Teachers

第 18 期

2009 年 06 月

台灣數學教師（電子）期刊

目錄

第 18 期

2009 年 06 月

序言.....	1
楊德清	
數學學習障礙與數學輔導教學.....	3
黃德華、羅家健	
數學史融入教學實作之分析-以「魔數橋」為例.....	18
陳玉明	
介紹Ball研究小組“數學教學需要的學科知識”之研究.....	32
黃興豐	
運用概念構圖教學策略提升六年級數學低成就學生學習效益之個案研究.....	50
張宇樑、洪巽盈	
活動報馬仔	66

ISSN 1815-6355

新願景、新希望

光陰匆匆飛逝，時間在彈指悄悄地流走。臺灣數學教師(電子)期刊(TJMT)出版適合國內中小學教師、研究生與研究人員閱讀之文章迄今已悄然地邁入第五年。回首過往，看著她慢慢地成長與茁壯，真正發揮了臺灣人一步一腳印的精神，勇敢地努力往前邁進。

本期TJMT容納了四篇相當不錯之文章：首先是香港教育學院黃德華與羅家健老師所發表之「數學學習障礙與數學輔導教學」，他們從香港小學數學實例中，分析一般有數學學習障礙的小學生常見之學習困難因素，進而提供一些教學建議，希望能提供相關老師作參考，以提升小學數學輔導教學效益。其次是古亭國小教師陳玉明所發表之「數學史融入教學實作之分析-以「魔數橋」為例」，作者以國小課程中「找規律性的應用問題」為基礎，設計適用於國小五、六年級的「魔數橋」活動，期望從數學史融入數學教學的理念活化數學學習，藉以拉近數學與學生的距離，進而能夠提升學生對數學的學習自信心，內文相當有趣。再來是大陸常熟理工學院數學系黃興豐老師「介紹Ball 研究小組“數學教學需要的學科知識”之研究，作者以Ball 等人之理論為基礎，探討數學教學需要的數學知識的分類。透過本文，很高興看到大陸亦越來越重視數學教育。最後是明道大學教學藝術研究所張宇樑老師與台中縣葫蘆墩國民小學洪巽盈老師所共同發

表之「運用概念構圖教學策略提升六年級數學低成就學生學習效益之個案研究」，作者透過概念構圖教學策略所發展之教學活動，以分析其對小六數學學習低成就學生之學習效益的影響，內容豐富精彩。

總編輯衷心感謝所有參與投稿、協助審查與推動本期刊順利往前邁進之老師與工作人員，由於您們的協助與奉獻，才能使本期刊得以順利出版。

最後，讓我們懷抱新的願景與新的希望，期盼臺灣數學教師(電子)期刊能夠更加成長與茁壯。

臺灣數學教師(電子)期刊總編輯

楊德清

數學學習障礙與數學輔導教學

黃德華¹、羅家健²

香港教育學院¹、香港特別行政區²

摘要

過去五年，香港教育局積極提倡融合教育，讓一些有特殊教育需要的學生回歸主流學校就讀，但這個安排卻衍生了許多教學問題。由於大部分教師沒有接受專業的特殊教育培訓，他們亦沒有教授這類學生的經驗，因此他們往往未能了解這些有特殊教育需要的學生的背景、學習能力、學習需要和學習困難。基於這些原因，大部份老師較困難設計出合適的教材、教具來進行輔導教學。以數學科來說，很多數學教師由於不了解有特殊教育需要的學生的數學學習障礙，因而誤以為他們只是懶惰、心散、愚蠢，而沒有就他們的學習問題作出深入的理解，找出根源所在，從而作出相應的輔導。因此教師在缺乏了解下進行輔導教學，其教學效益每每是事倍而功半的。本文旨在探討數學學習障礙的詮釋與成因，並透過小學數學實例，分析一般有數學學習障礙的小學生的學習困難，從而提供一些教學建議，希望能予老師作參考，藉以提升小學數學輔導教學的教學效益。

關鍵詞：融合教育；數學學習障礙；數學輔導教學

壹、[數學學習障礙]的詮釋和成因

很多學者對「數學學習障礙」一詞都有不同的詮釋。如楊坤堂 (2007) 認為有數學學習障礙的學生是指一些智力正常的學生在學習和運用數學概念、數量及符號時有明顯困難，並兼有計算、推理和解決問題等能力的不足的學生。這些數學學習障礙，每每導致他們的數學學習成績顯著較一般學生差。根據黃瑋苓 (1995)和孟瑛如 (1999) 就美國精神醫學會編寫的《美國精神疾病診斷手冊<第四版>》(DSM IV, The Diagnostic and Statistical Manual of Mental Disorders)報告指出，數學學習

障礙是指一些學生在標準化個人測驗中，其表現顯著低於個人的發展年齡、智力及所屬年級應有的程度，而這些差異的形成都與他們的語文能力、視知覺能力、注意力缺陷和數學能力缺乏有關。因此，有數學學習障礙的學生(簡稱數障生)很大可能是潛伏着語文能力、視知覺能力、注意力和數學能力等缺陷的，而這些缺陷也正是導致他們在學習數學出現問題的主要原因。

研究對象

本文嘗試透過筆者於二零零六至二零零七年度進行的數學科全納教育課堂觀課所得的一些具體資料，說明這四大能力缺陷對兒童學習數學的影響，從而加深老師對數學學習障礙的認識。該年度觀課的主要對象為香港小學一至六年級的小學生。在這些學生中，並沒有身體弱能及智障學童在內，但從學生的過往數學成績比較，大約有六分之一的學童的數學學習能力是較一般學生為弱的；再經老師和筆者分析學童的背景資料，得知這些學習能力稍遜的學生大多帶有數學學習障礙的特徵，對理解抽象數學概念及進行複雜運算都有很大的困難。

1.1 語文能力缺陷

語文能力缺陷每每導致數障生於了解或表達數學常用詞彙、關鍵字及概念方面都出現很大問題；例如他們不能夠理解文字題的題意，判斷題目涉及甚麼數學概念。此外，再加上粗心大意，因此大多數障生都不能夠正確地列出與問題相關的數式。

例如在某一小五觀課，其中一位數障生解答下列的分數乘法文字題時便出現這樣的錯誤：

一盒果汁有果汁 $1\frac{3}{4}L$ ，小明喝去 $\frac{1}{2}$ 盒，他喝去果汁多少？

這名有語文能力缺陷的數障生，他列出下列數式，並計算得以下答案：

$$\text{餘下： } 1\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = 1\frac{3-2}{4} = 1\frac{1}{4}L$$

經和他交談下，知道他主要是根據『喝去』二字，再加上粗心大意地將「喝去 $\frac{1}{2}$ 『盒』」，視為「喝去 $\frac{1}{2}$ 『L』」，因而判斷這是一道減法題。他不能夠正確理解題意並分析得題目所涉及的數學概念實則是倍數(乘法)概念。

正確答案 喝去： $1\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{8}L$

1.2 視知覺能力缺陷

視知覺能力缺陷每每導致學生們在辨識或閱讀數字與數學符號、分類等能力都出現困難。一般來說，視知覺的缺陷會直接影響數障生能否判斷距離、空間的準確性；部份數障生更因這缺陷不能了解物件不管放在任何角度、距離，都是不變的；這反映出他們未能完全掌握「守恒」概念。視知覺能力亦影響數障生能否作出形狀配對、形狀命名和圖形區辨的能力。

一般而言，有視知覺能力缺陷的數障生對非標準圖形的辨識水平較低，例如某小一數障生就認為三角形一定是如圖 1a 的，圖 1b、1c 和 1d 的都不是三角形：



圖 1a

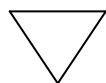


圖 1b

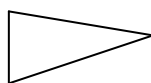


圖 1c

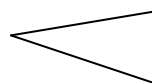


圖 1d

又例如一般有視知覺能力缺陷的數障生大多認為梯形相互平行的一組對邊一定是處於水平方向的，而且上底比下底短 (如下圖 2a)，因此，在教學的過程中，老師要充分進行「變式」練習，讓學生多觀察不同形狀、擺放在不同角度的梯形(如下圖 2b、2c)，使圖形大小、位置等有多些變化，以便學生能區分平面圖的本質特徵和非本質特徵。

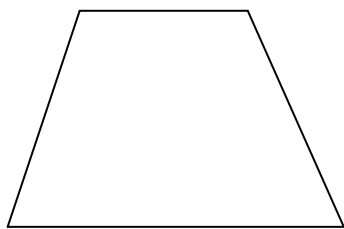


圖 2a

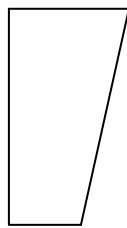


圖 2b

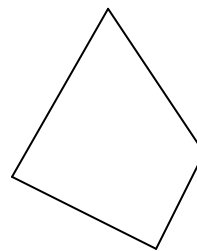


圖 2c

1.3 注意力缺陷

注意力缺陷也就是一般俗稱的過動活躍症，簡稱 ADHD (Attention-Deficit/Hyperactivity Disorder, ADHD)。患有這注意力障礙的數障生大多會在學習上常犯下列問題：

- 粗心大意運算，常導致不必要的犯錯；
- 在不適當的時間四處亂跑，很多時導致無法完成指定的課堂活動；
- 過度愛說話，不依指示進行學習活動；
- 容易分心，不專心上課。

此外，由於他們過度活躍及衝動，他們會很容易與同學發生爭執。上列問題，每每導致他們不單在理解數學概念、甚致在抄寫數式、運算步驟、檢視運算結果和進行小組學習時都出現問題。因此教導這些患有注意力障礙的數障生，老師們需更有耐性和愛心。對他們的不小心犯錯，要多包容；對他們的不守秩序，要悉心有序的加以糾正；對他們的不專心學習，要多運用教具、透過具趣味的活動啟發及提升他們學習的興趣。

1.4 數學能力缺陷

有數學能力缺陷的數障生大多在理解抽象的數學概念時會出現問題。此外在處理一些類比、歸納、推理、演繹等問題時，他們遇到的困難更加嚴重。例如在某一小五分數除法的觀課中，老師先板書一條整數除法的例子：「有糖 8 粒，每

兩粒包裝成一包，問共可包裝得多少包？」跟着老師便問學生：「你們懂得 $\frac{1}{4} \div \frac{1}{8}$ 的意思嗎？」大部份學生都能夠利用該整數除法的例子作類比，理解得分數除法的包含概念，然後說出 $\frac{1}{4} \div \frac{1}{8}$ 即 $\frac{1}{4}$ 包含多少個 $\frac{1}{8}$ 或多少個 $\frac{1}{8}$ 等於 $\frac{1}{4}$ 的意義；但班中的兩個數障生則完全理解不到。老師聽了幾位學生正確的回答後，再問其中一個數障生：「計算下列數式，目的是在計算甚麼？」該數障生不懂得回答，祇說：「不知道。」其他同學則能夠說出：「計算 $\frac{1}{4} \div \frac{1}{8}$ ，目的是找得多少個 $\frac{1}{8}$ 等於 $\frac{1}{4}$ 。」

又例如在另一次小學五年級認識梯形面積公式的觀課中，老師要求學生利用已知的平行四邊形面積公式『平行四邊形面積 = 底 x 高』，推出(演繹出)梯形面積的公式。經批改學生完成的工作紙，發覺有數學能力缺陷的學生大多不能推出該公式，反之，其他同學大多能夠演繹得：『梯形面積 = (上底+下底) x 高 ÷ 2』。

Miller and Mercer (1997) 和 Lerner (2003) 經過分析，歸納出一般數障生在學習數學時，大多都會遇上語言和閱讀能力的困難、認知學習困難及數學焦慮等問題。郭靜姿、許慧如、劉貞宜、張馨仁和范成芳 (2001) 則把這些數障生在解題時常見的學習困難歸納為：數學概念不足、計算錯誤、數學語言表達困難、記憶能力缺陷、注意力缺陷、抽象推理困難和學習態度低落等等。當我們了解了什麼是數學學習障礙後，如何提升他們在融合教育的環境中學習數學便成為數學老師的另一重要任務。在香港，一般是透過輔導教學¹來提升有數學學習障礙的學生的學習成效的。

¹ 輔導教學又稱補救教學。

貳、輔導教學

早於 1982 年，香港教育署（現稱香港教育局）已開始推行輔導教學，其主要目的是為有學習困難的學生提供額外的輔導，藉着設計不同的學習活動和輔導教材幫助他們縮窄與一般學生在數學科成績上的差距。

2.1 輔導教學模式

以往香港教育署數學組（2001）建議學校採用的輔導教學模式有三種：分班輔導、抽離輔導、課外輔導。現在的香港教育局則鼓吹把不同學習能力的學生安排在同一個課室，以全納模式進行教學及輔導。

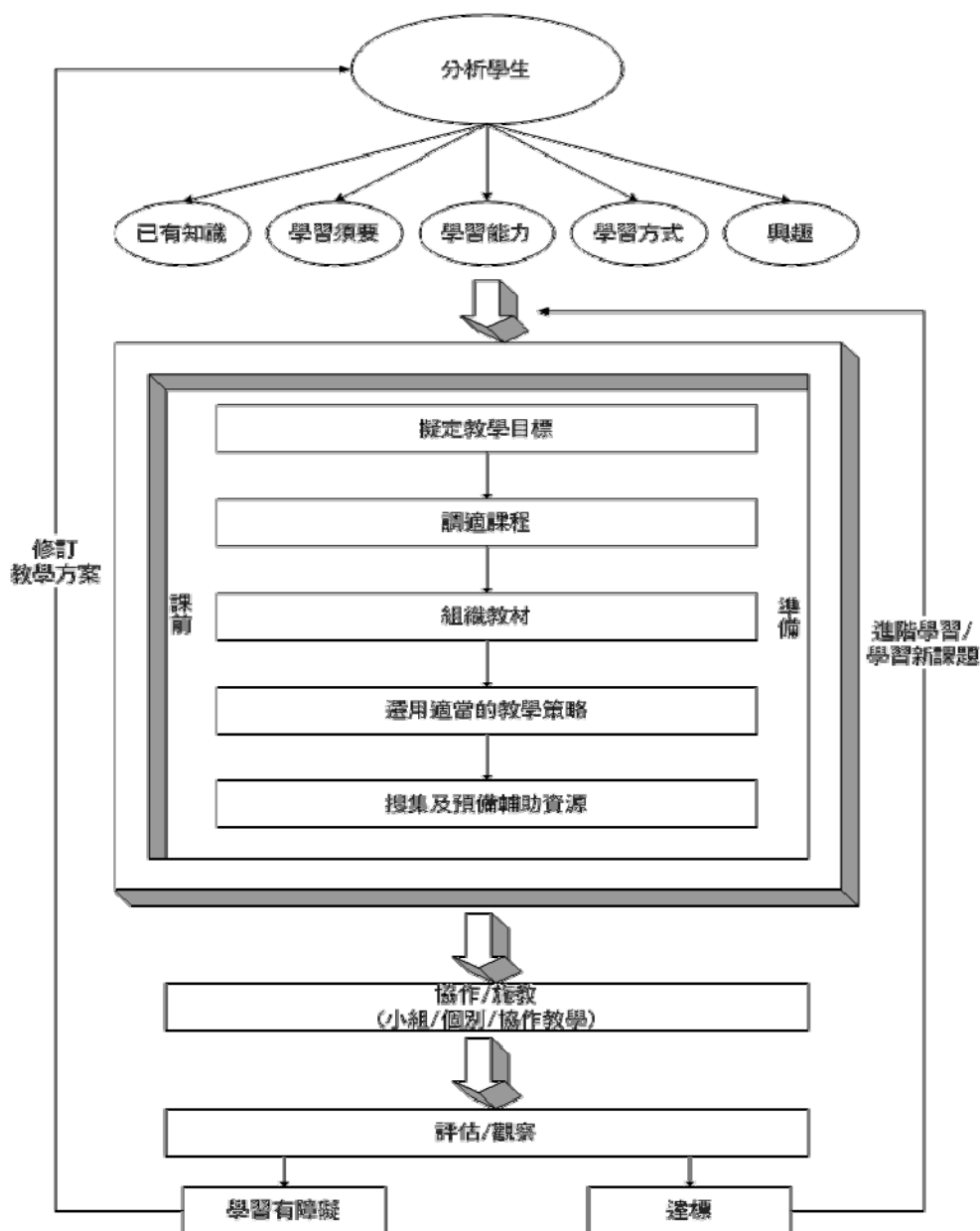
2.2 全納式教學及輔導

全納式教學及輔導主要是針對不同學習能力的學生設計適合所有不同能力的學生的單一教材，這與其它三種輔導不同，它能減低對數障生的標籤效應，亦能幫助他們融入主流學校。出色的全納輔導教學是先要分析學生的個別差異，經過周詳的策略，設計教學計劃，再配合足夠的教具支援進行教學。

2.3 鞏固---練習或延展問題

在輔導教學中，鞏固的環節也是十分重要的。鞏固的目的主要是幫助學生加深對新學會的數學知識和技巧的掌握及領會，從而提升他們的數學能力。鞏固的方法很多，包括在教師的指導下，給學生進行半獨立或獨立的堂課練習或延展問題；也可以讓學生自行完成工作紙、作業或課本內的課業。除了練習或延展問題外，老師亦可以問答形式，讓學生自由陳述、列舉事例。

以下為香港教育署教育服務科的《小學加強輔導教學計劃指引》（2001）提供的輔導教學的建議流程：



(香港教育署教育服務科 2001, p.13)

筆者曾就上述輔導教學的步驟，為一些有數學學習障礙的學生進行了一些輔導計劃，成效頗理想。現根據一般數障生常遇的學習困難，提供一些曾進行過及效果很不錯的輔導教學的例子，提供一點建議，以供同業參考。

參、數學輔導教學舉隅

3.1 抽象推理困難、語言和閱讀能力困難

Bley and Thornton (2001)指出一般數障生大多無法將學習了的數學概念清晰地表達出來，他們每每也無法使用正確的數學運算符號聯繫題目內各個數值之間的關係。在解答文字題時，由於他們的語言和閱讀能力欠佳、抽象推理能力薄弱，因此他們往往不知從何入手，結果自然是無法作答。

在一次以小學二年級『加與減(二)』為課題的課堂教學研究中，老師們集中討論怎樣提升數障生解答文字題的能力。筆者建議教師利用教具，配合情境作角色扮演，希望藉此幫助數障生理解題目的內容及其涉及的相關數學概念。老師其後依這模式進行輔導教學，效果不錯。以下是其中的一個例子。

例：媽媽到百貨公司買東西，她用了35元買了一件襯衣給爸爸，現剩下53元。媽媽原有錢多少元？

對於這一道問題，數障生大多以為是一道減法題，主因他們根據【用了】二字作判斷，便以大數減細數列式「 $53 - 35$ 」，忽略了關鍵的詞彙【原有】的意義。建議：

1. 教師宜先與學生一起找出題目的關鍵詞(Keywords)【用了】、【剩下】和【原有】，再透過提問評估他們是否懂得各關鍵詞的意義。教師亦可利用下列關鍵問題(Key Question)幫助學生理解及判斷題目涉及的運算概念。

關鍵問題：媽媽原有的錢應較剩下的53元多，還是小？

2. 跟着教師可透過角色扮演讓數障生更明白關鍵詞【用了】和【剩下】的意義：媽媽用了35元，即付了35元給售貨員，現剩下53元，即付了錢後，現在還有53元。

3. 透過提問讓學生思考解答的方法。

教師：「我們可以將問答倒轉來看。想想媽媽現在還剩 53 元，假如她沒有買襯衣給爸爸，她原有的錢應較剩下的 53 元多，還是小？

4. 再透過角色扮演(假設媽媽不買襯衣，收銀員退回金錢)，讓學生明白“逆思法”的用法。

5. 最後，教師請學生列寫算式，並作運算。

媽媽原本有錢：

$$\begin{aligned} & 53 + 35 \\ & = 88 \text{ (元)} \end{aligned}$$

6. 利用計算得的原有 88 元和剩下的 53 元比較，看看是否和他們先前解答**關鍵問題**的想法一樣？**關鍵問題**：媽媽原有的錢應較剩下的 53 元多，還是小？

7. 教師亦可把計算得的原有 88 元代回題目內，要求學生作驗算。

媽媽原有 88 元，她用了 35 元買了一件襯衣給爸爸，算算看是否真的還剩下 53 元？

$$\text{還剩下: } 88 - 35 = 53 \text{ (元)}$$

上述教學方法採用了從具體(角色扮演)至抽象(逆思)的漸進式教學，這種教學模式可以讓學生從最基礎真實的部分開始學起，逐步把具體的情境內容過渡至抽象的數式列舉。這種教學方式能令有數學學習障礙學生有效地掌握抽象的數學概念。

8. 建議教師提供類似的常規問題鞏固學生新學會的數學知識。

在這課例中，筆者和老師們用了下列的延展問題作獨立的堂課練習，加深學生對逆思的領會，從而提升了他們的解題及運算能力。

延展問題

- (i) 爸爸給了哥哥 35 元，現在爸爸錢包內仍有 48 元。爸爸原有錢多少元？

- (ii) 志美送了 45 張貼紙給同學，現在志美有貼紙 54 張，她原有貼紙多少張？

3.2 注意力缺陷、記憶能力缺陷

一般數障生大多由於注意力不足，上課不留心，因此常常被老師說為「無心裝載」。事實上一般數障生的記憶能力是較正常學生為差的。記憶能力缺陷可從短期記憶、長期記憶和序列記憶這三方面來看。正如Bley and Thornton (2001)和楊坤堂 (2007) 所言，短期記憶的缺陷會令數障生很快忘記教師剛才所教授了的內容；而長期記憶的缺陷則會令他們無法回憶起所學習過的基本數字關係、數學概念和計算步驟等等；這些能力缺陷每每導致他們在列式及運算上造成錯誤。至於序列記憶的缺陷，則令他們無法按步驟完成複雜的計算題。

例如在一次輔導小學二年級數障生基本乘法為例，筆者曾建議教師採用【遊戲教學法】，效果很不錯。教師利用自行設計的一個飛標盤，內裡包括不同的顏色區域，而每個區域代表不同的得分（見圖3a），1、3、5、7和9分。每名學生獲分發五枚飛標（安全的魔術貼飛標），即有五次機會把飛標擲到標盤上。如飛標被擲到其中一個區域，他便可得代表該區域的分。完成遊戲後，學生需要計算自己所得的總分。換句話說，他們必需列式計算所有區域上的得分，事實每一道數式已要求學生進行了多次不同的乘法運算。

為了使學生可以鞏固其它乘法，筆者建議教師多設計一個飛標盤（見圖3b），只是分數全都改為雙數，而玩法跟之前一樣，目的是讓學生可以將學習到的知識和計算得分的方法遷移並應用在2、4、6、8和10的乘法上。結果學生們大多能在愉快、不沈悶的氣氛下完成活動，更在不知不覺間記頌了很多不同的乘法結果。

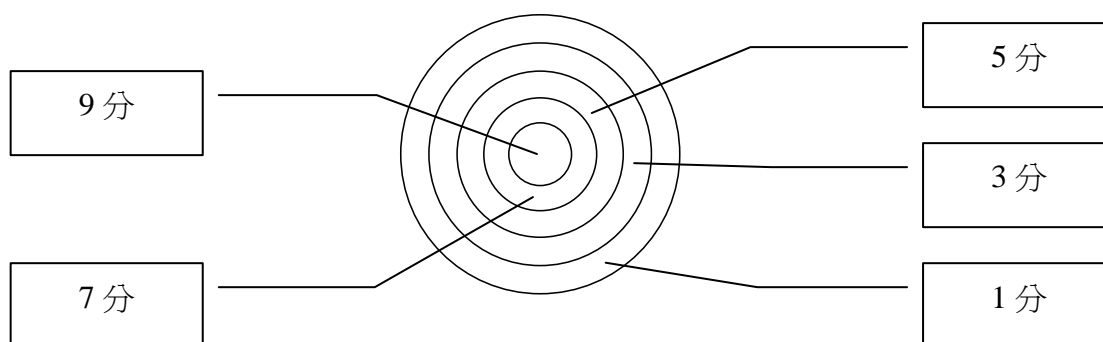


圖 3a

()分 × ()枝 = ()

()分 × ()枝 = ()

()分 × ()枝 = ()

()分 × ()枝 = ()

→ () + () + () + () + () = () 分

→ 答：總分是 _____ 分。

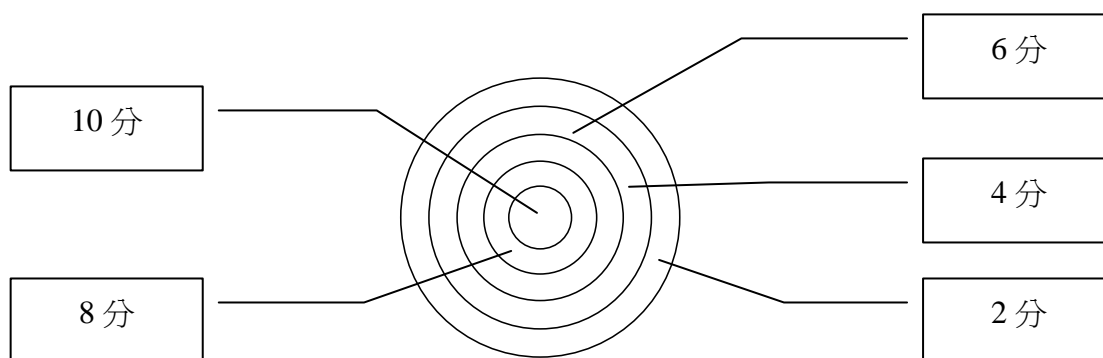


圖 3b

正如孟瑛如 (1999)指出，這類活動不單能夠提升學生的學習動機，也可以透過實際經驗來培養學生理解問題和解決問題的能力。在活動過程中，教師可讓

學生多玩幾次，並請他們說出如何計算不同區域的得分。透過不斷的反覆練習，讓學生計算不同的分數組合，這樣有助增強他們掌握乘數表的短期記憶和長期記憶。畢竟遊戲是學生最樂於參與的教學活動之一，它不但可以激發學生的學習興趣，而且又可以深化學生對教學內容的記憶，在不知不覺間達到愉快學習的效果。所以喻學習於遊戲，不失為一個好的教學模式。

3.3 學習態度低落、注意力缺陷

- 患有這注意力障礙的數障生大多亦會出現在學習態度低落的問題，如不喜歡學習、對學習沒有興趣、有數學焦慮。楊坤堂 (2007)和Lerner (2003)認為學習態度低落的學生大多是基於個人信念不足、動機低落、過份焦慮和使用的不當的學習方式，以致他們的數學學習產生嚴重的障礙。事實，部份成績差劣的數障生，雖然其個人學習能力或數學理解能力都是沒有問題的，但他們卻有注意力缺陷，也就是一般俗稱的過動活躍症。經分析他們的學習態度因素，發覺數學焦慮是影響這類學生學習的最重要癥狀，尤其是當他們遇上數學問題或進行數學測驗時，他們會變得愈來愈焦慮和慌張。結果，他們在數學成績長期差劣下，便逐漸失去信心學習數學。

筆者極同意香港教育署數學組 (2001) 的建議，建議教師編寫評估練習時應由淺入深，讓他們透過完成較淺易的題目來建立成功感，繼而挑戰較深的題目。此外，在編寫列式計算的文字題時，由於文字題的評估目的是判斷學生能否掌握運用相關的數學概念列式，這與式題的評估目的不一樣，式題目的是評估學生是否掌握相關的運算技巧，因此教師應盡量少用繁複的多位數來擬題，從而減少學生在運算過程中出錯的機會。

筆者更認為教師應多運用鼓勵語來重建這類學生的學習信心。事實上，每個

學生都希望自己的表現能得到別人的認同和肯定，學習態度低落的學生也是一樣的，由於他們的成績較一般學生差，因此給老師讚賞的機會便很少。教師不妨對他們的要求降低一點，評估他們的表現時也盡量不和其他同學作比較，應就他們是否有進步為出發點，當他們有改進時，便給予正面的鼓勵，例如說：「你真的進步了很多，我很開心！」。對學生而言，這簡單的鼓勵比其它物質的獎勵更為重要，它能給予這類學生更大的動力，讓他們繼續堅持地學習下去。另一方面，教師亦可利用正面的說話把學生本身的不足之處說出，如「我知道你是做得到的，祇是一時大意吧！以後計算完後，小心驗算一下答案，便不會出現這些小問題」。這樣就不會影響他們的學習情緒。

3.4 數學能力缺陷

數學概念是抽象的，是需要經過思考、分析才能理解領會得到的。但一般有數學能力缺陷的數障生大多在理解、分析抽象的數學概念時會出現困難，作為老師，我們應多花心思，多運用教具及情境，設計適合他們的教材。這對幫助他們理解抽象的數學概念是很有幫助的。例如在一次輔導小學六年級學生解簡易方程的輔導教學中，很多學生都未能正確解答【變數的系數是負】的方程，如 $20 - y = 7$ ，他們一般會混亂了減號「-」是[- 20]。錯誤計算如下：

$$20 - y = 7$$

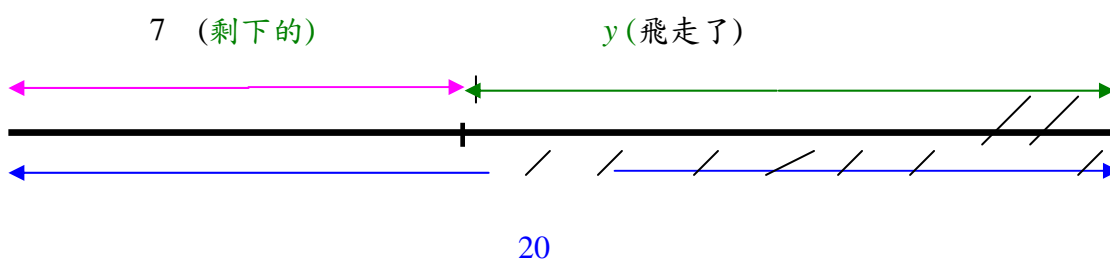
$$20 - y + 20 = 7 + 20$$

$$y = 27$$

筆者建議教師可利用情境故事及以數線作教具，幫助學生理解[- y]移至右方轉為[+y]的原理，結果該教學所得到的效果是很不錯的。

例：我原有氣球 20 個，若干個氣球飛走了。現在只剩下 7 個。問飛走了的氣球是多少個？

設原有紅色氣球 y 個，求 y 。



列方程： $20 - y = 7$ (斜線部份代表不見了的 y ，即減去 y)

$20 = 7 + y$ (整條線的長 20 等於紅綠兩線段的和 $7 + y$)

$20 - 7 = y$ (整條線的長 20 減去紅色部份 7，餘下的便是綠色部份 y)

$y = 13$

所以升走了的氣球是(13)個。

鞏固：

(i) $17 - x = 8$

(ii) $38 - 2y = 14$

肆、總結

由於有數學學習障礙的學生在學習數學的過程中所面對的學習困難是多樣性的，因此教師必須找出他們的學習弱點，提供適切的輔導教學，讓他們可以有效地進行學習。總的來說，由於數學內容是一環扣一環的，數學學習大多是利用[已知]學習[未知]，因此，有數學學習障礙的學生若未能掌握剛學了的數學概念，而教師又未能及時進行輔導教學便教授新的知識，這肯定對他們的學習有負面的

影響。故此，教師必須認真地看待數學學習障礙的問題，並就學生的不同學習障礙提供適當的輔導。正如Bley and Thornton (2001)所言，有數學學習障礙的學生仍是有能力學習數學知識的，只是他們的學習方式跟正常學生的不完全相同而已，因此合適的輔導教學肯定能夠提升他們的數學的成績的。

參考文獻

- 孟瑛如 (1999)。資源教室方案—班級經營與補救教學。台北：南圖書出版有限公司。
- 香港教育署數學組 (2001)。小學數學科輔導教學。香港：政府印務局。
- 胡光錡、晉泉增 (1990)。小學數學學習心理與教學。北京：光明日報出版社。
- 教育署教育服務科 (2001)。小學加強輔導教學計劃指引。香港：政府印務局。
- 郭靜姿、許慧如、劉貞宜、張馨仁與范成芳 (2001)。數學學習障礙之鑑定工具發展與應用研究。特殊教育研究學刊，21，135-163。
- 黃瑋苓 (1995)。淺談數學學習障礙。台東特教，23，48-53。
- 楊坤堂 (2007)。數學學習障礙。台北：五南圖書出版有限公司。
- Bley N. S. & Thornton C. A. (2001). Teaching Mathematics to Students with Learning Disabilities. Austin: Pro-Ed.
- Lerner, J. W. (2003). Learning Disabilities: Theories, Diagnosis, and Teaching. Boston: Houghton Mifflin.
- Miller, S. P. & Mercer C. D. (1997). Educational Aspects of Mathematics Disabilities. Journal of learning disabilities, 30 (1), 47-56.

數學史融入教學實作之分析-以「魔數橋」為例

陳玉明

臺北市大安區古亭國民小學教師

臺北市立教育大學數學資訊研究所

摘要

本研究藉由數學史融入數學教學課程中來活化數學，以拉近數學與學生的距離，提升學生對數學的熱情與學習數學的自信心，以國小課程中「找規律性的應用問題」為基礎，來設計國小五、六年級適用的「魔數橋」課程。一開始介紹歐拉的生平及其著名的七橋問題，引導學生進入一筆畫概念的思考，進一步延伸至數獨及魔方陣課程，透過兩個班各三節課的實驗教學，經由學生的回饋單及學習表現，對本研究實驗教學建議如下：(一)調整認識歐拉上課順序；(二)一筆神功融入生活情境中；(三)魔方陣解題技巧待加強。而對於數學史融入教學的建議如下：(一)數學史融入數學課程造成師生雙贏；(二)建立適合國小數學史融入課程資料庫；(三)必須注意時間的掌控。

前言

數學史融入數學教育已行之有年，蕭文強(1992)提出數學史融入數學教育的優點在於營造教師與學生對數學的熱情，讓數學不再是生冷的學科，進而對學習數學有整體的概念。然而國民教育階段協助學童數學智能的發展，最為需要長期及多面向的關照，而在97年九年一貫課程綱要中更是明指出數學史的重要性：「在教師教學裡，引進與主題相關的數學史題材，對學童的學習會有正面的意義，尤其能協助學童將抽象觀念具體化。因為不論在科技應用層面或思想突破方面，數學重要概念的演進確有其實用面的考量，因此提供具啟發性的數學史方面的讀物實屬必要。」基於此目標，筆者嘗試設計「魔數橋」，提供學生比較學習的經驗，透過實際操作數學家歐拉著名的一筆畫問題、拉丁方塊問題，以及衍

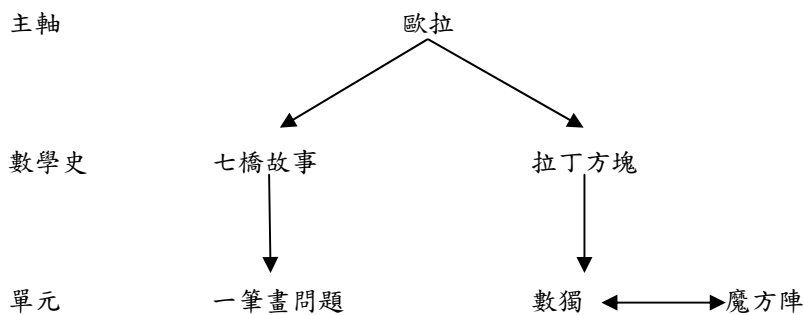
生自拉丁方塊的數獨問題和相近概念的魔方陣問題，在相關聯的差異中辨識其中的相異處，使學生藉由對數學史的興趣，進而廣泛閱讀、深入體會數學的趣味。

壹、教學設計

一、單元架構

本教學單元希望透過數學史融入教學的趣味教學方式，讓學生藉由觀察圖形，並利用歸納、推理的技巧，從中探索並發現一筆畫問題的規律性，最後還能運用這項數學概念，延伸解決類似的魔方陣問題和數獨概念，進而解決所遇到的生活問題，藉此學習深刻的數學內涵。

因此本單元架構（圖一），以「認識歐拉」開展主軸，介紹歐拉著名的七橋故事，採用此類型的數學建模運用，使學生更容易理解和消化抽象的數學知識。且進一步認識改編自歐拉拉丁方塊的數獨，由歷史層面入門，簡介解題技巧，引導入門，最後提供相似概念的魔方陣，完成整單元的架構，引導學生思考。



圖一 本單元架構圖

二、課程設計說明

適用年級	國小五、六年級	學習領域	數學領域
主題	魔數橋	預計教學時間	三節課，共 120 分鐘。
教學概要	對於數學史融入數學方法，設計本單元教材共十張，其內容共有四大子題，分別是：認識歐拉、一筆神功、數獨、魔方陣等，每一子題都以模組(module)的方式進行，每子題均可獨立使用，難易度由淺到深，但以易懂易學、激發學生學習興趣為重要原則，堅持其為催化學習的觸媒角色，而非數學的主幹。		
教學目標	<ol style="list-style-type: none"> 1.能認識古代數學家生平軼事。 2.能察覺數學領域與其他領域有所連結。 3.能列出恰當的算式解題，並運算求出答案。 4.能說明解題過程，能評析解題的優、缺點，並體驗數學建模的方法。 5.能獨立思考、推理、解決問題。 6.能察覺形的變化，並用歸納、推理對變化的通則做出合適的猜想。 		
資料來源	自編教材		
能力指標	<p>一、 七橋問題（配合五上多邊形）</p> <p>A-3-7 能運用變數表示式，說明數量樣式之間的關係。</p> <p>S-1-1 能由形體的外觀辨認出某一形體。</p> <p>S-3-5 能利用形體的性質解決幾何問題。</p> <p>二、 數獨（配合五上數列）</p> <p>C-S-4 能運用解題的各種方法：分類、歸納、演繹、推理、推論等。</p> <p>C-C-4 能用數學的觀點推測及說明解答的屬性。</p> <p>C-E-5 能將問題與解題一般化。</p> <p>C-S-5 能了解一數學問題可有不同的解法,並嘗試不同的解法。</p> <p>三、 魔方陣（配合五上數列）</p> <p>C-S-4 能運用解題的各種方法：分類、歸納、演繹、推理、推論等。</p> <p>C-C-4 能用數學的觀點推測及說明解答的屬性。</p> <p>N-4-3 能辨識具規則性的數列。</p>		
媒體/工具	電腦播放設備、自編學習單、自編 Flash 軟體		
教學重點	<ol style="list-style-type: none"> 1.能經由數學史，並激發數學學習興趣。 2.加強幾何概念，由圖形歸納出一筆畫重點。 3.利用自我思考模式，推理並練習解題技巧。 		

教學活動進行的步驟或流程	一、歐拉的故事 一開始播放七橋故事的 FLASH 動畫，引起學生學習的興趣，且提供學生想像的憑藉，描述歐拉著名的七橋故事。希冀引起學生學習興趣，尋找答案，並請學生配合學習單圖解，引出一筆畫的問題。		
	配合：七橋 FLASH 動畫、學習單【認識歐拉 (1) (2)】--15 分鐘		
	主要問題與活動	說明	評量重點
	1. 帶領學生觀賞歐拉七橋故事的動畫。 2. 引導學生再次閱讀學習單的圖解，並透過歐拉的圖像，增進學生對此數學家的親近感。 3. 請學生共同討論歐拉是如何解決問題。	●請各組學生討論想法，再分組上台分享。 ●解答：這樣的走法須要用一筆畫才能完成。 ●討論 5 分鐘	●能與他人溝通自己的想法 ●能專心觀察並發表 ●能參與討論、溝通和分享。
	二、講述一筆畫概念 透過簡單的直線、三角形、圓形等圖形，讓學生理解一筆畫的概念。並透過簡單路線提示，讓學生理解一筆畫圖形的行進路線。		
	配合：學習單【一筆神功 (初級版)】--10 分鐘		
主要問題與活動	說明	評量重點	
1. 由七橋故事引導出一筆畫的題型。 2. 讓學生先練習簡單可以一筆畫完成的無岔路簡單圖形。 3. 讓學生試驗簡單可以一筆畫完成的有岔路簡單圖形。	●請每位學生練習題目，再上台分享。 ●學生能覺察有岔路的圖形有不同的走法。 ●練習 3 分鐘	●學生會嘗試解題，並且能夠積極與他人溝通，互相分享想法。 ●學生能分辨出有無岔路的差別，並想出兩種以上的走法。	
三、練習一筆畫訓練 進行一筆畫進階版的練習，並引導學生歸納出一筆畫的規則與特性，最後提供學生自由創作的空間，同時檢視學生是否理解一筆畫的通則。			
配合：學習單【一筆神功 (升級版)】--15 分鐘			
主要問題與活動	說明	評量重點	

<ol style="list-style-type: none"> 1. 提供八個圖形讓學生嘗試利用一筆化原則解題。 2. 引導學生歸納出偶數點和奇數點的圖形對一筆畫可行性的差異。 3. 提供圖形讓學生嘗試解題，並要求學生設計圖形。 	<ul style="list-style-type: none"> ●學生嘗試解題。 ●提醒學生解題時，要一起將思考和嘗試後的結果，填入表格中，這有助於胚騰的觀察，方便掌握整體呈現的規律。 ●設計分享 3 分鐘 ~第一節結束~ 	<ul style="list-style-type: none"> ●能專心觀察圖形與一筆畫的關係 ●能與他人溝通自己的想法 ●解決題目的創意
--	---	---

四、 與歐拉做朋友

講述歐拉的其他發明與故事，並提供學習單部分圖像的說明，請學生記錄下老師講述過的重點，提升學生對於數學各類知識的歷史探究。

配合：歐拉的發明故事--15 分鐘		
主要問題與活動	說明	評量重點
1. 講解歐拉部分發明，其中以拉丁方塊為主要重點。	●引導學生在日常生活是否有注意到與歐拉發明有所相關的數學	●學生能專心聆聽故事 ●學生對於歐拉有深入的興趣

五、 拉丁方塊的好兄弟

由介紹歐拉的拉丁方塊開始，引導學生認識數獨的發展和傳播過程，同時要求學生迴響在哪些地方看過數獨，並理解數獨的基本行列要求。

配合：學習單【Can you sudoku】、【Can you sudoku 解題技巧 (1)】--18 分鐘		
主要問題與活動	說明	評量重點
<ol style="list-style-type: none"> 1. 展示各大媒體所呈現出的數獨題目，簡單說明數獨歷史。 2. 解釋數獨的解題技巧，由行列的單一條件要求，至雙層考量的解題技巧。 	<ul style="list-style-type: none"> ●學生對數獨有所共鳴。 ●學生在考慮雙重條件時，可以進行多重解題技巧的解說。 	<ul style="list-style-type: none"> ●能回應在日常生活中接觸過的數獨 ●能理解數獨的解題技巧

六、 數獨!讀數!

依照步驟說明及簡略練習數獨的基礎解題技巧，進而進行數獨的練習，學習單中提供簡單版和中階版的練習題。

配合：學習單【Can you sudoku 解題技巧 (2)】--7 分鐘		
主要問題與活動	說明	評量重點

1. 提供學生簡單版試題進行解題練習。	●中階版題目可視學生反應或教學時間再考量是否於課堂中進行。 ~第二節結束~	●能解決簡單版的題目
2. 提供學生中階版試題進行解題練習。		●能喜歡解決數獨問題

七、 Magic 高手

提供學生魔方陣的範例，並引導學生覺察魔方陣與數獨的不同，引出「魔方陣」的歷史。

配合：學習單【魔方陣（1）】--20 分鐘		
主要問題與活動	說明	評量重點
1. 提供學生魔方陣的題目，引導學生進行題型的思考。	●教師先不明講魔方陣的解題方法，讓學生多思考。	●學生能辨別兩者的差異 ●能專心觀察並發表 ●能參與討論、溝通和分享。
2. 解釋魔方陣的歷史源由，並與學生討論魔方陣的解題方法。		

八、 揭開魔方陣的面紗

介紹魔方陣的眾多解題方法，並以奇數階的簡捷連續填製法之解題方式作一詳細說明，讓學生明確理解魔方陣的解題技巧。

配合：學習單【魔方陣（2）-1、魔方陣（2）-2】--20 分鐘		
主要問題與活動	說明	評量重點
1. 引導學生討論較為方便的解題規則。	●由學生討論出的解題技巧中，找出奇數階簡潔連續填製法。 ~第三節結束~	●能理解魔方陣的解題技巧 ●能參與討論、溝通和分享。
2. 講解奇數階簡潔連續填製法的解題步驟。		
3. 學生親自嘗試解題。		

三、學習單設計說明

<p>認識歐拉 (1)</p>	<p>認識歐拉 (2)</p>	<p>一筆神功 (初級版)</p>	<p>一筆神功 (進階版)</p>
<p>認識數獨</p>	<p>數獨解題技巧 (1)</p>	<p>數獨解題技巧 (2)</p>	<p>魔方陣 (1)</p>
<p>魔方陣 (2) -1</p>	<p>魔方陣 (2) -2</p>		

貳、實作情況分析

一、學生學習回饋分析

為了解學生學習反應，筆者設計回饋單讓學生填寫，從回饋單進行簡單分析中發現，學生覺得在個人學習數學中的最大困難點在於粗心，其次方為題意不清、計算能力不佳等。可以發現實驗教學的兩班學生學習數學的自信度高，對於自我能力有一定程度的肯定。

而針對學習單，五年級學生最喜歡魔方陣，而六年級學生則偏好數獨，綜合分析則發現學生對於數獨和魔方陣的喜好相當，均明顯勝過一筆畫單元。而全部的學生均肯定透過數學史學習數學概念的上課方式，亦認為數學史融入課程中能幫助個人更能掌握數學的概念或幫助記憶。不過其中有幾位學生表示：「數學史對計算沒有幫助」，反應出目前臺灣數學教育的盲點，深受升學主義所影響。另外，調查學生喜愛數學史的部分，以「益智的數學遊戲」居冠，其次分別為「中外數學家的小故事」和「數學符號的發明」，而學生喜愛的教學方式則是以寓教於樂為主，希望數學學習能更加有趣。

二、學生學習行為分析

(一)認識歐拉

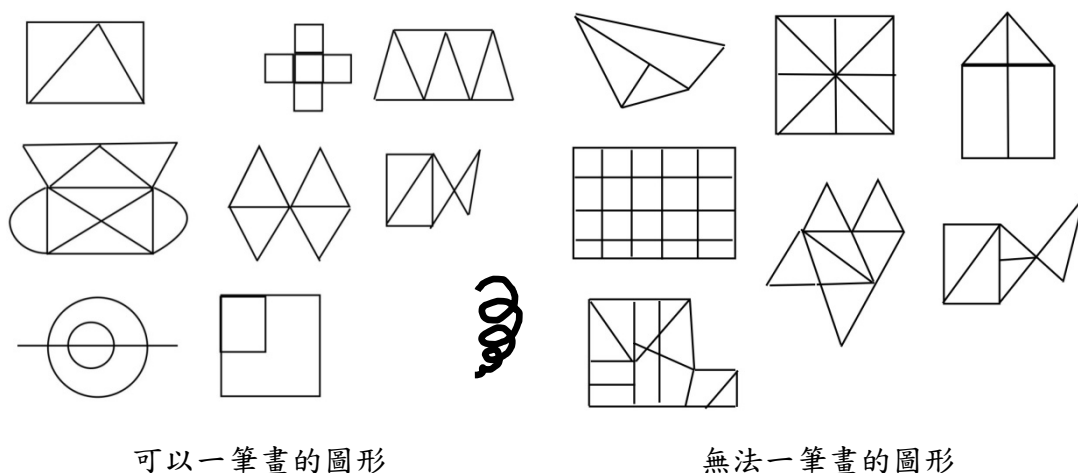
進行課程中，為清楚介紹歐拉，讓學生體會歐拉的重要性，因此先向學生簡介歐拉的生平，其中包括歐拉年輕時的學業成就、兩目失明的不幸遭遇和驚人的論文數量等，除了提昇他們學習的興趣外，還可以勉勵學生仿效學者學習的態度與毅力，增加挫折忍耐力。過程中也發現學生對於在學習單上所出現的小圖示（例如郵票、鈔票...等）感到興趣。

(二)一筆神功

下圖二呈現出學生所畫出可以一筆畫和無法一筆畫的圖形，教學者在行間巡視時，發現五年級的學生多半不是利用偶點和奇點的方式進行設計，而是自己隨性用一筆畫的方式來設計，當設計完成後，細心的學生再進行偶點

和奇點的檢驗。而六年級部分，則是一邊進行檢驗一邊設計圖形，並在圖形旁註記線條數目。

在進行圖形設計時，教學者亦發現學生設計圖形的圖案受到範例的影響，多是由直線組成，五年級學生會由範例圖形增減幾筆畫作為自己所設計的圖形，而六年級學生則勇於創新，設計出來的圖案多與範例不相似，像是某位學生在設計可以一筆畫的圖形時，不假思索地下筆畫出螺旋狀。



圖二 學生嘗試進行一筆畫的設計圖

(三)數獨

目前數獨在坊間為相當流行的益智遊戲，筆者進行教學時發現不論是五年級或是六年級學生，在班級內的個別差異大。有的學生一看到題目能夠立刻填寫，行雲流水，但是部分學生則是因為完全沒有概念，等待教師的引導。雖然一開始奠基在不同的程度上，但其最後完整的解題速度，這兩類型的學生並沒有出現明顯差異，也許是因為學習單中的題型屬於簡單程度，鑑別度不高，才不易發現兩者的差異。

(四)魔方陣

魔方陣的困難度較高，部分學生一拿到學習單會感受到不耐煩，誤以為

又要計算，直到教師解說完畢後，學生才明瞭，魔方陣並非僅有計算的方式，其接受度才大幅提昇。此外，學生得知魔方陣的「簡單連續填製法」之後，都躍躍欲試，並且很快地就可以完成學習單所附的的練習題。

參、實作心得

根據蕭文強（1992）提出數學史融入數學教育的方式，大致上可分成以下八種：1.在講課中加插數學家的軼事和言行；2.開始講授某個數學概念時，先介紹它的歷史發展；3.以數學史上的名題及其解答去講授有關的數學概念，以數學史上的關鍵事例去說明有關的技巧方法，以數學史上的著名錯誤或誤解去幫助學生克服學習困難；4.利用原著數學文獻設計課堂習作；5.指導學生製作富數學史興味的壁報、專題、探討、特輯、甚至戲劇、錄像...；6.在課程內容裡滲透歷史發展觀點；7.以數學史作指引去設計整體課程；8.講授數學史的課。本課程則是使用第三項為主軸，配合第一項和第二項的方式進行。下列為進行本次數學史融入數學教學時的實作心得：

一、調整「認識歐拉」上課順序

講述此單元時由學生的反應中可發現，五年級學生透過漫畫圖像的觀賞，不會影響其嘗試七橋問題的可能性，但是六年級學生卻經由漫畫圖像的觀賞，預先得知七橋問題是無法一筆畫完成的結論，而降低主動積極嘗試解題的可能性。因此建議調整教學順序為講述七橋故事（配合七橋問題動畫）→呈現七橋圖形→讓學生嘗試→學生自由發表意見與想法→呈現七橋故事的結局（配合學習單一、二）→學生思考結局與個人思考相同或不同的點→推論一筆畫的原則→教師講述（配合一筆神功學習單）的方式進行。期望學生藉由個人經驗發現一筆畫的原則，且對於歐拉七橋的故事更充滿好奇心。

二、一筆神功融入生活情境中

進行該單元教學中，發現六年級的學生由剛開始討論七橋的問題，進而透過

一筆神功的學習單圖形練習，而進行到最後設計可以一筆畫和無法一筆畫的圖形，教學者嘗試引導學生思考生活中可以發現什麼一筆畫的相關問題，學生反應踴躍，提到：老師在考試時的行間巡視、郵差要送郵件的時候、畢業生要進行校園巡禮的路線、便利超商的宅急便（物流概念），充滿創意且與生活相結合，給予筆者莫大的感動，因為學生很容易類推情境，且願意思考並解決問題。

三、魔方陣解題技巧待加強

(一)解題技巧置頂換行容易出現錯誤

如下圖三所示，當 A 置頂時，需要換行，而正確的位置應該是 B，但是在五年級學生的部分，有少數同學容易將答案填寫至 C 的位置，此狀況不論是在格數多少的魔方陣上都曾出現，表示學生在置頂換行有困難，同樣狀況發生在下圖四的狀況中，當 D 填寫完轉換成 E 時，其填寫無誤，但是 E 轉換成 C 時，則出現錯誤，這類型錯誤經第二次教導後（部分學生第三次教導），學生才完全瞭解，此類型錯誤在六年級未出現。

	A	
C		B

圖三

		E
	D	
C		

圖四

(二)宜提供多變化的魔方陣

魔方陣的呈現方式千奇百怪，有許多變化題型，在解題技巧部分，亦有各式各樣的解題技巧，於此次教學中僅提供方形魔方陣和一種解題技巧，教學者認為在迫於教學時間的限制下，仍應引導學生認識更多種類型魔方陣（偶數階、三角形、圓形）與解題技巧，包括告知學生魔方陣相關學習網站、推薦學生閱讀相關數學書籍和文章，甚至提供關鍵字，以利學生日後學習，

讓這堂課延續到課堂外不間斷。

肆、建議與討論

一、數學史融入數學課程造成師生雙贏

根據林炎全(2006)提出數學史融入教學對於教師的幫助包括：預知學習困難之所在，做好教學準備；了解概念之源起，增進領域內外連結、活絡教學之內涵；認識概念發展之過程及困難，能包容學生的錯誤與遲緩，展現耐心與愛心。而對學生的幫助則是認識概念之源起，及其與領域內外之連結，有助於概念的了解與應用；可以見識到數學的人文面向，數學並非生冷的公式推理；可以看見數學的試誤成長，增加對挫折的韌性等效用。

筆者將數學課程與數學史相融合時，可以明顯發現學生對於數學學習的興趣大大提昇，進行討論時，學生亦會詢問教師歷史故事的發展?為何當時的數學家有何想法?在怎樣的因緣際會下數學家會發現這樣東西等問題，顯現出學生對於數學的濃厚興趣。且其影響效果明顯延伸至課外時間，學生開始閱讀數學故事或更為熱切地想要知道某些數學的發展緣起。課堂教學過程中，學生的反應明顯從回饋單發現對於數學史融入教學的肯定，覺得課程增添趣味，富有挑戰性，且變化多。

二、建立適合國小數學史融入課程資料庫

數學史的範圍廣大，雖然生動有趣，富濃厚故事味和啟發性，但是要找到適合小學生的文本，並配合現行課程實不容易。若是不與課程配合，利用彈性或綜合課進行，學生雖然喜愛，但是就現實面，在教學時間和教學進度的考量下，補充課程就大大減少。

為解決此一問題，教學者上網搜尋以及利用圖書館資源，發現目前國內關於國小的數學史教材少之又少，當教學現場的教師要進行數學史融入課程時，能輔助的資源有限，大多需要自編教材，而教學指引中對於數學史的描述更是少之又

少，在教學準備上對於教師也是一大負擔，在推廣數學史融入數學教育課程實為一大阻礙，因此倘若可建立一資料庫或是分享平臺，讓教師間資料互通有無，更甚可以編制數學史融入課程手冊，利於教師們使用且也成為激盪教師創意點子的火花。

三、必須注意時間之掌控

進行數學史融入課程教學時，其時間掌控著實不易，因其數學史融入課程大多獲得學生熱切的迴響，學生多數想要獲得更多相關訊息，肩負「解惑」責任的教師，為避免澆熄學生對於數學的熱情，教師多少需要引導或解答學生的提問，亦因此其教學課程時間往往比預定的教學時間還要長，影響整體授課進度。因而教師如何在兼顧學生興趣及教學時間的衡量下做一抉擇與安排，乃為一大挑戰，實需要教學經驗的累積。

參考文獻

- E.T.Bell (1998)。大數學家。臺北：九章。
- 凡異編輯部 (1999)。探索數學的故事。臺北：凡異。
- 王懷權 (2000)。數學的故鄉。臺北：王懷權。
- 侯淑芬 (2003)。數學史融入數學教學以結繩記數為例。教師之友，44(4)，89-96。
- 侯淑麗、劉曼麗 (2006)。國小四年級整數數感教學活動設計。屏東教大科學教育，23，18-29。
- 洪秀敏 (1997)。女性主義、數學史以及數學教育。國立師範大學數學系碩士論文，未出版，臺北市。
- 洪萬生 (2000)。「書目答問」的一個數學社會史考察。漢學研究，18(1)，153-162。
- 洪萬生 (2004)。數學史如何呈現。科學月刊，35(12)，1002-1004。
- 洪萬生 (2005)。從程序性知識看「算數書」。師大學報：人文與社會科學類，50(1)，75-89。

- 林炎全 (2006)。數學史料融入數學教學引例。取自 2008 年 11 月 20 日網路 <http://sec.sciedu.ncue.edu.tw/sec/upload2/?C=M;O=D>
- 徐瀝泉 (1995)。數學方法論與新世紀數學教學。**數學傳播**，23(4)，39-52。
- 袁小名 (2000)。數學誕生的故事。臺北：九章。
- 教育部 (2003)。九年一貫課程綱要。臺北市，教育部。
- 陳啟文 (2003)。數學史融入「對數」教學活動的實作心得。**中等教育**，54(5)，58-67。
- 曾政清 (2000)。從數學式子的評價探討數學史融入國中資優數學營的教學。**建中學報**，6，109-121。
- 蕭文強 (1992)。數學史和數學教育：個人的經驗和看法。**數學傳播**，16(3)，23-29。
- 蘇俊鴻 (2003)。數學史融入數學教學--以數學歸納法為例。**中山女高學報**，3，143-155。
- 蘇意雯 (2003)。數學史融入數學教學之實作研究。**成功高中學報**，2，85-101。

介紹 Ball 研究小組“數學教學需要的學科知識”之研究

黃興豐

常熟理工學院數學系

摘要

教師知識近來是教師教育熱門的話題。Ball 研究小組在 Shulman 等人研究的基礎上，以數學學科為依託，通過紮根實踐的研究方法，提出了教學需要的數學知識的分類。她們的研究不僅在理論是一種創新，而且對數學教師教育的課程設置以及培養模式的改革都具有重要的指導意義。

關鍵字：教學需要的數學知識 教學內容知識 數學教師教育

Deborah Loewenberg Ball (以後簡稱Ball) 教授現任美國Michigan大學教育學院院長，兼Michigan大學Willam H. Payne學院教授，是美國國家數學顧問團(National Mathematics Advisory Panel) “教師與教師教育”小組的負責人。自Shulman (1986) 提出教師知識的分類之後，近十多年來主持兩個研究專案(Mathematics Teaching and Learning to Teach, Learning Mathematics for Teaching)，致力於“數學教學和教學中怎樣使用數學”的研究。她領導的研究小組，在Shulman關於教師知識分類的基礎上，採用至下而上，源於實踐的研究方法，形成了“教學需要的數學知識(mathematics knowledge for teaching)”的分類。她們把Shulman (1987) 教師知識分類中內容知識(content knowledge)、課程知識和教學內容知識(pedagogical content knowledge)統稱為“教學需要的數學知識”，並對此進行了重新劃分和界定¹。本文接下來，將依次介紹她們在這方面所作的

¹內容知識主要是指學科知識(subject matter knowledge)，課程知識是指關於教材和教學計畫的知識。教學

工作，包括紮根實踐 (practice-based) 的研究方法，教學需要的數學知識的分類，以及相關的評論 (Ball, Thames & Phelps, 2008)

壹、 紮根實踐的研究方法

(一) 研究的發端

在過去的一段時間內，關於數學教師需要掌握什麼樣的知識，產生了兩種不同的立場。第一種觀點認為，教師不僅要掌握所教課程涵蓋的所有數學知識，還要進一步學習若干年大學的數學知識；第二種觀點則認為，教師不但需要深入地理解和掌握所教的課程，而且還要擁有一定的教學內容知識。事實上，上述這兩種觀點似乎都沒有告訴我們：除了具備必須的數學知識之外，數學教師究竟還需要哪些額外的知識。

很自然，接下來的問題就是：為了有效地開展教學，教師需要掌握哪些知識，需要在課堂上做哪些事情？或者說，從學科理解的角度而言，有效的教學需要什麼形態的知識？Ball 等強調，在她們的研究中，她們關注的是教師在教學中如何使用數學知識，以及教學需要怎樣的數學知識。其實，這些問題常常可以通過多種途徑的調查獲得可能的答案。例如，可以研究教學大綱、課程標準；也可以諮詢數學家和數學教育家，確定教師應該具備的數學思想和技能；也可以檢索有關研究文獻，瞭解學生學習數學知識存在的困難。不過，Ball 研究小組採用了與上不同的研究方法，在她們看來，只有自下而上，源於實踐的工作，才最有可能揭示問題的本質。首先，她們認為教師要掌握他們所教課程的數學知識，這一點是

內容知識 Shulman (1987) 定義為：“教師開展教學活動時所具有的獨特的知識，這種知識是教學內容和教學法的有機結合，表現為教師如何選擇課題和組織教學，以滿足學習者不同的興趣和適應他們各自的能力”。

毋庸置疑的。更為重要的是，她們試圖探索教師是如何理解這些數學內容的。而且，除此之外，她們還想瞭解，教師還需要哪些與數學有關的知識，在實踐中教師如何使用這些數學知識。

於是，她們決定把研究的焦點放在教學實踐上，把教學實踐需求作為基本出發點。她們試圖探究在多元教學目標下的課堂需要哪些最基本的教學活動，她們也試圖揭示教師如何創造性地使用數學知識，如何才能滿足日復一日的教學需要。

（二）質與量相結合的研究途徑

“教學需要的數學知識”是指實施數學教學所必須的數學知識。在此必須指出的是，她們的定義是從教學開始的，而不是教師。她們關注的是教學任務，以及教學任務所需要的數學知識。教師要向學生示範解決問題的過程，回答學生的問題，檢查學生的作業，這一切都需要理解有關學校課程的數學知識。

Ball 研究小組通過兩個途徑，對此展開研究。她們首先採用質的方法分析教學實踐。然後在質的研究形成假設的基礎上，設計教學需要的數學知識的測試量表，瞭解教師所擁有的教學需要的數學知識。

在質的分析中，她們主要圍繞下列問題展開：（1）在數學教學中常見的教學任務和問題有哪些？教師又是如何應對的？（2）應對這些問題，需要哪些數學知識、技能和機智？她們強調，這裏的“教學”是指：為了學生的學習，教師必須所做的一切。可見，她們所定義的“教學”不僅是指包含了許多教學任務的課堂互動，而且還包括課前的準備，評價學生的作業，評定學生的等級，佈置和批改家庭作業，與家長交流學生的學習狀況等關聯學生學習的所有工作。毫無疑問，這

些工作需要數學思想方法，需要數學推理技能，需要熟悉數學專業術語，需要理解數學的本質等與數學相關的知識。質的研究工作的核心是建立了一個受美國自然科學基金會資助的資料庫。該資料庫收集了 1989-1990 期間美國一所公立小學 3 年級有關數學教學的所有資料，包括課堂的錄影帶、錄音帶以及腳本，學生課堂作業、家庭作業、測驗的複本，以及教師的計畫、日記和教後感言 (Ball & Bass, 2000) 第二，是建立了一支經驗豐富、具有多學科背景的研究隊伍。第三，發展了一系列整合了數學和教法的分析工具。在長期的研究中，研究小組給自己提出了以下問題：從總體上而言，教學需要哪些數學知識，以及相關的教法知識？學生的思想和技能是怎樣發展的？這些對教師的工作有何啟示？

在整合了數學和教法的視角下，通過對教學實踐的細緻分析，她們發展一個紮根于實踐的教師知識理論，闡述教學所需的並運用於教學的數學知識結構 (Ball, 1999)。

在質的研究基礎之上，研究小組開始著手設計測試教學需要的數學知識的量表，用於大樣本教師的調查。她們對數學知識進行了必要的分類，在每個類別中又編寫了許多測試問題 (Hill, Ball, & Schilling, 2004)。然後利用因素分析等資料分析手段，檢驗她們關於“教學需要的數學知識”的理論設想，並幫助她們進一步修改和完善知識分類和測驗量表。儘管這些工作還在繼續，不過當前具有一定說服力的證據已經表明“教學需要的數學知識”是多維度的。也就是說，一般的數學能力並不能完全滿足數學教學所需的知識和技能 (Hill, Ball, & Schilling, 2004)。她們認為數學教學需要一種純 (pure) 學科的、專門化的 (specialized) 知識。在此，“純學科的知識”是指純粹的數學知識，未曾糅合學生或教法的知識，有別於 Shulman 所說的教學內容知識；“專門化”的涵義是指數學教師所必需的特有的

數學知識，有別於其他職業所需要的數學知識。例如在思考如下問題時，就需要這種“純學科的、專門化的”知識：

$$\frac{5}{8} \div \frac{3}{4} = \frac{5}{8} \div \frac{6}{8} = 5 \div 6 = \frac{5}{6}$$

問題 1：這個除法的計算過程正確嗎？

問題 2：上述計算過程能否推廣，為什麼？

在這裏我們看到，思考上述兩個問題只需要數學知識，不需要教學法或學生心理的其他知識，也就是說只需要“純學科的”知識。同時，其他行業的人員，可以不具備這樣的數學知識，他們只要知道如何按照分數除法的標準演算法（除以一數，等於乘以這個數的倒數）得到正確的結果就可以了。然而，對教師而言需要擁有這樣的知識，因為在教學中可能會遇到學生“創造”出不同一般性的演算法，教師需要判斷並作出合理的解釋。這也就解釋了為什麼說這種知識是“專門化的”緣由。

貳、教師為何需要具備“專門化”的數學知識

上面談到，Ball 研究小組發現教學需要大量的數學知識，而這些數學知識又是從事其他職業的人員所不具備的。为了更好的解釋上述觀點，下面先提供一個多位數減法的例子加以說明：

$$\begin{array}{r} 307 \\ - 168 \\ \hline \end{array}$$

大家知道，常見的標準計算方法是這樣的：

$$\begin{array}{r} 29 \\ 307 \\ - 168 \\ \hline 139 \end{array}$$

為了教好減法，教師必須首先熟練掌握類似的計算方法。這樣的數學知識，應用相當廣泛，不是教師特有的，從事其他職業的人也大多具備，比如銀行、公司的會計等。作為數學教師必須掌握這種知識，而且就教學而言，僅僅掌握這樣的知識還是不夠的，應當掌握更多的其他知識。

(一) 分析學生的數學錯誤

在低年級的學生中一個可能常見的錯誤是：

$$\begin{array}{r} 307 \\ - 168 \\ \hline 261 \end{array}$$

教師必須馬上指出 261 是一個錯誤的答案，這並不需要專門的知識就完全可以做到：任何人只要計算出了正確答案，都可以一眼看出來。然而，教學遠遠要比辨別一個錯誤的答案複雜得多。成功的教學要求教師能洞察學生錯誤的原因，而且必須迅速及時，往往是一瞬間。因為學生在課堂上不能容忍教師在那裏長時間地冥思苦想。在此，學生的錯誤做法是在每個上下對齊的數位上，用較大的數減去較小的數。如果教師沒能弄清楚學生的問題所在，也就無法真正幫助學生糾正錯誤。教師也可能遇到另外的錯誤：

$$\begin{array}{r} 307 \\ - 168 \\ \hline 169 \end{array}$$

是哪一步出了錯誤呢？先來看看計算的過程：先從百位上退 1 到個位，於是

有 $17-8=9$ ，然後把 6 順移下來，最後計算 $2-1=1$ 。教師需要具備分析數學錯誤的能力，數學家也經常分析錯誤。不過，教師分析的是學生的數學錯誤，這一點和數學家是不同的。

顯然，上述兩種錯誤的原因各不相同。第一種，學生只是考慮了數字之間的差，並沒有把它們和數字聯繫起來。第二種，學生嘗試使用了退位運算，但是疏忽了位值。如果教師缺乏處理學生錯誤所需要的數學理解，他們可能就把這些錯誤簡單看成是微不足道的小問題。

以上分析表明：教師的工作具有一定的特殊性，需要大多數職業所不需要的數學推理知識。儘管數學家也常常分析錯誤，但他們大多是因為自己的研究出現了問題。因此，分析學生的數學錯誤和數學家做的既有聯繫又有區別。而且，教師分析學生的錯誤必須迅速及時，對數學家卻沒有這樣的要求。

(二) 應對解決問題的多種方法

在教學中教師也會常常遇到學生自己創造的計算方法，這些方法大都教師是不熟悉的。例如，學生可能對上面的多位數減法採用這樣的計算方法——從上、下的兩數中同時拿去 8，化簡為：

$$\begin{array}{r} 299 \\ - 160 \\ \hline 139 \end{array}$$

這種方法合理嗎，為什麼？能否把這種做法推廣呢？這種做法是否對某些計算而言來得簡單一些，而對於另外的計算卻變得更困難呢？作為教師，如何向學生講解這種做法，如何說明這種做法在數學上是完全正確的，顯得十分必要。可見，教師不僅要進行數學的思考，而且還得向學生提供正確的回答。這才是數學

教學的關鍵，才是教師應對各種教學問題的基礎。

教師也可能遇到學生多種不同的計算方法。這時，教師必須弄清學生的各種做法是否正確合理。而且，還要思考這些做法是否具有一般性，能否推廣，還是只能運用於一些特殊的例子？看下面的例子，你知道學生是怎麼想的嗎？這種計算方法合理嗎？

$$\begin{array}{r} 307 \\ - 168 \\ \hline 2 \\ 30 \\ \hline 107 \\ 139 \end{array}$$

顯然，這種方法是正確的，也是可推廣的。但是對那些只知道按部就班計算的人來說，要弄清楚它們絕非易事。

(三) 解釋方法的數學意義

分析學生的錯誤，評價學生不同的解法，這並不是數學教學的全部。教學還包括向學生解釋解決問題的過程和方法。比如，在教上述減法的過程中，教師可能會按照標準演算法，向學生解釋計算的過程：個位 7 減 8 不夠，從十位退 1，十位不夠退，從百位退 1，退 1 當 10，10 退 1 到個位當 10，17 減 8 等於 9，十位上 10 退 1 成 9，9 減 6 等於 3，百位退 1 成 2，2 減 1 等於 1。不過這個問題很特殊：第一，個位、十位都不夠減，都需要退位，第二，被減數中的十位元含有 0，因此需要先連續兩次退位後才能減。所以，計算的過程也就比較複雜，但是在其他的一些例子中，可以不用這樣的計算方法。比如，在計算 341-132 或 314-161 的過程中，只要一次退位；再如，計算 741-369 的過程中，儘管也需要兩次退

位，但不是連續兩次退位後再減，而是退一次減一次：個位 1 減 9 不夠，從十位退 1，11 減 9 等於 2。十位上 4 退 1 成 3，3 減 6 不夠，從百位退 1，13 減 6 等於 7，百位 7 退 1 成 6，6 減 3 等於 3。所以，教師在教學中必須掌握方法的合理性、特殊性，恰當地使用於各種情境，同時還要向學生解釋為什麼要這樣做？這樣做的依據是什麼？要使學生“知其然，又知其所以然”。

(四) 選擇恰當的數學例子

在教學的過程中，選擇恰當的例子十分重要。如果教學的目的是為了讓學生理解和掌握退位減法，選擇 307 和 168 這兩個數作為減法的例子，可能不是最理想的選擇。教師在選擇和確定教學例子的時候，可能要考慮類似的問題：(1) 所有的減法計算都需要兩次退位嗎？(2) 是否應該從無退位的減法開始，一直到兩次退位的減法這樣的順序安排例子呢？(3) 是否要一開始就考慮含有“0”的例子？(4) 在計算過程中，是否要考慮“0”在不同的位置（如在被減數或減數中，在被減數的十位或個位）？諸如此類的問題，都需要數學的推理和數學的洞察力。這對於數學教學而言是十分關鍵的，但對於大多數其他職業的人來說，幾乎是無關緊要的。

(五) 概括

Ball 研究小組發現，教學任務需要數學知識和技能。然而，令她們尤為驚訝的是，即使是日常的教學任務，如佈置作業、聽學生報告、評定學生的成績，都需要專門的數學知識。通過細緻的分析，她們發現儘管這些教學任務都是指向學生的，但是仍然含有濃郁的數學味道。她們發現，許多教學任務都需要“純”的數學知識。比如，確定一個方法是否正確、能否推廣都需要數學知識和技能，這種

知識和技能是和教學知識、學生知識無關的。她們也開始注意到，儘管大學的數學課程為教師提供了大量的純學科化的知識，擴展了他們的數學視野，提高了他們的數學修養。然而，大學數學課程為教師提供的知識和教師教學需要的知識並不同，前者可以認為是後者的必要條件，但絕對不是充分的，教師的教學還需要其他的知識，或者在實踐中需要把它轉化為教學中使用的知識。

研究小組認為：第一，數學教學工作的本質在很大程度上具有濃烈的數學色彩。上面談及的數學任務要求教師必須具備特殊的數學知識，良好的思維習慣，以及敏銳的數學洞察力。

第二，上面提及的數學知識和教學休戚相關。她們認為教學內容知識的一個重要價值是在學科知識的學術世界和教學實踐的現實世界之間架起了一座橋樑，這是通過學科、學生和教法知識之間的融合而實現的。於是，她們認為教學需要的數學知識可能成為聯結這兩個世界的又一座橋樑。

最後，研究小組認為她們提出的許多觀點也可能適用於其他學科的教學？但是在其他學科教學中，如歷史、生物、音樂等教學中，這些觀點到底意味著什麼？目前還不得而知。

通過她們對教學中數學任務的分析，研究小組認為教學需要的數學知識和技能看起來可能存在不同的形式。如果能夠進一步清晰地確認這些形式的話，那麼就可以幫助教師更好地學習教學需要的數學知識。如果教學需要的數學知識真是多元化的話，那麼可以調整數學教師專業教育的課程結構，幫助教師學習他們所需的知識和技能。基於她們對教學需要的數學知識的分析，研究小組形成這樣的假設，如圖 1 所示（Ball, Thames & Phelps, 2008）：學科知識可以分成一般的內

容知識 (common content knowledge, 縮寫 CCK)、專門的內容知識 (specialized content knowledge, 縮寫 SCK) 以及橫向的內容知識 (horizon content knowledge, 縮寫 HCK)。教學內容知識可以分成內容與學生的知識 (knowledge of content and student, 縮寫 KCS)、內容與教學知識 (knowledge of content and teaching, 縮寫 KCT) 和內容與課程知識 (knowledge of content and curriculum, 縮寫 KCC)。

教學需要的數學知識

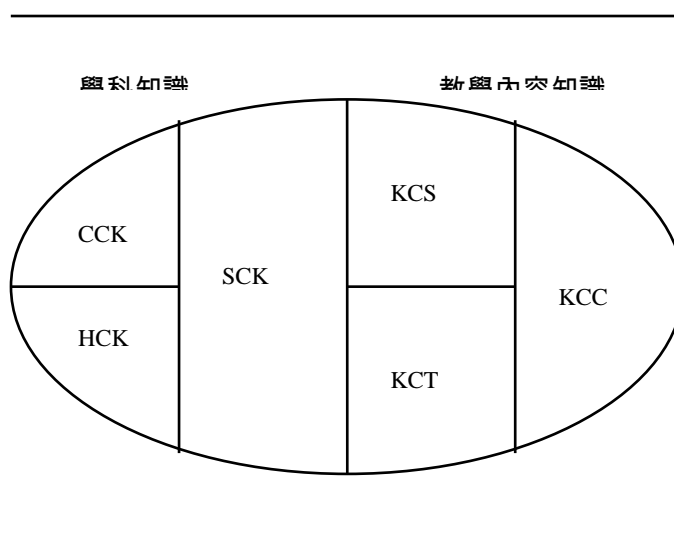


圖 1

參、教學需要的數學知識的分類

(一) 一般的內容知識

回答下列問題就需要一般的內容知識：(1) 哪個數在 1.1 和 1.11 之間？(2) 正方形是不是長方形？(3) 0 能不能做除數？(4) 平行四邊形的兩條對角線一定互相垂直嗎？可見一般的內容知識是一種“純”的數學知識，和教法知識、學生知識都沒有關係。也就是說這種數學知識不是教學工作所特有的，其他工作也同

樣需要。譬如，教師必須理解所教的素材，必須識別學生的錯誤答案、不精確的定義，必須正確使用專業術語和符號。

(二) 專門的內容知識

專門的內容知識是指教師為了教學而必須具備的一種獨特的數學知識，這是研究小組十分感興趣的話題。正如在上面所舉的減法例子中看到的一樣，教師在分析學生的錯誤，或在判斷非標準的演算法是否可以推廣的時候，教師不僅要判斷學生呈現的計算結果是否正確，而且更為重要的是，還要判斷學生使用的方法是否合理。倘若學生的方法不合理，教師還要進一步瞭解學生“不合理”的具體原因；倘若學生創造出了一種新方法，教師還要思考這種方法的可推廣性。教師上述的種種思考和判斷需要數學知識和方法的支援。當教師面對教材或學生呈現的數學概念、計算方法、或推理證明時，一般來說對於這些數學知識，教師是理解和掌握的，已經形成了一個“壓縮 (compressed)”的、靜態的數學對象 (object)，然而這些知識對學生而言還處於“過程性 (process)”的狀態 (Sfard, 1991)，為了促使學生的理解 (從過程性的狀態逐步壓縮成一個結構化的數學對象)，要求教師有意識地“拆解 (unpacking)”他們自身對象化的知識，逆轉為過程性的動態的數學知識。例如，在教整數除法的時候，學生可能問：“0 能不能做除數啊？”除數不能為 0，對教師而言是熟知的，被壓縮的知識。為了向學生解釋清楚，這就需要教師拆解自身被壓縮的知識：如果 0 可以做除數，那麼就有 $3 \div 0$ 等於某個數 a ，根據除法的意義得 $3 = 0 \times a = 0$ ，得出矛盾，說明 0 不能做除數。

回答下列問題都需要專門的內容知識：(1) 為什麼異分母分數相加減，首先要通分？(2) 如何用圖形來表示 $2 \div \frac{2}{3}$ ？諸如此類的問題教師幾乎每天都遇到。

也就是說，教學需要的知識遠比教給學生的知識來的豐富，而且深刻，不僅有量的差別，更是存在質的差異。

Ball 研究小組認為教學需要擁有“解壓縮 (decompressed)”的數學知識，因為這樣有助於促進學生的理解。學生學習的目的是熟練掌握“壓縮”的數學知識，能應用複雜的數學概念和過程。教師使用“解壓縮”的數學知識，使得“壓縮”的數學知識對學生而言具體直觀，適合於他們學習。那麼，教師如何使用數學語言，如何選擇和使用有效的數學表徵，如何回答學生提出的數學問題，這些都依賴於他們“拆解”的或“解壓縮”的數學知識。也許有人會問：“解壓縮”的數學知識是否就是概念性的理解呢？研究小組認為“解壓縮”的數學知識遠遠超出了知識理解和掌握的範圍，因為不會有人要求學生依照教學法的策略來選擇例子、分析錯誤。

(三) 內容與學生的知識

內容與學生的知識把關於學生和數學這兩個方面的知識交叉組織在一起，形成一種實踐性知識 (Hill, Ball, & Schilling, 2008)。教師必須能估計學生可能的想法，可能遇到的困難。在舉例的時候，要考慮到學生對此是否感興趣。在佈置任務的時候，要考慮到學生可能的做法，也要考慮任務的難度對學生而言是否合適。教師必須學會傾聽學生的解釋，領會學生各種尚不成熟的想法。所有這些任務不但需要理解具體的數學內容，而且還要瞭解學生以及他們的數學思維方式。

這些任務的關鍵就是要求教師應當具備內容與學生的知識，如學生通常是怎樣理解數學內容的？經常會出現哪些錯誤的概念？當學生遇到 307-168 的時候，教師要知道學生通常會採用“以大減小”的做法。這就要求教師熟悉學生各種可能的做法，對學生可能產生的錯誤應當了然於心。教師判斷學生答案的對錯需要一

般的內容知識。教師尋找學生錯誤的原因，特別是對不常見的錯誤，需要專門的內容知識。相比之下，教師熟悉學生的常見錯誤，預計學生最有可能出現哪幾種錯誤，就需要內容與學生的知識。這就要求教學需要同時思考數學內容和學生這兩個方面的相互關係，譬如：(1) 什麼圖形學生很有可能也當作是三角形？(2) 學生有沒有可能把 405 寫成 45？(3) 如果學生混淆了周長和面積的概念，那麼可能會出現那些錯誤呢？

(四) 內容與教學的知識

內容與教學的知識聯合了關於數學和教學這兩個方面的知識。許多數學任務需要教學設計的知識。譬如，教師安排數學內容的教學順序，先選擇哪些例子引入教學，然後再選擇哪些例子加深學生的理解。再有，教師應當有能力估計概念表徵所起到的正反雙方面的教學作用，瞭解不同的數學方法和過程所能提供的教學意義。這每一項任務不但需要教師理解具體的數學內容，而且也需要他們理解教學的原理，並同時把這兩種知識運用到具體的數學任務中去。

許多的教學決策也需要內容與教學的知識。例如：(1) 決定哪些數學內容學生必須著重掌握，哪些內容可以忽略，哪些內容暫且可以擱置放到以後再學；(2) 決定在何時暫停課堂的討論，澄清某些觀點；(3) 決定何時採納學生的觀點形成數學結論；(4) 決定何時提出新的數學問題和任務促進學生的學習。所有的這些教學決策需要數學知識和教學觀念雙方的協調。

關於內容與教學的知識，可以通過一個例子具體說明。在教多位數減法的時候，可以使用不同的模型——“元、角、分”或者“10 個 1 捆的小棒”。教師必須瞭解各種模型對減法的教學意義，具體說來：(1) 使用“元、角、分”這種模型對減

法教學有何意義？（2）使用“10 個 1 捆的小棒”的模型提供的教學意義與前者有何不同？儘管這兩種模型都可以用來幫助學生學習多位數的減法，但是它們各自表示了位值的不同方面，這種差異也將影響學生的學習。瞭解和掌握有效地使用這些模型，也屬於運用內容與教學知識的一部分。

肆、 評論

（一）理論價值

Shulman (1987) 提出的關於教師知識的 7 種分類：（1）一般性的教學知識；（2）學習者及其特點的知識；（3）教學環境的知識；（4）關於教育的目標、目的和價值以及它們的哲學和歷史基礎的知識；（5）內容知識（即學科知識）；（6）課程知識；（7）教學內容知識。其中前 4 類是關於一般教育理論的知識，超越了具體學科形態。後面的 3 類知識涉及的是關於具體學科內容的知識。研究小組把焦點落在後者，並由此提出了一個更為精緻的分類。可見 Ball 研究小組對教學需要的數學知識的研究，仍然未跳出 Shulman 關於教師的分類，不過，她們在此提出了一個全新的概念——專門的內容知識。它是教師教學需要的獨特的學科知識，不同與一般的內容知識，和教法、課程、學生，以及一般的教育理論知識都是沒有關聯。然而，職前教師教育的課程往往沒有為未來教師提供這樣的知識和技能。因此，她們的研究對教師教育課程的設置、職前教師培養的模式改革都有重要的參考價值。

（二）研究的展望

Ball 研究小組關於教學需要的數學知識的分類是實踐性的。也正是實踐的雜

亂和可變，導致了教師使用知識的複雜性。同樣的教學情境，對不同的教師而言，可能需要不同的知識。由此產生的問題是：由於教師在教學實踐中知識的使用是內隱的，那麼通過外在的課堂觀察、紙筆測試等研究方法，能否準確地反映教師知識使用的真實情況呢（Berliner，2005）？

儘管 Ball 研究小組形成了關於教學需要的數學知識的分類。但是，她們研究的興趣是教學實踐中教師的知識技能、思維習慣、臨場機智以及敏銳的判斷力。她們關注的聚點是教師如何在教學實踐中的情境中使用數學推理，應用數學概念——教師動態地運用數學知識。靜態的知識分類能否真實地反映教師動態的教學實踐？這些知識是如何在教學情境中表現的？值得關注的是，這些問題研究小組正在繼續研究（Hill, Blunk & Charalambous, 2008）。

最後要指出的是，要在具體情境中區分教學需要的數學知識還是非常困難的。比如說一般的內容知識和專門的內容之間，專門的內容知識和內容與學生的知識之間。這些知識類別的概念和定義也有待進一步細化和解釋。

到目前為止，研究小組對教學需要的數學知識框架中橫向的內容知識、以及內容與課程的知識尚缺乏清晰的界定和深入的研究。按照她們的分類，橫向的內容知識屬於學科知識，是指彼此不同數學專題之間的聯結以及對具體數學專題在課程或者學科中地位的認識。她們把內容和課程的知識歸入教學內容知識，但是她們又說這是根據 Shulman 研究小組後來的研究（Grossman，1990）暫時把內容和課程的知識列入教學內容知識的範疇，對此還沒有最後確定，以待今後的研究。

然而，研究小組收集的資料僅限在很小範圍的課堂，而且又只是在美國社會

經濟的大背景下展開的。這些結論是否適用於中學或更高的年級，是否適用其他不同社會文化背景的國家，可能還要作進一步的研究。另一方面，她們反復強調研究的物件是教學，把教學作為最基本的出發點，尋求教學所需要的最基本的要素，因此這些結論應當具有較高的可信度。

Introduction of Studies on Mathematics Knowledge for Teaching by Ball's Research Group

Huang Xingfeng

Department of Mathematics, Changshu Institute of Technology, Changshu, Jiangsu, 215500

Abstract Recently, teacher knowledge is a hot topic in teacher education. A research group which is led by Ball employed a practice-based method to develop a construct of *mathematics knowledge for teaching* based on Shulman's work. The group's work not only developed Shulman's theory on teacher knowledge, but also provided some references for mathematics teacher education.

Key Words mathematics knowledge for teaching, pedagogical content knowledge, mathematics teacher education

參考文獻

- Ball, D. L., Bass, H. (2000). Making believe: The collective construction of public mathematical knowledge in the elementary classroom. In D. C. Phillips (Ed.), *Constructivism in education: Opinions and second opinions on controversial issues*. Chicago: University of Chicago Press, 193-224.
- Ball, D. L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389-407.
- Ball, D. L. (1999). Crossing boundaries to examine the mathematics entailed in elementary teaching. In T. Lam (Ed.), *Contemporary mathematics*. Providence, RI: American Mathematical Society, 15-36.
- Berliner, D. (2005). The near impossibility of testing for teacher quality. *Journal of Teacher Education*, 56(3), 205-13.
- Grossman, P. L. (1990). *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education*. New York: Teacher College Press.
- Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2004). Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. *Elementary School Journal*, 105(1), 11-30.
- Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking "pedagogical content knowledge": Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39 (4), 372-400.
- Hill, H. C., Blunk, M., & Charalambous, C., Lewis, J., Phelps, G., Sleep, L., Ball, D. L. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: An exploratory study. *Cognition and Instruction*, 26 (4), 430-511.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.
- Shulman L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 1986, 15(2), 4-14.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57, 1-22.

運用概念構圖教學策略提升六年級數學低成就學生學習效益之個案研究

張宇樑¹、洪巽盈²

明道大學教學藝術研究所¹

台中縣葫蘆墩國民小學²

摘要

本研究旨在運用概念構圖教學策略於國小六年級數學學習低成就學生，以了解此種教學活動設計對數學學習低成就學生學習效益之影響。研究者以立意取樣選取班級中之四位數學學習低成就學生參與實驗教學，並選取一位特殊個案(數學與語文皆低成就)作為本研究之主要對象。同時藉由課室觀察與錄影、學生學習單與作業單、學習感受晤談等多樣化之方式來蒐集質化之資料，並從中歸納分析以提出下列研究結論：

1. 概念構圖教學策略之運用能夠將所要傳達的數學概念，以更為具體方式呈現給學生，有利於個案學生掌握概念的意義，同時增進其知識豐富性與邏輯性。
2. 數學學習低成就之個案學生能夠透過概念構圖的學習方式，來幫助其將新訊息與舊經驗聯結，並以概念圖來加強對數學概念的組織與記憶。
3. 對於數理及語文能力皆低成就之學生，概念構圖之使用能夠降低其語文能力阻礙數學學習的負面影響，進而幫助學生理解數學概念及提昇數學學習效益。
4. 進行概念構圖教學活動之「分類與排序」時，能夠幫助學生察覺對概念包含性的迷思，以及概念關係的理解是否有錯誤，以重整其認知架構。

關鍵詞：概念構圖、數學低成就學生、數學學習效益

壹、緒論

一、研究背景與動機

為了迎接二十一世紀的來臨，與世界各國能夠接軌，國家寄予教育厚望，希望能藉由教育改革來提升國民素質與國家競爭力。教育部根據行政院核定之「教育改革行動方案」，進行國民教育階段之課程與教學革新(教育部，2003)。研究者之一於國小教學現場中擔任國小六年級的級任老師，希望能透過大學研究人員的專業協助，共同為這群數學學習低成就的孩子找到另一種學習方法。事實上，要如何找出造成他們數學能力低落的原因，Novak (1991, 1998)所提出之概念構圖理念與作為或許正適得其所。透過構圖之過程，可以讓原本存在於學生內心的思考結構具體化。對教師而言，也得以觀察到存在於學生認知架構的迷思概念或學習困難，且能針對每個學生的不同類型的錯誤對症下藥；對學生而言，更能夠讓他察覺到自我概念的衝突，提供反思的機會以進一步去澄清概念，同時能夠協助學生建構出自我的認知架構(Novak, 1998)。因此本研究依據 Novak (1991, 1998)概念構圖理念發展數學教學活動，以概念構圖的教學策略為數學學習低成就的個案學生進行數學教學，希望經由師生在教與學的歷程中，探究概念構圖對數學學習低成就個案之教學的效益為何，以及瞭解學生對於使用概念構圖策略來學習數學概念之情況。

二、研究目的

基於上述研究背景與動機，本研究旨在探討概念構圖教與學之策略對於數學學習低成就個案學生在數學學習之效益。此外，研究者將根據研究結果提出使用概念構圖教學以協助數學低成就學生之學習的建議，以及對未來相關研究之建議。

貳、文獻探討

一、有意義的學習理論

「有意義的學習」是 Ausubel (1968)之理論中的核心內容，有意義的學習乃是經由新信息與學生已有認知結構中概念間的相互作用，導致新舊意義的同化。從大腦的結構與功能而言，「學習」是需要兩個半腦合作無間的結果(Jensen, 1998; Wolfe, 2001)；從大腦處理訊息的角度來看，將已經輸入的訊息和已儲存的訊息相互配對，稱為組形辨認(pattern recognition)，若是新訊息能夠與已存訊息配對成功，則新訊息才是有意義的。吳楸椒與張宇樑提出以大腦研究為基礎的學習法則(brain-based learning principles) (吳楸椒、張宇樑，2008；張宇樑，2005)：首先，教育必須提供一個穩定、熟悉的學習環境，同時也能滿足大腦對於新奇事物的好奇心。其次，教師應該能把學生注意焦點之外的教材組織起來，並協助學生依照個人的學習風格來組織知識。再者，當事實和技術被嵌入空間性的記憶系統時，大腦能獲得最佳的學習。最後，教師應努力察覺每位學生獨特之處，選擇適合學生興趣的教學策略。

二、概念構圖

概念構圖(concept mapping)是 Novak 及其同僚依據 Ausubel (1968)的學習理論的指引，發展出一套方便可行的學習方法，後來更應用於教學、評量等其他方面(Novak, 1991, 1998)。概念構圖即是在教學前後給予受教者一組概念，要求受教者運用適當的聯結詞將他們聯結起來，以成為一幅概念圖(concept map)，教師可從中診斷出受試者知識結構及其錯誤概念。要求學生將學習內容的概念先做階層性的分類和分群，將兩兩概念間的關係以聯結線(connecting line)加以聯結，加註聯結語以表示概念間的聯結關係(余民寧，2003；Novak & Gowin, 1984)。

研究者根據國內外有關概念構圖教學之研究文獻資料，整理出三項概念構圖在教學的主要意義：1. 以概念構圖作為有效之合作教學策略：學生在合作學習下繪製的概念構圖，比個別概念構圖更能促進有意義的學習(Prezler, 2004)。2. 概念構圖教學對學生之學

習有助益：概念構圖能幫助學生建構自己的知識結構，且在建構概念構圖的過程中，提供學生反思的機會，有助澄清及修正迷思概念(王嘉德，2004；Walker & King, 2002)。此外，它亦可協助學生以後設認知策略檢視主觀認知，監控自我認知結構，以協助其發展出高層次的認知思考能力(Freeman & Jessup, 2004)。3. 概念構圖對教師之教學有助益：概念構圖可提供教學者有關學生的先備知識及起點行為之瞭解(Walker & King, 2002)，且教師能夠了解學生的知識階層基模，並可藉此來診斷學生對概念的分類狀況(王嘉德，2004)。

三、國小「平面圖形」課程與教材分析

以下研究者針對國小與平面圖形相關課程、教材與相關研究作探討：平面圖形相關的課程目標旨在結合「數」與「形」兩大主題，以學習運用幾何形體構成要素及其數量性質，並透過形體的分割、拼接等來感受形體的性質與非形式化推理(張英傑，2001)。而在「平面圖形」中學童可能存在的迷思概念有：1. 三角形：高年級學童對於三角形的迷思概念是視覺上的辨識受到方位的影響，鈍角、銳角的圖形概念不清楚及內角和概念的不清楚(沈佩芳，2002)。2. 四邊形：謝金助(2003)之研究發現四邊形基本性質通過率的由高至低為「四個角都是直角」、「四個邊都一樣長」、「兩組對邊互相平行」、「兩組對邊相等」。3. 圓形：侯雪卿(2004)提及圓形組成要素的迷思概念有關圓心、半徑、和直徑等要素與之間關係的迷思概念。

參、研究設計

本個案研究以為期八週實驗教學，來探討概念構圖運用於數學學習低成就學生教學活動的情形，並以錄影(音)、蒐集教學相關資料、學習單、及訪談等多元化的方式蒐集質化之資料，最後進行資料的整理、歸納，做進一步的分析與討論，以回應研究目的。

一、研究對象

本研究之研究母群是從研究者之一的任教班級中，以立意取向的方式，依照五年級的數學平均成績，選取成績在班上後百分之二十之學生共十名。又為減少研究干預，再刪除掉已有參加數學課外輔導的學童，以避免不同的教師與教法影響研究的進行。最後篩選出四名學童，分別作為此次概念構圖教學的實驗對象；而在本研究中，特別選取一位特殊個案進行分析，此位個案(阿倫，化名)係屬數學與國語低成就之學生，其語文能力不佳、且邏輯推理能力差，對概念的理解有困難；同時因個性內向害羞，因此也不會主動提出問題。在檢視其五年級之前的學業成績後發現：他的數學成績從中年級開始有每況愈下的情形，低於其所在班級的數學平均成績，且不隨年級提升且授課教師的不同而有所改善。升上五年級後，數學成績亦不見好轉，更處於班上數學成績的倒數十名。這樣數學和語文成績一直低落的情形也讓他的學習動機越來越朝負向發展。

二、概念構圖教學設計

本研究的教學對象為數學學習低成就之個案學生，故教學流程採取「診斷—修正—診斷」的教學循環歷程，依據學生於每一堂課之學習成效作為下一次教學活動修改的依據。概念構圖教學流程步驟依序為：

1. 分析教材，了解學童概念學習的情況：分析個案之前四、五年級時教科書的教材內容、學習目標、能力指標、與綜合學童的平時測驗等，分析學童可能存在的迷思概念或學習困難。
2. 設計概念構圖教學活動：依據所分析的資料、原班教學後的教師省思、及文獻探討之結果，統整而成概念構圖之教學活動。
3. 診斷迷思概念或學習困難：教師先介紹教學單元之主要概念，讓個案對每個概念進行發表與討論，且透過實地操作、測量各種平面圖形的特質，來發現自我概念的衝突或迷思。最後教師再進行概念的釐清與統整，透過小組討論、合作概念構圖的方式，進行概念的「歸類及排序」(clustering and ordering)；每個概念所包含的從屬關係或概括性來分類，再將每一群集中概念的關係，依照階層性或從屬關

係排列。

4. 重整概念：將兩個概念間以聯結線的方式互相聯結，並在聯結線旁標示聯結語。在進行概念構圖教學之初，由於個案的語文能力皆較弱，對聯結語的掌握有困難，所以教師給予較多的指示，或是直接提供相關的聯結語如：「具有」、「由...構成」、「例如」等語詞，讓個案來選擇適當的聯結語來標示在聯結線旁。
5. 再次檢視與診斷概念：再重新檢視小組合作之概念構圖，由教師針對小組的概念構圖提問學生，但教師並不直接對個案的答案做出判斷，而是交由其他學生來提出自己的看法，最後若有意見分歧、概念模糊之處，才由老師來澄清概念。接著，教師揭示專家概念構圖，讓學生比較這兩種概念構圖的差異；包含概念的歸類及排序、聯結語的使用、交叉聯結關係、及是否有出現遺漏或不同的概念等。
6. 評量教學效益：教師總結本週的教學內涵與概念構圖，接著解釋本週的課後練習作業內容，並針對個案的學習表現給予獎勵，且提示下一週上課的內容，讓學生有心理準備。作業安排方面，原則上視教學進度一週給予一次作業練習，若是本週尚未進行小組合作構圖教學活動，則發學習單來檢視學生概念的學習情況；完成一個教學單元，則以個別概念構圖為作業；同時要求學生於下次上課前繳交，以便教師評量學生學習情況，作為下次教學活動設計之修正依據。

此外，概念構圖教學活動歷時八週，研究者利用放學後的時間以及中午午休時間進行教學，每週三節(共二十四節)，每節 40 分鐘，教學時間共 960 分鐘。第一週為「概念構圖教學準備活動」，第二至八週才為正式概念構圖教學的課程(見表 1)。其次，本研究中的學習效益乃指經概念構圖教學後，個案在數學領域中認知與情意方面學習成效的提升，同時以多元化評量方式來確認學習效益，包含：研究者的教學省思日誌、個案的概念構圖表現、個案之自我省思與回饋、及與學生晤談資料記錄等。

表 1 概念構圖教學活動進度

週別	教學單元	教學內容
第一週	概念構圖教學	認識概念構圖
	準備活動	練習如何繪製概念圖
第二週	三角形	能了解角的張開程度與角的關係 認識三角形、構成要素及其要素之間的關係 認識等腰三角形
第三週	三角形	認識等邊三角形 能夠依照三角形的特質作分類 依據三角形的組成要素辨別各種三角形的異同
第四週	四邊形	認識檢驗兩直線的垂直平行關係 認識解四邊形的構成要素
第五週	四邊形	透過實測瞭解平行四邊形、菱形、箏形及梯形的組成要素及其要素間的關係 依據四邊形的組成要素比較四邊形之間的關係
第六週	多邊形	認識三角形的內外角 認識多邊形的內外角 能由三角形內角和推知多邊形的內角和
第七週	圓形	透過製作活動，瞭解圓的組成要素：圓心、半徑與直徑 認識弦與直徑的關係 初步認識圓周長與直徑的關係 認識圓周長的求法
第八週	平面圖形相關知識	比較平面圖形間的異同 統整與平面圖形相關的概念

三、資料收集與分析

資料蒐集的來源有三項：首先，進行參與觀察：教師進行概念構圖教學時，會將上課內容錄音並於課後轉換成文字檔，且以觀察紀錄作為輔助。其次，進行晤談與紀錄：以非正式晤談技術來蒐集深度晤談資料，針對特定問題蒐集深入、詳細且完整的資料，焦點在於個案在教學過程中的經歷與感受。最後，蒐集所有概念構圖教學活動紀錄：蒐集與整理每個階段個案所繪製的概念構圖及學習單等文件。接著進行資料的處理與分析，包括進行編碼、譯碼與轉譯等初步分析工作，再將資料簡化以形成主題，最後根據所有結果以獲致結論。

四、研究信賴度之驗證

本研究採取以下幾種方式來驗證研究之信賴度(Creswell, 2003)：1. 三角校正：以多元方式以獲致豐富之資料，並進行交叉詮釋，將被研究對象之感受與經驗，透過文字、圖表及有意義之交互運用過程，到完整且真實呈現資料的目標。2. 運用同儕討論(peer debriefing)以避免研究者的主觀或偏見。3. 透過研究者不斷反思的歷程，用「思考—修正—再思考」的動態歷程來提高本研究結果之信賴度。

肆、研究結果與討論

一、阿倫在概念構圖教學活動中的學習歷程與轉變

「從難以理解聯結關係到能夠運用多元的聯結語之歷程」可說是阿倫在學習過程的縮影。事實上，阿倫的語文能力原本就差，認識的字彙不多且混淆不清，常出現「口語化」用法，遇到無法掌握概念間的關係便以「是」和「有」來替代(如圖1)。



圖1 阿倫繪製「筆」的概念構圖

然而，在經過了八週的教學活動後，阿倫對詞彙的認識增加及概念繪圖技巧的熟悉，使得他已能正確且適當的使用較為多元、豐富的聯結語。從圖2可以發現，阿倫使用了八種的聯結語來呈現自我的認知結構；而且他能針對不同屬性的概念給予不同類型的聯結語。阿倫的聯結語由當初的口語化用法，到熟悉如何使用聯結語，現在更能詳細的說明概念間的關係，由此可見阿倫在數學概念及認知結構的轉變與成長。藉由這些表現，概念構圖的學習活動使得阿倫在無形中重拾起自己對數學的學習動機與信心。

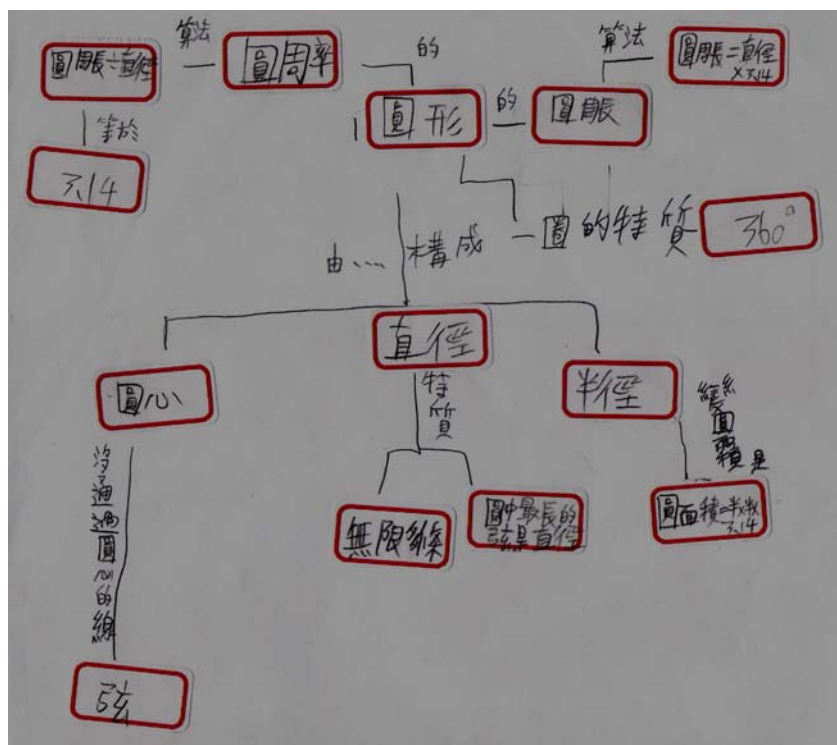


圖2 阿倫繪製「圓」的概念構圖

二、阿倫在概念構圖教學活動中之數學學習表現

研究者針對概念構圖四項主要結構成分「關係、階層、交叉聯結、及舉例」來探討個案概念構圖的表現：

(一) 在「關係」表現上：在實施過一週概念構圖的課程後，研究者與阿倫進行個別訪談，他回答在概念構圖的步驟中：「分類最簡單，寫概念最難」。實驗教學結束後進行訪談，此時他認為學習概念構圖是：「還好，偏簡單」。此外，研究者綜合阿倫在合作概念構圖、訪談資料與個別概念構圖之整體表現，發現個案掌握概念間聯結關係的能力的確提高不少。由此可知，個案的確能夠藉由概念構圖來掌握概念間的關係，並以此建立自我認知架構(Hasemann & Mansfield, 1995; Novak, 1998)。

(二) 在「階層」表現上：從訪談資料發現，在實施教學之初期阿倫認為概念分類很簡單，到了後期卻認為概念的分類或排序最困難。推究其原因，可能是因在實

驗教學初期，概念的階層也很簡單，故不感困難；而到了後期，概念增多，階層開始變得複雜，因此個案較能感受到要將概念分類與排序不是件簡單的事。事實上，低成就的學生通常存在較多片段、零碎的知識，最缺乏對知識的結構性(江淑卿，2001；黃萬居，1993)；因此透過概念構圖能使學童察覺自我認知架構(Novak, 1991)，就概念的從屬關係或是屬性加以分類，提升掌握事物或概念之特質的能力，同時可穩固學生的知識結構以降低學習干擾，如此將有助於提高學生之學習效益。而由研究之結果可知，阿倫在研究後期時掌握平面圖形概念之能力的確有明顯提升，且學習效益亦相對提高許多。

(三) 在「交叉聯結」表現上：本教學著重在協助學習低成就之個案學生診斷其自我迷思概念，修正與重整認知架構；而在最後平面圖形的概念構圖裡，阿倫(見圖3)的確因此而能夠利用交叉聯結來統整所學到的概念。他以「直角」來統整三角形與四邊形兩種階層的概念，運用「內角和 $=$ (邊的數量 -2) $\times 180$ 」的概念統整了多邊形、四邊形和三角形的概念。由此可知，個案已逐漸能夠利用概念構圖為學習工具來組織自我的知識，同時找出概念相關性；而由個案在交叉聯結的表現中，可明確看出其認知結構重整的成果。

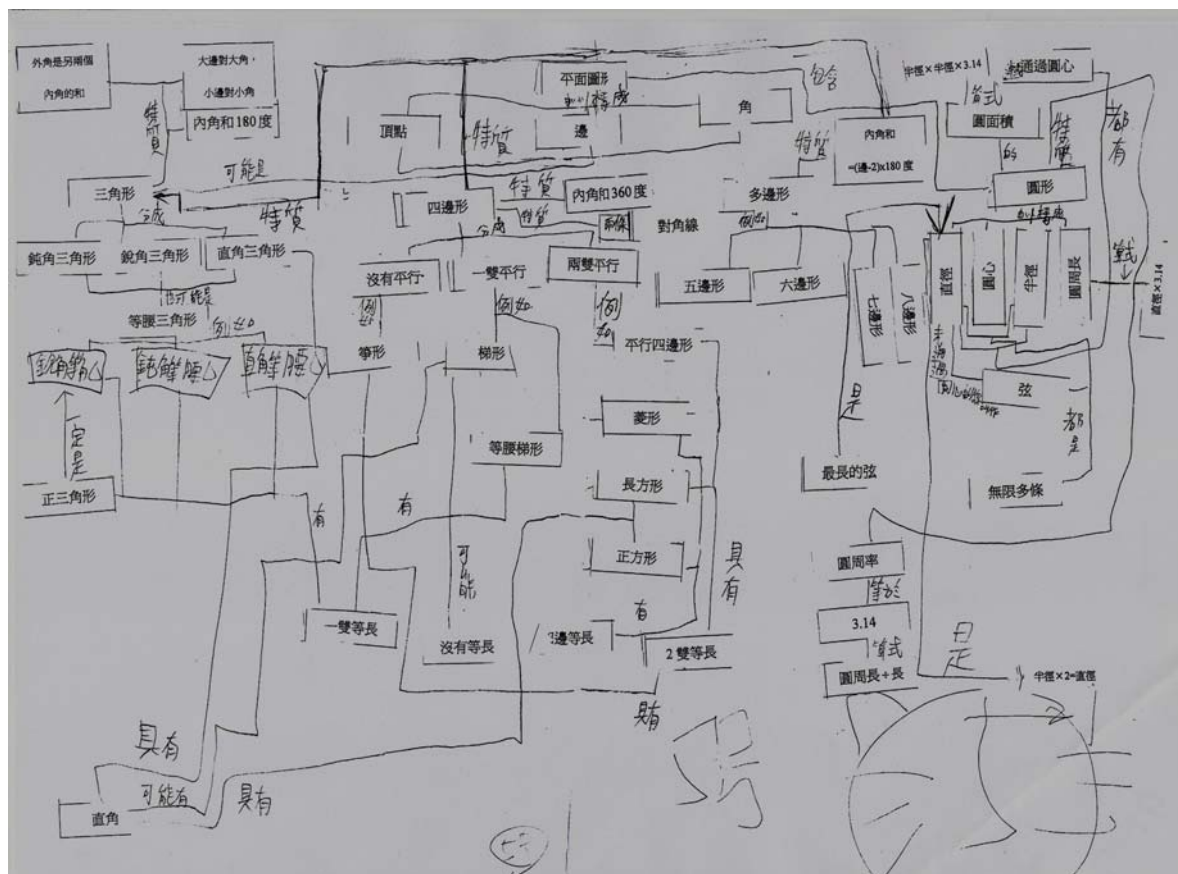


圖3 阿倫繪製的「平面圖形」概念構圖

- (四) 在「舉例」表現上：在本教學中，舉例所指的是個案是否能夠依照概念階層關係，舉出正確的圖形為範例。以「平面圖形」為例，阿倫在上課時對於研究者提出的問題都能回答正確，而他的「平面圖形」概念構圖亦得到了相當高的分數(見下表2)；亦即，透過「舉例」表現將能看出個案本身知識結構的正確性。
- (五) 整體表現：綜合上述，個案之概念圖在與專家概念圖進行比對後，將個案之概念圖的得分除以專家概念圖的總分，獲得百分比值。百分比值越高，表示學生學習越接近教學期望；反之則表示教學成果遠離教學期望，且需要研究者入探究其原因。以下茲將阿倫在接受所有之概念構圖教學活動後，其最後所繪製的概念圖之百分比值，及其在「關係」與「階層」得分之情形列於表2中。

表2 個案(阿倫)概念構與專家概念圖得分比值

	三角形1	三角形2	四邊形	多邊形	圓形	平面圖形
專家概念圖(總分)	52	66	57	32	53	175
百分比值	48 %	59 %	82 %	96 %	58 %	96 %
關係得分(總分)	11 (11)	18 (24)	16 (16)	12 (13)	12 (16)	49 (56)
階層得分(總分)	15 (20)	15 (15)	20 (25)	15 (15)	15 (15)	25 (25)

除此之外，在進行概念構圖教學活動之「分類與排序」時，研究者可由學童對概念分類的結果發現其迷思概念所在，個案本身也能夠藉由構圖的歷程，發現自我概念衝突之處，進而重整、澄清概念。亦即，個案能夠透過概念構圖來辨別、思考概念間的關係，進而將概念有系統、有組織的統整起來。再者，從訪談資料中發現個案認為概念構圖對自己的在數學上的學習有幫助，且個案表示以後還想繼續使用概念構圖來學習其他學科，如社會、自然等。總之，經由概念構圖教學活動之洗禮後，個案可藉由概念構圖的輔助來達到澄清自己所學習知識材料的目的，且可能將有助於在未來協助個案提升其自我反思及解決問題的能力。

伍、結論與建議

一、省思與結論

現今的教育主張賦予孩子「帶得走的能力」、而非「拖不動的書包」，因此在教導知識的同時，不僅要讓孩子具有「學習能力」，更要讓孩子具備「如何去學」的能力，因此培養孩子解決問題的能力與創造思考的能力是刻不容緩的課題。但是，每個孩子都是獨一無二的，如何順應孩子的天性、啟發孩子的天賦與因材施教，是教學者永恆不變的理念。根據研究之結果，使用概念構圖的確能夠表徵出個案學生內在的認知架構，使其抽象的思考具體化，也能讓其察覺自我的迷思，並尋求解決之方法。由此可見，概念構圖教學可說是一種兼顧「因材施教」理念和提升學生數學學習效益的教學方法。而在

實施此教學活動的同時，研究者亦隨時省思自己該如何進行教學，才能真正協助低學習成就之學生學習數學。因此對教師而言，概念構圖教學確可作為協助低成就學生學習數學的有效工具。同時，研究者也在此研究過程中再度印證腦科學的研究結果，就是只要教師能察覺每位學生獨特之處，且選擇符合學生學習的有效方法，那將可促進其學習成效之提升，且能激勵學生發揮其潛能。最後，茲將本研究之結論整理如下：

1. 概念構圖教學策略之運用能夠將所要傳達的數學概念，以更為具體方式呈現給學生，有利於學生掌握概念的意義，同時增進其知識豐富性與邏輯性。
2. 數學學習低成就之學生能夠透過概念構圖的學習方式，來幫助其將新訊息與舊經驗聯結，並以概念圖來加強對概念的組織與記憶。
3. 對於數理及語文能力皆屬低成就之學生，概念構圖能夠降低其語文能力阻礙數學學習的負面影響，進而幫助學生理解數學概念及提昇數學學習效益。
4. 進行概念構圖教學活動之「分類與排序」時，能夠幫助學生察覺對數學概念包含性的迷思，以及概念關係的理解是否有錯誤，以重整其認知架構。

二、研究建議

根據前述省思與結論，研究者提出以下建議：

1. 教學建議：首先，由於概念構圖教學策略乃在藉由討論與合作的方式能夠提高學生學習動機，減低因數學學習低成就帶來的退怯，因此值得教師們運用此教學策略來設計數學學習活動，以改善其學習成效及提昇學習興趣。其次，根據研究過程之發現，對於數學及語文能力皆不佳之學生，在概念構圖教學初期之聯結語的使用，需要適時的配合學生的語文程度做修改，或是提供給學生適當的聯結語供其應用，以提供其模仿之機會。
2. 對未來研究建議：建議未來研究可延長教學歷程，以便更深入去探討概念構圖教學對於數學學習低成就學生之影響，例如學生之反思及問題解決能力。其次，未來研究可配合採用量化之研究設計，以成就測驗來驗證學習成效，同時與其

他學生進行比較。再者，建議未來研究的教材內容可以擴充至其他幾何相關的主題，亦或是其他數學概念，以便整體性地探究教師使用概念構圖教學之效益及學生學習時之成效。

陸、參考文獻

一、中文部分

- 王嘉德(2004)。以動態評量探究國小五年級學童電與磁的概念學習。國立台北師範學院數理教育研究所未出版碩士論文，台北市。
- 江淑卿(2001)。經驗式和統計式概念構圖對兒童的知識結構與理解力之影響。屏東師院學報，14，371-396。
- 余民寧(2003)。有意義的學習：概念構圖之研究。台北：商鼎文化。
- 吳楸椒、張宇樑(2008)。當「神經科學」遇上「幼兒教育」：省思與重現幼兒教育課程與教學之理路。幼兒教保研究期刊，創刊號，49-66。
- 沈佩芳(2002)。國小高年級學童的平面幾何圖形概念之探究。國立台北師範學院數理教育研究所未出版碩士論文，台北市。
- 侯雪卿(2004)。國小高年級學童圓概念教學模組補救教學之個案研究。國立嘉義大學數學教育研究所未出版碩士論文，嘉義縣。
- 張宇樑(2005)。大腦學習與教學原則。彰化：明道大學教學藝術研究所未發表課程用講義。
- 張英傑(2001)。兒童幾何型體概念之初步探究。國立台北師院學院學報，14，451-528。
- 教育部(2003)。國民中小學九年一貫課程綱要—數學學習領域。台北：教育部。
- 黃萬居(1993)。國小學生的概念構圖和自然科學學習成就之研究。台北市立師院學報，24，47-66。
- 謝金助(2003)。國小六年級學童四邊形迷思概念之診斷教學研究。國立台北師範學院數理教育研究所未出版碩士論文，台北市。

二、西文部份

- Ausubel, D. P. (1968). *Education psychology: A cognitive view*. New York: Holt, Rinehart & Winston.
- Creswell, J. W. (2003). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed method approaches*. Thousand Oaks, CA: Sage.
- Freeman L. A., & Jessup L. M. (2004). The power and benefits of concept mapping: Measuring use, usefulness, ease of use, and satisfaction. *International Journal of Science Education*, 26(2), 151-169.
- Hasemann, K., & Mansfield, H. (1995). Concept mapping in research on mathematical knowledge development: Background, method, finding and conclusions. *Educational Studies in Mathematics*, 29, 45-72.
- Jensen, E. (1998). *Teaching with the brain in mind*. New York: Association for Supervision and Curriculum Development.
- Novak, J. D. (1991). Clarify with concept maps. *Science Teacher*, 58(7), 44-49.
- Novak, J. D. (1998). *Learning creating and using knowledge: Concept maps as facilitative tools in school and corporations*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Association.
- Novak, J. D., & Gowin, D. B. (1984). *Learning how to learn*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Prezler, R. (2004). Cooperative concept mapping. *Journal of College Science Teaching*, 33(6), 30-35.
- Walker, J. M. T., & King, P. H. (2002). *Concept mapping as a form of student assessment and instruction*. Proceedings of 2002 American Society for Engineering Education Annual Conference and Exposition proceedings, Canada.
- Wolfe, P. (2001). *Brain matters*. New York: Association for Supervision and Curriculum Development.

活動報馬仔

一、 2009/10/21(三)~2009/10/24(六)

「2009」年東亞科學教育研討會

地點：台北福華國際文教會館(臺北市新生南路3段30號)

參考網站：<http://esciedu.nctu.edu.tw/ease/>

二、 2009/11/27日(五)~至2009/11/28(六)

2009年台灣教育學術研討會

地點：國立新竹教育大學

參考網站：<http://2009edu.nhcue.edu.tw/>

三、 2010/01/07(四)~2009/01/10(日)

**The 8th Annual Hawaii International Conference on
Education**

地點：Honolulu, Hawaii

參考網站：<http://www.hiceducation.org/>

稿 約

一、本刊徵選之數學教育刊物為：

- (一) 本刊以徵選實務性的數學教育刊物為主，舉凡任何數學創新教學之方法或策略、數學教學實務經驗、數學課程設計與實踐之心得分享等皆為本刊之首要選擇標的；
- (二) 研究文章（包括以實驗、個案、調查或歷史等研究法所得之結果，和文獻評論、理論分析等）；
- (三) 短文（包括研究問題評析、數學教育之構想、書評、論文批判等）；以及
- (四) 其他符合本刊宗旨之文章。

二、本刊所刊之文章，需為報導原創性教學或研究成果之正式文章，且未曾於其他刊物或書籍發表者（在本刊發表之文章未經台灣數學教育學會同意，不得再於他處發表）。

(一) 來稿請注意下列事項：

1. 來稿請以中文撰寫，力求通俗易讀，須為電腦打字，每篇以不超過 6000 字為原則（特約稿不在此限），以電子郵件傳送。
2. 來稿請附中英文篇名、作者

姓名及服務機關，作者姓名中英文並列，若有一位以上者，請在作者姓名及服務機關處加註 (1)、(2)、(3) 等對應符號，以便識別，服務機關請寫正式名稱。

3. 來稿請附中英文摘要，並於摘要後列明關鍵詞彙 (key words)，依筆劃順序排序（以不超過五個為原則），英文關鍵詞彙則須與中文關鍵詞彙相對應。
4. 文稿若為譯文，請附原文影本及原作者同意函，並請註明原文出處、原作者姓名及出版年月。
5. 凡人名、專有名詞等若為外語者，第一次使用時，謂用 () 加註原文。外國人名若未有約定成俗之譯名，請選用原文。
6. 附圖與附釋請於文後，並編列號碼，並在正文中註明位置。
7. 文末參考文獻依作者姓氏分別編號排序：中、日文依筆劃多寡排列；西文（英、法、德...等）依字母順序排列；若中、日、西文並列時，則先中、日文後西文。至於參

考文獻之寫法如下：

- (1) 期刊論文，請依下列順序書寫：作者、出版年（西元）、論文篇名、期刊名稱、卷期、頁數。

例：張湘君（1993）。讀者反應理論及其對兒童文學教育的啟示。*東師語文學刊*，6，285-307。

- (2) 圖書單行本，請依下列順序書寫：作者、出版年（西元）、書名、版次、出版地、出版社、頁數。

例：張春興（1996）。*教育心理學*。台北：東華。頁64-104。

8. 稿件順序為：首頁資料（題目、作者真實姓名及服務機關、通訊地址及電話；若需以筆名發表，請註明）、中文摘要、正文（包括參考文獻或註釋）、末頁資料（以英文書明題目、作者姓名及服務機關、並附英文摘要）及圖表（編號須與正文中之編號一致）。

(二) 本刊對來稿有權刪改，不同意者請在稿件上註明。

(三) 來稿刊出，版權為台灣數學教育學會所有。

(四) 作者見解，文責自負，不代表本學會之意見。

(五) 來稿請 e-mail 至：

dcyang@mail.ncyu.edu.tw