ISSN 1815-6355

台灣數學教師(電子)期刊

Taiwan Journal of Mathematics Teachers

第20期

台灣數學教育學會

2009年12月

台灣數學教師(電子)期刊
Taiwan Journal of Mathematics Teachers
2009 年 12 月出版
NO.20 2009

發行人： 林福來教授

出版者：台灣數學教育學會
地址：台北市 116 汀州路四段 88 號國立台灣師範大學數學系 M212
電話：02-29307151

電子郵件信箱：tame@math.ntnu.edu.tw
網址：
http://www.math.ntnu.edu.tw/~tame/index.htm

總編輯：楊德清 dcyang@mail.ncyu.edu.tw
地址：嘉義縣民雄鄉文隆村 85 號
國立嘉義大學數學教育研究所
電話：05-2263411-1924

發行宗旨

一、本刊為一實務性的數學教育刊物，出版目的如下：

1. 積極發揚台灣數學教育學會之成立宗旨：研究、發展、推廣數學教育，使台灣學生快樂學好數學。
2. 提升數學教師教學品質、數學教育研究品質及促進數學教學策略與方法之交流。
3. 探討數學教育的學術理論與實務現況，以促進理論與實務之結合，進一步提升數學教學之內涵。
4. 提供數學教育課程、教材與教法等實務經驗，包括數學遊戲、DIY 教具之分享，以供未來之教學與研究參考之用。
5. 針對多數學生特定迷思概念之教學引導，如學生易有的錯誤型態及如何釐清觀念等。
6. 介紹國內外數學教育現況。

二、本刊內容以充實高中、國中與小學數學教學、課程與教材為主，以提供所有關心數學教育人士之教學資源與參考依據。

三、本期刊以季刊方式（3 個月一期，一年共 4 期）發行，分別於每一年的 3、6、9、12 月發行。

四、本期刊採電子與紙本方式同時發行。

ISSN 1815-6355

台灣數學教師（電子）期刊
Taiwan Journal of Mathematics Teachers

第 20 期

2009 年 12 月

台灣數學教師（電子）期刊

目錄

第 20 期　　2009 年 12 月

ISSN 1815-6355

從「頭」開始的數學學習與教育：

Butterworth 與 Dehaene的認知神經觀點[1]

楊志堅

認知神經計量實驗室

國立臺中教育大學、國立中山大學

摘要

本文介紹英國學者 Dr. Brian Butterworth (Institute of Cognitive Neuroscience, University College London England)與法國學者 Dr. Stanislas Dehaene (INSERM−CEA Cognitive Neuroimaging Unit)近年來以認知神經為基礎所進行的數學學習、數學發展及數學教育的研究成果；更重要的是討論這些研究成果對相關領域的可能影響。另外，也從學界對科學化的教育研究的實質意涵之論辯與神經計量學(neurometrics)的興起，探討數學教育未來在研究方向與方法論上的一些可能發展。

[1] 這篇文章是在訪問 Dr. Brian Butterworth 與 Dr. Stanislas Dehaene 之後所記錄。作者感謝國科會經費(計畫編號：NSC 98-2517-S-142 -002-)的補助，也感謝參與此計畫的國內教授、人員等協助，並感謝 Dr. Butterworth 與 Dr. Dehaene 的熱情接待及十分詳盡精彩的解說與討論。作者感謝台東大學曾世杰教授、中山大學教研所陳宜伶、鍾怡靜、王佳琪、鄭媄穗、何曉琪及其他同學提供寶貴建言。

通訊作者：楊志堅 noahyang@ntcu.edu.tw

一、證據導向的研究(Evidence based research)

美國教育研究學界從 2001 年起，因為美國政府通過及公布 The No Child Left Behind 法案，要求政府研究經費的運用需要以 evidence-based 為支用依據，甚至也對「科學化」的教育研究做了一些重要的闡述，學界因此對教育研究的本質有許多討論與辯證。Feuer、Towne 與 Shavelson (2002)的文章中也對此進行了一些整理與論述，尤其也對教育研究中常見的因為「非隨機」(non-random)的研究設計，而被質疑不夠「科學」的問題，提出了一些建議及看法。他們也覺得教育學的研究社群應該更廣泛地進行跨領域的互動及合作研究。這些似乎匯聚了一個共同的方向，教育研究需要更講究研究方法、取樣及設計以及跨領域的合作研究。

人類學習發展的各個階段都跟大腦心智的發展與成熟息息相關；人類的教育養成過程中，如果無法依此為基礎而設計出相對應的方法、課程等，要談 evidence-based 或「有所本」的教育研究，幾乎是緣木求魚。認知神經的研究領域在對大腦的成熟與發展之紀錄與了解上，近年間有相當豐碩且重要的成果，主要的關鍵因素除了大量的人力投入外，最重要的大概是研究方法與工具的突飛猛進。尤其是 Neurometrics 的極端快速發展下，大大提升了大腦與認知神經活動的記錄與分析工作的複雜性與精準度。早期 Neurometrics 這個詞或被專指為與腦波(EEG, ERP)記錄相關的方析方法（例如：John, Karmel, Corning, Easton, Brown, Ahn, John, Harmony, Prichep, Toro, Gerson, Bartlett, Thatcher, Kaye, Valdes, & Schwartz, 1977），但是在 fMRI、PET 等等腦部活動的記錄儀器的普及之後，Neurometrics 所代表了更廣泛的涵蓋記錄或分析大腦認知活動之資料的所有量化方法。

這兩個從不同角度而來的發展，卻有趣地聚斂成一個相當具有發展潛力的新興教育研究主題，尤其是在探究數學的學習與教育上，國內外對此的相關發展上，還有相當大的空間。有趣的是在「認知神經」、「大腦的功能與發展」--

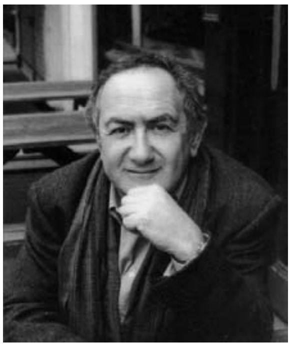
這些傳統上，被認為似乎是生物、醫學的專屬領域，其實與教育間的傳統角色上，可能也還會令人懷疑，究竟是「『天生』我材必有用」，抑或是「潛移默化」、「人定勝天」？不管未來的結論為何，認知神經、神經計量學的快速發展與科學化的教育研究的趨勢下，結合實驗心理學的經驗與典範，對於數學教育或其他教育領域而言，都將是具有重要且全面的影響力。

如果這些還不足以引起我們的注意，那麼英國官方與歐洲學界大力推行的大規模計畫 Mental Capital and Wellbeing (FMCWP, 2008)或是 The Mental Wealth of Nations (Beddington, Cooper, Field, Goswami, Huppert, Jenkins, Jones, Kirkwood, Sahakian, & Thomas, 2008)，就很難不引起大家的注意了。其中，以認知神經或大腦發展的觀點，以研究改善數學學習與相關教育或補救措施，也是極為重要計畫目標。因此，若能向這些專家們當面請益、交流，應該會是極重要的學術提升機會。感謝國科會科教處及人文處的對這個研究領域的遠見及經費補助，科教處處長胡志偉教授十分關心這個交流計畫，熱心參與並指導每次的籌備會議，更感謝參與此計畫的每位教授及相關行政人員的規劃、協助。訪問團在 2009 年八月中下旬成行，如願訪問到了對認知神經研究數學學習相當有經驗的 Dr. Butterworth 與 Dr. Dehaene 兩位教授，並感謝 Dr. Butterworth 與 Dr. Dehaene 的熱情接待及十分詳盡精彩的解說與討論。以下摘錄了一些他們在數學學習方面的發表、本文作者此次的訪問心得，以及作者的一些相關研究結果以憑對照參考。當然，本文所呈現都僅是個人的論點，既非代表國科會發言，也不見得會與國科會的立場相同，若有疏漏錯誤之處，自然也是作者才疏學淺所致，與兩位教授無關。

二、對數感(number sense) 與語文的看法

Dr. Butterworth 在 2002 年對數學學會(The Mathematical Association)的演說中，他對於數學與語文能力關係的論辯與解說相當完整而精彩。他先指出有些人

認為數學就是語言(Number is just language)。換句話說，從最簡單的「數字」本身就是語言，例如: “one”或 “two”不就是文字嗎？不就是語音的表現嗎？而我們中文裡不也以一、二、三或「一」、「儿丶」、「ㄙㄢ」讓孩子知道數量的代表文字或唱名，從這個觀點來看，似乎「數」與「語言」是出自於同源的。談到這裏,他的論點大概會讓數學教育的工作者、研究人員都開始不自在了,「原來孩子們數學不好(或很好)，不過是語言能力的另一種表現而已」？



Dr. Butterworth (http://www.mathematicalbrain.com/author.html)

真是如此嗎？所以，這次作者也向 Dr. Butterworth 提出類似的問題，請教他關於數學學習或教學裏的各種形式的「表徵」之間的關係。從具體到抽象，從實物、圖像、符號、以至於數學與語言、文字間的關係，它們似乎就像是在某一個光譜的兩端，本質上好像可以是在同一條線上的；但是兩個端點之間的距離，有時又遠得幾乎不可能讓兩者相提並論？他對此的回答倒是很簡單。而作者從他的解答中的解讀：應該是孩子們、老師們在學校裡最常用的溝通工具就是語言，如果數學(或其他學科) 的學習結果不能用有效率的語言、文字或符號或其他表徵將之表達出來，那麼就從「教育」的觀點而言，數學或其他科的教育的實質功能或成效將會在哪裡？

可是，若果真是如此，將數學教育以大腦或認知神經的觀點來看，又有何特別之處？其實，在 Dr. Butterworth 在 2002 年對數學學會的演說中，Dr. Butterworth 接著就從數學等於語言的相反角度(Counter arguments to language)，舉出一些數

學能力的習得或發展不必然等同語言能力的明確例證。例如：Dr. Butterworth 說在他的研究個案中有一位 Harvey 先生，他 64 歲，因為大腦退化的緣故，Harvey 先生大腦中的語言中樞幾乎失去功能，連看簡單的圖片然後唱名的能力都幾乎喪失。但是，令人震驚的是，這位原本在銀行工作的 Harvey 先生，竟然還擁有幾乎完美的算術能力。也就是，64 歲的 Harvey 先生連簡單圖片的唱名都有問題，但是他在個位數、多位數的加、減、乘法及其它算術能力的一些測驗中，卻可以拿到滿分。Dr. Butterworth 及其研究夥伴也進一步掃描他的大腦功能影像 (Cappelletti, Butterworth, & Kopelman, 2001)，再以大腦功能的觀點來闡述這個特別的現象。

Dr. Dehaene (http://www.unicog.org/main/pages.php?page=Stanislas_Dehaene)

類似的問題，Dr. Dehaene 又將是如何的回答？立場或根據呢？當天他用了一個詞--intuitions--來形容他幾年來所研究的一些認知能力，包含算術、幾何或空間感等，作者覺得很有趣、也相當具有啟發性。後來發現他在 2009 年的一篇文章(Dehaene, 2009)中也用這個詞。仔細回顧他的一些研究，作者想如果用這個詞來描述他對數學能力的態度或相關研究的立場，倒也相當貼切。事實上，若不是以這樣的態度或立場，作者猜他大概也不會去冒險進行這一連串可稱為「大膽」的實驗或研究了；尤其，若知道他在大學學的是數學(Mathematics, Ecole Normale Supérieure)，就讓他的立場更顯得有趣了。

既然是以 intuitions 來回答這個問題，作者想解讀語文與數學之間的關聯，反而就簡單多了，作者想的是--既然是一種「直覺」，自然也無所謂誰先或

誰後(語文或數學)或本質上的差異這些問題了，因為大概沒有人會說：我因為先有「A 直覺」才導致我有「B 直覺」吧？至於「A、B 直覺」間的包含關係？好像也不那麼重要了吧？Steven Rose (1998)對於 Dr. Dehaene 所著作的 number sense 這本書的書評中，也指出 Dr. Dehaene 巧妙地迴避了是否存在了一個 language instinct 與 number instinct 的對應關係這個問題。Steven Rose 認為 Dr. Dehaene 以其對文化與生物間的豐富認識，提出了一些例證來解釋兩者的關係。Dr. Dehaene 認為人們所認定的「數感(number sense)」，其實是被其所處的文化下所形成的，他舉例如下，如果用阿拉伯數字(1, 4, 6, 9, …)來進行加減運算，感覺上很直接、方便，但是如果羅馬數字(I, IV, VI, IX, …)來做相同的運算就會感到困難；更不用說以這些文字進行更高階的運算，如二位數乘法的困難度了；但事實上，就數學的觀點而言，我們不都是進行同一件運算嗎？Dr. Dehaene 因此建議只要進行對不同文化下的大腦功能掃描，就可以了解哪些認知功能是因文化差異而來，哪些則是天生對數感的直覺。

作者的進一步推論是這些因文化而來的差異，不見得可以等同於人們天生下來對數的「直覺」，大家所看到的一些對數感的行為或現象，事實上是因為人們透過文化的影響或應用某一種語文所形成的習慣去詮釋這個「直覺」而來的結果，不是嗎？Dr. Dehaene 也舉出因為中文裡相對於歐洲語系對數字系統的運用優勢，讓使用中文的人在心算的速度上有更好的表現的例子，來說明文化差異所造成的影響。因此語言與數學的關係或異同，由此看來，它們應該要追溯自源於大腦對於基礎不同的兩種刺激具象的辨認與解讀能力與機制；只是，在人們習慣以語文作為「主要」(甚至是「唯一」)的溝通管道之大環境下，語言與數學的區分就變得困難，如果再以傳統習用以語文為主的評量測驗(measurement)為工具(instrument)，那麼語文能力與數學能力或兩個科目間的學習歷程的差異，就更難正確評估了。換個角度來說，要有效解決語文與數學間的辨識問題，以目前在區

辨效度(divergent validity)明顯有問題的狀況下，所收集到的聚斂效度 (convergent valditiy)或其他的訊息，極可能是因為工具本身亟待改善的缺失而所造成假象。

三、對數學教育的影響

在將數感定義為「直覺」之後，再來討論 Dr. Dehaene 對於數學認知的發生時間點的看法，似乎就很明顯了；由於是一種 intuition、一種 instinct，Dr. Dehaene 的研究對象當然可以「大膽」地包含了剛出生幾個月大的嬰幼兒；這裡的「大膽」是相對於 Jean Piaget 對認知發展、知識論的認定而言。也因此 Dr. Dehaene 對於數感能力的發生時間，似乎也很就容易可以找到其根據。

Jean Piaget 對認知發展、知識論(epistemology)的觀點以及因之而來對教學法(pedagogy)的影響是全面性、全球性的，影響範圍從教育政策、課程、教學方式、等等幾乎無所不在，可能好幾本書來記錄都不見得能表達完全。尤其 Piaget 對認知發展階段的架構，更是很多教學設計的根本及依據。但是，Dr. Dehaene 卻舉出例證證實 Dr. Jean Piaget 對幼兒進行保留概念的實驗(conservation experiments)的問題與偏誤，事實上，Dr. Dehaene 所設計的許多實驗所觀察或推論的結果都明顯與 Dr. Piaget 的論點不同。例如，Dr. Piaget 知名的四個認知發展階段便受到 Dr. Dehaene 的實驗結果的挑戰，Dr. Dehaene 的實驗對象中甚至有剛出生幾個月大的嬰孩，透過一些腦波儀器及認知神經的理論基礎，Dr. Dehaene 的實驗結果甚至可以推論這些時期的嬰孩，並不是 Dr. Piaget 認知發展階段所說的無邏輯(nonlogical)、不能回溯(nonreversable)的方式。Dr. Dehaene 的實驗甚至認為嬰兒不僅對小的數目有精準的認知，他們也可以對大的數目進行概算。而且這個論點最大的說服能力是 Dr. Dehaene 的實驗程序與結果都是具有高度的可重複性(reproducible)，如果要說符合科學化(scientific research)或 evidence based 的教育研究（ Feuer 等人, 2002; NCLB, 2001)，大概很難能再從這些研究中挑毛病了。

有趣的是，對具有數學背景的 Stanislas Dehaene 而言，數學障礙(dyscalculia)是可以預防(prevention)也可以治療(remediation)的，他還提出了一套電腦化的工具以達成這些目標，這部分的細節將在下一節中討論。

Dr. Butterworth 大學以及隨後的教育訓練則是心理學或神經心理學的背景，他在一場演講中也說"I am not a mathematician. I have never taught mathematics" (Butterworth, 2002)，他從語言的研究開始，逐漸專注到數學學習的"本質"(genetics of mathematical abilities)的研究，他對於數學教育的看法又是如何？他的論點可能更會讓數學老師或相關研究工作者等都嚇一大跳，因為他說(P.18, Butterworth, 2002)：

> "It is that it is better not to teach formal arithmetic at all – at least not in the primary school years. Let children pick it up, as they need it, as they are interested, just as they learn their native tongue."

哇，他竟然說〔都不需要〕了!!小學階段的正式算術教學都不需要了!!他說只要他們覺得有興趣、有需要，孩子們自己可以用天生的能力學得算術，就向他們在學母語時一樣。對作者而言，這些話就如同他在提出那些論點之前所說的一句話(P18)一樣：

> "My next proposition may be very hard to swallow and digest."

確實，他們是很難以下嚥更別提消化了。所以這次的訪問中，作者也特別注意 Dr. Butterworth 對此的說法，雖然因為時間的關係無法很詳盡的討論一些細節；不過，和 Dr. Butterworth 談過之後，作者的感覺總是無法與他在 2002 年的這些驚悚說法有任何可聯結之處；尤其，作者總覺得若片面解讀成「小學階段是不需要算術教學的」，並非是他的最終目的。就好像 Butterworth 常拿數學的認知與語文的認知在一起相提並論，但是他從沒有提到小學階段是不需要語文教育或閱讀教學。作者自己推論出的一個比較合理的解釋是他是對「數」(number)這

個的項目上的教與學，主張應該更符合學童的認知發展，而不應僅在強調長時間的反覆(repeated)演練上；因為他也舉出 Benezet’s classrooms (Butterworth, 2002)這個例子，藉以推論出只要將孩童置身在豐富的數學教室環境下，就可以很自然的學到正式課程中所需的一些數學能力，就像孩童從教室環境中自然就會學到一些文字、語彙的能力一樣。因此，作者想如果沒有數學教育，哪來的數學教室環境？所以，他想強調的應該是自然而符合孩童認知能力發展的教學方式吧，而非全然否定數學教學，至少訪談時作者的感覺也是如此。

在另一個大規模調查研究之後，Butterworth 接受記者訪問時的一些結論(Connor, 2008)，可以再次確認作者的想法及凸顯 Butterworth 對數學教育的重視。他除了指出調查結果發現數學障礙的盛行率甚至比閱讀障礙(dyslexia)的比率要高，卻更常被忽視之外。他認為這些孩子應該更早被診斷出來，而額外的課程(extra lessons)是可以幫助這些小孩的(Connor, 2008)。

四、對數學能力的測量方法

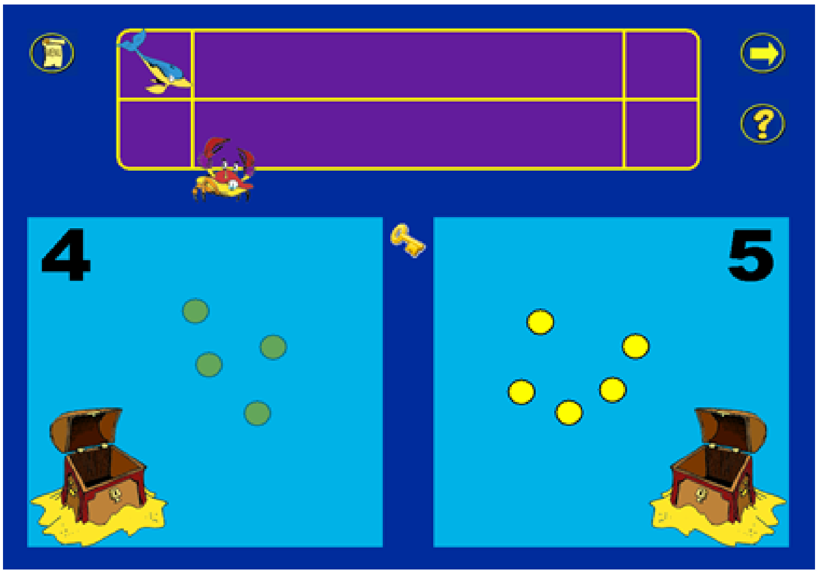
對於數學能力的檢測，Dr. Butterworth 與 Dr. Dehaene 各自發展自己測驗工具，但是，不約而同地藉由電腦化的方式進行，也都主要以孩童在進行計算練習(computing drills)時所費的功夫(efforts)為測驗主軸。這裡所說的所費的「功夫」--除了正確性之外，更重要的標的物是孩童完成練習「所花費的時間」，作者認為這大概就是以認知神經為基礎所設計出來的工具與傳統想法最大的不同點吧？以下大致介紹它們的設計及內容。

Dr. Butterworth (2003)發展了一套電腦化的數學學習障礙篩選測驗(Dyscalculia Screener)，這是一套透過商業出版機構發行的測驗工具，跟傳統心理測驗或 neurological assessment 不同或比較特別的地方，是它以電腦化的方式自動檢查孩童的作答正確性、記錄反應時間並計算標準分數，透過這些資料以量測他們的數學學障傾向(dyscalculic tendencies)，測驗內容包含數字大小、加法、

乘法等，測驗時間大約需 30 - 35 分鐘，施測對象在 6 – 14 歲之間，使用者並須符合一定的專業資格，並且向 GL Assessment 公司購買年度執照，付費使用。

Dyscalculia Screener (Butterworth, 2003)

Dr. Dehaene 則發展了一套宣稱可以預防(prevention)或治療(remediation)數學學習障礙的電腦化工具-- The Number Race (Wilson, Dehaene, Pinel, Revkin, Cohen, & Cohen, 2006; Wilson, Revkin, Cohen, Cohen, & Dehaene, 2006)，The Number Race 也可以偵測出學童會覺得困難的數學學習領域。這是一套可以免費下載的程式，並已有多種語言的版本，包含英文、法文、德文等等，但是還沒有中文的版本。適用對象在 4 - 8 歲之間，內容包含個位數的數感、數值比較、數數、讀數(唱名)、以及個位數加減等等。



The Number Race (Wilson, et al, 2006a; 2006b)

The Number Race 以適性化(adaptive) 、遊戲化(game)的方式設計，它會自動調整遊戲的難度以維持孩童能有 75%的成功率，藉以讓孩童覺得有挑戰性(challenging)但卻又不至於氣餒(discouragement)。程式的主題是海底尋寶遊戲，進行的方式是以遊戲者與電腦所扮演的敵手在限定的時間內相互競爭，「過關」後才會出現下個主題。Dr. Dehaene 及其同事分階段逐步以開放式的觀察，並以對照組與控制組的實驗方式，驗證這個工具對孩童的數學學習困難的影響力。在已發表的兩篇文章中(Wilson, et al, 2006a; 2006b)，他們發現了孩童每週使用這個軟體二小時並連續使用五週後的一些正向學習效果(Wilson, et al., 2006a; 2006b)。

國內的研究也有以反應時間為主的數學認知測驗發展及研究，例如：Yang 與 Chen (2008)，這個研究主要探討小學階段數學概念與程序覺知的認知反應本身、兩者間的關聯及其發展歷程的變化。所使用的研究工具為電腦化數學概念與程序覺知測驗。實驗的主體以電腦化的程序記錄受測學生的認知反應，包括作答正確性及其反應時間，以做為數學概念與程序覺知的觀察依據。因為需要記錄受試者的立即反應時間，若以傳統的手動計時器的紀錄方式，常會發生不容忽視的誤差而影響研究結果。該研究利用不同的「數學符號表徵方法」對認知反應的影

響，例如：簡單幾何圖形(□、Δ)取代常用的+或-符號；研究發現數學概念與程序覺知間的正向關聯，以及兩者在不同學童背景間的差異。數學概念與程序覺知的發展歷程，則各有不同趨勢，其所延伸的意涵很值得心理或教育研究參考。

五、結論

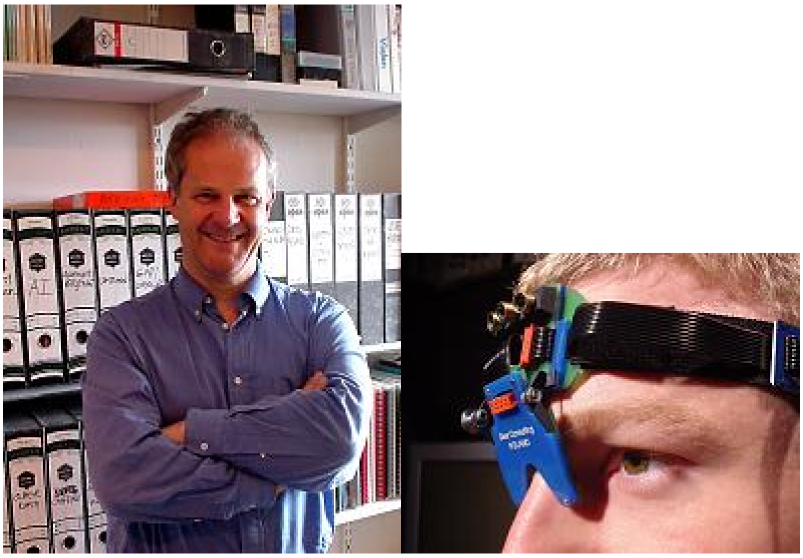
如果數學教育可以重頭來過，作者認為從「頭」而來的設計理念及教學措施等，絕對會是個不錯的選擇。只是，從第一線教師的觀點而言，從認知神經科學的發現中究竟能對數學教育產生多少的協助？英國劍橋大學的學者 Dr. Goswami 也是此次訪問的重要對象之一，她所主持研究中心就稱為 Centre for Neuroscience in Education，雖然 Dr. Goswami 的大學與博士學位的主修領域分別為實驗心理學與發展心理學，但是她也是合格的小學教師(Postgraduate Certificate in Education Primary Level)，除了在認知神經領域的發表外，她也陸續發表了教育與認知神經科學如何合作的論文。她認為教師們對於認知神經科學的發展相當重視，也願意學習與運用認知神經科學的新發現到教育現場中。反倒是認知神經科學家們所提供的訊息太著重於實驗操作的細節、太瑣碎，教師們普遍覺得需要更多大方向的引導以及明確可行的措施(Goswami, 2006)。

事實上，目前人們對於認知神經科學的了解中，還是充斥著許多如同神話(myth; Goswami, 2004)一般的迷思概念，這些迷思概念甚至可能對許多教育作為產生重大影響，例如：OECD (2002)與 Goswami (2004)就分別指出了至少三個以上的關鍵錯誤概念，第一個是對左、右腦所扮演的不同功能的迷思，第二個是對大腦「發展關鍵期」(critical periods)的錯誤理解，最後則是有效率的教育預防措施必須發生在神經元的突觸發生時的迷思。這些長久以來的想法其實早有實驗可以證實其謬誤，只是它們依然常被錯誤地解讀及傳播著。

相對於這些迷思，比較正確的解讀應該是大腦的結構雖然大致可因其分別所負責的不同認知功能而區分為功能區塊；但是，區塊間的聯結與合作的重要性並

不小於區塊本身，也就是，大腦的結構區塊並不是獨立運作的。加上大腦功能結構其實也可因神經元的可塑性(cortical plasticity)而擁有相當程度的彈性，並非全然沒有發展的可能性。另外，大腦認知發展的早期階段 --「發展關鍵期」，一般都被公認為相當重要， 但是大腦在這些重要的認知發展階段之外，並不代表就沒有學習機會。事實上，Dr. Dehaene 的研究室中的學者 Felipe Pegado 所正在進行的研究(Pegado, 2009)就是試圖利用掃描大腦的影像技術以驗證教育在學習者的大腦中所產生的效果。這類研究的成功，除了可以證實教育對大腦所產生的影響力之外，也提供了大腦的改變或發展並不會受限在某個階段的有效例證。對於關心教育測驗與評量的研究領域或人們而言，似乎也可以間接開啟了一個全新的教育成效檢測方法的可能方案。要是有一天數學教育成就測驗的進行也是藉由對大腦的活動的直接觀察而得，那可就真的就是從「頭」開始的數學學習與教育了。

這次的訪問的豐富收穫或學術上的刺激，大概讓作者興奮的昏了頭，也忘了自己是誰，尤其是受了 Dr. Roger Carpenter (Department of Physiology, Development and Neuroscience, University of Cambridge)的感染，他及同事們組裝了自製的 saccadometer（眼睛跳動的計量器），既方便又好用。雖然作者也怕東施效顰，但是 Call me stupid or crazy or whatever！作者還是大膽地進行組裝自製「眼動追蹤器」的工程，當然沒有商業版的精準度。但是，也有一些初步的成功，它可以透過眼動控制一些程式、也可以記錄一些簡單的眼睛移動的軌跡等。也許哪天也可以像 Dr. Carpenter 用自己組裝的儀器進行一些實徵研究的觀察；不過，從「自編測驗」的觀點來看，自製眼動追蹤器的信、效度的確認大概又會是個大難題了？



http://www.neuroscience.cam.ac.uk/directory/profile.php?RogerCarpenter

參考文獻

Beddington, J., Cooper, C.L., Field, J., Goswami, U., Huppert, F.A., Jenkins, R., Jones, H.S., Kirkwood, T.B.L., Sahakian, B.J., & Thomas, S.M. (2008). The mental wealth of nations. Nature, 455, 1057-1060.

Butterworth, B. (2000). The Mathematical Brain. London: Macmillan.

Butterworth, B. (2002). Mathematics and the Brain. Opening Address to The Mathematical Association, Reading: April 3rd 2002.

Butterworth, B. (2003). Dyscalculia Screener. London: GL Assessment. http://shop.gl-assessment.co.uk/home.php?cat=314

Cappelletti, M., Butterworth, B., & Kopelman, M. (2001). Spared numerical abilities in a case of semantic dementia. Neuropsychologia, 39(11), 1224-1239.

Connor, S. (2008). Number blindness' more common than dyslexia. The Independent, Science.

http://www.independent.co.uk/news/science/number-blindness-more-common-than-dyslexia-842781.html

Dehaene, S. (1997). The number sense. New York: Oxford University Press.

Dehaene, S. (2009). Origins of Mathematical Intuitions: The Case of Arithmetic. Annals of the New York Academy of Sciences, 1156, 232–259.

Feuer, M.J., Towne, L., & Shavelson, R.J. (2002). Scientific Culture and Educational Research. Educational Researcher, 31(8), 4–14.

Foresight Mental Capital and Wellbeing Project (2008). Mental Capital and Wellbeing: Making the most of ourselves in the 21st century: Final Project Report. The Government Office for Science, London.

Goswami, U. (2004) Neuroscience and education, British Journal of Educational Psychology, 74, 1–14.

Goswami, U. (2006). Neuroscience and education: from research to practice? Nature Reviews Neuroscience, 7, 406-413.

John, E.R., Karmel, B.Z., Corning, W.C., Easton, P., Brown, D., Ahn, H., John, D., Harmony, T., Prichep, L., Toro, L., Gerson, I., Bartlett, F., Thatcher, F., Kaye, H., Valdes, P., & Schwartz, E. (1977). Neurometrics, Science, 196, 1393-1410.

No Child Left Behind Act of 2001, Pub. L. No. 107–110.

OECD (2002). Understanding the brain: Towards a new learning science. Available online from oecd.org

Pegado, F. (2009). Education shaping the brain: illiterates research. Presented at the Seminar of INSERM-CEA Cognitive Neuroimaging Unit, Aug. 27, 2009.

Rose, S. (1998). Downloaded at birth. NY: The New York Times. February 8, 1998.

Wilson, A. J., Dehaene, S., Pinel, P., Revkin, S. K., Cohen, L., & Cohen, D. (2006a). Principles underlying the design of “the number race”, an adaptive computer game for remediation of dyscalculia. Behavioral and Brain Functions, 2(19).

Wilson, A. J., Revkin, S. K., Cohen, D., Cohen, L., & Dehaene, S. (2006b). An open trial assessment of “the number race”, an adaptive computer game for remediation of dyscalculia. Behavioral and Brain Functions, 2(20).

Yang. C.C., & Chen, L.T. (2008). Cognitive Developments of Mathematical Conceptual & Procedural Awareness: A Computerized Neural Responses Study. Journal of Educational Research and Development, 4(4), 119-148.

數學史融入國小數學教學之實作研究－以分數乘、除法為例

蔡幸霓[1]、蘇意雯[2]

桃園縣大成國小[1]、台北市立教育大學數學資訊教育研究所[2]

摘要

本研究針對國小六年級學童進行數學史融入數學教學實驗，目的是希望能藉由在課堂中融入數學史，讓學生接觸到數學的多元面向，進而對數學學習有所幫助。本研究選擇「分數乘、除法」作為實驗單元，設計出相關數學史學習工作單八張，於課堂進行實作。實驗對象為國小六年級學生，人數共計六十六人。實驗組三十三人安排接受數學史融入數學教學，控制組三十三人則接受無數學史融入的教學。研究資料經過統計分析後，發現在數學學習成就總體表現上，雖然沒有達到顯著的差異，但實驗組的平均分數較控制組為高。至於在數學學習態度方面，顯示出數學史融入數學教學的實施能有效提升學生的學習態度，並且對於學生在「數學探究動機」的面向上幫助最大。另外，從實驗組學生的意見調查表中，也顯示學生對於數學史融入數學教學的方式抱持著肯定的態度。最後，本文對於數學史融入「分數乘、除法」教學之實作提出反思及建議，提供有意實施數學史融入數學教學的教師做為參考。

關鍵字：數學史、數學史學習工作單、分數乘、除法

通訊作者：蘇意雯 yiwen@tmue.edu.tw

壹、前言

在九年一貫數學學習領域的基本理念中，提及了數學史的重要性：「*教師教學裡，引進與主題相關的數學史，對學童學習會有很正面的意義，尤其能協助學童抽象觀念具體化，因為不論在科技應用層面或思想突破方面，數學重要概念的演進確有其實用面考量，因此提供具啟發性的數學史方面的讀物實屬必要。*」（教育部，2003），但是在國小階段，真正嘗試將數學史融入數學教學的例子並不多見。以「數學史」為關鍵字搜尋全國博碩士論文資訊網所顯示的 30 筆資料來說，有關數學史融入高中、職教學相關論文有 10 篇，數學史融入國中教學相關論文有 9 篇，另外數學史融入國小教學相關論文卻僅有 2 篇。另外以國內的數學史專門期刊《HPM通訊》[1]而言，其中數學史融入國小教學相關文章也僅有 1 篇，由此可見，在國小階段實施數學史融入數學教學，仍是一個有待開發的領域。

當然，在教學中融入數學史，最終目的仍是希望能對學生的學習有所幫助。從歷年的大型國際評比中，我國學生在數學成就上皆有突出的表現，但是台灣學生對數學的喜好態度卻相對低落[2]。從學童入學開始，數學科就在課程中佔有舉足輕重的地位，但是有很多的學童卻排斥數學，恐懼數學，這樣的結果，是所有在職教師所不樂見的。那麼要如何幫助學生呢？是否可以從學生最喜歡的聽故事著手，將數學史融入數學教材中，讓孩子了解數學的起源與生活化，並藉由對數學史的認識，讓孩童感受到數學是人類的活動，與我們生活息息相關，進而產生興趣，從而樂於學習。由於對小學生來說，分數是一個困難的課題。許多研究也顯示，學習分數為兒童數學發展上的嚴重障礙（Kerslake, 1986）。因此，基於

[1] 《HPM 通訊》為台灣師大數學系洪萬生教授於 1998 年所創辦，每年出刊十次，創刊目的是利用數學史的研究成果、以及數學史與數學教育的互動，提升台灣數學教師的教學品質與學生的學習成效。

[2] 以 TIMSS（Trends in International Mathematics and Science Study）2007 為例，台灣八年級學生數學成就位居首位，四年級學生排名第三。但是台灣學生對數學學習的正向態度及自信心卻明顯低於國際平均成績。

上述考量，本文設計了「分數乘、除法」數學史學習工作單，以了解將數學史融入數學教學之中，對學生的數學學習成就與數學學習態度的影響。

貳、數學史與數學教學

從 1970 年代初，將數學史融入教學，就逐漸開始受到國際上的重視，並成立專門的研究小組－HPM。所謂的 HPM(International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics，數學史與數學教學的關聯之國際研究群)，是隸屬於國際數學教育委員會的一個研究群，它的組成動機是出自對於數學教與學之強烈關懷，希望藉由數學史與數學教育的互動，提升數學教師的教學品質與學生的學習成效。

對於數學史融入教學的重要性，洪萬生(1984)認為將數學適當地嵌入歷史的脈絡之中，讓它們接上各自生命的源頭，可進一步啟發學生理解數學是如何的「有用」，如何在歷史中與其他學問互相聯繫。通過數學史，我們可以向學生強調數學是如何的演化、如何的有用以及如何地擁有「文化內涵」。至於在教學的運用上，教師在進行教學設計之時，應先體會教科書教材之精神，尋找數學史料後再加以適當剪裁，經過自我詮釋後方可進行教學實作（蘇意雯，2007）。如此將數學史運用於數學教學，我們認為可以有下列四種好處：

（一）促進學生的學習動機

Fauvel(1991）認為數學史融入教學可促進學生的學習動機、改變學生對數學的感覺，使數學不再顯得那麼嚇人。蕭文強(1992)也提到，將數學史融入教學中，可以引發學習動機，從而使學生(及教師本人)保持對數學的興趣和熱情。關於在國小教學上的研究，賴姝秀(2003)以小二為對象，將數學史融入教學，在課堂一開始，利用數學家的小故事，引起學生動機。研究結果發現，喜歡數學的人數比例由原本的 42.9%提升至 75.1%。

（二）為數學平添“人情味”

Fauvel(1991)認為使用數學史可以給予數學一個具有人性的一面。蕭文強(1992)認為，數學史可使數學易於親近，也使學生明白前人創業的艱辛，並且明白不應把自己碰到的學習困難歸咎於自己的愚笨。教師也可從歷史發展中的絆腳石瞭解學生學習困難，可以參考歷史發展作為課題安排的指引。Matthews(1994)也提到歷史能讓科學課程的內容人性化，減低抽象化的程度，使課程較為生動。

（三）幫助概念的理解

蕭文強(1992)認為，了解數學思考發展過程，能增進理解。對比古今，能更好明白現代理論和技巧的優點。Fauvel(1991)認為，向學生展現概念的發展過程，可以幫助他們了解概念，更可以比較古代與現代，以確立現代方法的價值。更早，戴久永(1979)也認為數學史可以把前人種種努力探求真理的史實與方法娓娓道來，從問題的起源，發展經過到新觀念的建立，非常詳盡的引導讀者看清問題的來龍去脈。

（四）提供進一步的學習

Fauvel(1991)認為數學史可以提供學生一個研究的機會，並可以鼓勵學習敏銳的學生將眼光放遠。蕭文強(1992)則認為，數學史滲透多元文化觀點，可以了解數學與社會發展的關係，提供跨合作的通識教育，也可以提供學生進一步探索的機會和素材。

雖然數學史融入數學教學對學生有所幫助，但是對在職教師而言，以說故事的方式切入，似乎是最容易著手的，那麼還有哪些可行的方式呢？其實除了講述數學家的軼聞趣事或言行，我們還可以設計學習工作單介紹數學概念的歷史發展、配合歷史背景的說明，再輔以數學問題。工作單也可以涵蓋數學議題的討論、今昔解法或處理方式的比較。甚至我們還可以編寫數學史劇本與戲劇活動、做數

學史動畫的欣賞。當然，在網際網路盛行的今日，也可以讓學生上網搜尋有趣的數學史料做成報告，發表分享(Fauvel，1991；蕭文強，1992；洪萬生，1998)。上述種種，都是在職教師有意投入數學史融入數學教學行列，一些具體可行的方式。

参、進行實作

一、研究工具

為達到本研究之目的，所採用的研究工具包含了「數學史學習工作單」、「數學學習態度量表」、「數學學習成就測驗」、「實驗組數學學習回饋問卷」，其中，數學史學習工作單是本研究中，數學史融入教學的重要工具，主要的設計方式以模組概念設計，讓每一張學習工作單可以分開獨立教學，整合又可以建立整體單元的概念。當然，我們要謹記在心的是學習工作單必須對應單元的能力指標，才不會「為了融入數學史而融入」，忽略了主要的教學目標。在下一段落，我們將對「分數乘、除法」學習工作單的設計理念及內容，做重點介紹。

根據教科書的編排，「約分」是分數乘法的活動之一，因此第一張學習工作單(参見附錄一)，先介紹《九章算術》中的約分術—更相減損法，提供學生「約分」的另一種方法，以求出最大公因數。接著，以講故事的方式介紹《九章算術》的內容以及為其作注解的數學家劉徽，讓學生得以認識古代數學文本及大師。

當然，講到中國的「更相減損法」，就不得不提及西方的「輾轉相除法」。因此第二張學習工作單(参見附錄二)，我們讓學生欣賞完中國的數學發展後，進一步認識西方的數學文化。在此我們鋪排了歐幾里得的生平小傳，提及「幾何學無王者之道」的故事和《幾何原本》的介紹，以及這部書在中國的傳播經過，讓學生領略數學文化交流的意義。

第三張學習工作單，主要是藉由前面所提到的小故事，讓學生發表他們的感想，以及對於念書態度的反思。第四張、第五張、第六張學習工作單(參見附錄三)主要是複習五年級下學期所學的分數加、減法。先喚起學生先前所學記憶，再引入《九章算術》的合分術(分數的加法)、減分術(分數的減法)、乘分術(分數的乘法)和經分術(分數的除法)，請學生比較所學與《九章算術》的算法兩者之異同。至於第七張和第八張學習工作單主要是設計一些挑戰題，作為此一單元的總結。[3]

至於數學學習態度量表，本研究是引用宋藍琪(2007)改編自曹宗萍與周文忠(1998)之數學態度量表，並經過預試修改與專家討論後編製出來。量表共分為學習數學的信心、數學有用性、數學探究動機、數學焦慮等四個分量表。共 20 題，包含正向試題 11 題，負向試題 9 題，若量表試題為正向題，則學生作答「非常同意」者計 4 分，「同意」者計 3 分，「不同意」者計 2 分，「非常不同意」者計 1 分；若量表試題為負向題，則學生作答「非常同意」者計 1 分，「同意」者計 2 分，「不同意」者計 3 分，「非常不同意」者計 4 分。四個分量表分數之總和為總量表之得分，得分越高，代表受試者態度越積極，反之則越消極。

關於數學學習成就前測，研究者是以兩組學生在五年級下學期兩次月考的數學平均成績作為數學成就測驗前測分數。此外，數學學習成就後測是以研究者自編的「數學學習成就後測卷」在教學實驗後實施。此份試卷分成概念性瞭解、程序性知識和解題三個層面，以 Cronbachα 係數來考驗內在信度，得到的 α 係數為 .824。除了諮詢專家以及製作雙向細目分析表外，研究者並採用 Pearson 相關係數分析。把成就測驗中的「概念性瞭解」、「程序性知識」、「解題能力」任意兩個變項關聯情形進行比對；也將每個變項與量表總體進行比對。本態度量表的 Pearson 相關係數分析中，在顯著水準為.01 時，任意兩個變項進行比對均達

[3] 關於設計數學史學習工作單所參考之數學史素材，請參閱附錄四。

相關顯著；每個變項與量表總體比對也達相關顯著，因此本試卷符合效度標準，可用來測驗。

二、研究對象及設計

本文之研究對象為六年級的兩班學生，國小為導師制，為了考量研究與調查方便，並讓研究的教師控制變項影響降到最低，因此收集各班五下兩次段考的數學平均成績，進行獨立樣本 t 考驗，以統計結果為依據來選取另一班為控制組。研究者任教的班級為實驗組，計 33 人，採用數學史融入數學教材的教學；另一班為控制組，計 33 人，採用無數學史融入教學法。全部共 66 名學生為正式樣本，且皆由研究者任教，研究者接觸數學史後，深深為數學的文化面向所打動，因此希望藉由數學史融入數學教學，能改變學生對於數學的看法，也能對其學習有所幫助。

爲了訪談需求，利用上述研究樣本，將五年級下學期兩次月考的數學成績分數進行高、中、低分群的分組(高、低分群學生人數均佔所有學生人數的 27%)，三個分群的人數分別為 9 人、15 人、9 人。決定教學單元之後，收集相關文獻與文本，編製數學史學習工作單，並設計「數學學習成就後測卷」以進行預試，檢測工具的信度與效度。為了避免控制組學生對研究者不熟悉，而影響實驗結果，研究者進入控制組進行教學之前，於前一週與班級導師溝通進度，瞭解學生狀況，也先告知控制組學生上課模式，稍作互動。在實驗教學階段，針對實驗組與控制組實施「數學態度量表」前測之後，進行教學。在實驗教學結束，針對實驗組與控制組實施「數學態度量表」後測，與「數學學習成就」後測，並且為了進一步瞭解實驗組對數學史融入數學教學的想法，實驗組接受數學史融入數學教學之回饋問卷調查。

肆、研究結果與討論

一、數學史融入教學對學生數學學習成就的影響

在數學學習成就總體表現方面，研究者先針對實驗組與控制組的前、後測成績做共變數組內迴歸係數同質性分析，發現兩組學生前測與後測總分間的關係不會因為自變量(組別)的不同而有所差異，並未違反共變數組內迴歸係數同質性假定，因此接著進行獨立樣本單因子共變數分析。研究者將不同的教學法為固定因子，學生在數學學習成就後測的分數為依變量，數學學習成就前測的分數為共變量，統計結果 F 值為 1.559，P 值為 .216＞.05，表示兩組學生的數學學習成就不會因為所接受的教學法不同而有顯著差異，如下表所示。

表 1 兩組學生「數學學習成就量表總分」調整後平均數

組別	前測平均數	後測平均數	調整後平均數
實驗組	81.53	75.39	75.237
控制組	81.06	71.33	71.490

a.使用下列的值評估模型中的共變量：前測總分=81.2955

表 2 兩組學生「數學學習成就量表總分」之共變數分析檢定摘要表

變異來源	型Ⅲ平方和 (SS)	自由度 (df)	平均平方和(MS)	F 檢定 (F 值)	顯著性 (P 值)
組別	231.501	1	231.501	1.559	.216
誤差	9355.836	63	148.505		

P＞.05

二、數學史融入教學對學生數學學習態度的影響

研究者以「數學學習態度總體表現」，及四個分量「學習數學的信心」、「數學有用性」、「數學探究動機」、「數學焦慮」來分析兩組學生的學習態度

差異情形。首先，先針對實驗組與控制組的前、後測成績做共變數組內迴歸係數同質性分析，符合同質性的基本假定，才進行獨立樣本單因子共變數分析，以不同的教學法為自變量(固定因子)，學生在數學學習態度後測的分數為依變量，數學學習態度前測的分數為共變量，進行共變數分析；最後，與實驗組數學學習態度前、後測成績，使用成對樣本 t 檢定，進行比較。統計結果整理如下面兩表：

表 3 實驗組與控制組數學學習態度量表各層面平均數比較統整表

		總體表現	學習數學的信心	數學有用性	數學探究動機	數學焦慮
前測	實驗組	56.36	12.82	16.45	14.00	13.09
	控制組	58.09	12.91	17.61	14.82	12.79
	平均差	-1.73	- .09	-1.16	- .82	.3
後測	實驗組	59.09	13.18	17.03	15.33	13.55
	控制組	54.15	11.61	16.85	13.97	11.73
	平均差	4.94	1.57	.18	1.36	1.82
共變數分析是否達顯著		是	是	否	是	是

表 4 「實驗組」數學學習態度量表各層面前、後測表現統整表

		總體表現	學習數學的信心	數學有用性	數學探究動機	數學焦慮
前測	平均	56.36	12.82	16.45	14.00	13.09
	標準差	9.20	3.09	2.66	3.03	3.18
後測	平均	59.09	13.18	17.03	15.33	13.55
	標準差	9.48	3.42	2.67	2.86	3.61
平均差		2.73	.36	.58	1.33	.46
成對樣本 t 檢定是否達顯著		是	否	否	是	否

由上述表格我們可以得知，「數學史融入數學教學」對實驗組在數學學習態度上有顯著的正向幫助。此外，並對於實驗組的「數學探究動機」面向上最有影響。研究者認為這是因為數學史料提供了數學家的趣聞軼事，學生受到啟發，「數學探究動機」因而提高，數學學習態度也有所改變。由問卷得知，在所提供的史

料中，又以歐幾里得的故事最受歡迎，因為從中讓學生知道數學學習是沒有捷徑的，沒有辦法一蹴可幾。因此有的實驗組學生開始懂得每天運算數學，勇於前來問數學問題的學生也變多了，討論數學的情況也較為熱絡。至於控制組的分數退步，研究者經過反思，認為其原因可能是因為研究者的教學方式與原班導師大為不同，經常藉由課堂上隨機抽問學生來鞏固概念，因此降低學生學習數學的信心，上起數學課來顯得焦慮不安。研究者認為，若教學實驗的時間拉長，或許控制組這樣的反應會慢慢消失。

三、實驗組數學史融入教學意見調查表分析與討論

在「數學史融入教學意見調查表」中，包含了兩題封閉性問題、三題開放性問題，兩題封閉性問題，主要是了解實驗組學生對學習工作單內容設計之看法，作為下次設計學習工作單時的參考。由學生的回饋綜合整理，發現輕鬆的故事與難度適當的挑戰題受到學生們的歡迎，而學習工作單中某些難度過高的內容必須斟酌加以刪減。

三題開放性問題，主要是要深入瞭解學生在實驗教學之後，對「數學史融入數學教學」的想法。由學生的回饋綜合整理，發現 97%的實驗組學生都認為數學史融入「分數乘、除法」單元，讓他們可以使用不同方法來進行驗算、可以幫助記憶，印象較為深刻、也可以藉由歷史更瞭解數學、體會現代運算方式的價值。

另外，數學史的融入，也提升了 88%的實驗組學生對數學的好感，讓他們覺得數學不再只是數字與題目，也願意主動接觸數學，進而提升對數學的探究動機；還有學生認為這樣的上課方式會使自己更想上數學課，希望可以繼續實施。

四、訪談資料整理與分析

黃毅英(1998)認為量化的資料並不足以量度課程的達成，尤其數學史常常涉及學生的潛移默化與對數學的改觀，所以可以嘗試透過晤談進一步剖析學生態度

的轉變。也因此，本研究利用半結構式的訪談，從實驗組高、中、低分群各挑出兩位學生瞭解他們的想法，以彌補量化研究的不足。研究者以 SH、SM、SL 表示高、中、低分群，以數字代表座號，例如：SH01 代表高分群且班上座號 1 號學生的訪談內容，並將六位學生的訪談記錄，分為數學學習成就、數學學習態度、以及對學習工作單的建議來進行彙整。在數學學習成就部份，發現了以下幾點情形：

1.某些學生排斥古文閱讀，導致影響學習意願。

SM18：*我還蠻喜歡裡面的歷史，但是不喜歡裡面的題目，都是古文太奇怪了。…古文的題目下面最好都翻譯好，就不會看不懂了。*

2.數學史融入數學教學可以幫助高成就的學生拓展視野，比較古今方法的異同，甚至增加作答的自信心。

SH03：*有幫助，學了很多不同的算法，可以依據題目來選擇，數字大一些的就可以用輾轉相除法或更相減損法，會比較快算出最大公因數，讓我對算出來的答案更有自信。*

3.對低成就的學生來說，數學史融入數學教學對學習分數乘、除法運算有短暫的幫助，但依然有學生因為死記公式而搞混分數乘、除法運算。

SL21：*有聽懂，但是現在已經忘記了。*

4.配合數學史講解運算概念，的確能吸引學生的專注力，在當下學生都可聽懂。

SM18：*有短暫的幫助，因為以前就知道用輾轉相除法很快，補習班老師教的，那時候覺得很好玩，後來學習單裡面告訴我原來輾轉相除法以前就有，就很有趣。*

至於數學學習態度部份，量化數據顯示數學史融入數學教學，對實驗組學生有正向影響，再經過實際訪談之後，整理影響之原因為：

1.數學家的軼聞趣事影響了學生的讀書態度，提升了學生對數學的探究動機，因此他們會每天複習學校所學、弄懂不會的題目。

SH03：*歐幾里得，讓我知道學習並不是真的要得到實際的物品，而是為了增加自己的知識，讀書是為了自己。*

SL21：*劉徽的故事，因為劉徽總是會驗算舊法，追根究柢，不會完全的相信，那精神值得我去學習;所以我現在遇到不會的題目，一定都會問老師或同學。*

2.古代數學文本讓學生瞭解到數學的有用性，例如土地面積的計算，以及《九章算術》是與當時社會相關的數學應用問題集等等。

SM10：*因為學習單中說到，《九章算術》裡的題目都是跟日常生活有關，老師也說數學是因生活所需而產生的，所以我現在覺得數學比較有用。*

3.數學史融入數學教學使枯燥的數學課變得較為生動有趣，減低了上課壓力，讓數學課不再那麼嚇人。

SH06：*我覺得比較有趣，學習單的內容我都會先翻到後面讀，有時候會先算裡面的題目。希望以後也可以加入數學史。*

最後，關於學習工作單部份，學生們也提出了希望將工作單中的古文翻譯成白話文、增加適當難度的挑戰題、減少工作單中的文字說明等等意見，我們將於文後加以說明。

伍、反思與建議

有關數學史學習工作單的設計方面，依據實驗組學生的教學意見調查表，以及實際訪談學生之後，我們認為有幾點可以改進：

1.應該視學生程度設計學習工作單，若學生為高年級，可說明古文中的關鍵詞，並切入數學史的思維；若學生為中低年級，可將古文翻譯成白話文，呈現於學習工作單中，避免學生因排斥古文而影響學習的意願。

2.學習工作單中，每頁的內容文字勿偏多；課本可與學習工作單相互配合使用，也可將故事融入課本內容當中。

3.挑戰題需難度適中，甚至可在設計之前進行預試，如此將避免設計過難導致無法達到設計目標的情況發生，也可提供「大多數」學生思考的機會，增加學生的自信心。

此外，雖然實驗組中有 97%的學生在教學意見調查表中表明，數學史融入數學教學對分數乘、除法運算的學習有所幫助，但是經過統計分析之後，實驗組與控制組學生的學習成就後測平均未達顯著差異。由學生回饋、訪談中，我們反思可能原因如下：

1.教師以數學史融入講解運算概念，的確能吸引學生的專注力，可是雖然當下學生都能聽懂，但由於沒有持續強調，學生一樣容易忘記。

2.分數乘、除法運算需強調計算練習，在同樣的教學時間與教學進度下，實驗組學生比控制組學生多出學習工作單此項教材，而控制組學生在多出的課堂時間中進行習題演練，有較多練習的時間。

承上所述，經由實作及反思，研究者認為，有關分數乘、除法運算單元，較好的教學方式應為數學史融入教學當中，且「運算概念、運算練習並重實行」，如下圖所示。

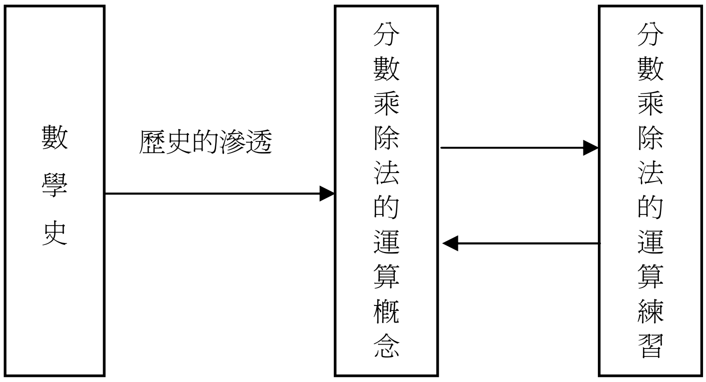


圖 1 分數乘、除法運算教學架構圖

「分數乘除法的運算概念」與「分數乘除法的運算練習」是分數乘、除法運算教學的重要支架。教師進行「運算概念」講解時，需先經過數學史的滲透，以吸引學生的專注力，加深印象，讓教學更成功。當了解概念後，學生進入實際的運算練習，這裡是雙向的來回過程；也就是說，當學生在實際運算練習後，若具有運算錯誤類型，教師應該回到經過數學史潤飾的「運算概念」支架，再次講解並強調運算概念，避免學生因錯誤而死背運算法則。

本研究以「分數乘、除法」單元為例，設計出數學史學習工作單，經過實驗教學之後，發現學生的學習動機因此增強，也對學生的學習態度有相當正面的影響。由研究的結果顯示出，在國小階段將數學史融入數學教學，是一個可行的方向。但是如何尋找適合的文本，以及恰當的剪裁史料方便教師教學，就需要大家一齊努力，去充實國小數學史相關教學的資料庫，這也是日後有心從事數學史融入數學教學的教師們所要繼續關注的課題。

參考文獻

宋藍琪（2007）。*融入數學史教學對小五學生數學學習成效之實驗研究*。台中：國立台中教育大學數學教育學系在職進修教學碩士學位班碩士論文(未出版)。

洪萬生（1984）。數學史與數學教育。*科學月刊，15(5)*，371-375。

洪萬生（1998）。HPM 隨筆(一)。*HPM 通訊，1(2)*，1-2。

洪萬生（2006）。*此零非彼 0−數學、文化、歷史與教育文集*。台北：台灣商務印書館。

袁小明（2003）。*數學史*。台北：九章出版社。

曹宗萍、周文忠(1998)。國小數學態度量表編製之研究。*八十七學年度教育學術研討會論文集*，3，1211-1246。

教育部（2003）。*國民中小學九年一貫課程綱要：數學學習領域*。台北，教育部。

黃毅英（1998）。從課程角度探討數學史在課堂中之運用。*數學教育，6*，8-9。

賴姝秀（2003）。*古代數學文本融入國小二年級數學教學之實驗研究*。國立台中師範學院數學教育學系研究所碩士論文。

戴久永（1979）。閒話數學史。*數學傳播，1(4)*，24-28。

蕭文強（1992）。數學史和數學教育：個人經驗和看法。*數學傳播，16(3)*，23-29。

蘇意雯（2007）。運用古文本於數學教學－以開方法為例。*台灣數學教師(電子)期刊，9*，56-67。

Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the Learning of Mathematics, 11(2)*, 3-6.

Fauvel, J., & Van Maanen, J.(Eds.) (2000). *History in mathematics education: The ICMI study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Kerslake, D. (1986). Children’s Perception of Fractions; *The 10th International Conference for the Psychology of Mathmatics Education*.

Matthews, M. R. (1994). *Science teaching: The role of History and Philosophy of Science*. N. Y.: Routledge.

附錄一

約分

將分數化簡為最簡分數，在西元前，不論是西方還是東方都已經有一套做法，什麼先不多說，先來欣賞古人們的智慧吧！

中國的更相減損法

★ 大約距離現在兩千一百年左右，中國有本叫《九章算術》的數學專書，是世界上最早有系統敘述分數算法的著作。包含了約分、通分、合分（分數加法）、減分（分數減法）、乘分（分數乘法）、經分（分數除法）、課分（分數比大小）、平分（求分數平均數）等分數運算法則的記載。*其中約分術又稱「更相減損法」*。

★《九章算術》約分術曰：

可半者半之；不可半者，副置分母、子之數，以少減多，更相減損，求其等也，以等數約之。

~~~翻譯成現代話嚐~~~

當分子分母可同時減半就先減半。

不可以同時減半時，分子分母反覆用大去減小，當兩數相等時，以此數去除分子分母。

★方田章第 5 題：今有十八分之十二。問：約之得幾何？

$$\begin{matrix}12\\18\end{matrix} \xrightarrow{\text{以上減下}} \begin{matrix}12\\6\end{matrix} \xrightarrow{\text{以下減上}} \begin{matrix}6\\6\end{matrix}$$

18−12＝6　　12−6＝6　　上下都是 6

得到等數 6，再用 6 去除分子分母，得到 $\frac{2}{3}$

小試身手

1. 想想看例題中，求出來的「6」，是分子分母的什麼呢？再回想第一單元所教的方法，你比較喜歡哪一種？為什麼？

____

____

2. 方田章第 6 題：今有九十一分之四十九。問：約之得幾何？請用課本的方法和更相減損法各做一次。
~~~

加油站

九章算術

在《九章算術》成書以前，中國已經有年代久長的數學發展史，但史料不多。

在書中收錄了 246 個問題，每個問題之後，有答曰和術曰，都是與當時的實際生產生活和社會經濟環境有關係的應用題。這種問題集的形式，對後來中國古代數學著作的影響很大，大多數的中國古代數學著作也是用這種形式寫成的。九章分別是方田、粟米、衰分、少廣、商功、均輸、盈不足、方程、勾股等九章。

但因為《九章算術》中只是列出了例子及一般的算法，卻很少有任何解釋和說明，所以有很多人曾為《九章算術》作注，以補充這一點。而有些注解給《九章算術》的算法提出了簡括的證明，證明算法的正確性，當中較有名的便是劉徽。

《九章算術》曾流傳到朝鮮和日本，對當地的古代數學的發展有很大的影響。後來，這部中國古代數學的重要著作受到了世界各國科學界的重視。《九章算術》的成就可分成算術、幾何和代數三方面，而這些成就不僅在中國數學史上是輝煌燦爛的一頁；即使放在世界數學史中，這些成就也是十分傑出的。

劉 徽

劉徽是古代一位布衣數學家，生卒年代不詳。他在《九章算術》序言裡說：”徽幼習《九章》，長再詳覽。”可見他自幼長期潛心研習，從事數學創作。他認為數學工作者不僅要能依據相傳的計算方法解決問題，也應該向各方面去探索真理。他在《九章算術注》中糾正前人的錯誤，並創立了許多新法，是自己的獨創，十分有科學家的精神。但由於他在生前沒有顯赫的社會地位，所以名不見經傳。

想一想

1. 劉徽的學習態度有什麼地方值得你去學習呢？

____

____

2. 為什麼這一個單元，剛開始就要教你約分的方法，難道一定要約分嗎？不約分可以嗎？會有什麼結果。

____

____

附錄二

約分

中國的更相減損法，在西方稱為輾轉相除法！出現在一本距離現在約 2300 年左右的書，叫做「幾何原本」！

西方的輾轉相除法

★　在這個世界上，除了《聖經》以外，擁有最多讀者的大概要算是歐幾里得的《幾何原本》了。說不定比《聖經》的讀者還要多。我們還將歐幾里得的《幾何原本》美譽為「幾何學的聖經」呢！

★　《幾何原本》共有十三卷，在 1482 年以前都是以手抄本流傳，一直到印刷術的發明，在義大利威尼斯首次出現《幾何原本》拉丁文的印刷版(右圖)。到目前為止已經印刷超過一千版次了！！

★第七卷命題一

設有不相等的兩數，從大數中連續減去小數直到餘數小於小數，再從小數中連續減去餘數直到小於餘數，這樣一直做下去，若餘數總是量不盡其前一個數，直到最後的餘數為一個單位，則該兩數互質。

而我們現在是這樣子算的：

2	56	24	3
	48	24	
	8	0	

是 56 和 24 的最大公因數 → 8

★咦？這跟約分有什麼關係阿？聰明的你一定知道！

____

小試身手

現在，請你用最喜歡方法，找出下列分數的最簡分數！

1. $\frac{52}{80}$　　2. $\frac{26}{52}$　　3. $2\frac{108}{111}$

★說說看你選擇此方法的原因~~~

____

____

加油站

歐幾里得(Euclid)的小故事

歐幾里得是古希臘時代的數學家，根據後人的推論，他大約出生於西元前 300 年，死於西元前 275 年。關於他的生平，資料很少，但卻流傳著兩個小故事：

★有一位學生剛學習幾何，就問歐幾里得：

「老師，學了幾何之後，可以得到什麼？」

於是歐幾里得叫來了僕人，說：

「給他三個錢幣，因為他想在學習中獲取實際的利益。」

★希臘托勒密王向歐幾里得學習數學，覺得幾何非常難。一次，他問歐幾里得：

「除了幾何原本以外，有沒有學習幾何的捷徑？」

「陛下，現在國家有兩種路，一種讓平民走的，另外一種是為國王陛下鋪設的。但是在幾何裡，沒有專為國王鋪設的大道。」

對《幾何原本》的稱讚

在《幾何原本》之前，所累積下來的數學知識，是零碎的、片斷的。而歐幾里得將這些知識組織起來，加以分類、比較，整理成一個嚴密的系統。有許多人在看過《幾何原本》之後，都對這本巨作稱讚有加！

★英國大哲學家羅素對《幾何原本》有如此的印象：

我在十一歲時，在哥哥的指導下開始研習歐幾里得的鉅著，回想當時目眩神迷，有如初戀一般，是我一生中難以忘懷的經歷。

★《大英百科全書》中這樣說：

現在，仍未有課本可以用來完全代替歐幾里得；相信在將來，也不會有。

幾何原本在中國

十七世紀初，《幾何原本》傳入了中國。義大利傳教士利瑪竇來到中國後，和明朝學者徐光啟一起翻譯《幾何原本》的前六卷，並在 1607 年北京出版，不少譯名都是那時候定下來的，例如：平行線、鈍角、直角、銳角。

徐光啟在為《幾何原本》寫序時，當中有一段寫道：

能精此書者，無一事不可精，好學此書者，無一事不可學。

可見徐光啟對《幾何原本》的內容十分推崇，他認為明白此書的內容之後，就可以通曉世務、就可以學會世上其他的學問，他甚至說道：

此書有四不必：不必疑，不必揣，不必試，不必改。

有四不可得：欲脫之不可得，欲駁之不可得，欲減之不可得，欲前後更置之不可得。

徐光啟也在序文中寫下他的願望，他說：

此書為用至廣，在此時尤所急需。余譯竟，隨偕同好者梓傳之，…竊一百年之後，必人人習之。

徐光啟希望在《幾何原本》出版後 100 年，人人都會學習這本書，但很可惜，這個心願卻落空了。過了整整 250 年後，在 1857 年，英國傳教士偉烈亞力和清朝學者李善蘭以同樣的合作方式，終於將《幾何原本》剩下的七卷內容譯成中文。

附錄三

暖身活動

在正式進入分數乘法之前，我們先來複習五下所學的分數加、減法，喚起大家的記憶！

1. 有一塊蛋糕，阿儒吃了 $\frac{5}{12}$ 塊，弟弟吃了 $\frac{3}{8}$ 塊，請問兩人共吃了幾塊蛋糕？請問兩人共吃了幾塊蛋糕？還剩下幾塊呢？

2. 接上題，隔天早上，爸爸吃了 $\frac{1}{18}$ 塊蛋糕當早餐，請問還剩下幾塊蛋糕？

九章算術中的合分 V.S.減分

◎ 《九章算術》合分術(分數的加法)曰：母互乘子，並以為實。母相乘為法。實如法而一。不滿法者，以法命之。其母同者，直相從之。

註：「實」是分子，「法」是分母。

方田章第 7 題：今有三分之一，五分之二。問：合之得幾何？

母互乘子：$3\times2=6$，$5\times1=5$

並以為實：$6+5=11$----實 ⇨ $\frac{11}{15}$

母相乘為法：$3\times5=15$----法

◎ 《九章算術》減分術(分數的減法)曰：母互乘子，以少減多，餘為實。母相乘為法，實如法而一。

方田章第 10 題：今有九分之八，減其五分之一。問：餘幾何？

（根據上題，討論看看是什麼意思）

母互乘子： ⇨

以少減多，餘為實：

母相乘為法：

小試身手

1. 方田章第 8 題：又有三分之二，七分之四，九分之五，問：合之得幾何？

2. 方田章第 12 題：今有八分之五，二十五分之十六。問：孰多？多幾何？

分數的乘法

九章算術中的乘分

★真分數×真分數

《九章算術》乘分術(分數的乘法)曰：母相乘為法，子相乘為實，實如法而一。

方田章第 19 題：今有田廣七分步之四，從五分步之三。問：為田幾何？

註：「廣」是長方形田地的寬，「從」則是長。

母相乘為法：7x5=35 ⇨ $\frac{12}{35}$

子相乘為實：4x3=12

實如法而一：將結果換成帶分數

$$\frac{4}{7}\times\frac{3}{5}=\frac{4\times3}{7\times5}=\frac{12}{35}$$

答：三十五分步之十二

★帶分數×帶分數

《九章算術》大廣田術曰：分母各乘其全，分子從之，實。分母相乘為法。實如法而一。

方田章第 24 題：今有田廣三步三分步之一，從五步五分步之二。問：為田幾何？

分母各乘其全，分子從之，實：

3x3＋1=10 → 10x27=270

5x5＋2=27

⇨ $\frac{270}{15}=18$

分母相乘為法：3x5=15

實如法而一：將結果換成帶分數

$$3\frac{1}{3}\times5\frac{2}{5}$$
$$=\frac{10}{3}\times\frac{27}{5}$$
$$=\frac{270}{15}$$
$$=18$$

答：18 步

小試身手

1. 方田章 20 題：又有田廣九分步之七，從十一分步之九。問：為田幾何？

$$\frac{7}{9}\times\frac{9}{11}=\frac{7\times\cancel{9}}{\cancel{9}\times11}=\frac{7}{11}$$

★ 若先約再乘，
會讓計算的數目小一些。

2. 方田章 26 題：又有圭田廣五步二分步之一，從八步三分步之二。問：為田幾何？

註：圭田，三角形之田畝

3. 有兩箱水果，甲箱重 $3\frac{3}{5}$ 公斤，乙箱的重量是甲箱的 $1\frac{1}{4}$ 倍，乙箱有多重？

分數的除法

九章算術中的經分

方田章第 18 題：又有三人三分人之一，分六錢三分錢之一、四分錢之三。問：人得幾何？
術曰：以人數為法，錢數為實，實如法而一。有分者通之；重有分者同而通之。

★ 用通分來計算

以人數為法：人數當除數
錢數為實：錢的總和當被除數

$$\left(6\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\right)\div 3\frac{1}{3}$$

有分者通之；重有分者同而通之：以通分來計算分數的除法

$$\left(6\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\right)\div 3\frac{1}{3}=\frac{85}{12}\div\frac{10}{3}=\frac{255}{36}\div\frac{120}{36}=\frac{255}{120}=2\frac{15}{120}=2\frac{1}{8}$$

答：人得二錢八分錢之一

★ 倒數相乘

後經劉徽補充，另一個法則：法分母乘實，實分母乘法。
即為將除數的分子分母顛倒，而與被除數相乘，完全與現在的算法相同!

$$\left(6\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\right)\div 3\frac{1}{3}=\frac{85}{12(\text{實分母})}\div\frac{10}{3(\text{法分母})}=\frac{85}{12}\times\frac{3}{10}=\frac{255}{120}=2\frac{15}{120}=2\frac{1}{8}$$

小試身手

1. 有沒有發現，《九章算術》方田章第 18 題，題目非常的不合理!在現實生活中，並不會有 $3\frac{1}{3}$ 人!所以請你動動腦，請用一樣的數字，想一個實際的情境，或一個故事問題，為《九章算術》改編一下。

____

____

____

2. 《九章算術》少廣章中，有一題是這樣的：
   今有田廣一步半，求田一畝。問從幾何？(1 畝=240 平方步)

3. 有塊三角形的田地，面積是 $2\frac{3}{5}$ 平方公分，已知底邊長是 $1\frac{4}{7}$ 公分，求底邊上的高是多少？

數學史學習工作單設計參考文獻

附錄四

李繼閔（1992）。《九章算術》及其劉徽注研究。台北：九章出版社。

李繼閔（2002）。九章算術校正。台北：九章出版社。

李儼、杜石然（1992）。中國古代數學簡史。台北，九章出版社。

李光淵編著, 岳巍譯（2005）。有趣的數學。台北：新視野圖書出版有限公司。

梁子傑（2005）。幾何原本導讀。台北：九章出版社。

郭書春 匯校（2004）。匯校九章算術。瀋陽：遼寧教育出版社。

錢宝琮（1964）。中國數學史。北京：科學出版社。

藍紀正, 朱恩寬譯（1992）。歐幾里得幾何原本。台北，九章出版社。

蕭文強（2004）。1.2.3…以外–數學奇趣錄。台北：書林出版有限公司。

中國數學教科書內容組織的比較研究：

以高中函數概念為例

黃興豐

常熟理工學院 數學系

摘要

在課程改革的大背景下，本研究以函數概念為例，對四種不同版本的數學教科書的內容組織（概念的引入，概念的定義，以及例習題）進行了比較。研究表明：(1) 各種教科書通過生活實例概括函數概念，把它既看作是一個“變量”，又當成是一種特殊的“對應”；(2)各種教科書對函數定義的敍述存在差別；(3) 對函數定義“三要素”的教學，四種教科書通過例習題作了不同程度的強調，不過有些方面還需要探討；(4) 各種教科書，依據課程標準，對反函數概念的處理各有獨到的方法。

關鍵字：數學教科書、函數概念、比較研究

通訊作者：黃興豐 xfhuang0729@gmail.com

壹、研究背景

數學教科書不僅要貫徹數學課程的基本理念與要求，而且應當有利於教師創造性地進行教學，有利於促進學生主動地學習和發展（教育部，2003）。因此，數學教科書對數學的教學具有重要的影響作用（Howson, 1995），被認為是聯繫“期望課程（intended curriculum）”和“實施課程（implemented curriculum）”的重要載體（Li, Chen, & An, 2009）。Mesa（2004）認為研究數學教科書可以瞭解以下問題：（1）通過教科書內容編排順序的教學，學生可以學到什麼？（2）通過解答教科書的練習題，學生可以學到什麼？（3）學生能否理解教科書中的數學概念？（4）教科書能否促進學生將來的數學學習？

在最近的十年，已經有許多學者開始關注中國數學教科書的國際比較研究（鮑建生，2002，Fan & Zhu，2007，俞聽，2008，Li, Chen, & An, 2009，張維忠，李芳奇，2009）。 2001 年教育部頒佈了義務教育階段數學課程標準，2003 年頒佈了普通高中數學課程標準，從此國內開始了 “一綱多本”的局面，不同版本數學教科書之間的比較研究也開始興起（王曉輝，赫曉玲，2007，薛紅霞，2008，袁志強，2009）。

在對數學教科書內容組織的研究中，我們首先選擇了函數作為一個具體的例子進行探索性地分析，主要是考慮到函數在數學發展中的重要地位。函數源自於 17 世紀科學家對運動的研究，隨後在數學上的採用，直接產生了微積分，成為微積分裏的中心概念。一直到 19 世紀為止，函數的概念在幾乎所有的數學工作中都占中心的位置（克萊因, 1983）。

1.1 中學數學課程中的函數

20 世紀以來，世界各國的中學數學內容也從以解方程為中心轉到以研究函數為中心（張奠宙，張廣祥，2006）。1908 年，Klein 首次提出中學數學應當以函數為中心（Kilpatrick, 1992）。20 世紀 50 年代，函數在中國中學數學課程中取

得核心地位（課程教材研究所, 2001）。函數概念在當前的數學課程中被分成兩個階段介紹。在初中階段首先以“變量”定義函數的概念，然後以此為基礎，高中階段再利用“集合”和“對應”再次定義函數的概念（教育部，2001，2003，上海市教育委員會，2004）。不過，當函數概念進入中學數學課程以後，引發了學生對此理解的諸多困難：（1）認為函數一定具有對稱的圖像；（2）以為函數一定是兩個變數之間的一一對應關係；（3）傾向于把函數定義為線性關係；（4）認為只有連續的圖像才有可能是函數圖像；（5）在函數的各種表示（解析式、圖像、列表）之間很難產生聯繫；（6）狹隘地理解函數符號表示的意義。（Leinhardt, Zaslavsky, Stein, 1990, Sajka, 2003，Vinner & Dreyfus, 1989）。

在數學中，特別是許多概念具有“過程（process）”和“對象（object）”的雙重性，這兩個側面有著緊密的依賴關係；而且形成一個概念，往往要經歷由“過程”開始，然後轉為“對象”的認知過程，最終兩者在認知結構中共存，共同發揮作用（Sfard,1991）。函數概念的提出，最初使用的是具有過程特徵的“變量觀點”，最後把函數定義為一種結構性的對象——有序數對的集合。而“對應觀點”的定義正好介於這兩者之間（李士錡，2001）。

1.2 教科書的研究範式

教科書的研究存在兩種相對的範式（Scriven，1967，豪森（Howson, G.），凱特爾(Keitel, C.)，& 基爾帕（Kilpatrick, J.），1992, Herbst，1995）。第一種是“內在”的範式，即探究教科書本身的特點。如文本結構特徵（Konior, 1993），數學推理模式（Stacey & Vincent, 2009），問題解決中的表徵（Mayer, Sims, & Tajika, 1995, Fan & Zhu，2007）。第二種是“外在”的範式，關注的是教科書的使用（範良火，陳靜安，朱雁等，2005，孔凡哲，史寧中，2008）或對學生所產生的效果（Österholm, 2005, 王曉輝，赫曉玲，2007）等。在本研究中，將採用第一種研究範式確定分析的框架，對教科書關於函數概念的內容組織展開研究。

貳、研究方法

2.1 教科書函數概念內容組織的分析框架

掌握數學概念不僅要理解概念的定義，而且還要和已有的知識和經驗結合起來，形成恰當的心理表徵（Vinner, 1991）。因此，在數學概念的教學中，應當努力尋找那些學生熟悉的又可以為他們提供“認知基礎（cognitive root）”的問題情境或已有知識（Tall, 1992）。研究教科書也就應當關注教科書中數學概念的引入和定義。同時，也應當分析相應例習題的意義和作用（Li, Chen, & An, 2009）。綜上所述，在本研究中分析教科書對函數概念內容的組織主要分成三個方面。

第一，研究教科書如何引入函數概念。數學課程標準提倡從實際問題出發，引導學生構建函數的一般概念（教育部，2003，上海市教育委員會，2004）。也就是說期望學生在具體情境中抽象出函數的概念，引導學生經歷“識別（recognizing）−發展(building-with)−建構(constructing)”的認識活動過程（Hershkowitz, Schwarz, & Dreyfus, 2001）。

第二，研究教科書如何定義函數。關於函數概念的定義一共有兩派：古典派（變數為基礎）和（現代派（或集合論派），他們對函數概念的處理方法如表 1 所示(斯托利亞爾，1984)。

第三，研究教科書中相應例習題的特點。與函數概念相關的例習題，根據其不同的考查目標可以分成以下各類：(1)判斷是否構成函數關係；(2)求定義域；(3)求值域；(4)求值（由自變量求函數值，或由函數值求自變量）；(5)函數舉例。如果某個例習題涉及多個考查目標，就同時記入相應各類。

表 1：函數概念的處理方法（引自數學教育學，斯托利亞爾，1984，pp. 252-254）

古典派	把函數解釋為變量。	如：一個變量，其數值隨另一變量變化而變化。它就叫做另一變量的因變量，或函數。
	把函數解釋為規律（或法則）。	如：一規律（法則），按它使自變量的值依賴於（對應於）所論因變量的值”它就叫做函數。
現代派	定義的不是函數本身，而只是“函數狀態”。*	如：設M和F是兩個非空數集，如果M中元素對應於一個且僅對應一個F中的元素，就說在M上定義了一個從F中取值的函數f。
	把函數說成法則或規律。	如：存在一個法則（或規律），使得按照這種法則對於一個集合中的每一個元素都指定另一集合的某一元素。
	把函數解釋成對應	如：函數是一種對應，在這種對應下，某集合X中的每個元素x對應于某集合Y的唯一元素y。
	把函數解釋成一種特殊的關係	如：關係 xFy ，其中 $x \in Y, y \in Y$ ，是函數關係，如果由它生成的序偶的集合是右單值的，即其中沒有兩個不同的序偶具有同一個第一元素。

*按照 Sfard（1991）的觀點，可以認為強調的是函數概念的過程側面。

2.2 研究對象

在國家教育部 2003 年頒佈高中數學課程標準之後，按照教育部課程標準編寫並通過審查的一共有六種版本的高中數學教科書——蘇教版(江蘇教育出版社出版)、人教版 A、B 版（人民教育出版社出版)、北師大版（北京師範大學出版社出版)、湘教版（湖南教育出版社）和鄂教版（湖北教育出版社)。其中，前四種使用的範圍相對而言比較廣（張唯一，李海東，2009)。再加上按照上海市教育委員會頒佈的上海市數學課程標準編寫的高中數學教科書——上教版(上海教育出版社出版)，目前全國一共有七種不同版本的高中數學教科書在中學同時選用。考慮到教科書使用的範圍、依據的課程標準，選擇了當前使用比較廣的的四種高中數學教科書作為研究的對象：上教版、蘇教版、人教版 B 版、北師大版（與其他版本不同的是，只有人教 A 版教科書把集合與函數概念合在一起作為一章。出於比較的方便，在人民教育出版社的兩個版本之間，選擇了 B 版教科

書作為研究對象)。

根據研究的框架。在四種教科書中,選擇了與函數定義、表示以及反函數(除了上教版把反函數概念作為單獨的一節內容,其他教科書把它放在對數函數一節中介紹)相關的內容進行比較分析(表 2),包括教科書函數一章的正文、例題(包括未解答的問題,如北師大版中"思考交流"欄目的問題)、習題、練習題、章末復習題。由於各個版本教科書中的與函數概念有關的選學部分、探究案例或課題內容互不相同,比較的意義不大,因此沒有包含在內。比如說,在函數所在章節,上教版的課題學習是"最大容器問題",蘇教版的探究案例是"鋼琴與指數曲線",人教版 B 版沒有安排課題學習,選學的內容是"用電腦作函數的圖像"北師大版則是"個人所得稅的計算"。

表 2:四種版本高中數學教科書中與函數定義、表示以及反函數相關的內容

教科書	內容來源
上教版	3.1 函數的概念,3.2 函數關係的建立,3.3函數的運算,4.5反函數的概念。
蘇教版	2.1.1函數的概念與圖像,2.1.2函數的表示方法,本章回顧部分復習題,2.3.2對數函數。
人教版B版	2.1.1函數,2.1.2函數的表示方法(不包括映射部分),習題2中部分習題。3.2.3指數函數與對數函數的關係
北師大版	第2章第1節生活中的變量關係,第2節2.1函數的概念以及2.2函數的表示法,復習題2部分復習題,第3章第5節5.1對數函數的概念。

參、研究結果

3.1 教科書函數概念的引入

3.1.1 上教版教科書

上教版教科書首先是以城市生活中的兩個常見的情景引入"量與量之間的對應關係",一個是噴水池,另一個是計程車計價規定:

噴水池是中外城市中常見的,我們看到噴水頭中噴出的每一滴水珠,都經

歷了由低到高，再由高到低的拋物線狀的軌跡，然後滴入水池。在這個過程中的任何一個時刻，它都有一個特定高度。

又如某地的計程車價格規定：起步要 a 元，可行 3 千米；3 千米以後按每千米 b 元計價，可再行 7 千米；以後每千米都按 c 元計價，這裏 a、b、c 規定為正常數，設每一次乘車的車費由行車里程唯一確定（袁震東，2003，pp. 53）。

接著從這兩個情景中概括出一個共同的特徵：“……它們按照一定的法則相互對應，其中一個量（時間或里程）的任何一個取值，都有另一個量（高度或車費）的唯一確定值與之對應（袁震東，2003，pp. 53）。”不過，所謂“一定的法則”在上述兩個情景中都沒有用關係式詳細地表示出來。然後，再結合初中學過的具體函數，引入函數關係：“……它們都體現了從 x 的集合到 y 的集合的一種對應關係。這種關係就是函數關係（袁震東，2003，pp. 53）。”

上教版教科書，通過情景，概括兩個量之間的對應，從具體情境中抽象出兩個量之間的對應關係。然後再結合具體函數，把這種對應關係建立在集合的基礎上，並命名為“函數關係”，把這種對應抽象為數集中元素之間的對應關係，完成了數學概念的一般化過程。為接下來函數概念的定義做好必要的鋪墊和準備。

3.1.2 蘇教版教科書

蘇教版教科書以三個現實生活中的問題引入函數的概念。第一個問題是“人口資料”，用表格的形式來表示。第二個問題是“自由落體”，用解析式表示下落距離與下落時間之間的關係。第三個問題是“氣溫變化”，用坐標系圖像表示氣溫變化。很明顯，蘇教版教科書是利用函數的三種表示方法來表示現實生活中的問題，讓學生認識“形形色色”的函數關係。接著從這三個問題出抽象出共同特徵：

在上述的每個問題中都含有兩個變量，當一個變量的取值確定後，另一個變量的值隨之惟一確定。根據初中學過的知識，每一個問題涉及一個確定

的函數（單墫，2004，pp. 21）。

儘管上述一段文字，並沒有明確指明函數到底是什麼？但是，根據初中數學教科書採用的定義，是把函數解釋為一個變量：

一般地，設在一個變化過程中有兩個變量，如果對於變量 x 的每一個，變量 y 都有惟一的值與它對應，我們稱 y 是 x 的函數（楊裕前，董林偉，2004，pp. 141）。

然後提出問題：如何用集合語言闡述上述問題的共同特點？概括出兩點：第一，每個問題都涉及兩個非空數集 A、B；第二，存在某種對應法則，對於 A 中的任何元素，B 中都有一個元素與之對應。並且分別以第一個問題“人口資料”作詳細地說明。

事實上，在“人口資料”和“氣溫變化”兩個問題中，年份與人口數，時刻與氣溫之間究竟存在什麼“法則”，很難言明。特別要提醒的是，“對於 A 中的任何元素，B 中都有一個元素與之對應”，刻畫的是一種“狀態”或者說是過程（因為，在此句中“對應”是動詞）。

蘇教版教科書首先以三個現實生活的例子，分別以不同的表示方法，詳細地展示了例子中變量之間存在的關係。然後在此基礎上抽象出函數的概念，把函數解釋成一個變量。最後用集合語言再次概括兩個共同的特點，使得教科書接下來函數的定義也水到渠成。

3.1.3 人教 B 版教科書

人教 B 版教科書開宗明義，一開始就明確提出初中對函數概念的定義：

在一個變化過程中有兩個變量 x 和 y，如果給定了一個 x 值，相應地就確定惟一的一個 y 值，那麼我們稱 y 是 x 的函數（高存明，2004，pp. 31）。

接著強調，在歷史上引入函數概念是為了描述變量之間的依賴關係，並以自

由落體運動的關係式進一步說明。然後說，用變量的觀點來描述函數具有一定的局限性（只是一筆帶過，並未具體說明），打算用一種更加確切的語言（集合）表達函數概念，為此列舉了四個實例。

前兩個例子“學生好奇心隨年齡增長的變化規律”以及“玉米生長時間階段與植株高度之間的關係”用坐標系圖像表示。第三個例子是“某五年的國內生產總值”用列表表示。最後一個例子是“在 220 伏特電壓下電流與電阻之間的關係”用關係式表示（歐姆定律）。由此抽象出函數關係是一種特殊的對應關係：

> 這就是說，一個函數關係必須涉及到兩個數集（自變量和函數的取值集合）和一個對應法則。由此可見，函數關係實質上是表達兩個數集的元素之間，按照某種對應法則確定的一種對應關係（高存明，2004，pp. 33）。

人教 B 版首先以初中函數定義為基礎，從四個不同的實例出發，用集合的語言概括了函數關係實質上是一種“對應關係”，這種對應關係的前提是“在兩個數集上，按照某種對應法則”建立起來的。在此我們注意到人教 B 版教科書也強調了“對應法則”，斯托利亞爾（1984）對這樣的處理是持不贊成態度的，他說：“……‘法則’或‘規律’的概念。這些術語的意思要用演算法的概念來精確化。但是這種精確化會導致函數類的縮小（一切函數都是可計算的）。當然，‘規律’的概念可以認為是原始的，但是這樣未必明智，因為把這種概念包含進函數定義並沒有效用（pp. 253）。”

3.1.4 北師大版教科書

北師大版教科書首先在“生活中的變量關係”一節開始之伊明確指出“初中學習過的函數就描述了因變數隨自變量而變化的依賴關係（嚴士健，王尚志，2004，pp. 25）。”然後以三個不同的實例，採用直觀形象的圖像、表格以及幾何圖形說明這一觀點，同時還從正反兩面說明瞭並不是所有依賴關係的兩個變量都存在函數關係，詳見圖 1。然後在第二節一開始給出初中函數的變量定義（和人教 B 版相同，這裏省略），把函數解釋成變量，再從集合的角度給出函數的定義。

3. 图 2-2 是某高速公路加油站的图片，加油站常用圆柱体储油罐储存汽油. 储油罐的长度 d、截面半径 r 是常量；油面高度 h、油面宽度 w、储油量 v 是变量.

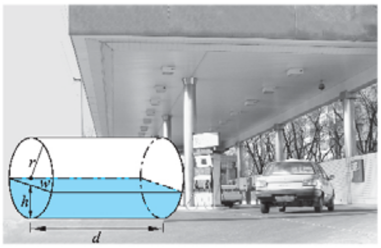


图 2-2

储油量 v 与油面高度 h 存在着依赖关系，储油量 v 与油面宽度 w 也存在着依赖关系.

并非有依赖关系的两个变量都有函数关系. 只有满足对于其中一个变量的每一个值，另一个变量都有唯一确定的值时，才称它们之间有函数关系. 对于油面高度 h 的每一个取值，都有唯一的储油量 v 和它对应，所以，储油量 v 是油面高度 h 的函数. 而对于油面宽度 w 的一个值可以有两种油面高度和它对应，于是可以有两种储油量 v 和它对应，所以，储油量 v 不是油面宽度 w 的函数.

圖 1：正反兩面例說並不是所有依賴關係的兩個變量都存在函數關係（引自北師大版數學教科書（必修 1），嚴士健，王尚志，2004，pp. 26）

3.1.4 小結

綜上所述，在用集合的語言定義函數概念之前，各種教科書都運用生活實踐中鮮活的例子，在初中已有知識的基礎上，逐步抽象概括函數的本質屬性，為接下來函數的定義做好充分的準備和鋪墊，為學生的學習提供了充分的“認知基礎”。

具體說來，上教版通過實例概括出函數關係是一種對應關係。蘇教版通過實例，先概括了函數的本質是變量，然後闡述了這樣一個特點——在某種對應法則下的對應，即是一種“狀態”或過程。人教 B 版以函數為變量入手，再以例子說明函數關係是按照某種對應法則確定的對應關係。北師大版以實例說明瞭函數關係是兩個變量之間的一種特殊的依賴關係，然後指出函數是一種變量。在出此充分的準備之下，接下來教科書又是如何定義函數的呢？

3.2 教科書中函數的定義

從表 3 可以清楚地看到不同版本的教科書對函數的定義方式有所不同。上教版教科書儘管使用了“數集”、“對應法則”等術語，但是最後還是把函數看作是一個“變量”，而且和某個“對應法則”有關。在此，一方面什麼是“變量”，難以精確化，沒有明確定義，很可能導致學生的誤解（張奠宙，張廣祥，2006）；另一方面，強調了“對應法則”，這樣處理可能會導致學生對函數的概念產生誤解，認為一切函數是可計算的（斯托利亞爾，1984）。而其餘三種教科書把函數看作是一種對應（關係）。不過，在蘇教版和人教 B 版的定義中，對這種對應（關係）也強調了在“法則 f”下的對應。這樣處理也會導致類似於上教版可能產生的結果。因此，從上述視角來看，北師大版對函數的定義更為確切。

表 3：教科書中函數的定義

教科書	函數的定義	
上教版	在某個變化過程中有兩個變量x、y，如果對於x在某的實數集合D內的每一個確定的值，按照某個對應法則f，y都有唯一確定的實數值與它對應，那麼y就是x的函數。	*變量*
蘇教版	一般地，設A，B是兩個非空數集，如果按某種對應法則f，對於集合A中的每一個元素x，在集合B中都有惟一的元素y和它對應，那麼這樣的對應叫做從A到B的一個函數。	*對應*
人教B版	設集合A是一個非空的實數集，對A內任意實數x，按照確定的法則f，都有惟一確定的實數值y與它對應，則這種對應關係叫做集合A上的一個函數。	*對應關係*
北師大版	給定兩個非空數集A和B，如果按照某個對應關係f，對於A中任何一個數x，在集合B中都存在唯一確定的數$f(x)$與之對應，那麼就把對應關係f叫做定義在A上的函數。	*對應關係 f*

從函數概念的引入和定義來看，四種教材都從現實生活中的情景出發，引出函數的概念，幫助學生理解函數的本質。教科書一方面把函數看成是一個“變量”，另一方面又把函數看成是一種“對應”，強調了函數概念“過程與對象”

的不同側面，試圖讓學生從不同的視角來認識函數的本質特徵。然而，這就要求進一步思考更為關鍵的問題，即如何在教學中使學生把這函數的兩個不同觀點協調起來，使之在學生的認知結構中共存？

同時，我們也認為教科書對函數的定義還需細緻斟酌。如，上教版的教科書在使用“集合“、“對應”的函數定義中，同時又使用了“變量”的術語，是否妥當？上教版、蘇教版和人教 B 版的教科書給對應（關係）附加了一個限定“按照某個（確定的）對應法則”，這可能會導致學生誤解函數概念的本質，是否可以把“法則”二字拿掉？

3.3 教科書例習題的設計

函數概念相關的例習題選自表 2 所列教科書的內容，這些例習題來自教科書中的例題（包括未解答的問題，如北師大版中“思考交流”欄目的問題）、習題、練習題、章末復習題，但不包括選學部分或課題內容。如果某例習題涉及多個考查目標，則同時計入相應類別（表 4）。

表 4：教科書與函數概念相關的例習題

	上教版	蘇教版	人教B版	北師大版
考查目標	例習題(%)	例習題(%)	例習題(%)	例習題(%)
判斷是否構成函數關係	1 (5.88)	8 (27.59)	6 (20)	8 (25.81)
求定義域	10 (58.82)	5 (17.24)	6 (20)	8 (25.81)
求值域	0 (0)	5 (17.24)	2 (6.67)	6 (19.35)
求值	5 (29.41)	11 (37.93)	15 (50)	4 (12.90)
函數舉例	1 (5.88)	0 (0)	1 (3.33)	5 (16.13)
總計	17	29	30	31

從表 4 可見：

（1）上教版、蘇教版、人教 B 版的例習題中“求值”都占了較大的比例，即強調了由自變量求函數值，或由函數值求自變量的計算過程。北師大版恰恰相

反，所占比例最低；按照 Sfard（1991）的理論，數學概念的二重性決定了概念理解的二重性，經歷由“過程”到“對象”的先後順序，而且“過程”的重複，有利於上升到“對象”的把握。因此，學習函數的概念，由自變量求函數值，或由函數值求自變量的計算過程，有利於促進函數概念的“對象化”。從這個視角而言，北師大版的教科書是否適當可以增加這方面的例習題。

（2）蘇教版和北師大版的例習題比較重視對函數定義“三要素”的考查，即對應關係（對定義域中的每一個值，對應的函數值有且只有一個）、定義域和值域。人教 B 版相對淡化求函數的值域。對於函數對應關係的惟一性，上述各教科書均設計了“對應法則”和“圖像表示”兩個方面的習題，如圖 2、圖 3 是引自人教 B 版的兩個習題。上教版只是設計了一個“圖像表示”的習題，用於判斷是否構成函數關係，在“函數的運算”中主要關注運算後函數的表示及其定義域，教科書也未曾設計求函數值域的例習題。可見，上教版對例習題的處理與其他教科書存在較大的差別。

下列各题中的对应法则，是否给出了实数集 **R** 上的一个函数：

(1) f：把 x 对应到 $3x+1$；　　(2) g：把 x 对应到 $|x|+1$；

(3) h：把 x 对应到 $\dfrac{1}{x}$；　　(4) r：把 x 对应到 $\sqrt{x}$.

圖 2：通過“對應法則”，判斷是否構成函數關係（引自人教 B 版數學教科書（必修 1），高存明，2004，pp. 36）

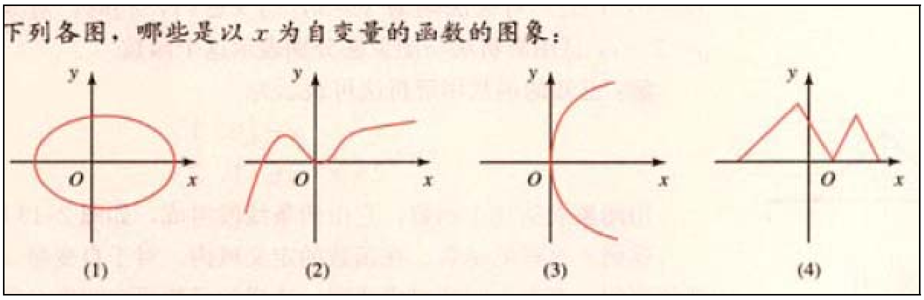


圖 3：通過“圖像表示”，判斷是否構成函數關係（引自人教 B 版數學教科書（必修 1），高存明，pp. 45）

針對目前教科書對函數定義“三要素”的例習題設計，很有必要談及以下兩點：

（1）上教版教科書十分重視培養學生求函數定義域的技能，高於上海數學課程標準 “掌握求定義域的基本方法”的學習要求，也和教育部的數學課程中對函數教學的建議不一致：“在教學中，應強調函數概念本質的理解，避免在求函數定義域……出現過於繁瑣的技巧訓練，……（教育部，2003，pp. 17）。”

（2）蘇教版、人教 B 版和北師大版的例習題注重考查學生對函數函數對應關係的惟一性的理解。這一點是否應當淡化，值得商榷。因為在函數概念的演化歷史中，無論是最早約翰·伯努利(John Bernoulli ,1667 - 1748)的定義，還是後來歐拉(L. Euler, 1707 -1783)的函數定義都未曾提到“惟一性”，只是到了 1939 年，布林巴基（Bourbaki）學派才在函數的定義中增加了對應值 “惟一性” 的條件（李鵬奇，2001）。顯然當前高中數學教科書中函數的定義完全是受到了布林巴基學派的影響。然而，無論是上海還是教育部的數學課程標準都未曾提出函數定義的“惟一性”問題。事實上函數的本質是“變化”或者說是“對應”，因此筆者贊同以下的觀點：“試問‘唯一’是函數的核心成分嗎？不是，唯一與否不是關鍵，取值唯一只是為了研究方便所進行的技術處理。實際上，如果不唯一，無非出現多值函數而已。因此，在函數定義教學中，反復強調‘唯一’，其實無助於函數觀念的建立，對日後應用和解題也沒有幫助，因此不必費太多的心思。（張奠宙，張廣祥，2006，pp. 122）。”

3.4 教科書對反函數的處理方式

對於反函數，教育部頒佈的高中數學課程標準的建議是：

反函數的處理，只要求以具體函數為例進行解釋和直觀推理，例如，可通過比較同底的指數函數和對數函數，說明指數函數 $y=a^x$ 和對數函數 $y=log_a x$ 互為反函數（$a>0,a\neq 1$）。不要求一般地討論形式化的反函數定義，也不要求求已知函數的反函數（教育部，2003，pp.17）。

依據課程標準的建議，北師大版的教科書對反函數概念的處理最為簡單。在介紹了對數函數的概念之後，以同底的指數函數和對數函數之間的關係，說明它們彼此互為反函數。教科書沒有給出反函數的一般定義（圖 4）。

分析理解

指数函数 $y=a^x$ 和对数函数 $y=\log_a x\ (a>0, a\neq 1)$ 有什么关系?

指数函数 $y=a^x$ 和对数函数 $x=\log_a y$ 刻画的是同一对变量 x，y 之间的关系，所不同的是：在指数函数 $y=a^x$ 中，x 是自变量，y 是 x 的函数，其定义域是 **R**，值域是 $(0,+\infty)$；在对数函数 $x=\log_a y$ 中，y 是自变量，x 是 y 的函数，其定义域是 $(0,+\infty)$，值域是 **R**. 像这样的两个函数叫作互为**反函数**，就是说，对数函数 $x=\log_a y$ 是指数函数 $y=a^x$ 的反函数，指数函数 $y=a^x$ 是对数函数 $x=\log_a y$ 的反函数.

由于对数函数通常写成 $y=\log_a x\ (a>0, a\neq 1)$，因此，指数函数 $y=a^x\ (a>0, a\neq 1)$ 是对数函数 $y=\log_a x\ (a>0, a\neq 1)$ 的反函数；同时，对数函数 $y=\log_a x\ (a>0, a\neq 1)$ 也是指数函数 $y=a^x\ (a>0, a\neq 1)$ 的反函数.

圖 4 北師大版教科書對反函數概念的處理方式（引自北師大版數學教科書（必修 1），嚴士健，王尚志，2004，pp. 106）

蘇教版的教科書在介紹了對數函數的概念、圖像和性質之後，指出“$y=a^x$ 稱為$y=log_a x$的反函數，反之，$y=log_a x$也稱為$y=a^x$的反函數。”緊接著引入反函數的符號：“一般地，如果函數$y=f(x)$存在反函數，那麼它的反函數記作 $y=f^{-1}(x)$”。不過，教科書在該節的“鏈結”欄目[1]中給出了函數的形式化定義（圖 5），並以一次函數為例說明。

人教 B 版教科書給出了反函數的描述性定義：“當一個函數是一一映射時，可以把這個函數的因變數作為一個新的函數的引數，而把這個函數的引數作為新的函數的因變數，我們稱這兩個函數互為反函數。”然後，在此基礎上指出對數函數 $y=log_a x$ 和指數函數 $y=a^x$ 互為反函數，並引入反函數的符號。

[1]鏈結的內容，根據教科書扉頁“致同學”的說明，是以激發學生探索學習的興趣，在掌握基本內容之後，供學有餘力的學生探究。

> 我们已经知道，函数 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ $(a>0, a\neq 1)$ 互为反函数. 一般说来，设 A，B 分别为函数 $y=f(x)$ 的定义域和值域，如果由函数 $y=f(x)$ 所解得的 $x=\varphi(y)$ 也是一个函数(即对任意一个 $y\in B$，都有惟一的 $x\in A$ 与之对应)，那么就称函数 $x=\varphi(y)$ 是函数 $y=f(x)$ 的反函数 (inverse function)，记作 $x=f^{-1}(y)$. 在 $x=f^{-1}(y)$ 中，y 是自变量，x 是 y 的函数. 习惯上常改写成 $y=f^{-1}(x)$ $(x\in B, y\in A)$ 的形式.

圖 5 蘇教版教科書反函數的定義（引自北師大版數學教科書（必修 1)，單墫，2004，pp.69）

相比之下，上海數學課程標準對反函數的學習要求要來得高：“由具體事例和逆對應引出反函數的概念，經歷探索互為反函數的兩個函數圖像之間關係的過程，並掌握其關係（上海市教育委員會，2004，pp. 75)。”於是，上教版的教科書專門以單獨一節的篇幅介紹反函數的概念：首先，以相同資料的表格，在溫度度量攝氏度和華氏度之間，選擇相反的引數和因變數，得到看似完全不同的函數關係和圖像，引出反函數。接著，教科書給出形式化的反函數定義和反函數的符號，並以一次函數作為例子說明。然後，指出原函數和反函數定義域與值域之間的關係。最後，給出例題求函數的反函數，以及探索原函數和反函數的圖像的關係。

由此可見，上教版教科書對反函數概念的介紹最細緻周全，這完全是依據了上海數學課程標準的要求。其他三種教科書在正文部分均沒有給出形式化的反函數定義，不過各自巧妙的處理方式體現了編寫者的智慧。北師大版教科書處理得最貼近教育部數學課程標準的建議，以同底的指數函數和對數函數的關係說明反函數的概念，不再給出定義，中規中矩。蘇教版教科書在採納教育部課程標準建議的同時，又考慮到不同學生的能力和興趣，在非正文部分補充了形式化的定義供學生選擇學習。真是一舉兩得，也可謂用心良苦。人教 B 版則用反函數描述性的定義代替形式化的定義，在沒有違背教育部課程標準要求的前提下，在彈性空間內略作提升。

肆、結論與啟發

本研究採用教科書的“內在”研究方式，選擇了上教版、蘇教版、人教版B版和北師大版的高中數學教科書，以函數概念為例，對教科書數學內容的組織進行了比較研究。研究表明：(1) 各種教科書都重視函數的引入，注重數學概念與生活實踐相結合，充分考慮學生的“認知基礎”，可謂是循循善誘，引人入勝。（2）各種教科書都把函數看成是“變量”和“對應”，有利於學生認識和理解函數的本質，有利於促進學生從“過程”向“對象”上升，不過對於函數定義的表述尚存在不一致之處，值得商榷。(3) 對函數定義“三要素”的教學，四種教科書通過例習題作了不同程度的強調，不過有些方面還需要探討。(4) 反函數概念的處理，四種教科書在依據課程標準的前提下，各有巧妙不同。

透過以函數為例的教科書比較研究，也的確讓人感覺到課程改革後數學教科書的新氣息：(1) 注重了生活與數學的聯繫，生動活潑，不再一味“板著面孔講道理”。(2) 從實際例子入手抽象概括數學概念，突出了數學思想方法，重視了概念的發生發展，有利於克服教學中“掐頭、去尾、燒中段”的不良做法。同時也期盼教科書的編寫者再接再厲，對教科書中的細節精雕細刻、反復推敲，創造出精品。

參考文獻

上海市教育委員會（2004）*上海市中小學數學課程標準（試行）*. 上海：上海教育出版社．

王曉輝，赫曉玲（2007）兩類教材對初中生數學推理技能影響的比較研究．*課程教材教法*，27（11），41-45.

孔凡哲，史寧中（2008）教師使用教科書的過程分析與水準測定．*上海教育科研*，3，4-9.

克萊因（1983）. *古今數學思想(第二卷）*. 上海:上海科技出版社.

李士錡（2001）. *PME: 數學教育心理*. 上海:華東師範大學出版社.

李鵬奇（2001）. 函數概念 300 年. *自然辯證法研究，17*（3），48-52.

俞聽（2008）美國與我國數學教材中關於“函數”概念教學之比較研究．*中學數學雜誌，7*，1-3.

袁震東（2003）*高級中學課本·數學（高中一年级，第一学期）*. 上海：上海教育出版社.

高存明（2004）*普通高中課程標準實驗教科書·數學（必修 1）*. 北京：人民教育出版社．

袁志強（2009）資訊技術與高中數學新課標教材整合的比較研究－以數學 1 為例．*數學教育學報，17*（3）88-90.

教育部（2003）*普通高中數學課程標準（實驗）*. 北京：人民教育出版社.

教育部（2001）*全日制義務教育數學課程標準（實驗稿）*. 北京：北京師範大學出版社．

張唯一，李海東（2009）高中數學課標教材使用情況與調查. 2009 年 10 月 28 日擷取自網頁 http://www.pep.com.cn/gzsx/gxrz/200909/t20090909_602197.htm

張維忠，李芳奇（2009）新加坡與中國數學教材的特色比較．*外國中小學教育，2*，32-36.

張奠宙，張廣祥（2006）*中學代數研究*．北京：高等教育出版社．

斯托利亞爾（1984）*數學教育學*．北京：人民教育出版社．

單墫（2004）*普通高中課程標準實驗教科書·數學（必修 1）*. 南京：江蘇教育出版社．

楊裕前，董林偉（2004）*義務教育課程標準實驗教科書·數學（八年级（上））*. 南京：江蘇科學技術出版社．

豪森，凱特爾，基爾派翠克 (1992). *數學課程發展*．上海：上海教育出版社．

鮑建生（2002）中英兩國初中數學期望課程綜合難度的比較．*全球教育展望*，31

（9），48-52.

課程教材研究所（2001）*20 世紀中國中小學課程標準、教學大綱彙編（數學卷）*．北京：人民教育出版社．

範良火，陳靜安，朱雁，裘曉嵐，胡久忠（2005）數學課堂內外的教科書使用—在昆明和福州 12 所中學所作的研究．載于範良火，黃毅英，蔡金法，李士錡（主編），*華人如何學習數學*（pp. 186-212），南京：江蘇教育出版社．

薛紅霞（2008）普通高中課程標準實驗數學教科書比較研究－以直線的傾斜角、斜率以及直線的位置關係為例．*教育理論與實踐，4*，15-18.

嚴士健，王尚志（2004）*普通高中課程標準實驗教科書·數學（必修 1）*．北京：北京師範大學出版社．

Fan, L., & Zhu, Y. (2007). Representation of problem-solving procedures: A comparative look at China, Singapore, and US mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics, 66*, 61-75.

Hershkowitz, R., Schwarz, B. B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*, 195-222.

Howson, G. (1995). *Mathematics textbooks*: *A comparative study of grade 8 texts*. Vancouver: Pacific Educational Press.

Kilpartrick, J. (1992). America is likewise bestirring herself: A century of mathematics education as viewed from the United States. In I. Wirszup and R. Streit (Ed.), *Developments in School Mathematics Education around the World* (Vol. 3, pp. 133-145), Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Konior, J. (1993). Research into the construction of mathematical texts. *Educational Studies in Mathematics, 24*, 251-256.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Function, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of educational Research, 60*, 1-64.

Li, Y., Chen, X., & An, S. (2009). Conceptualizing and organizing content for teaching and learning in selected Chinese, Japanese and US mathematics textbooks: The case of fraction division. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education*, Retrieved Sep. 1, 2009, from http://springer.lib.tsinghua.edu.cn/content/120453.

Mayer, R. E., Sims, V., & Tajika, H. (1995). A comparison of how textbooks teach mathematical problem solving in Japan and the United States. *American Educational Research Journal, 32*, 443-460.

Mesa, V (2004). Characterizing Practices associated with functions in middle school textbooks: An empirical approach. *Educational Studies in Mathematics, 56*, 255-258.

Österholm, M. (2005). Characterizing reading comprehension of mathematical texts. *Educational Studies in Mathematics*, *63*, 325-346.

Sajka, M. (2003). A secondary school student's understanding of the concept of function-A case study. *Educational Studies in Mathematics, 53*, 229-254.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22,* 1-36.

Stacey, K., & Vincent, J. (2009). Models of reasoning in explanations in Australian eighth-grade mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics*, Retrieved Sep. 1, 2009, from http://www.springerlink.com/content/u080115215h78q15.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity, and proof. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 495- 511). New York, NY: Macmillan.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in teaching and learning mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65–81). Kluwer: Dordrecht.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*, 356-366.

活動報馬仔

一、 **2010/01/07 (四)～2009/01/10(日)**

The 8th Annual Hawaii International Conference on Education

地點：Honolulu, Hawaii

參考網站：http://www.hiceducation.org/

二、 **2010/01/19(二)～2010/01/22(五)**

Sixth international conference on Science, Mathematics and Technology Education

地點：Parkview Hotel, Hualien, Taiwan

參考網站：http://block.sec.ntnu.edu.tw/3C/smte

三、 **2010/03/05(五)~2010/03/06(六)**

數學教育論壇

地點：泰雅渡假村(南投縣仁愛鄉互助村清風路 45 號)

參考網址：http://140.130.46.19/mathconference/index.html

四、 2010/04/21 (三)～2009/04/24(六)

NCTM 2010 Annual Meeting & Exposition

地點：San Diego, CA

參考網址：http://www.nctm.org/conferences/default.aspx?id=52

稿 約

一、本刊徵選之數學教育刊物為：

（一）本刊以徵選實務性的數學教育刊物為主，舉凡任何數學創新教學之方法或策略、數學教學實務經驗、數學課程設計與實踐之心得分享等皆為本刊之首要選擇標的；

（二）研究文章（包括以實驗、個案、調查或歷史等研究法所得之結果，和文獻評論、理論分析等）；

（三）短文（包括研究問題評析、數學教育之構想、書評、論文批判等）；以及

（四）其他符合本刊宗旨之文章。

二、本刊所刊之文章，需為報導原創性教學或研究成果之正式文章，且未曾於其他刊物或書籍發表者（在本刊發表之文章未經台灣數學教育學會同意，不得再於他處發表）。

（一）來稿請注意下列事項：

1. 來稿請以中文撰寫，力求通俗易讀，須為電腦打字，每篇以不超過 6000 字為原則（特約稿不在此限），以電子郵件傳送。
2. 來稿請附中英文篇名、作者姓名及服務機關，作者姓名中英文並列，若有一位以上者，請在作者姓名及服務機關處加註（1）、（2）、（3）等對應符號，以便識別，服務機關請寫正式名稱。
3. 來稿請附中英文摘要，並於摘要後列明關鍵詞彙（key words），依筆劃順序排序（以不超過五個為原則），英文關鍵詞彙則須與中文關鍵詞彙相對應。
4. 文稿若為譯文，請附原文影本及原作者同意函，並請註明原文出處、原作者姓名及出版年月。
5. 凡人名、專有名詞等若為外語者，第一次使用時，請用（）加註原文。外國人名若未有約定成俗之譯名，請逕用原文。
6. 附圖與附釋請於文後，並編列號碼，並在正文中註明位置。
7. 文末參考文獻依作者姓氏分別編號排序：中、日文依筆劃多寡排列；西文（英、法、德…等）依字母順序排列；若中、日、西文並列時，則先中、日文後西文。至於參

考文獻之寫法如下：

（1）期刊論文，請依下列順序書寫：作者、出版年（西元）、論文篇名、期刊名稱、卷期、頁數。

例：張湘君（1993）。讀者反應理論及其對兒童文學教育的啟示。*東師語文學刊，6*，285-307。

（2）圖書單行本，請依下列順序書寫：作者、出版年（西元）、書名、版次、出版地、出版社、頁數。

例：張春興（1996）。*教育心理學*。台北：東華。頁64-104。

8. 稿件順序為：首頁資料（題目、作者真實姓名及服務機關、通訊地址及電話；若需以筆名發表，請註明）、中文摘要、正文（包括參考文獻或註釋）、末頁資料（以英文書明題目、作者姓名及服務機關、並附英文摘要）及圖表（編號須與正文中之編號一致）。

（二）本刊對來稿有權刪改，不同意者請在稿件上註明。

（三）來稿刊出，版權為台灣數學教育學會所有。

（四）作者見解，文責自負，不代表本學會之意見。

（五）來稿請e-mail至：dcyang@mail.ncyu.edu.tw