

ISSN 1815-6355

台灣數學教師(電子)期刊

Taiwan Journal of Mathematics Teachers

第24期

台灣數學教育學會

2010年12月

發行宗旨

台灣數學教師(電子)期刊 Taiwan Journal of Mathematics Teachers 2010 年 12 月出版 NO.24 2010

發行人：林福來教授

主編：

楊德清 國立嘉義大學數學教育研究所

編輯委員

Editorial Panel

呂玉琴

國立台北教育大學數學教育研究所

李源順

台北市立教育大學數學資訊教育學系

林素微

國立東華大學數學系

金鈞

國立台灣師範大學數學系

梁淑坤

國立中山大學教育研究所

蔡文煥

國立新竹教育大學應用數學系

劉祥通

國立嘉義大學數學教育研究所

劉曼麗

國立屏東教育大學數理教育研究所

(依姓名筆劃順序排列)

封面設計：施乃文

出版者：台灣數學教育學會

地址：台北市 116 汀州路四段 88 號國立台灣師範大學數學系 M212

電話：02-29307151

電子郵件信箱：tame@math.ntnu.edu.tw

網址：

<http://www.math.ntnu.edu.tw/~tame/index.htm>

總編輯：楊德清 dcyang@mail.ncyu.edu.tw

地址：嘉義縣民雄鄉文隆村 85 號

國立嘉義大學數學教育研究所

電話：05-2263411-1924

一、本刊為一實務性的數學教育刊物，出版目的如下：

1. 積極發揚台灣數學教育學會之成立宗旨：研究、發展、推廣數學教育，使台灣學生快樂學好數學。
2. 提升數學教師教學品質、數學教育研究品質及促進數學教學策略與方法之交流。
3. 探討數學教育的學術理論與實務現況，以促進理論與實務之結合，進一步提升數學教學之內涵。
4. 提供數學教育課程、教材與教法等實務經驗，包括數學遊戲、DIY 教具之分享，以供未來之教學與研究參考之用。
5. 針對多數學生特定迷思概念之教學引導，如學生易有的錯誤型態及如何釐清觀念等。
6. 介紹國內外數學教育現況。

二、本刊內容以充實高中、國中與小學數學教學、課程與教材為主，以提供所有關心數學教育人士之教學資源與參考依據。

三、本期刊以季刊方式（3 個月一期，一年共 4 期）發行，分別於每一年的 3、6、9、12 月發行。

四、本期刊採電子與紙本方式同時發行。

ISSN 1815-6355

台灣數學教師（電子）期刊
Taiwan Journal of Mathematics
Teachers

第 24 期

2010 年 12 月

台灣數學教師（電子）期刊

目錄

第 24 期

2010 年 12 月

國小六年級學童對圖形樣式問題之解題探究..... 1

趙曉燕、鍾靜

活動報馬仔 24

ISSN 1815-6355

國小六年級學童對圖形樣式問題之解題探究

趙曉燕¹、鍾靜²

¹臺北市大安區仁愛國小

²國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系

摘要

近年來，世界數學教育的潮流有漸漸從強調解題與邏輯訓練的學科，走向探究規律（pattern）的科學之趨勢；國內積極進行的教育改革，也將規律的察覺納入中小學教育課程中。本研究旨在探討國小六年級學童對圖形樣式問題的解題表現，以兩班國小六年級學生，共59名（男30名，女29名）為研究樣本，自編「圖形樣式測驗」，共七題，包括「項次階差為相同倍數」、「項次階差為相同差距」、以及「二階樣式與其他」三種類型。試題以具引導之開放式問題呈現，各題均有6個子題。本研究依據學童解題表現，評定其解題能力層次，共分為八個層次（0, 1, 2, 3a, 3b, 4a, 4b, 4c），凡達層次4者，表示具有製造一般化通式能力的代數思考。測驗結果顯示，學生在這三類問題中的解題能力層次並不一致，其中以第一類「項次階差為相同倍數」的圖形樣式問題，表現最好，約有80%的學生能達到層次4b以上；而「二階樣式與其他」中之「三角形數」達層次4者最少，僅約占30%。至於「項次階差為相同差數」問題對高年級學生較具挑戰性。因此，本研究針對該類問題，歸納出三至四種在延續圖形樣式時的解題策略，並進一步分析造成學童錯誤解法的原因。最後，依據本研究結果，提出對國小代數教學的建議，以及未來研究的建議。

關鍵字：一般化表示、國小、圖形樣式、解題

壹、緒論

代數概念的學習是學童在學習數學歷程中的一個關鍵點，數學由算術轉變成代數，是引進並使用文字符號來說明算術運算中的數學概念，這是學童往後學習更高深的數學之基礎。國小的代數課程是數學由算術轉變為正式代數的轉換期，因此國小的代數教材主要的任務就是培養較基礎、具體的先備概念，以為更高層次、更抽象之代數概念作準備。

正式的代數教學常以等式、函數及文字表示和等式的操作開始，但代數思考其實開始於找出情境間關係的努力和以代數符號來表示(Mason, 1996)，這個對代數的看法，即建議透過數字和幾何樣式來教代數。

人們開始重視樣式，是因為體認到其對代數入門的重要性。Mason 認為一般化的表示 (expressing generality) 是代數的一個根本，也是一條學習代數的路徑 (引自 Zazkis & Liljedahl, 2002)。在英國過去十年間，使用樣式來學習一般化的表示，成為數學課程中常用的教法 (Orton, Orton, & Roper, 1999)。誠如美國數學教師協會 (National Council of Teachers of Mathematics, [NCTM], 2000) 即建議應把代數視為從學齡前開始的一連串課程，而且在學童進入中、高年級代數課程之前，教師就應該幫助他們建立一個穩固的先備知識與經驗基礎，其中樣式規律 (pattern) 是促進符號理解、歸納與推理的好題材。

近年來，世界數學教育的潮流有漸漸從強調解題與邏輯訓練的學科，走向探究規律的科學之趨勢。從 NCTM (2000) 所列的課程標準來看，小學、中學一直到高中階段，數形規律就一直是代數課程中重要的內容。因此，學生懂得如何去發現規律，並在理解後利用代數式推廣一般化並預測之，當是學生學習數學的一個重要的任務，亦是一種必備的基本能力。其所強調的代數課程，在於透過探究生活中的數形規律，發現其規律並進而一般化，藉此建立學生的代數能力。在國內九年一貫課程中 (教育部, 2003)，高年級亦安排有尋找規律的課程，然而，無論是教或學，往往著重的僅是找到正確的答案，忽略了學生在解題上的想法與

策略。

依據上述研究背景，本研究主要目的在透過「圖形樣式測驗」，評定國小六年級學童的解題能力層次，以了解學童是否具有製造一般化通式能力的代數思考，並分析其解題策略與錯誤類型。

貳、研究方法

一、研究對象

本研究旨在探討國小六年級學童對圖形樣式問題的解題表現，因此，以「圖形樣式」作為測驗內容，以臺北市某國小兩班六年級學生為研究樣本，共 59 名，其中男 30 名，女 29 名。

二、研究工具

為達研究目的，研究者參考我國九年一貫課程綱要能力指標（教育部，2003）、數形規律問卷（洪明賢，2003）、Coburn（1995）樣式主題、NCTM（2000）之 6-8 年級代數標準、Orton, Orton 與 Roper（1999）及 Warren 與 Cooper（2008）等，自編「圖形樣式測驗」（見附錄一）。

本測驗之編製，先由研究者自參考資料中，就三類型態試題「項次階差為相同倍數」、「項次階差為相同差距」及「二階樣式與其他」各挑選 12 題，再委由數學教育專家進行效度檢驗，包括任教於大學數學資訊學系與數學應用學系的兩位教授，以及任教於臺北市某國小有高年級教學經驗的兩位老師，從這 36 題的題目中，針對「題目是否符合所分類之類型」、「題意的描述是否清楚易懂」、「題目是否能引發學生的代數思考」等檢核標準，篩選出「項次階差為相同倍數」2 題、「項次階差為相同差距」2 題、以及「二階樣式與其他」3 題，計 7 題，編製成正式施測之「圖形樣式測驗」，以建構內容效度。

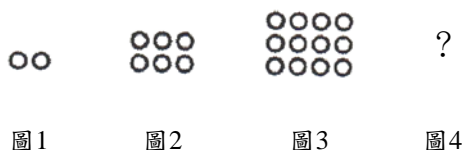
為了解學童察覺圖形樣式能力之發展，試題採具引導之開放式問題，在圖形樣式之下有 6 個子題，包括「能否察覺並描述圖形樣式？」、「能否延伸次一項圖

形樣式？」、「能否延伸較近項次(如第10圖)圖形樣式？」、「能否延伸較遠項次(如第50圖或第100圖)之圖形樣式？」、「能否以一般化表示圖形樣式？」以及一個逆向題，讓學童根據所察覺的規律，逆推找到是第幾圖，並一一填答。本測驗採無預警施測，筆試時間以讓所有受試者感覺足夠為原則，約需40分鐘。

本研究中實施圖形樣式測驗，依據馬秀蘭(2008)所建立國小高年級學童解線性圖形樣式題能力層次，將學生圖形樣式之解題表現，評定為0、1、2、3a、3b、4a、4b、4c共8個層次(見表1)，進而分析學生對圖形樣式問題的察覺能力。

表 1

以下題為例，說明學生在各層次之可能表現：



層次0：「空白」—沒有一點進展；層次1：「有長邊和寬邊」—描述出部分樣式；層次2：「每一個長邊、寬邊依序都多1個『○』」，或「每一個依序相差4個、6個『○』」—能注意一個樣式，但未推出下一項；層次3a：「 $2+4=6$ ， $6+6=12$ ， $12+8=20$ 」—能比較連續項差異；層次3b：「 2 ， $3+3$ ， $4+4+4$ ， $5+5+5$ 」—能比較連續項差異外，尚可辨認每項結構之間關係；層次4a：「第幾個圖是第幾乘以(第幾加1)」—一個正確的文字描述；層次4b：「 $101+101+101+\dots+101$ ，加100次」—嘗試做一個代數式；層次4c：「第n圖是 $n \times (n+1)$ 」—一個正確的代數式(馬秀蘭，2008)。

學生解線性圖形樣式題能力層次之可能表現，如上所述外，研究者亦根據圖形樣式測驗之設計與學生解題表現，更具體的說明如下：在層次3a，學生能透過

計數或加法算式，推出下一項或第10項；層次3b，能透過乘法，推出較遠的項次，如第50項或100項等；層次4a，是以文字敘述來描述圖形樣式的歸納；層次4b，嘗試用算式或用文字符號寫出圖形樣式的歸納；層次4c，使用文字符號寫出正確的代數式。

施測完畢，除研究者本身，另邀請一位國小數學教師依照評分標準給分。評分者信度為0.99，具評分者一致性。

三、資料分析

兩班學生施測後，依據馬秀蘭（2008）所建立國小高年級學童解線性圖形樣式題能力層次記分標準計分，再以描述性統計進行分析。

參、 結果分析

本節分析學生在接受「圖形樣式測驗」時的解題表現、所使用的解題策略、以及解題的錯誤類型。

一、圖形樣式問題之解題表現分析

本研究「圖形樣式測驗」包括三類試題：第1、2題為「項次階差為相同倍數」，第3、4題為「項次階差為相同差距」，第5、6、7題為「二階樣式與其他」。學童之解題表現層次分布情形，如表2所示：

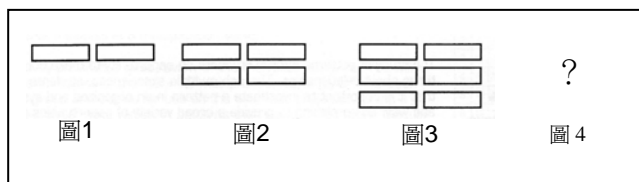
表 2

依據馬秀蘭（2008）之研究，各題解題表現達到層次4以上者，表示具有製造一般化通式能力的代數思考。以下就學生在三類圖形樣式題型共7題之解題表現層次分布情形，以及學生之解題策略與錯誤類型等，進行分析如下：

(一) 「項次階差為相同倍數」類型

在上述三類試題中學生解題表現較好的是第一類「項次階差為相同倍數」的題型，為本測驗中的第 1、2 題。第 1 題的測驗結果，學生解題表現在層次 4b 以上者，共 47 人 (79.66%)，層次 3b 以下者 12 人(20.34%)；第 2 題的測驗結果，學生解題表現在層次 4b 以上者，共 48 人 (81.36%)，層次 3b 以下者 11 人(18.64%)。進一步分析學生的作答情形，可以看到學生在解此類問題時，大都能透過最熟悉的乘法 (倍數) 解題，且為一個步驟的算式。以第 1 題之圖形樣式說明如下：

【第 1 題】

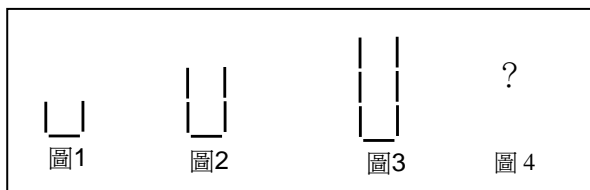


在解決延續樣式問題時，要求出第 4 圖或第 10 圖的 \square 個數，學生會用 $2 \times 4 = 8$, $2 \times 10 = 20$ 找到答案；詢問第 50 圖或 100 圖的 \square 個數，也能用 $2 \times 50 = 100$, $2 \times 100 = 200$ 找到結果。此題中，要學生用一個代數式來表示第 n 圖所需的 \square 個數時，出現較多錯誤的表示法，例如有學生寫出「 $2 \times n = n$ 、 $\square \times 2 = n \dots$ 」，而不會使用 $2 \times n$ (或 $2n$) 來表示結果。由此顯示，學生要如何正確使用文字符號列出代數式，並不是那麼容易。

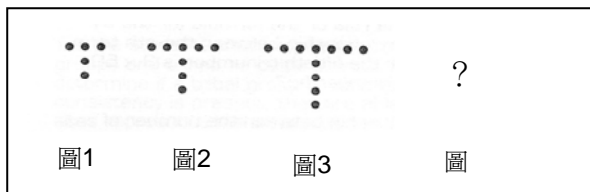
(二) 「項次階差為相同差距」類型

第二類「項次階差為相同差距」之問題，是測驗中的第 3、4 題。由於此類問題不是單靠一個步驟的加法或乘法即能找到答案，因此，在解法上對學生來說較具有挑戰性。從測驗結果來看，第 3 題的解題表現，學生在層次 4b 以上者，共 43 人 (72.88%)，層次 3b 以下者，共 16 人 (27.12%)；第 4 題的解題表現，在層次 4b 以上者，共 30 人 (50.85%)，在層次 3b 以下者，共 29 人 (49.15%)。學生在第二類「項次階差為相同差距」問題之解題表現不如第一類「項次階差為相同倍數」問題。以下為第 3 題與第 4 題的圖形樣式：

【第 3 題】



【第 4 題】



第 3 題與第 4 題雖同為「項次階差為相同差距」之問題，但解題表現上卻非一致。學生在第 3 題的解題表現優於第 4 題約二成；進一步分析這兩題的圖形樣式，第 3 題的圖形樣式為向上增長的樣式，每增加 1 個圖則增加 2 個「|」，其一般式為「 $2n+1$ 」；第 4 題的圖形樣式往左、右及下方三個方向增長，每增加 1 個圖則增加 3 個「·」，其一般式為「 $3n+2$ 」。可能是圖形樣式的結構複雜度影響了學生的解題表現。

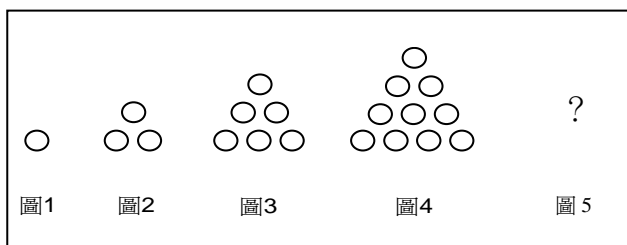
(三) 「二階樣式與其他」類型

第三類「二階樣式與其他」類型的測驗題是第 5、6、7 題。第 5 題「正方形數」與第 6 題「三角形數」，均為「二階樣式」，第 7 題為「空心圖形樣式求算外圍個數」。第 5 題「正方形數」的解題表現，學生在層次 4b 以上者，共 45 人 (76.27%)。研究者根據學生的解題情形，發現大多數學生是透過「正方形面積公式」計算出總個數，並非從各圖形樣式之間個數的差異來求得圖形樣式的下一項。因此，雖然研究者將其分類在「二階樣式」，而學生卻是從觀察圖形的樣式來解題，並非將其轉換為「1、4、9、16、.....」數列來進行解題。而在這一題中，學生錯誤較多的部分，是要如何表示第 n 圖所需個數的一般式。作答中，有部分學生列出「 $n \times n = 2n$ 」或「 $n \times n = nn$ 」的錯誤表徵。從這裡也可以看出，學生對於使用符號列出一般式並未熟練，在列式上的學習上可能較不足。因此，研究者認為，教師在進行此類教材的教學過程中，若能針對符號的使用，如：

「 $n+n=2n$ 」、「 $n \times n = n^2$ 」，進行辨識與澄清，對如何使用符號列代數式的學習是有幫助的。

第 6 題為「三角形數」，根據測驗結果，學生的解題表現在層次 4b 以上者，共 18 人 (30.51%)；與測驗中其他類型題目相較，學生在面對「三角形數」的規律及列出一般式的解題表現較不理想。以下為試題 6 的圖形樣式：

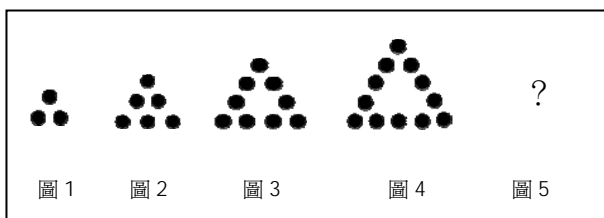
【第 6 題】



從學生的作答情形來看，許多學生可以從圖 1 有「1 個○」，圖 2 有「1+2 個○」，圖 3 有「1+2+3 個○」，圖 4 有「1+2+3+4 個○」，透過這樣的規律一步一步的往下導出第 5 圖、甚至是第 10 圖的「○」個數，但是，當學生面對要求出延續較遠項次的「○」個數，如第 50 圖、第 100 圖時，以及用 n 來表示一般化時，試卷答題位置多為空白。分析其原因，「三角形數」不像在「項次階差為相同倍數」或「項次階差為相同差數」的題型，可以透過乘法、或乘法和加法，就能表示出圖形位置(編號)與數量之間的關係。當然，也有學生利用梯形面積公式「 $(上底+下底) \times 高 \div 2$ 」，上底是 1，下底是圖形編號(圖形的編號就是最底下一排的個數)，高也就是圖形的編號，用這樣的方式來找出第 n 圖的數量。但從測驗的結果來看，仍有半數以上學生無法正確解題。

第 7 題為「空心圖形求外圍個數」，學生的解題表現在層次 4b 以上者，共 42 人 (71.19%)。以下為第 7 題的圖形樣式：

【第 7 題】



學生在解題時，大都觀察到圖 1 至圖 4 的點數為 3、6、9、12、……，因此，圖 5 是 $3 \times 5 = 15$ ，圖 6 是 $3 \times 6 = 18$ ，……，圖 10 是 $3 \times 10 = 30$ ，……，察覺到圖形樣式位置(編號)與 3 的倍數間的關係。學生的解題想法會與解決第一類或第二類

題型時相同，與原先設計求算「空心圖形求外圍個數」題型之目的不同，在未來研究時需加以注意。

綜上所述，從學生的解題表現在各層次的分布情形來看，第一類「項次階差為相同倍數」的圖形樣式問題，有八成左右的學生能達到層次 4b 以上，看起來此類問題對六年級學生來說似乎過於簡單，需加強的是要如何寫出正確的一般式；第二類「項次階差為相同差數」的圖形樣式問題，其圖形樣式變化頗多，學生在觀察圖形樣式的方式不同，其解題策略亦不同，列出的一般式也具多樣性(見表 3)；即使同為「項次階差為相同差數」的題型，會因圖形樣式結構的複雜度，而影響學生的解題表現。因此，研究者發現，圖形樣式為「項次階差為相同差數」的類型，對高年級學生較具挑戰性；至於第三類的問題中，若以「二階樣式」來看，是比第一類、第二類的圖形樣式問題的難度要高，而學生是從圖形樣式而非數列來解題，在解決「正方形數」的問題時，透過「正方形面積公式」其實是容易的，而「三角形數」對學生來說，即使可透過「梯形面積公式」，但要學生將「三角形數」的圖形樣式與「梯形面積公式」作這樣的聯結，進而列出其一般式仍屬困難。

另外，從學生之解題表現層次分布情形來看(見表 2)，第 1 題到第 7 題中沒有學生的解題表現為層次 4a—「一個正確的文字描述」。就其原因，應該是因試題採「具引導」之開放式問題，也就是試題中的每一個小題，是循序漸進的提問，到了第 5 小題時，請學生「寫出一個能計算出第 n 圖一共要用幾個 \square 排成的式子？」時，學生自然就會想用一個有 n 的代數式來進行描述。因此，當學生用代數式來描述時，至少能達到 4b—嘗試做一個代數式，而不會出現 4a—一個正確的文字描述。

二、圖形樣式問題的解題策略

基於上述分析，在本研究的三類圖形樣式題型中，解題策略較豐富且多變化的是第二類「項次階差為相同差距」的問題。因此，本文僅就學生在第二類「項

次階差為相同差距」的第 3 題與第 4 題的解題紀錄進行分析。

表 3

從表 3 來看，學生在第 3 題的解題策略可分成四種：策略 1，以圖 1 的「|」共 3 枝為計數單位，每增加一個圖，就增加 3 枝「|」，再減去中間重疊部分的「|」，重疊的邊數會比圖數少 1，其一般式為「 $nx3-(n-1)$ 」；策略 2，能注意到從圖 1 到圖 2 增加 2 枝「|」，之後每增加一個圖，就增加 2 枝「|」，從第 2 圖開始，增加了幾個圖就增加了幾個 2 枝，再加上圖 1 的 3 枝「|」，其一般式為「 $2 \times (n-1) + 3$ 」；策略 3，能注意到每增加一個圖，就增加 2 枝「|」，且看到圖形樣式中不變的部分——1 枝「|」，是圖形樣式中的第 1 枝「|」。找出圖形中變與不變的部分，透過乘、加的運算，再與增加數量一併計數，其一般式為「 $2n+1$ 」；策略 4，注意到圖 1，兩邊都是 1 枝「|」，圖 2 兩邊各有 2 枝「|」，……，所以旁邊枝數和圖數相同，再加上底部 1 枝「|」，與策略 3 不同的是學生都採用加法計算其一般式為「 $n+n+1$ 」。在這一題的四個解題策略中，以採「策略 3」的學生人數最多，共 34 人(57.63%)；其次是「策略 2」，有 8 人(13.56%)。

表 4

從表 4 來看，學生在第 4 題的解題策略有下列四種：策略 1，以圖 1 的 5 個「·」為單位，每增加 1 圖則加 5 個「·」，再減掉多加的「·」數，其一般式為「 $5n - (n-1) \times 2$ 」；策略 2，注意到每增加一圖，就增加 3 個「·」，從第 2 圖開始，先算出增加了多少 3 個「·」，再加上第 1 圖的 5 個「·」，其一般式為「 $5+(n-1) \times 3$ 」；策略 3，看到圖形樣式中不變的部分，是圖形中上下的 2 個「·」，再加上每增加 1 圖，就增加左、右、下方的 3 個「·」，其一般式為「 $3n+2$ 」；策略 4，看到 T 字型的圖形，有左、右及往下的 3 個「·」，學生將 3 個方向的點數

分別計算之。在這些策略中,也以採「策略 3」的學生人數最多,共 14 人(23.73%);其次是「策略 2」,有 11 人(18.64%)。

這兩題雖同為「項次階差為相同差數」的題型,但從解題錯誤的人數來看,第 3 題有 12 人(20.34%),第 4 題有 29 人(49.15%),錯誤人數相差一倍多,可看出圖形樣式的結構影響學生的解題策略,也對學生能否正確解題造成影響。

在第 3 題和第 4 題的最後有一個逆向的問題,要學生從已知的總數量利用「逆推法」來找出圖形樣式的位置時,研究者發現採「策略 3」的學生較能透過其一般式利用逆推找到答案;而使用「策略 1」、「策略 2」或「策略 4」的學生,由於其一般式較複雜,尤其是包含了 $(n-1)$ 的部分,學生不易透過其一般式逆推去找出圖形樣式的位置。

採用「策略 3」的學生較能成功解決逆推的問題之外,並根據文獻,發現使用「策略 3」的學生能依據圖形樣式特性及解題的脈絡順序,形成抽象的結構,達到 Stacey (1989) 在數形規律圖形樣式研究中四種學生常用的解題策略中的第四種策略「線性法」,也與 Bishop (2000) 指出學生在線性幾何的數量樣式問題解決方面的解題表現中的「採函數的想法」相同。而採取「策略 2」的學生看到圖形樣式中各項次與項次間的差距,接近 Stacey (1989)、Bishop (2000) 研究中所指出的「遞迴」想法。

由於第 3、4 題同屬於「項次階差為相同差數」的題型,發現學生兩題採用相同策略解題的共有 21 人(35.59%),其中都採用「策略 2」的 7 人(11.86%),「策略 3」的 14 人(23.73%);兩題採用不同策略解題的有 10 人(16.95%),如果其中有任 1 題採用錯誤策略的則不予統計,共 12 人(20.34%)。從這樣的結果來看,表示學生在面對「項次階差為相同差數」類型的圖形樣式時,採用相同策略解題的學生多於採用不同策略解題的學生,其中又以採「策略 3」解題的學生最多。由於在所有策略中,「策略 3」是較簡潔且較有效率之策略,亦表示當學生能採用較有效率之解題策略時,其解法會漸趨固定。

三、學童解圖形樣式問題的錯誤類型

從學生圖形樣式測驗中的錯誤解題紀錄加以分析，在代數推理的歷程上，學生無法達成解題的目標，可將原因歸納如下：

(一) 無法將具體視覺圖像線索轉化成抽象的心智思考解題

有些學生習慣用具體圖像表徵的辨認與操弄來解題，所以在解決較近項次時，如第 4 圖、第 5 圖，可以透過畫圖、計數數量來找到答案，卻無法將它抽離形成心智的表徵；當要解決較遠的項次，如第 50 圖、第 100 圖時，就無法掌握圖形樣式間的關係而使得解題失敗。像這樣的學生，在研究樣本中大約占有一成左右的比例。

(二) 無法發現問題情境中變數之間的關係

很多學生在觀察圖形樣式時，已發現圖形樣式之間的差距，也就是已知前一項時，透過差距法求得下一項。而在求解較多的項次時，卻直接將項次乘上差距，導致解題失敗。這和 Stacey (1989) 發現學生多數可以由 n 和 $n-1$ 元素之間的差異找出常數的部分(亦即 b)，然而，在歸納的過程中，有學生採用錯誤的直接比例法 (direct proportion method)，也就是直接用常數乘以 n 來決定第 n 個元素，是相同的。以本研究測驗第 3 題錯誤解法為例，就有 4 位學生是以「圖 4， $2 \times 4 = 8$ ，圖 10， $2 \times 10 = 20$ ，圖 50， $2 \times 50 = 100$ ，圖 100， $2 \times 100 = 200$ ，並以 $2 \times n$ 為其一般式。」

(三) 察覺圖形樣式規律，但無法正確列出一般式

產生這一類錯誤的學生，以使用「策略 2」解題的學生較常發生，由於學生是先找出每一圖之間的差距，乘以增加了幾個差距後，必須再加上圖 1 的數量而求解，學生能使用數字計算，且成功解題，但不會列出一般式。如解第 4 題，「圖 4： $5 + 3 \times 3 = 14$ ；圖 10： $5 + 3 \times 9 = 32$ ；圖 50： $5 + 3 \times 49 = 152$ ；圖 100： $5 + 3 \times 99 = 302$ ；圖 n ： $5 + 3 \times n$ 」，而正確的一般式是「 $5 + 3 \times (n-1)$ 」。

綜上所述，學生在這份測驗中出現的錯誤，大致可分成上述三類。每一類錯誤的產生都有其不同的原因。

肆、 討論與建議

根據資料分析研究結果顯示，學生在這三類問題中的解題能力層次並不一致，以第一類「項次階差為相同倍數」的圖形樣式問題，表現最好，約有 80% 的學生能達到層次 4b 以上，具有製造一般化通式能力的代數思考；而「二階樣式與其他」中之「三角形數」達層次 4 者最少，僅約占 30%。至於「項次階差為相同差數」問題對高年級學生較具挑戰性。因此，本研究針對該類問題，歸納出在延續圖形樣式時的解題策略，並進一步分析造成學童錯誤解法的原因。

一、 討論

(一) 學童製造一般式之能力，受圖形樣式問題類型之影響

依據馬秀蘭 (2008) 之研究，各題得分達到層次 4 以上者，表示具有製造一般化通式能力的代數思考。從測驗結果顯示，不同類型的圖形樣式問題，能達到層次 4 以上的學生人數比例有所差異，即使是同一類的圖形樣式問題，如皆為「項次階差為相同差數」的問題，因圖形樣式的不同，也影響學生的解題策略與正確性。因此，何種圖形樣式問題，以及怎樣的解題表現，才能判定學生是否具有製造一般化通式能力的代數思考能力？值得進一步探究。

(二) 肯定圖形樣式解題策略的多樣化，亦兼顧有效率解題策略之學習

分析學生在「項次階差為相同差數」問題的解題策略 (見表 3、表 4)，可以看出學生面對圖形樣式問題時，會依據其觀察而有不同的解題策略，接近 Stacey (1989)、Bishop (2000) 的研究結果。學生展現不同的解題策略，也是以圖形樣式問題促進代數思考的目的。Zazkis 與 Liljedahl (2002) 指出，進行歸納樣式的教學活動時，我們應建立學生們對樣式不同的看法，才能幫助學生們找出那些樣式，帶領他們找出代數的符號式。因此，如果在解圖形樣式問題時，著重的僅是找到正確的答案，忽略了學生解題時的想法與策略，那就失去幫助學生代數思考能力的發展，實屬可惜。在本研究中，歸納出學生使用的解題策略，發現採用「策略 3」的學生能依圖形樣式的特性及解題脈絡順序，形成抽象的結構，在解決逆

推問題時，也能順利解題；所以，應如何協助學生在解圖形樣式問題時，一方面肯定多樣的解題策略，同時又能協助學童學習使用更有效率的解題策略，是教師教學過程中應思考的課題。

(三) 加強符號的正確使用，減少列一般式時的錯誤

從圖形樣式問題的解題紀錄中，發現有不少學生已能透過觀察、描述與延伸圖形樣式，卻無法正確的列出一般式。NCTM (2000) 指出，學生在具體的情境數列中探究規律，一開始能臆測，以口語來描述此規律關係，接著發現規律的認定與規則辨識，最後歸納出一般性的抽象通則化，這種從具體到抽象的思考方式，也就是代數思維的核心。因此，學生在解圖形樣式問題時，教師應如何幫助學生正確的使用符號，以減少列一般式時的錯誤，亦為教學中須關注的部分。

二、建議

(一) 對代數教學的建議

1. 將探索規律的教材融入國小數學課程中

在代數的學習上，圖形樣式規律的探索經驗，可幫助學生由算術思考(樣式能力層次3a)，演進到了解一般化如何趨近的算術-代數思考(樣式層次3b)之過渡期，最後才能提升到製造一般化通式能力之代數思考(樣式層次4)，在數列關係通則化方面建立穩固的基礎，並能自然過渡到形式化的符號操作(馬秀蘭，2008)。因此，在國小課程中，應及早納入規律探索的課程，除了圖形樣式的規律外，也能在整數、分數、小數計算單元的課程中，融入數量關係規律的探究，以幫助學童建立具備發展代數概念的先備理解與經驗基礎。

2. 透過解圖形樣式問題，加強文字符號的使用

從學生在圖形樣式的解題表現，發現學生對於使用符號列出一般式，較有困難。然而，當透過解圖形樣式題時，學生已能由算式來找出結果，那麼，在符號的使用上，如果經由教師適時的提醒，就能讓學生在自然且有意義的

情境下進行學習。

(二) 對未來研究的建議

1. 研究對象方面

本研究樣本為臺北市六年級學童共兩個班級，建議未來可擴大範圍，針對國小學童圖形樣式覺察能力作橫向整年段之量的研究，以詳細探察該年段學童圖形樣式覺察能力之概念具備情形；亦可針對國小學童圖形樣式覺察能力作縱向跨年段之量的研究，以探究國小學童圖形樣式覺察能力的概念發展情形。

2. 圖形樣式材料選擇方面

圖形樣式的形式繁多，如線性圖形樣式、重複圖形樣式、二階樣式圖形、...等。本次研究限於研究者之時間與能力等因素，無法將其全數納入研究範圍，但圖形樣式與代數學習關係密切，具研究價值。因此，未來可取材不同的數形規律材料，以探討不同年段學生在各種圖形樣式問題之解題表現。

3. 測驗編製方面

在評定學生圖形樣式解題表現層次時，發現沒有學生在 4a 的層次，分析其原因，可能是因試題的呈現方式。因此，未來可在試題的呈現上做調整，採用較開放的方式，不採逐題引導，則學生的解題表現或許會有較大的空間。當然，也可針對「國小高年級學童解線性圖形樣式題能力層次」再作研究，是否有更合適的分法，以評定學生解圖形樣式題的能力層次。

4. 施測後需增加訪談部分

本研究蒐集資料的工具為圖形樣式之紙筆測驗，對於無作答者或部分作答者以及解題錯誤者，無法了解並分析其背後之原因。本研究只針對測驗結果，套上分析工具做解釋說明，若能經由訪談或實際觀察表現行為，才能與所用之分析層次作更準確之配對。

伍、參考文獻

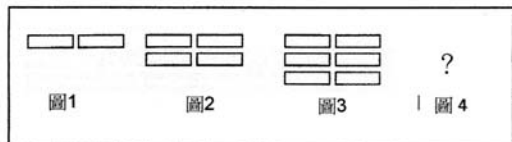
- 洪明賢 (2003)。國中生察覺數形規律的現象初探。國立臺灣師範大學數學研究所碩士論文，未出版，臺北市。
- 馬秀蘭 (2008)。國小高年級學童解樣式題之代數思考：以線性圖形樣式題為例。科學教育研究與發展季刊，50，35-52。
- 教育部 (2003)。國民中小學九年一貫課程綱要—數學學習領域。臺北：教育部。
- Bishop, J. (2000). Linear geometric number patterns: Middle school students' strategies. *Mathematics Education Research Journal*, 12(2), 107-126.
- Coburn, T. G. (1995). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics Addenda Series, Grades K-6—Pattern* (3rd ed.). Reston, VA: NCTM.
- Mason, J. (1996), Expressing generality and roots of algebra, N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra*, pp.65-86, Dordrecht. The Netherlands: Kluwer.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *The principles and standards from Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Orten, J., Orten, A., & Roper, T. (1999). Pictorial and practical contexts and the perception of pattern. In A. Orten (Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp.121-136). London: Cassell.
- Stacey, K. (1989). Finding and using pattern in linear generalizing problem. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 147-164.
- Warren, E., & Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns : Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 67, 171-185
- Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, 49(3), 379-402.

【附錄一】

六年__班__號姓名_____

圖形樣式測驗試卷

1. 下圖中每一個圖形都是用 □ 排成，依照這樣的規則，請回答下面的問題。



(1) 從各圖間的變化，說說看，你發現了什麼？

(2) 圖 4 看起來會是什麼樣子？請畫一個簡圖。它用了幾個 □ 排成？

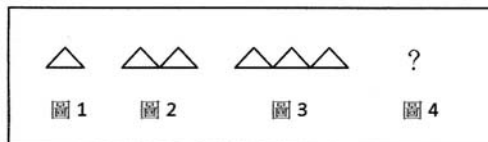
(3) 圖 10 要用幾個 □ 排成？你怎麼知道的？

(4) 圖 50 要用幾個 □ 排成？圖 100 呢？你怎麼知道的？

(5) 寫出一個能計算出第 n 圖要用幾個 □ 排成的式子？

(6) 依照上面的規律，如果用 240 個 □ 可以排出第幾個圖？

2. 下圖中每一個 △ 都是用 3 支竹籤排成，依照這樣的規則，請回答下面的問題。



(1) 從各圖間的變化，說說看，你發現了什麼？

(2) 圖 4 看起來會是什麼樣子？請畫一個簡圖。它用了幾支竹籤排成？

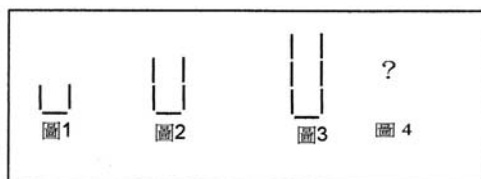
(3) 圖 10 要用幾支竹籤排成？你怎麼知道的？

(4) 圖 50 要用幾支竹籤排成？圖 100 呢？你怎麼知道的？

(5) 寫出一個能計算出第 n 圖要用幾支竹籤排成的式子？

(6) 依照上面的規律，如果用 240 支竹籤，可以排出第幾個圖？你怎麼知道的？

3. 下圖中每一個圖形都是用「1」排成的，依照這樣的規則，請回答下面的問題。



(1) 從各圖間的變化，說說看，你發現了什麼？

(2) 圖 4 看起來會是什麼樣子？請畫一個簡圖。它用了幾個「1」排成？

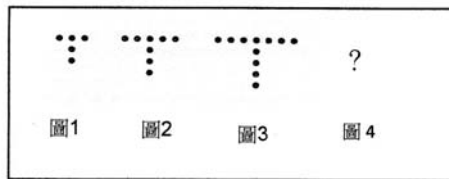
(3) 圖 10 要用幾個「1」排成？你怎麼知道的？

(4) 圖 50 要用幾個「1」排成？圖 100 呢？你怎麼知道的？

(5) 寫出一個能計算出 n 個圖要用幾個「1」排成的式子？

(6) 依照上面的規律，如果用 201 個「1」，可以排出第幾個圖？你怎麼知道的？

4. 下圖中每一個圖形都是用「•」排成的，依照這樣的規則，請回答下面的問題。



(1) 從各圖間的變化，說說看，你發現了什麼？

(2) 圖 4 看起來會是什麼樣子？請畫一個簡圖。它用了幾個「•」排成？

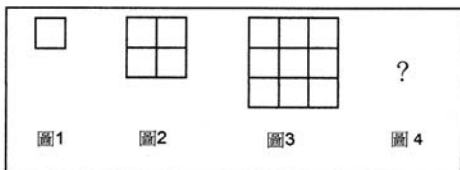
(3) 圖 10 要用幾個「•」排成？你怎麼知道的？

(4) 圖 50 要用幾個「•」排成？圖 100 呢？你怎麼知道的？

(5) 寫出一個能計算出 n 個圖要用幾個「•」排成的式子？

(6) 依照上面的規律，如果用 260 個「•」，可以排出第幾個圖？你怎麼知道的？

5. 下圖中每一個圖形都是用 \square 排成的，依照這樣的規則，請回答下面的問題。



(1) 從各圖間的變化，說說看，你發現了什麼？

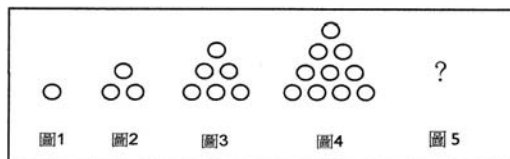
(2) 圖 4 看起來會是什麼樣子？請畫一個簡圖。它用了幾個 \square 排成？

(3) 圖 10 要用幾個 \square 排成？你怎麼知道的？

(4) 圖 50 要用幾個 \square 排成？圖 100 呢？你怎麼知道的？

(5) 寫出一個能計算出第 n 圖要用幾個 \square 排成的式子？

6. 下圖中每一個圖形都是用 \circ 排成的，依照這樣的規則，請回答下面的問題。



(1) 從各圖間的變化，說說看，你發現了什麼？

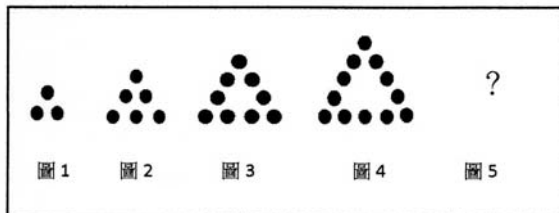
(2) 圖 5 看起來會是什麼樣子？請畫一個簡圖。它用了幾個 \circ 排成？

(3) 圖 10 要用幾個 \circ 排成？你怎麼知道的？

(4) 說說看，圖 50 要用幾個 \circ 排成？圖 100 呢？你怎麼知道的？

(5) 寫出一個能計算出第 n 圖要用幾個 \circ 排成的式子？

7. 下圖中每一個圖形都是用 ● 排成的，依照這樣的規則，請回答下面的問題。



- (1) 從各圖間的變化，說說看，你發現了什麼？

- (2) 圖 5 看起來會是什麼樣子？請畫一個簡圖。它用了幾個 ● 排成？

- (3) 圖 10 要用幾個 ● 排成？你怎麼知道的？

- (4) 圖 50 要用幾個 ● 排成？圖 100 呢？你怎麼知道的？

- (5) 寫出一個能計算出第 n 圖要用幾個 ● 排成的式子？

小朋友，謝謝你的填答！



【附錄二】

表1 國小高年級學童解線性圖形樣式題能力層次

層次	解線性圖形樣式題之表現
層次0	沒有一點進展。
層次1	學生已注意圖形樣式的一些特性，或許描述出部分樣式。
層次2	學生注意一個樣式，但未推出下一項。
層次3a	能比較連續項差異，且能透過計數或加法算式，推出下一項或第10項。
層次3b	能比較連續項差異外，尚可辨認每項結構之間關係，能透過乘法，推出較遠的項次，如第50項或100項等。
層次4a	以文字敘述來描述圖形樣式的歸納。
層次4b	嘗試用算式或用文字符號寫出圖形樣式的歸納。
層次4c	使用文字符號寫出正確的代數式。

表2 學生「圖形樣式測驗」解題表現層次人數分布情形

試題類型與題號	層次								
	0	1	2	3a	3b	4a	4b	4c	
項次階差為 相同倍數	1			1	11		8	39	
項次階差為 相同差距	2			1	10		8	40	
二階樣式 與其他	3		4	4	8		6	37	
	4	2	13	9	5		5	25	
	5	4	1	5	3	1	8	37	
	6	4	3	16	12	6	1	17	
	7	1	1	8	1	6	5	37	

表 3 「項次階差為相同差數」問題的解題策略分析表—第 3 題



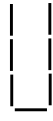
第 3 題 圖形樣式				?
	圖1	圖2	圖3	圖4
使用策略	策略 1	策略 2	策略 3	策略 4
解題說明	以圖 1 的「 」共 3 枝為計數單位，每增加一個圖，就增加 3 枝「 」，再減去中間重疊部分的「 」，重疊的邊數會比圖數少 1。	注意到從圖 1 到圖 2 增加 2 枝「 」，之後每增加一個圖，就增加 2 枝「 」，從第 2 圖開始增加了幾個圖就增加了幾個 2 枝，再加上圖 1 的 3 枝「 」。	注意到每增加一個圖，就增加 2 枝「 」，且看到圖形樣式中不變的部分— 1 枝「 」，是圖形樣式中的第 1 枝「 」。	注意到圖 1，兩邊都是 1 枝「 」，圖 2 兩邊各有 2 枝「 」，…，所以旁邊枝數和圖數相同，再加上底部 1 枝「 」，與策略 3 不同的是採用加法計算。
一般式	$n \times 3 - (n - 1)$	$2 \times (n - 1) + 3$ $3 + (n - 1) \times 2$	$2n + 1$	$n + n + 1$
採用人數	1	8	34	3
百分比	1.69%	13.56%	57.63%	5.08%

表 4 「項次階差為相同差數」問題的解題策略分析表—第 4 題

使用策略	策略 1	策略 2	策略 3	策略 4
第 4 題 圖形樣式				
解題說明	以圖 1 的 5 個「·」為單位，每增加 1 圖則加 5 個「·」，再減掉多加的「·」。	注意到每增加一圖，就增加 3 個「·」，從第 2 圖開始，先算出增加了幾個 3「·」，再加上第 1 圖的 5 個「·」。	看到圖形樣式中不變的部分，是圖形中的 2 個「·」，再加上每增加 1 圖，就增加的 3 個「·」。	看到 T 字型的圖形，有左、右及往下的 3 個「·」，學生將 3 方向的點數分別計算之。
一般式	$5n - (n-1) \times 2$	$5 + (n-1) \times 3$ $n \times 3 + 5 - 3$	$3n + 2$	$n + 2 \times n + 2$ $n + n + 1 + n + 1$ $n + 2 + 2 \times n$ $n + n + n + 2$
採用人數	1	11	14	4
百分比	1.69%	18.64%	23.73%	6.78%

活動報馬仔

一、 2011/02/19(六)~2011/02/20(日)

2011 資訊科技融入教學與教師專業發展國際學術研討會

地點：國立新竹教育大學 推廣大樓講堂乙

參考網址：

<http://gimse.web.nhcue.edu.tw/front/bin/ptdetail.phtml?Part=1000107-1&PreView=1>

二、 2011/04/08(五)~2011/04/10(日)

2011 Conference on Creative Education

地點：中國武漢

參考網址：<http://www.creativedu.org/2011/Home.aspx>

三、 2011/04/30(六)~2011/05/01(日)

2011 年第三屆科技與數學教育學術研討會

地點：國立臺中教育大學

參考網址：<http://mathed.ntcu.edu.tw/TME2011/>

稿 約

一、本刊徵選之數學教育刊物為：

- (一) 本刊以徵選實務性的數學教育刊物為主，舉凡任何數學創新教學之方法或策略、數學教學實務經驗、數學課程設計與實踐之心得分享等皆為本刊之首要選擇標的；
- (二) 研究文章（包括以實驗、個案、調查或歷史等研究法所得之結果，和文獻評論、理論分析等）；
- (三) 短文（包括研究問題評析、數學教育之構想、書評、論文批判等）；以及
- (四) 其他符合本刊宗旨之文章。

二、本刊所刊之文章，需為報導原創性教學或研究成果之正式文章，且未曾於其他刊物或書籍發表者（在本刊發表之文章未經台灣數學教育學會同意，不得再於他處發表）。

(一) 來稿請注意下列事項：

1. 來稿請以中文撰寫，力求通俗易讀，須為電腦打字，每篇以不超過 6000 字為原則（特約稿不在此限），以電子郵件傳送。
2. 來稿請附中英文篇名、作者

姓名及服務機關，作者姓名中英文並列，若有一位以上者，請在作者姓名及服務機關處加註 (1)、(2)、(3) 等對應符號，以便識別，服務機關請寫正式名稱。

3. 來稿請附中英文摘要，並於摘要後列明關鍵詞彙 (key words)，依筆劃順序排序（以不超過五個為原則），英文關鍵詞彙則須與中文關鍵詞彙相對應。
4. 文稿若為譯文，請附原文影本及原作者同意函，並請註明原文出處、原作者姓名及出版年月。
5. 凡人名、專有名詞等若為外語者，第一次使用時，謂用 () 加註原文。外國人名若未有約定成俗之譯名，請選用原文。
6. 附圖與附釋請於文後，並編列號碼，並在正文中註明位置。
7. 文末參考文獻依作者姓氏分別編號排序：中、日文依筆劃多寡排列；西文（英、法、德...等）依字母順序排列；若中、日、西文並列時，則先中、日文後西文。至於參

考文獻之寫法如下：

- (1) 期刊論文，請依下列順序書寫：作者、出版年（西元）、論文篇名、期刊名稱、卷期、頁數。

例：張湘君（1993）。讀者反應理論及其對兒童文學教育的啟示。《東師語文學刊》，6，285-307。

- (2) 圖書單行本，請依下列順序書寫：作者、出版年（西元）、書名、版次、出版地、出版社、頁數。

例：張春興（1996）。《教育心理學》。台北：東華。頁64-104。

8. 稿件順序為：首頁資料（題目、作者真實姓名及服務機關、通訊地址及電話；若需以筆名發表，請註明）、中文摘要、正文（包括參考文獻或註釋）、末頁資料（以英文書明題目、作者姓名及服務機關、並附英文摘要）及圖表（編號須與正文中之編號一致）。

(二) 本刊對來稿有權刪改，不同意者請在稿件上註明。

(三) 來稿刊出，版權為台灣數學教育學會所有。

(四) 作者見解，文責自負，不代表本學會之意見。

(五) 來稿請e-mail至：

dcyang@mail.ncyu.edu.tw