

劉致演、秦爾聰、尤昭奇（2017）。
探討一位國中數學教師發展探究教學之專業成長。
臺灣數學教育期刊，4（2），33-68。
doi: 10.6278/tjme.20170914.002

探討一位國中數學教師發展探究教學之專業成長

劉致演¹ 秦爾聰² 尤昭奇³

¹ 國立彰化師範大學科學教育研究所中等數學教學研究中心

² 國立彰化師範大學科學教育研究所

³ 臺中市立清水國民中學

本研究旨於為期超過一學年的縱貫研究中，透過敘說探究取向觀點描述一位國中數學教師在不同時期發展探究教學之專業成長。研究者蒐集個案教師課室實務、反思與晤談等資料，藉由敘說分析形成個案教師專業成長故事之敘說結構，來描繪其專業成長歷程。研究發現，個案教師在發展探究教學專業成長歷程中，漸次覺察其教師角色認同與教學實務深受初始信念影響，藉由與研究社群成員反覆磋商、討論以及教學實務的反思實踐，個案教師於發展探究教學過程中重新聚焦於學生學習的理解，以系統性佈題策略作為數學臆測任務核心，協助學生發展數學臆測思維，並為提升教學效能進而發展多工教學程序。最終，個案教師在重新發現自身核心教學價值與信念後，理解學生是學習的責任中心，並自我覺察教師角色應是佈題者與學習環境的建構者，進一步了解數學探究教學的旨趣應是培養學生積極參與數學問題探究，並且能在解題過程藉由特殊化、系統化、一般化及反駁等策略進行數學思考。

關鍵詞：專業成長、敘說、數學探究、臆測

通訊作者：秦爾聰，e-mail：abechin@cc.ncue.edu.tw

收稿：2016年4月4日；

接受刊登：2017年9月14日。

Liu, C. Y., Chin, E. T., & Yu, C. C. (2017).

An investigation of a junior high school teacher's professional growth towards developing mathematics conjecturing-inquiry teaching.

Taiwan Journal of Mathematics Education, 4(2), 33-68.

doi: 10.6278/tjme.20170914.002

An Investigation of a Junior High School Teacher's Professional Growth towards Developing Mathematics Conjecturing-Inquiry Teaching

Chih-Yen Liu¹ Erh-Tsung Chin² Chao-Chi Yu³

¹ Mathematics Teaching and Research Center Graduate Institute of Science Education,
National Chunghua University of Education

² Graduate Institute of Science Education, National Chunghua University of Education

³ Chin-Shuei Junior High School

This longitudinal study for over one academic year is aimed to investigate a junior high school mathematics teacher's professional growth towards developing conjecturing-inquiry teaching by means of the narrative inquiry approach. The progress of the case teacher's professional growth is narrated by narrative structure which is framed from the narrative analysis according to videotaping of teaching practice, in-depth interviews, and teacher's reflections. Research results reveal that the case teacher is gradually aware that his role recognition and teaching practice are influenced by his initial beliefs within the progress of professional growth through developing conjecturing-inquiry teaching. By means of constant negotiation and discussion with peers in the research group, as well as his own reflective practice in the classroom teaching, the case teacher adjusts his focus on students' understanding, adopting systematic problem-posing strategy as the core task of mathematical conjecturing to help students develop mathematical conjecturing thinking, and building up a multi-functional teaching procedures for promoting teaching efficiency. Finally, as re-discovering his core teaching values and beliefs, the case teacher comprehends that the student is the centre of learning, and perceives that the teacher's role is the problem poser and the constructor of the learning environment. The objectives of conjecturing-inquiry teaching should be to foster students actively getting involved in inquiring mathematical problems, and conducting mathematical thinking through specialising, systematising, generalising, and refuting while solving problems.

Keywords: professional growth, narrative, mathematical inquiry, conjecturing

Corresponding author : Erh-Tsung Chin , e-mail : abechin@cc.ncue.edu.tw

Received : 4 April 2016;

Accepted : 14 September 2017.

壹、前言

當前數學教學在考試引導教學的氛圍下，教學活動乃於確保學生能考試上獲得高分而非促進學生真實數學理解甚或數學能力養成，因而對於大部分教師而言傳統講述教學仍是較為「安全」及「有效」的教學策略，而此種教學模式是教師僅在講台上介紹單元相關數學概念、公式後，講解示範例題和提供精緻化的演算技巧 (Lin & Tsao, 1999)。事實上，促進學生學習的理解是數學教學與學習活動中最重要旨趣 (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000; National Research Council [NRC], 2001)，而教師在面臨傳統教學 (強調培育演算程序的效能及準確) 與教育改革行動 (旨於培養概念理解及複雜的解題) 不可調和的張力 (Franco, Sztajn, & Ortigão, 2007; Gravemeijer, 1997) 時，教學改變實則仰賴於專業成長 (Little, 2006)。此外，相關研究發現探究教學足以提升學生數學學習的理解 (Harlen, 2014)，而臆測在探究學習過程中扮演舉足輕重的角色 (Cañadas, Deulofeu, Figuerias, Reid, & Yevdokimov, 2007)，因為學生在解題過程中必須在一般化及特殊化來來回回的解題過程中提出猜想、驗證猜想，並為他們的解法進行辯證。由於數學探究教學是改革取向教學 (NCTM, 2000)，為實踐改革教學目標，教師難免得在傳統與改革的兩難中有所取捨，因此除協助教師改善教學實務外 (Franke, Carpenter, Levi, & Fennema, 2001)，更應協助教師發現其教學核心價值及原則 (Little, 1993)。當前，國中數學教師常見的專業成長模式是參加研習或工作坊，但根據長久以來的觀察，教師多半被動參與研習，因此無法產生教學改變進而促進學生學習；事實上短期工作坊，難以有效促進教師進行教學改變與專業成長 (Lavonen, Jauhainen, Koponen, & Kurki-Suonio, 2004)，並且教師在參與以講授為主的專業成長研習後，鮮少將研習內容落實在課室實務中 (Briscoe, 1991)。推究其原因為教師經常身兼數職，如班級經營、行政庶務或是執行學校所交付的任務，導致無暇參與教師增能活動，因此，教師教學增能應由教師自主發展，並藉由教師專業社群形塑學習型組織，才能有效推動教師教學實踐與成長 (李天堯, 2011)。此外，國外研究也發現教師專業社群是幫助教師學習的建設性場所 (Sarason, 1990)；並且對教師而言，最有力的學習經驗發生在其所屬的課室裡，藉由自己或觀察者對於教學實務檢驗的反饋進行教學實務改變 (Putnam & Borko, 2000)，而教師教學信念的改變更仰賴於教學情境中之社會脈絡及教師本身的反思實踐。由於教學是在實務中學習 (teaching as learning, in practice) (Lave, 1996)，因此相信藉由融入教師日常教學並透過教師專業成長社群協助，使教師在磋商、討論、反思與實踐建等過程中降低理論與實務磨合 (李源順、林福來、陳美芳, 2012)，進行教學改變並促進學生學習的理解；如此，勢必能建立一個有效的教師專業成長模式，除提供台灣現職教師進行教學改變之參考外，更能藉由個案教師發展探究教學分析結果，作為關於發展臆測探究教學依據。因此本研究擬策畫一學校本位 (school-

based)之教師專業成長計畫,邀請一位持有改革教學信念但仍採傳統講述教學策略之國中教師,以日常教學活動為中心,藉由實踐社群(community of practice)(Lave & Wenger, 1991; Wenger, 2015)概念協助個案教師進行專業成長。在進行為期超過一個學年的教學研究與教學實務偕同之縱貫研究歷程裡,探討個案教師如何在發展數學探究教學過程中藉由對本身教學信念的覺察、教學實務的重塑、發展數學探究教學核心知識等過程進行專業成長。

貳、文獻探討

一、數學探究教學

探究是一種動態過程,此過程開端源自於對自然現象的好奇,並努力透過探索拼湊出真知的全貌(Branch & Oberg, 2004)。因而,數學探究本質是數學家為解決數學上的困惑與異例,藉由一般化(generalization)將錯綜複雜的片段關係,加以整合成和諧而可理解的整體(Kent, 1997)。此外,數學探究活動核心是針對欲探討現象設置及建立假說或猜想(Meyer, 2010),但這些假說與猜想必須經過驗證,而驗證方法是透過假設—演繹(hypothetic-deductive)的系統化過程(Lakatos, 1976)。簡言之,數學探究所要強調的就是學習者自發性的「做數學」(doing mathematics),並在過程中尋找問題本質的樣式、提出猜想並藉由反駁加以修正並與他人進行溝通與論述(Mason, Burton, & Stacey, 2010; NCTM, 1991, 2000)。然而,「學生不會意外地成為主動的學習者,除非經由計畫性設計,始能讓學生進行結構性探究」(Richards, 1991, p. 38),因此探究教學的重要旨趣之一即於幫助學生將經驗與問題研究進行連結,在與他人彼此協商中主動建構數學知識。此外,探究教學是一個具有多元定義且難以把握的概念(Aulls & Shore, 2008),如Jaworski(1994)認為數學探究教學旨於在課室中佈建社會性脈絡,使學生在溝通論述中探索數學問題建構數學知識,而Franke、Kazemi與Battey(2007)更以整體觀點來看待數學教學,他們認為數學教學旨於建構一個學習環境,教師應於其中激勵學生做數學、致力協助學生主動發現學科知識獨有表徵,並且能夠詮釋學生的想法。綜上所述,教師應於探究教學活動中協助學生於其所佈建的問題脈絡中,如同數學家般研究數學問題(American Association for the Advancement of Science, 1993),進而探索其背後所蘊含的數學樣式及知識。實際上,「數學家很少直接解決問題,通常他們會先將問題特殊化、提出猜想,然後不斷的修正直到問題能解決為止」(Mason et al., 2010, p. 141),此種在問題探究中尋找高解釋力猜想或假定,再以最嚴格的方式找尋足以反駁猜想的可能例證或想法,即是數學臆測思維的本質(Lakatos, 1976)。此外,面對非例行性問題時通常我們會將問題加以簡化,並透過簡單的試驗來加以檢驗,經過多次試驗後將結果加以擴充並形成一般性通則;簡化問題以及試驗的過程即是特殊化,形成通則的過程則稱為一般化。由於一般化、特殊化及類比通常協同解決問題,並且學生的數學臆測思維模式

與數學家相仿皆具有猜測、檢驗、反駁、相信的遞迴歷程（陳英娥、林福來，1998），因此，本研究主張數學探究教學即是教師建置一個學習環境，引導學生在解題過程中藉由特殊化、一般化、類比等策略，形成猜想、尋找反例以檢驗或反駁猜想，並幫助學生在溝通論述過程中建構數學知識。

二、教師專業成長

教師專業成長是增進教學品質的重要途徑之一，「國家可以採用嚴格標準、設定願景、針對學生如何學習組織最好的研究、修改教科書與評量、為廣大學生提升教師教學策略以及在系統改革中改變其他所有組成——但少了專業成長，學校改革及學生學習成效的改進將不會發生」（American Federation of Teachers, 2002, p. 2）。教師專業發展即是教師在參與學習社群專業活動過程中進行學習與成長（Clarke & Hollingsworth, 2002）；此外，教師專業成長是意圖片面或全面地，促進教師現在或未來的教學改變所進行的活動（Little, 2006），教師可能在大量的互動與活動中增進知識及技能、改進教學實務並致力於其個人、社會及情感等面向的成長（Cohen, McLaughlin, & Talbert, 1993）。此外，為使教學趨向改革教學標準，教師應能發展數學知識、關於數學的知識、關於數學學習的個人性論述、能幫助學生發展特定數學概念知識之課程規劃能力、與學生進行有效溝通能力（如傾聽、提問、監控及促進課室論述）（NCTM, 1991）。事實上，論述（discourse）及實踐社群（community of practice）是教師專業成長的重要基礎（Cochran-Smith & Lytle, 1999），因為只有當教師視自己為社群成員時，藉由促進學生學習及改進課程以促進教學實務改變，如此，教師教學專業才能得以發展（Stigler & Hiebert, 1997）。Arbaugh（2003）藉由實徵性研究實證了這樣的觀點，該研究發現教師教學專業成長來自四個領域的支持：建立社群及關係、建立跨越理論及實務的連結、課程改革以及發展專業感（sense of professionalism）。

Guskey（2002）認為教師唯有在改善教學實務過程中，體悟到學生學習上顯著性的改變才可能因此改變教學信念或態度。因此，教師專業成長應聚焦於教師在發展數學探究教學過程中其信念及態度的改變。此外，教師的行動決策由信念所主宰（Biesta, Priestley, & Robinson, 2015），因此教學是原則性的決策制定，而決策源自於複合行動包含教師知識、信念與目標（Franke et al., 2007）。由於教育研究是一種經驗形式，而敘說對於表述及理解這樣的經驗是非常合宜的方法，透過敘說探究更可瞭解教師信念（Kaasila, 2007），並且教師敘說提供研究者理解教師如何學習及教學知識之組成，以及教師專業知識的全貌（Clandinin & Connelly, 1996）。因此，本研究採用敘說探究作為組織及再現教師教學經驗的主要研究方法，以符應探究本身即是教師專業成長的發展架構（Crockett, 2002），以及教學是在實務中學習（teaching as learning in practice）（Lave & Wenger, 1991）的想法。此外 NRC（2001）建議以數學教學素養（proficient teaching of mathematics）作為教師專業成長評估判準，此素養是由五個面向所交織而成：（1）流暢性（fluency）：為協助

學生發展數學思考所進行的必要教學程序 (instructional routine)；(2) 策略運用 (strategic competence)：針對學生學習所需彈性運用有效策略協助教學進行；(3) 對教學實務所需之核心知識 (core knowledge) 的概念理解 (conceptual understanding)，即教師對於數學教學技能 (know-how) 的理解、延伸與應用；(4) 適性推論 (adaptive reasoning)：針對數學教學實務與學生學習所進行的反思與實踐；(5) 建設性意向 (productive disposition)：對學生思維發展能產生正面影響的效能信念 (sense of efficacy)。由於教師教學素養由五個面向交織而成，因此研究者擬以敘說探究探討教師信念、適性推論及核心知識發展，藉此作為以紮根理論分析個案教師數學探究教學實務上之教學程序及教學策略兩面向發展之理論觸覺。

參、研究方法

一、研究方法

本研究採敘說探究 (Clandinin & Connelly, 2000; Connelly & Clandinin, 1990; Polkinghorne, 1995) 作為主要研究方法。敘說目的之一在於幫助我們理解所經驗的世界，藉由敘說我們可以不斷地重現經驗、深化認知 (Connelly & Clandinin, 1990)。敘說取向的質化研究聚焦在課室裡教師生活經驗的故事，作為理解教師專業成長的基礎 (Witherell & Noddings, 1991)。本研究透過個案教師在專業成長活動中的經驗陳述、反思及論述，理解教師在專業成長活動中如何改變態度、信念，發展對於學生學習的理解及教學知識技能的增進，藉由資料的精鍊並透過有序地連結相關事件，以結構性或主題性的方式，重現個案教師在專業成長活動中所經驗事件的關聯或因果關係 (Labov, 1972; Polkinghorne, 1995)。在描述個案教師專業成長經驗時，向內探討個案教師的情意、態度或信念等面向，向外探討教師與環境的互動，向後與向前探討教師經驗上的時間性觀點 (Clandinin & Connelly, 2000)，其次深入了解這些經驗敘說是「如何被說」及「為何被說」(Rushton, 2004)。

二、研究參與者

(一) 個案教師 T1

個案教師畢業於某師範院校數學系有十一年教學經驗，碩士進修期間先後在專業成長團體中參與數學探究教學、數學臆測、數學素養等理論探究，亦曾發表改革教學取向論述性文章。

(二) 教師專業成長社群成員

為協助個案教師 T1 進行數學探究教學專業成長，本研究另邀請教師 T2、T3 及兩位師資培育專家，共組本研究之專業學習社群。T2 有十三年教學資歷，專精合作學習、數學臆測教學策略，T3 為退休教師是目前教育部推動合作學習計畫之專家諮詢委員，個人曾投入十年時間致力

於探究教學的發展與實踐；兩位教師主要提供 T1 教學實務建議及示範。研究者及兩位師資培育專家則另組研究團隊，藉由課室觀察、晤談及課後討論協助 T1 進行教學改變。

三、專業成長計畫

(一) 協助個案教師進行專業成長之策略

為達成學生在學習社群中自發性學習的目標，Jaworski (1992) 提出以整合數學課室組成(提供支持性的學習環境、數學挑戰及培育養成學習的過程及策略) 觀點提出教學三元組概念，教學三元組主要由：(1) 管理學習 (management of learning)，關注於學習環境的建置，包含課室組織及課程決策，重要的是它包含課室的運作方式、價值及期望；(2) 對於學生的敏銳度 (sensitivity to students)，關於學生學習的知識；(3) 數學挑戰 (mathematical challenge)，包含激起數學思維及探究，激勵學生主動參與數學思考。為協助個案教師進行數學探究教學專業成長，教學實務上我們參考教學三元組 (Jaworski, 1992, p.8)，即學習管理、對於學生學習的覺察、鋪陳具有挑戰性的數學任務所組成的教學系統，協助教師在課室中形成學生探究學習社群(請參考圖 1)。

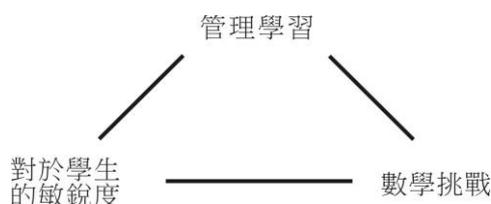


圖 1 教學三元組。翻譯自“Mathematics teaching: What is it?” by B. Jaworski, 1992, *For the Learning of Mathematics*, 12(1), p. 8.

由於教學是學習的過程 (teaching as a learning process) (Jaworski, 2006; Lave, 1996) 與社會性實踐 (social practice) (Lave & Wenger, 1991)，因此教育者及研究者與教師能透過社群探究 (community of inquiry) 發展協助學生理解的教學 (Jaworski, 2015)。社群裡的成員藉著參與 (engagement)、創造力 (imagination) 與結盟 (alignment) 產生歸屬感或認同感 (Wenger, 2015)，教學與學習的過程中參與者與其同儕，在教學或學習實務中藉由創造力詮釋自己在社群中的角色，並且將自己與社群所建立的規範與價值結盟。特別是在教師、研究者與教育者所組成的專業成長社群中，「探究」扮演關鍵聯盟 (critical alignment) 的角色，因為探究是社群成員探索知識與存在的本質與方法，並且探究在實務上具有三個階層 (Jaworski, 2006)：(1) 數學中的探究 (inquiry in mathematics)：教師於數學課室中透過探究設計問題與任務促進學生數學學習；(2) 數學教學中的探究 (inquiry in teaching mathematics)：教師藉由探究探索課室中教學任務、問題及活動的設計及執行，教育者 (或研究者) 以探究作為工具協助教師發展教學；(3) 數學

教學發展研究中的探究：教師及教育者研究數學及數學教學過程中使用探究的歷程。社群裡的成員在周邊合法參與者的協助下，在教學與學習的實踐過程中探究與學習或者成為研究者，成員透過偕同探究（collaborative inquiry）驅動探究關鍵聯盟成為發展性研究的基礎。

為協助個案教師進行數學探究教學專業成長，教學實務上我們參考教學三元組（Jaworski, 1992）即學習管理、對於學生學習的覺察、鋪陳具有挑戰性的數學任務所組成的教學系統，協助教師在課室中形成學生探究學習社群；架構上我們參考探究關鍵聯盟（critical alignment）的概念，在教師反思實作的基礎上，由研究者與教師共同探究發展數學教學的社群模式進行設計研究架構。在專業成長的理論基礎上，我們引用了反思實踐理論（Schön, 1983）以及覺知理論（Mason, 1998）。反思實踐理論幫助我們理解教師如何在教學行動的歷程藉由反思以建構數學探究教學知識，覺知理論幫助我們了解教師如何在教學過程中覺察自己的教學行為，並在探究教學實務與理論的磨合過程中進行自我調整。最終，研究者觀察個案教師在專業成長架構中的互動情形，並檢視教師在教學行動、原理以及諮商中的覺知以及反思實踐的成長。

研究者根據教學三元組及探究關鍵聯盟概念設計本研究專業成長社群的三一互動架構（如圖 2），專業成長社群是由師資培育研究社群（研究者、兩位師資培育專家、T3）、數學探究教學社群（T1、T2）、數學探究學習社群（T1 國二個案班級）共同組成。本架構主要運行模式為專業成長社群提供個案教師教學實務上的理論諮詢，協助 T1 建立生學習社群、佈建數學任務及發展對於學生數學學習的理解，藉由課室觀察提供 T1 教學實務改進建言，T2、T3 除提供 T1 探究教學實務上的示範協助外，更就教學知識、策略及課室問題解決提供實務上的建議。其次，為便於社群成員能夠相互交流教學實務及理論，研究者在網路上建置一「數學探究教學知識互聯網」，社群成員在互聯網裡分享教學片段、心得、問題解決策略及對於學生臆測及探究學習的洞見，幫助研究者能夠以全局觀點探索個案教師專業成長之發展脈絡。

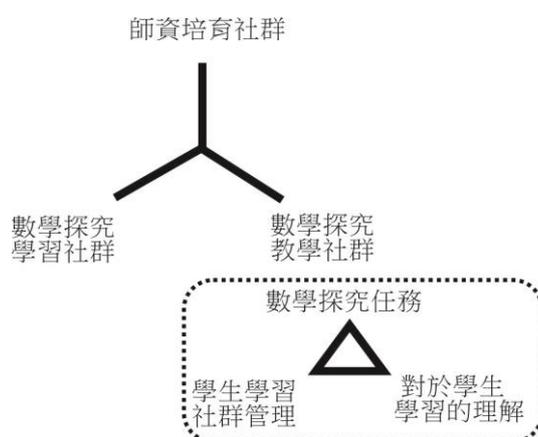


圖 2 專業成長社群三一架構

本研究專業成長社群三一架構的運作，主要以 T1 在課室中所發生的教學經驗及故事為主體，社群成員藉由課室觀察、教學觀摩、課後討論與反思，協助 T1 發展數學探究教學。其次，研究者與兩位師資培育專家針對 T1 的教學分析給予進行教學改變的反饋，T1 則針對社群所給予反饋進行教學任務的設計與執行，再藉由對於學生探究學習的觀察進行反思並將之回饋於社群中，如此循環往復。

(二) 個案教師專業成長活動計畫

本研究設計為期一學年之專業成長活動計畫，活動場域為個案教師 T1 數學課室，並以 T1 國二個案班級作為數學探究教學活動的實作班級，計畫內容包含教學觀摩及探究教學實作兩部分，分述如下。

1. 教學觀摩

個案教師 T1 雖有改革教學取向相關知識及實務經驗，但實際教學仍採傳統講述，因此為促進 T1 進行教學取向及態度之轉變，研究者邀請 T2 到訪 T1 個案班級，進行合作學習教學策略演示。另本研究計畫執行期間，適逢教育部推廣活化教學，本研究另邀請 T3 以「專家」身分到訪 T1 任教學校，除分享教學經驗與進行探究教學演示外，更針對 T1 課室教學進行觀察與建言。

2. 探究教學實作

T1 設計探究教學教案於個案班級中實施，研究者在每次活動實作後與 T1 討論當天的實施情形，並立即給予個案教師客觀建議，作為 T1 教學改進參考。詳細的教學活動名稱與實施日程整理如表 1。

表 1

T1 教師數學探究教學活動實作日程表

編號	日期	數學活動	編號	日期	數學活動
1	2013.06.06	拈子 1	9	2014.02.19	樓梯
2	2013.09.11	青蛙跳 1	10	2014.03.05	河內塔 1
3	2013.09.25	失眠的管家	11	2014.04.02	尺規作圖
4	2013.10.23	神算	12	2014.04.16	河內塔 2
5	2013.11.06	拈子 2	13	2014.04.30	魔你的數 1
6	2013.12.04	拈子 3	14	2014.06.11	魔你的數 2
7	2013.12.18	青蛙跳 2	15	2014.06.17	魔你的數 3
8	2014.01.08	青蛙跳 3			

四、資料來源

(一) 課室觀察

課室觀察資料蒐集 T1 數學探究教學活動，課室觀察進行全程錄影，錄影聚焦於教師引導學生社群探究、師生論述、學生小組互動情形等。

(二) 課後討論

研究者於課室觀察後皆會與個案教師討論當次課程的教學策略、學生表現、所遭遇困難及可能解決方法，時間約莫一個小時。

(三) 正式晤談

正式晤談共計五次、每次約兩小時，晤談策略依據 Clandinin 與 Connelly (2000) 之隱喻上的「三度敘說探究空間」，以時間、情境、社會性互動作為敘說探究的三個向度，基於教師互動及連續性經驗，擬訂四個焦點晤談方向：向內與向外，向後和向前；(1) 向內探討情意、教師角色、教學信念、教學知識、教學方法；(2) 向外探討學生數學探究社群的建構及引導、社會環境對於教師的期待；(3) 向後與向前：針對教師的過去、現在與未來的時間性，與教師探討經驗連續性的觀點，對於數學探究教學的經驗整合及對於未來的預期。

(四) 教師反思

教師反思資料來源有二，一為教師於教學進行前後對其教學信念、實務的反思，此部分為手寫稿；其二為研究者為個案教師針對課室實務所設計四個開放性問題：(1) 您覺得這個數學探究活動的數學內容（或知識）是什麼？與學生未來學習的數學內容有何相關性？學生應具備何種先備知識？；(2) 您如何引導學生進入這次的數學探究活動？有發現什麼問題嗎？試舉例說明；(3) 試評估這次的教學活動的成效，您覺得未來有何待改進之處？（請分別從教學策略採用及學生進行活動兩方面進行探討）；(4) 心情塗鴉。

(五) 研究者反思

研究者觀課期間進行田野筆記撰寫，主要針對個案件教師教學策略、學生數學探究學習社群建置策略、摘錄上課流程與重要事件，或註記重要上課片段。其次，研究者會針對該次課程進行反思，主要聚焦於個案教師專業成長脈絡發展與學生數學臆測思維展現與成長，做為日後分析參考依據。

五、資料分析

(一) 敘說分析

資料分析以敘說分析 (narrative analysis) (Polkinghorne, 1995) 進行, 撰寫個案教師專業成長故事前先行建構情節大綱, 辨識對於故事結局有貢獻的資料, 並將資料依敘說結構 (Labov, 1972) 的六個組成加以統整, 分別是: 摘要 (abstract) (總結敘說的內容)、狀態 (orientation) (時間、地點、情境、參與者)、複雜的行動 (complicating action) (事件的次序)、評價 (evaluation) (行動的重要性和意義、敘說者的態度)、解決方式 (resolution) (最後發生了什麼事)、結局 (coda) (回到對現在的展望)。根據敘說結構, 研究者再從教師的專業成長經驗裡建構故事, 並在語句和評價裡解釋事件的重要性 (Riessman, 1993)。最後, 研究者根據敘說分析的結果形成敘說結構並輔以紮根研究分析結果, 以敘說方式重現個案教師專業成長歷程。

(二) 課室觀察分析

為輔助敘說探究之分析進行, 本研究針對個案教師在活動中的教學程序 (instructional routine) 與策略運用 (strategic competence) (NRC, 2001), 依 Glaser (1992) 和 Strauss 與 Corbin (1998) 持續比較分析方法, 以及 Strauss 與 Corbin (1990) 對於質性資料進行開放性譯碼及主軸譯碼, 再根據現象觀察結果加以有系統性的歸納, 分析出支持個案教師探究教學程序及教學策略運用之範疇。經分析後, 針對教學程序 (R) 及教學策略 (S) 所形成的範疇及其所含之內容如下表 2。根據主軸譯碼分析結果, 教學程序共歸納出四個範疇: 「R1 行動」是教師對於學生布達的行為指令, 「R2 流程」是活動流程的控管, 「R3 社會常規」是教師對學生社會性常規的要求與期許, 「R4 數學常規」則是教師培養社會性數學常規 (socio-mathematical norms) 的教學表徵。另教學策略共歸納出五個範疇: 「S1 引導」是教師引導學生進入數學化脈絡的策略運用, 主要協助連結 S2 與 S3, 「S2 佈題」是教師建構數學任務的佈題策略, 「S3 統整」是教師在論述進行時幫助學生修正或歸納其數學想法, 「S4 表徵」是教師運用數學表徵進行數學想法的陳述與論證, 「S5 評量」則是教師為了解學生理解情形的行為表徵。

研究者將個案教師課室觀察所進行的譯碼範疇分成四個次第, 全部譯碼標籤屬總範疇, 總範疇內之「教學策略」與「教學程序」為主範疇, 而「教學策略」中所含成分為「次範疇」, 如「S1 引導」, 次範疇內所含的內容則為「標籤」。在呈現統計分析結果時, 分為主範疇之於總範疇頻率分布、次範疇之於主範疇成分比例分配、「標籤」之於次範疇的比例; 如「教學策略」所含次範疇全部譯碼標籤總數除以總範疇譯碼標籤總數, 所得之百分比即為主範疇之於總範疇的頻率分布。研究者將譯碼頻率分布及成分比例變化情形, 作為個案教師在不同階段專業成長演進之分析依據。此外, 研究者在分析資料時, 倘若遇到同一事件或資料可能貼上不同標籤而歸屬於不同範疇的情況時會考量與一前後文脈絡中所指涉的主要對象, 如「風紀管好你的秩序!」, 此項資料可能屬於「秩序」或「角色」範疇, 但由於考慮教師主要對象是全班, 所以研究者考慮將之歸納於「秩序」範疇。另外, 若資料在前後文脈絡中所指涉之目的不同, 則同一個標籤會將

之歸納於不同的範疇，如 R4 數學常規中的「紀錄」是指在活動中的紀錄程序，而 S4 表徵中的紀錄是指教學策略。

表 2

T1 課室實務譯碼範疇說明

主範疇	次範疇	標籤	證據釋例
教學程序	R1 行動	示範	我們先請每一組一個人上來示範
		起立	來全部起立，熱烈討論很好，不要失去焦點
		操作	回憶上次移動是怎麼移動，接著在工作單上移動。
		座位	你是什麼位置就去坐那裡，可以嗎？
	R2 流程	時間	給你五分鐘移動一下你的棋子。
		發表	下一組，看看會不會有不一樣的東西出來。
		個人	現在是自己想，沒有討論自己寫。
		討論	講完了？各組討論一下。
	R3 社會常規	秩序	風紀管好你的秩序！
			如果大家在講第一次的時候專心，第二次的時候就不用浪費這些時間。
		態度	組長，盡你的社會責任！
			感謝你，掌聲鼓勵。
	R4 數學常規	加減分	有人算出 9025，加一分。
		攻擊	有要攻擊的嗎？
		論述管理	台下不要講無關緊要的事。
		紀錄	一對一的時後，WBW[白黑白]怎麼紀錄，那你現在如果兩白兩黑，邊移動的過程對邊那個一邊幫你紀錄，或是你自己紀錄都可以。
教學策略	S1 引導	說明	第一步你把這個跳過來，紀錄第一步叫做 W。
		參與	你們做了什麼努力？要有東西啊！
		動機	贏了就跟對方索取簽名，集滿十個簽名就送黃色小鴨一隻。
	建設性提問	S10 告訴我要怎麼取才必勝？	
	先備知識	你不是有學過多項式乘法分配律？	
	合作	當然人的大腦就只有一個嘛，你又要移、又要記，所以就是要分工合作。	

(續下頁)

表 2 (續)

主範疇	次範疇	標籤	證據釋例
S2 佈題		情境	富翁有 24 顆寶石，他要把他藏在他們家裡面，富翁睡前檢查房間的四個角落和四個牆邊，數一數總共是 9 顆的話，每邊一數都是 9 顆，24 顆寶石排成亂七八糟，我們要怎麼數 24 顆寶石？
		特殊化	剛剛我要你做的是三黑三白的時後，是幾次？
		系統化	在做這個之前請你先做第一步，從一隻白蛙一隻黑蛙、一隻白蛙二隻黑蛙……，一直到一隻白蛙 x 隻黑蛙。
		一般化	第三題他問你說， m 隻白蛙 n 隻黑蛙要幾次？
S3 統整		詮釋	他說差了 $3(x-4)$ 到這裡，但問題是這裡還沒有解決。
		歸納	因為他說每個都差 3，可是這個 x 個跟 4 個差了 $x-4$ 個 3，所以把這個加這個，所以就變成 $14+3(x-4)$ ，所以得到這個公式 $3x+2$ 。
		檢驗	剛 S01 的這個方式找出這個，天馬行空就找到這個結果 $((1+x) \cdot 2 - 1)$ ，沒有任何理解就跑出這個，怎麼知道他對不對？
		反駁	上面明明就寫，每隔四個數字在有新的四個數字，可是你有講的是加 5，那不就跟你寫的東西衝突了嗎？
S4 表徵		舉例	S24 你可舉例第三個 83 哪來的？
		論證	T1：所以他覺得這裡應該填右、這裡應該填的是右，這裡填的是左，這裡填的是右，為什麼？ S：一個左兩個右。
		紀錄	因為今天你們遇到一個狀況就是因為你不太會記錄，所以我要你練習看看你怎麼紀錄。
		符號	你要寫 $(10x+5)^2$ ，這是 KEY。
S5 評量		畫圖	S12：一定要畫圖說明嗎？T1：盡量，因為畫圖是最基本的表示法。
		點名提問	S05 這次要做什麼？
		起立坐下	到這裡聽得懂得起請立。
		舉手	聽得懂的舉手。

(三) 資料來源代號說明

研究者根據資料來源，將質性資料賦予編碼，編碼說明如下：課室觀察轉錄，CO；教師晤

談，TI；教師反思，TR；課後討論，CD；研究者反思，RF。

六、研究信度

本研究信度建構主要藉由「資料來源」與「分析者」進行三角校正 (triangulation)。本研究共蒐集五種質性資料，藉由資料間的交叉比對及分析形成研究結果。另資料分析的三角校正，是由研究團隊（研究者、兩位師資培育專家）針對資料譯碼、範疇形成、敘說結構及情節配置等進行討論，在個案教師專業成長故事大綱形成前，研究者邀集專業成長實踐社群成員反覆磋商直到形成共識。

肆、研究發現

在與個案教師長時間的觀察及相處中，我們（敘說取向文本撰寫，研究者通常以「我」或「我們」自稱）發現 T1 雖持有改革教學信念，然而在實務上仍採傳統講述教學，強調學生學習成就足以代表教師教學績效。在研究初期，T1 特別關注於低成就學生對於數學課室的參與，導致教學程序經常因為管理學生學習行為而斷斷續續，在長達半年追蹤後我們發現 T1 教學實務受其初始信念影響甚鉅，甚至影響 T1 在個案班級「導師」及「數學教師」兩角色認同間產生兩難，因此我們在鋪陳 T1 的專業成長故事時，首先探討 T1 初始信念由來及對於教學實務之影響。其次，教師信念改變是漫長的歷程，需要許多刺激、衝突經驗與反思 (Furinghetti & Pehkonen, 2002)，因此研究者花了一些篇幅探討我們如何偕同 T2 介入 T1 教學實務改變。T1 專業成長歷程發展階段，恰可依據其「數學任務佈題發展」及「教師角色認同轉化」作為分野，專業成長計畫起始到「拈子 2」為探索期，「拈子 3」至「河內塔 1」為發展期，「河內塔 2」到探究專業成長計畫結束則為成熟期；探索期聚焦於 T1 的初始信念及對於數學探究教學策略性佈題的探索，發展期探討 T1 如何發展出系統化佈題策略，成熟期則聚焦於 T1 教師角色認同與教學實務改變及如何發展多工教學程序（同一時間學生上台書寫小組發現、學生書寫工作單、教師先行為下個階段佈題並在小組間協助學生探究、授權小組幹部引導小組討論）。

一、在挫折中摸索探究教學（探索期）

（一）阻礙教學實務流暢的信念：孩子，一個都不能少

在研究計畫執行初期，我們觀察到 T1 在課間花很多時間與精力關注於低成就學生，影響其教學程序進行與教學策略運用，此一現象始於 T1「不讓任一個孩子落後」的教學信念。

一般我會花一半的心思和注意力在後幾名身上，如果用眼神來說他們會分到 10 次以上，但對認真和中等學生而言，大概是 3 次就很多了。【TR-20131009】

T1 的教學信念，特別是對於低學習成就學生的教學建設性意向，深受其小學、中學時期偏差行為影響，由於這些經驗使得 T1 相信學習行為偏差是可以被修正的，特別是來自於師長的教誨。T1 的國二導師幫助他重新思考自己行為本質，數學家教老師幫助他在數學學習上取得前所未有的自信，此一影響甚至延續到大學聯考志願選填，T1 選擇了數學系。

或許就是因為這些老師在關鍵的時刻拉了我一把，我也醒悟到自己其實希望的是別人的肯定！我認為一個有教育熱誠的老師，若能多關注這些低成就孩子，就能對他的人生產生關鍵性的影響！【TR-20140305】

美國為回應全球化的挑戰，2001 年 12 月布希政府通過了「不讓任一個孩子落後」法案 (No Child Left Behind Act, NCLB)，為落實兼顧品質與教育平等的雙重目標。此外，NCTM (2000) 為學校數學制定了六項原則 (principle)：均等、課程、教學、學習、評量與科技。其中，均等原則揭櫫卓越的數學教育的必需以均等為前提，即對於所有學生的學習提供支持及秉持高度預期；然而均等並非意味所有的學生須接受齊一式的教學，反之，針對所有學生為促進受教權及學習成就之需要得進行合理且合適的教學調整。

當 T1 看見自己「不讓任一個孩子落後」的信念致使教學實務產生見樹不見林的窘境，自此，T1 在往後專業成長的中，無論教學策略及教學程序或是信念，皆可以看到此反思所造成的改變；並且在其專業成長成熟期時，T1 終能明白實踐數學教學真實均等應是藉由「因材施教」來達到「不讓任一個孩子落後」的目標。

(二) 教學實作成效不彰的挫敗：未建立數學學習常規

在開始正式施行數學探究活動前，我們與 T1 經過多次討論與磋商，包含教學策略、教案設計與佈題、小組分組形式細節甚至學習進度，但在第一次活動結束後，我們與 T1 陷入了低潮。主要原因除 T1 事前準備不足造成課室運作不順暢外，還有一部分是 T1 未能安排足夠的個人探究時間，以至於學生在未充分理解規則及題目所傳達的概念前，即進入社會性脈絡，使得合作學習流於形式。因著初始信念的影響，T1 認為學生學習的基礎奠定在良好學習常規之上，由於 T1 身兼國二個案班級導師，教師變成既是「任務性」又是「庶務性」的工作。

老實說身為個案班的導師是焦頭爛額，班級的瑣事每天都要耗掉我很多時間和精力。無形中，班級經營影響著我的數學教學，相對於教育的信念影響著我的班級經營，我變得很難享受教學的樂趣。【TR-20131107】

T1 相信數學探究與思維的發展應建構在良好的學習常規之上，學生如果沒有良好的社會性常規，就無法在社會性的互動中學習尊重、欣賞別人的想法，遑論在社會性常規下建構推論、猜想、反駁、論證等社會性數學常規（Yackel & Cobb, 1996）。

T1：就是要建立遊戲規則，建立模式，就是我以前會去告訴他們，現在你應該做什麼、你不要做什麼，然後一直去提醒。

R：所以希望你希望孩子從常規開始學習自主、獨立？

T1：從常規開始自主，沒有常規就沒有辦法進入探究的脈絡。【TI-20140610】

（三）教學信念的衝突與改變：他山之石可以攻錯

個案教師 T1 雖然持有改革教學信念，但在實際教學仍採傳統講述策略，主要是 T1 對「不讓任一個孩子落後」教學信念的堅持，希望所有學生都能參與學習。

我想，講述式教學並不是真的那麼一無可取，探究式教學也不是萬用，每個單元、每個主題應該都可以嘗試各種的教學方法，而哪一種方法適合？就要因人而異因時因地制宜了。【TR-20140402】

由於 T2 一直以來都在課室裡以合作學習策略進行探究教學，於是我們邀請 T2 至 T1 課室進行觀摩，希望透過在職老師間的實務性對話，幫助 T1 看到自己教學上的盲點，因為對於在職教師而言，最直接的協助來自於社群成員的分享與討論（Cochran-Smith & Lytle, 1999）。

在整堂課的探究脈絡進行中，我看到 T2 清楚的說明學生可以採用的討論規則，老師的角色是建立討論的規矩，並且從學生的發表中，引導學生去攻擊和反駁（妥善利用加減分，目的是增強正向行為和削弱負向行為）最後再加以統整和歸納。【TR-20131009】

我們與 T2 的介入，是促成 T1 改變教學信念、重塑教學實務的誘因。在 T2 到 T1 課室觀摩後，不到一週的光景，T1 即開始著手進行教學改革，先前遲遲未能改變的原因，某種程度而言因為面對考試的檢驗，傳統講述教學是相對安全的作法，至少確定學生都「學過了」。

在一堂課結束後，我會想要比較探究式和傳統式學生的「成效」？但是這樣又落入「考試」目標導向中，難怪我會一直退回傳統講述式課堂，因為安全、可掌握，且學生秩序看起來比較好。經過這節課的火花撞擊，我想會加快我改變的速度和更堅定改變的方向。試想，為何在我課本

外主題式的探究活動中，我期待學生養成分工、參與、產出、溝通、表達、辯證反駁的種種行為模式，為何在傳統課室卻只盯著「分數」呢？【TR-20131009】

（四）教師策略性佈題與學生發現樣式：玩遊戲也要有戰略

T1 的初始信念，某種程度會反映在其教學任務安排與設計上，因 T1 會經常顧慮學生是否會在相同的探究主題下感到乏味，因此在顧及「新鮮感」的前提下，T1 得不停更換探究主題，即便是相同主題也會以不連續的方式安排。如神算活動任務中，T1 希望學生在數結果中找出其中所隱藏的公式，如 $25 \cdot 25 = [(2+1) \cdot 2] \cdot 100 + 25$ ，一般式為應由 $(\boxed{x}5)^2$ 的格式轉換成為 $(10x+5)^2$ ，但 T1 在假設性學習軌線 (hypothetical learning trajectories, HLT) (Simon, 1995) 的安排上少了位值 (place value) 概念的鋪陳，致使大部分的學生僅能推論出 $(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$ 或 $(x+5)^2 = x^2 + 10x + 25$ ，由於抽象化的符號運思佔據了活動的大部分時間，造成學生對過度抽象性的數學活動感到興趣缺缺。因此在後續活動「拈子 2」改採遊戲的方式進行，活動的設計意象是希望學生在遊戲中，透過「系統化」的方式尋找數學任務中所隱藏的規律，這樣的想法無形中成為往後設計數學任務時進行策略性佈題的基礎。

就像打 lol、玩牌，如果你只是亂玩，就玩不出一個規則，一定要有系統地玩、找到它的規律，如果沒有過程就找不到規律，就不知道公式怎麼來的了【CO-20140108】。

二、數學探究教學發展關鍵—「系統化」(發展期)

（一）教學即是在實務中的學習：教學旨於促進學生學習的理解

T1 在探索期時，仍抱持以出非例行性的問題考驗學生的想法，同時在 T1 的過往施行探究活動經驗中，大部分學生都能在探索自主過程中找到令人滿意的答案，然而個案班級卻未能達成先前的預期，也正因如此，幫助 T1 能夠重新檢視藉由教學設計以促進學生學習的目的。

在這幾次活動中，我每次對學生的發現都不甚滿意，因為舊經驗影響著我對他們能力的期待值，在學習單鋪設上，我都還是用一個大階梯，希望他們找方法、找策略、進而找答案。其實我真的該給方法、給策略，不要吝惜讓學生「成功」。【TR-20131106】

拈子 3，是 T1 在個案班級中施行的拈子系列活動的最終回，回顧前兩次的拈子活動，拈子 1 是引起學生探究學習的動機的暖身活動，拈子 2 更以遊戲挑戰做為活動基調，目的是為了調和神算的抽象符號思考所帶給學生的單調與乏悶，拈子 3 完全沒有程序性操作，直接進入概念作為起始，完全以思考實驗的方式進入探究脈絡裡。T1 所設計的拈子活動情境如下：

「拈」(Nim) 是極其古老且饒富趣味的一個遊戲。據說,「拈」源自中國,經由被販賣到美洲的奴工們外傳。辛苦的工人們,在工作閒暇之餘,用石頭玩遊戲以排遣寂寞。流傳到高級人士,則用辨士(Pennils),在酒吧櫃檯上玩。最常見而為大眾熟悉的玩法是這樣的:「兩人輪流取一堆石頭,每人每次最少取 1 個,最多取 k 個,最後取光石頭的人贏得此遊戲。」請問有何致勝之道?

T1 將拈子活動佈題從特殊化到系統化將之分為三個層次(A 為拈子活動一、B 為拈子活動二、C 為拈子活動三):

- A. 如果兩個人共取 35 顆棋子,每次可以拿 2、4、6 顆棋子,最後取光棋子的人贏得此遊戲,請問有何致勝之道?
- B. 將十二枚銅板分三列排成三、四、五個,兩人輪流取銅板,每次需在某一列取一枚或一枚以上的銅板,但不能同時在兩列取銅板,最後將銅板拿光的人贏得此遊戲,請問必勝的秘訣是什麼呢?
- C. 根據上次活動,當已知 $\{0.1.1\}$ 、 $\{0.2.2\}$ 為必勝棋形時,別人取第三列 5 顆後,此時,如果換我們拿棋,該如何拿呢?(狀況一、在其中一列取 4 顆;狀況二、在其中一列取 3 顆;狀況三、在其中一列取 2 顆;狀況四、在其中一列取 1 顆)

在「拈子 3」教學行動後 T1 的心態產生很大的改變,特別是不再以「結果」來衡量學生學了多少,反而聚焦在如何藉由教學策略與教學程序以促進學生學習的理解。事實上,發展對於學生學習的理解,是教師專業成長的一個重要環節(Simon, 1997),因為教師的知識的發展應包含關於學生學習,用於幫助教學決策制定(Fennema & Franke, 1992)。

這個活動跟以往設計不同的是,以前設計不同的主題是一個一個的活動,而這次設計的出發點是:培養(或者說是強迫)學生學會用公約化的數學符號來做溝通,並且有共識地立基彼此都「不言而自明」的必勝策略上,這對未來證明題,甚至是未來的活動有意義的地方在於學生必須學會靜下心來“紀錄”或者冥想棋局的變化。【TR-20131204】

這次我聚焦的不再只是「學生發現了什麼」改變的是設法去理解或引導「學生如何發現」「學生怎麼討論」、「小組角色的功能」以及「學生瞭解多少」。【TR-20131204】

(二) 數學探究教學核心知識的形成數乘法:特殊化、系統化、一般化

在本研究中「系統化」是指「有系統的特殊化」(Mason et al., 2010),從「舉例」、「有系統

地多舉幾個例子」直到形成一般式的過程。在探索期時，T1 在教學實務上即有「系統化」的雛形，如數學任務「青蛙跳 1、2」（參考圖 3）。該任務系統化歷程即由 1 白對 1 黑 3 步、2 白對 2 黑 8 步、3 白對 3 黑 15 步、4 白對 4 黑 24 步、5 白對 5 黑 35 步，根據 3、8、15、24、35 的數字樣式猜想及推論 m 隻白蛙與 m 隻黑蛙交換位置的數學一般式（結果為 $m \cdot (m+2)$ ）。T1 在「拈子 3」將「系統化」的概念加以具體化，要求學生藉由不同條件的設定推論可能的結果，更在「青蛙跳 3」T1 運用「系統化」策略進行佈題，並輔以要求學生針對移動步數加以記錄，藉由觀察紀錄中所蘊含的數學樣式，來證明一般式猜想的合理性。

青蛙跳

如圖兩顏色的木樁置放於一直線上的 11 個洞裡，若欲將白色及黑色的木樁互相交換位置，但僅允許移動木樁時，向前移動至前面的空洞，或跳過前面的一個木樁進入該木樁前的空洞裡，請問最少的移動次數為何？

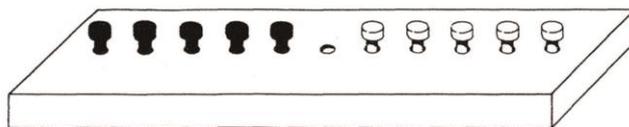


圖 3 青蛙跳問題。引自 *Thinking mathematically* (2nd ed.) (p. 52), by J. Mason, L. Burton, & K., Stacey, 2010, Harlow, UK: Pearson Education Limited.

「青蛙跳 3」T1 將 m 隻白蛙與 m 隻黑蛙的數學任務，改成 m 隻白蛙對 n 隻黑蛙交換位置任務，引導學生以表格化的方式在每次固定其中一個變數的條件下，推論該特殊化後的一般式，最後透過對於特殊化後一般式及記錄的觀察及整合，分析歸納出 m 隻白蛙對 n 隻黑蛙交換位置的一般式為 $m \cdot n + m + n$ 。從該任務設計的核心構念（圖 4）可以得知，「系統化」、「一般化」、「檢驗」、「證明」、「相信」是 T1 設計探究教學任務的主要元素，此外，「紀錄」是幫助學生進行論證的重要過程。在「青蛙跳 3」後，數學探究教學的核心思維已在 T1 的數學教學知識中逐漸成形，這樣的想法亦直接反應在其教學實務上，從 T1 行動後的反思亦能理解，數學臆測思維已是 T1 教學核心知識的一部分。

W三 青蛙跳跳3. \Rightarrow 重點: ① 猜想 ② 分工合作 ③ 計時

系統特例化

老師歸納結論: 當 x 日 x 黑時 $\Rightarrow x^2+2x$ 或 $x(x+2)$ 步

↓ 指向任務

1W1B	2W2B	3W3B	4W4B	5W5B	$xWxB$
3	8	15	24	35	$x(x+2)$

一般化

紀錄: W B W $1+1$

指論

W B B W W B B W $1+2+2+1$

W B B W W W B B B W W W B B W $1+2+3+3+2+1$

W B B W W W B B B B W W W W B B B B W W W B B W $1+2+3+4+4+3+2+1$

↓ x 日 x 黑時

W B B W W W W W W B B W

$1+2+3+4+5+6 \dots x+1+x$ | $x+1$ | $x+x-1 \dots 6+5+4+3+2+1$

$(1+x) \cdot x \cdot x + x = x^2 + 2x$

證明

相信

探索

1W1B	1W2B	1W3B	1W4B	1W5B	1WxB
2W1B	2W2B	2W3B	2W4B	2W5B	2WxB
3W1B	3W2B	3W3B	3W4B	3W5B	3WxB

$m \ n$
 $m \ n$
公式?
 $m \times n + m + n$

由紀錄中, 證明一般化公式的合理性!

解釋 小組發表 \rightarrow 精緻化 老師總結.

圖 4 T1 青蛙跳 3 數學任務設計構念

T1 除在其核心知識上內化數學臆測外, 更根據對於學生數學臆測認知發展過程的觀察中發現自己過去 (在研究所進修時習得) 所依賴的 5E (參與、探索、解釋、精緻化、評鑑) 探究教學步驟 (Trowbridge & Bybee, 1990) 僅是形式上的探究教學, 因此「系統化佈題策略」是 T1 發展實質化探究教學的主要關鍵。

這我一直以為我用 5E 的每個步驟, 我就是在做數學探究, 現在, 我能夠更細緻的設想每個環節, 並且在過程來來回回地修改每次活動的假想學習軌道。【TR- 20140219】

三、教師角色的自我覺察 (成熟期)

(一) 學生假設性學習軌線的精緻化：以非線性多工教學程序提升教學效能

研究初期 T1 會在數學活動中佈題後即期待學生能夠推論出數學樣式中所隱藏的一般式, 由

於缺乏階梯鷹架的支持，造成學生參與數學活動的動機降低外，更因學生得花更長的時間討論而影響活動進度的安排。由於 T1 是位具有高效能感的教師，經常會因學生的表現、如何實踐探究教學的旨趣而感到焦慮，儘管如此 T1 仍會努力嘗試去解決教學實務上所遭遇到的困難，也正因如此促使 T1 發展出多工教學程序，即在同一時間學生上台書寫小組發現、學生書寫工作單、教師先行為下個階段佈題並在小組間協助學生探究、授權小組幹部引導小組討論。

今天（神算活動）各組學生雖然都有提出一般式的想法，但大部分都沒能運用到位值概念，因此無法論述證明一般化結果的正確性，這是我假設性學習軌線（Simon, 1995）下次應該鋪設的更縝密一點的地方。【TR-20131023】

T1 之所以發展出多工教學程序，一則是覺察學生應負起學習責任，二則是在發展數學探究教學的過程中，藉由反思與實踐在探究教學設計上更能清楚掌握學生的假設性軌線，在教學程序或策略的使用上能更有彈性，達到提升教學效能的目標更能專注於學習環境的建構。

比起上學期，做數學活動對我而言有種駕輕就熟的感覺，不管是事前的準備學習單、當下分組的職責、討論的形式、突發狀況的處置…等等，雖然是千頭萬緒，但是現在可以更好整以暇地完成。【TR-20140219】

R：我今天看到你會在同一個時間裡讓很多教學程序同時進行，感覺在時間、空間上有比較大的彈性。

T1：以前我辦不到這樣！以前我覺得這個時間到做完就上去，時間到就應該做什麼…

【CD-20140416】

我開始嘗試在教學實務上多工並行，將關注的焦點放在「在多少人理解」、「多少人參與」。這樣的想法開始讓我在一般課室放下壓力，把學習責任「丟還」給學生。現在我會覺得，老師的責任是在引起動機、提供學生適當的探索題材，以及提供好的合作環境，而不是把學生學習的責任扛在身上。【TR-20140416】

（二）不讓任一個孩子落後的真義：「因材施教」才是真平等

T1 在下學期數學活動任務中特意安排了一次「尺規作圖」，該活動是 T1 以數學課本內容作為數學探究活動的嘗試，其緣由來自於研究者邀請 T3 及校內數學教師為其數學探究教學課室進行觀摩及建言，該課室施行前一週，T1 即在個案班級數學課室中完成六大基本尺規作圖的教授，T1 所設計的數學任務為藉由六大基本尺規作圖，完成麥田圈圖形的複製及創作，在創作前 T1

希望學生能夠將各組所分享的作法抄寫至學習單上，以達集思廣益的目的。

T3：你剛剛請孩子站著抄，我覺得不好ㄟ！

T1：但是如果沒有做這個動作會拖更久。

T3：那個東西我們老實說也是表面啦！

T1：基本上我已經給一段時間了，有認真執行的已經做完了，問題就在那些被動的，我會覺得如果沒有到一定的程度我沒有辦法繼續下面的程序。【TI-20140407】

藉由 T3 建言，T1 重新審視與檢驗自己的教學信念，開始覺察到過去自認對於低成就學生的關注，並非真實的平等。但隨著 T1 的自省與覺察，我們觀察到 T1 在後續活動中做了很大的調整，特別是在教師角色認同與數學任務佈局。

經過觀摩後的分享討論，才知道我自以為有效率的處理方式，其實造成假平等，要求一致，也是假平等，這樣的教學方式，無形中一直拖累我的進度使課堂的辯證失焦，也讓深度消失。事實是學生程度有差異，應該要彈性標準，多給予肯定和鼓勵。【TR-20140408】

（三）教師即佈題者：教師角色認同的自我覺察

探索期時，T1 堅持學習單必須在「工欲善其事必先利其器」的前提下做好萬全準備，以應付不時之需。其實這樣想法的背後是為了提升教學效能，因為 T1 認為探究教學比起傳統講述教學要更多的準備，不同程度的學習單可以提升學生的參與。

我會有一個預想的進度，看他們施行的結果怎樣再去調整，所以不一定要按照什麼形式走。甚至，我希望有一百種學習單，滿個櫃子都有，就是每一種都印一百張放著，我如果覺得什麼適合就用哪一個。【TI-20130925】

T1 在專業成長成熟期中，最令人眼睛為之一亮的地方莫過於他運用「空白」學習單來起始數學任務，除了讓學生更能專注於佈題脈絡外，更讓學生多了一份期待感，這樣的想法其實來自於 T1 對個案班級學生的了解。在成熟期時，T1 完全顛覆了先前的想法，在「魔你的數 2、3」T1 給學生「空白」學習單，以先前的發現作為進行佈題的基礎。

T1：可是就會像上次那樣，你活動單一給他，他就覺得哦！怎麼又是這個！可是你如果給他空白學習單，他就會覺得你想幹嘛？就能讓學生猜不到接下來要做什麼，進而提升他們的學習動機。

R：是不是學生已經熟悉你的模式了？已經養成習慣了？

T1：可是如果我現在反過來想，你一個活動做三次，第一次這個活動可能沒辦法做得很深，老師介入得很多，可是他還是把他帶到三次。下一個活動，他就大概知道那個模式，做三次就不會有期待感。【TI-20140617】

「魔你的數」(圖 5) 遊戲方式是開始時請一位同學選定 1 至 63 其中一個數字，然後老師逐次問他這個數字是否依序出現在表格一到六，最後教師透過該學生的回答，以表格一到六的最小數字 1、2、4、8、16、32 作為該表格所代表的基數，若學生回答有則加上該表格所代表的基數，加總的結果即是學生原先選定的數字，如數字 5 會出現在表格一、三，則 1 加 4 即得到 5。

「魔你的數」是開放式的數學探究任務，學生必須根據表格中所存在的數字樣式猜想並推論出背後隱藏的二進位原理。因著數學問題的開放程度，學生學習社群管理能力、佈題脈絡掌握技巧、課室論述管理及教學進程整體的運籌帷幄等面向，對教師而言在在都是極具挑戰的任務。回顧 T1 在發展期「爬樓梯」活動，任務活動設計是將費伯納契數列的樣式隱藏在樓梯的數學解題任務中，讓學生自然而然地發現其中的數學原理。在當時，T1 看待學生數學學習過程的想法已不同於研究初期，傾向於將自己視為訓練學生探究學習的「教練」。

樓梯活動前面設計了兩小節的暖身，以類比的方式來佈局，讓學生了解解題策略的多元性。T1 會利用學生討論時間，先行把接下來要學生發表或討論的內容預先鋪排在黑板上，待學生進行到一定步驟後就銜接預先鋪好的佈題脈絡。【RF-20140219】

現在我能夠在事前思慮佈局（學習單內容安排），對學生程度的瞭解，對不進入狀況的學生處置都有思考過，所以我能夠從「管理者」變成現在是「看局者」，現在比較像是「教練」！

【TR-20140219】

No. 1							
17	19	61	43	25	27	57	31
1	51	37	7	9	11	13	15
33	35	5	39	29	23	45	47
49	3	53	55	41	59	21	63

No. 2							
50	51	10	43	58	15	62	63
2	27	6	7	54	22	14	38
18	19	11	23	26	3	30	31
34	35	59	39	42	55	46	47

No. 3							
15	5	44	37	12	13	39	4
20	21	61	23	28	29	38	53
52	31	54	47	60	22	62	63
36	7	30	14	6	45	46	55

No. 4							
46	13	26	63	28	11	30	31
12	62	42	43	44	45	29	47
56	8	58	59	60	61	41	27
57	9	10	24	40	25	14	15

No. 5							
61	17	62	60	20	21	22	23
48	49	50	19	52	53	57	55
24	25	26	27	28	29	58	31
56	54	30	59	51	16	18	63

No. 6							
58	33	59	32	36	51	41	39
40	38	42	43	56	48	34	47
63	49	50	37	52	57	54	55
44	53	61	46	60	35	62	45

圖 5 魔你的數活動表格

事實上「教練」只是角色認同覺察過程中的過渡的印象，在發展系統化佈題策略、多工發展程序，以及覺察到學生是學習中心應施以因材施教後，T1 將自己的教師角色認同推向更高階——「佈題者」。回想起來，T1 對於「導師」及「數學教學」兩者角色糾結的覺察，似乎是他在專業成長歷程中的重要養分。在最後兩次活動的課室觀察中發現，T1 似乎重拾過往對於數學教學的熱情與自信；T1 會將假設性學習軌線中的諸多細節先行佈局，視教學流程的進行隨時彈性調整，在歸納學生的數學發現上亦能按照學生發現的層次加以統整後安排學生的發表順序，使學生能夠清楚掌握數學知識發現的整體脈絡。「佈題者」並非只是設計數學任務，其中更包含課室環境的建構、學習社群的管理以及全班性論述的統整與歸納，亦是 T1 在專業成長計畫中的完美註解。

R：他們今天開始類比，去找先備知識，然後去讓他們會的教不會的，然後就把二進位的推法全部講一次。

T1：我覺得他們在討論的時候可能還沒有發展到那麼多

R：你今天比較突破的地方是你會去引導，把他們的發表順序按照你的想法來安排。

【TI-20140611】

老師的角色原本專職教學，現今漸次變成引導者，再慢慢成為佈題者！只要先預想好學生目前到哪裡，接下來往哪裡去，當我覺得學生學得差不多了，我嘗試大膽的跳躍，直接佈下難題。

【TR-20140618】

四、總結個案教師專業成長

教師專業成長是持續的動態歷程，從 T1 初期發展不難發現環境的擾動（我們與 T2 的介入）是促使 T1 在信念及實務上進行改革的誘因之一，其次 T1 在探究實作中發展出系統化佈題策略，協助他在探索學生臆測認知發展歷程中，理解教師應專注於學習環境建構，更應將學習的責任交還給學生。研究者以數學教師教學素養（NRC, 2001），作為論述 T1 專業成長歷程的基礎，論述方向以紮根理論所分析教學實務的結果論述流暢性與策略運用，以敘說分析探究教師信念的改變合併論述建設性意向及適性推論，並探討個案教師探究教學核心知識形成與發展。

（一）流暢性與策略運用

整體來說，T1 的流暢性與策略應用的發展脈絡與其建設性意向有關。T1 初期聚焦於建立學習環境，因此在秩序控管、小組角色責任的強調著墨頗多，在「績效」與「時間」雙重壓力下常使 T1 感到焦慮。此外，對於低成就學生的關注，造成教學程序間經常有點名提問、起立、坐下等，策略上在系統化佈題策略形成前，T1 慣用建設性提問及將問題加以特殊化以協助學生推論

一般式，在「系統化」佈題策略形成後，T1 逐漸能掌握佈題脈絡的進行，輔以記錄策略來幫助學生進行論證，在發展「多工教學程序」後，更能專注於學生的發表、論證，並歸納結果產生一致性的結論。

（二）對核心知識的概念理解

本節探討數學教師探究教學的核心知識聚焦於數學、教學和學習，即包含教師解決數學問題（包含臆測與論證）的數學知識、教導數學問題解決的教學知識和學生學習問題解決的學生學習知識等三部分，特別是教師對於學生學習數學探索（含臆測與論證）知識的理解。

T1 在設計數學探究活動時特別是數學內容會思考如何與課程內容結合，或者與學生未來學習的相關性，從探索期一直到成熟期皆是如此，此外 T1 是位高自我效能感的老師，在活動的過程中皆會親自參與學生學習活動，藉此引導學生進行數學思考，探索期時 T1 預期學生數學探究學習能夠透過不斷試誤找到數學問題中所隱藏的樣式。

R：所以必勝的棋型有很多種？

T1：對，在以前大家覺得必勝棋型有很多類型，最近有一本書家把它轉成二進位後結果全部都變成同一個棋型，我是沒有期盼他們會進到那麼高階去，但至少慢慢抓到。【TI-20131106】

發展期時，藉由系統化佈題策略，T1 對於數學臆測的理解有了不一樣的思維，但仍然堅持能夠直接猜出一般式再透過舉例加以檢驗的過程，比較符合他心目中對於數學臆測的理解，「系統化」對 T1 而言反而不是形成「猜想」的過程。事實上，T1 是在發展對於學生學習理解的過程中，漸次理解「系統化」對於學生數學臆測思維發展的重要性。

T1：我以前覺得臆測是先猜、檢驗，亂檢驗、亂檢驗，然後接著就會檢驗出系統的檢驗，系統的特殊化檢驗，然後去修正那個猜想。

R：現在呢？

T1：感覺上現在是不猜，不會直接猜十二階有多少，不會猜 N 階有多少，直接就開始從 1、2、3（系統性特殊化）。【TI-20140219】

這樣的想法也反映在 T1 的課室實務中，誠如探索期的研究發現，T1 認為樣式的探索需要透過不斷的嘗試，這樣的想法也形成了 T1 對於數學臆測中「系統化」的理解。

R：可是你今天不同在於將上次紀錄兩個改成三個，你又幫他們分類分好了。

T1：對啊，脈絡都先鋪好了。

R：依照你的習慣我認為你可以把他們的東西整理在下一張學習單裡。

T1：那就很多東西啊，會有多分細項狀況一、狀況二、狀況三這樣，列出來就一串啊，這一他們讀的話會不知道下一次的重心在哪裡，通常我們都是一直試誤、一直試誤，玩個一百次後，ㄟ，就發現是什麼、什麼！【TI-20131204】

在探索期時 T1 對於課室常規的關注一直與他「不讓一個孩子落後」的教學信念產生衝突，因為開放討論的課室中低成就孩子的學習參與度比較低，原因是 T1 沒有辦法在每個小組中逐一去關注不參與數學活動的低成就學生，在發展期時 T1 注意到可以透過小組幹部賦權與常規的建制來達成促進學生參與數學活動的目的。

T1：可是如果是傳統講述，低成就學生就可能會被列在趕的鴨子的最後一隻。但現在我會停在希望他不要去影響別人，他如果願意參與的時候可以參與，可是等到他有興趣參與的時候就是，因為他前面沒學到，他就沒有辦法去攻擊，就只能坐在那……

R：就常規啊！就是你要怎麼討論，討論的方法、反駁的方法，就是要一層一層去思考。

T1：嗯，他先要有常規才有學習、合作。【TI-20131231】

成熟期時，T1 會考慮數學活動設計內容幫助學生利用前面活動的數學知識作為先備知識，下述的皮克面積公式是奧地利數學家喬治皮克（Georg Pick，1859～1943）所發現的一個面積速算法，以格點為頂點的多邊形叫格點多邊形。若已知在多邊形內部的格點稱為內格點（代號 x ），在多邊形邊上的格點稱為邊格點（代號 y ），則面積可以透過 $\frac{y}{2} + x - 1$ 而得。T1 在設數學問題時，某種程度已先為學生預想到可能的延伸概念，儘管學生有可能不會遭遇到，然而運用已知猜想論證未知即是數學探究學習的重要旨趣之一。

T1：我發現我之前做的那個皮克面積公式，也是內格點一個變項，外格點一個變項。控制住內格點，觀察外格點變動去看面積的變化。

R：就是兩個變數就變難了！就像青蛙跳的 m 對 n 一樣。

T1：他很難直接看出來！【TI-20140305】

此外，T1 注意到探究活動中記錄對於學生數學思考的重要性，儘管有些學生能夠藉由心象來完成如河內塔的活動中的數學任務，T1 仍然認為符號紀錄式數學形式化思考中不可或缺的過程，其次，T1 會考慮到學生進行數學探究時所需要的數學內容知識。

R：今天紀錄的流暢性強很多。

T1：我發現他們會記下來...

.....

T1：可是我們希望的是他看到符號的對稱去看到其他的。

.....

T1：本來想說第二次就讓他們聚焦在記錄上，就直接從記錄中...【TI-20140305】

由於 T1 了解到不同學生應該給予不同程度的支持，「探究」對於 T1 而言是建構主動學習環境的脈絡，但學生必須先進行個人探究形成數學猜想，並藉由社會建構，在反駁、特殊化、系統化及一般化來來回回的歷程中藉由論證形成客觀性的知識。

探究就是分兩種，一種是個人的，一種的是社會的，個人的就是要自己去尋找 pattern 找規律，當然你要先理解題意，然後逐漸發展出自己的數學知識，然後再來跟其他人溝通、分享，透過合作方式分享，然後進到社會建構的過程，然後到發表再形成全班性的、一致的知識。

【TI-20131231】

R：你對探究的理解是什麼？

T1：就是佈一個豐富的情境，學生透過同儕的討論，在彼此的知識上建構新知。

R：那臆測跟探究有何不同？

T1：在探究的時候自然就會有人提出猜想、一般式的推論或提出反例加以反駁，所以兩個很難切割。【TI- 20140610】

（三）適性推論與建設性意向

NRC（2001）主張教學素養中的適性教學推論，強調教師能對教學設計與實作結果進行反思與推理，特別是針對學生學習困難、成因與可能對策的推理。在探索期時，對於 T1 而言數學探究教學所帶來最大的挑戰即是時間。

T1：時間一直是問題，因為要處理常規，所以時間就很趕，現在再壓進去就變成超趕，很多東西都只能交代過去，就更難在平常課室讓他探究。【TI-20131112】

R：為什麼不能直接破題啊？

T1：我覺得必勝的關鍵策略不能由我講出來，我只能用問句一直問、一直問，我覺得需要時間啦，他靜下來，說不定回去想想明天就有東西出來，但是時間就是有限。【TI-20131106】

T1 除了理解到時間是提升數學探究教學效能的關鍵外，為促使學生能在既定時間內達成有效的數學產出，在磋商過程中發現數學任務內容設計是最重要的環節，數學任務內容一直是 T1 很在意的議題，因為數學任務設計影響學生的數學參與、假設性學習軌線、先備知識以及 T1 對於學生數學探究學習的預期。

R：像上次的活動…他們來不及將他們的想法慢慢的消化掉，所以他們好像…沒有辦法在統整的時候有具體的內容。

T1：來不及想好又要轉述出來，又要發表。

R：所以一直以來你希望他們在最後能統整出一個精緻化的結果，一直出不來的原因也有可能在這裡。

T1：那解決的方式應該再降低階一點【TI- 20131106】

此外，T1 將任務設計類型分類成抽象思考與具象操做兩類，此點符應 Cañadas 等人(2007)的主張，即不同的任務類型能夠促進學生在不同的情境下引動數學臆測思維，而統整策略的運用，反映了 T1 希望藉由全班性的論述形成客觀的數學知識。

R：按照我們以前的討論，你讓學生靜下來後讓他又能進入數學情境的方式，就是條件設定好後現在開始玩，就有要有一個人負責記錄，然後上來說明過程發現什麼結果。

T1：可是現在又跳到只有純抽象思考，又沒有操作。

R：不然我們下一次就跳到同時並行啊！

T1：然後有立即的檢討。【TI- 20131204】

T1 建立學生數學探究學習社群最重要的策略是建立學習常規，一來幫助學生在學習軌線上進行有效的學習外，二來「不讓任一孩子落後」的真義是幫助學生建立一個自主的學習環境。

R：姑且不論學生的表現，就是這一年你這樣做下來有什麼感想？

T1：就是要建立遊戲規則，建立模式，不要一個（老師）對三十幾個（學生），叫他去做什麼，就是我以前會去告訴他們什麼是好的、什麼是對的、什麼是錯的，然後現在你應該做什麼、你不要做什麼，然後一個人一直去提醒、一直去提醒。【TI- 20140610】

回顧 T1 的專業成長歷程脈絡，建設性意向是主導 T1 發展數學探究教學的關鍵。研究初期 T1 採傳統講述教學原因是考量績效責任，幫助學生把講義上的例題精熟，就能讓學生的學習成就達到一定績效。因此，會產生學生參與活動意願不高的情形，因為數學任務內容無關乎考試，

也造成 T1 得花很多心力在提升學生對於數學活動的參與。在發展期 T1 改變了原先的意向，覺察自己是訓練學生探究學習的教練，專注於發展佈題策略外，更希望學生能夠「知其然，亦知其所以然」，因此強調記錄對於論證的重要。成熟期時，T1 在教師角色認同的覺察中，發現教學的核心價值在於以學生為中心，提供學生主動建構知識的環境、成功的學習經驗，「佈題」及「解決問題」是教師在實務上具體實踐改革教學信念的主要任務。

活動進入尾聲，這一年來的奮戰也接近收尾階段，這段時間感謝 R 不辭路途和時間的奔波，讓我在教學改變的現場不孤單，我們認真投入在教學上的改變，既使過了一整年，學校歷經觀課制度甚至推展教師評鑑，仍然顯得我們的作法立即而有效，而且專業又深入。對於在職的教師，其實真的最需要的就是客觀的觀課和專業的建議，也許每個環境和班級生態及教師信念都不相同，在給予教學建議上老師真的不是一次就能改變，但是只要有個明確的方向，教學模式的改變教師的精進不再只是口號。【TR- 20140219】

伍、結論與建議

一、結論

教師專業成長是教師在參與社群專業活動中所進行學習與改變（Clarke & Hollingsworth, 2002），並且教師教學專業成長來自於建立社群及關係、建立跨越理論及實務的連結、課程改革以及發展專業感等面向的支持（Arbaugh, 2003）；此外，教師唯有在改善教學實務過程中，體悟到學生學習上顯著性的改變才可能因此改變教學信念或態度（Guskey, 2002）。由於本研究旨於藉由超過一個學年的縱貫研究，探討一位國中現職教師在實踐社群的協助下於發展數學探究教學過程中，如何藉由對本身教學信念的覺察、教學實務的重塑、發展數學探究教學核心知識進行專業成長。在綜合分析各項研究結果後，本研究提出下列三項結論：

（一）信念改變源自於教學實務中的學習

教師在專業成長社群中，藉由對於教學實務的反思與實踐有助於改善教師教學實務進而提升學習品質（姚如芬，2006; Jaworski, 2001, 2006）；此外，教學是在實務中學習（Lave & Wenger, 1991），並且在過程中發展促進學生學習（Jaworski, 2006）。研究結果顯示初期 T1 對於數學任務佈建聚焦於如何安排非例行性任務給予學生挑戰，缺乏在過程中為學生搭建學習鷹架，以幫助學生獲致成功的學習經驗，並且初期對於「不讓任一孩子落後」信念的理解，影響了 T1 的數學探究教學任務設計於教學實務。在與師資培育社群反覆分享、討論、磋商及反思實踐後主要因為 T1 覺察到教師角色應不是「庶務性」的工作應以更高的層次即「佈題者」來思考教師自我角色認同；因此，T1 在專業成長歷程中發展出「由上而下的系統化佈題策略」，培養學生透過特殊化、系統化、一般化、反駁等策略發展數學臆測思維，並發展出多工教學程序以提升教學

效能。此項實徵性研究結果亦實證了國教輔導團多年協助數學教師進行專業成長的看法（李天堯，2011），教師的專業成長應在自主發展的過程中，藉由專業社群的協助有效推動教師的教學實踐與成長。此外為協助教師落實教學改革，應協助教師發現自己的教學核心價值及原則（Little, 1993）。研究結果亦發現，T1 在重新發現教學的核心價值與原則後，覺察到學生應是學習責任中心，認為探究教學的旨趣應是為學生建構一個主動學習環境，協助學生積極參與數學問題探究，並在良好的社會性脈絡中發展臆測思維及建構數學新知。

（二）教師臆測專業成長對於數學教學及研究社群之貢獻

由於學生數學臆測思維模式是在猜測、檢驗、反駁、相信的歷程中遞迴，並且課室中的臆測活動是一種探究教學，但在台灣相關教學研究或實務皆相當缺乏（陳英娥、林福來，1998）。本研究綜合個案教師教學經驗之敘說分析結果發現，個案教師的數學探究教學模式是建構在一個具有良好學習常規（社會性常規、數學學習常規）的學生探究社群上，在促進學生學習理解前提下以高觀點的策略性佈題，透過教學程序（論述管理、加減分）與教學策略（引導、佈題與統整）搭配，協助學生在特殊化、系統化、一般化及反駁的脈絡上建構數學知識。此一結果可提供正面臨教育改革實踐與傳統教學不可調和的張力（Gravemeijer, 1997）的現職教師，或是持有改革教學信念受制於環境影響存在教學信念與實務不一致的教師（Leatham, 2006），進行改革教學實作之參考；此外，數學臆測式數學探究的核心（Cañadas, et. al., 2007），本研究結果可提供有志於進一步發展臆測探究教學的研究者實徵證據之參考。

（三）數學探究教學理論與實踐

我們在協助個案教師發展數學探究教學過程中發現，教師在探究教學的嘗試過程中經常困惑於探究教學理論於實務間的矛盾與困惑，如 T1 在研究初期非常執著於要按照 5E 理論把每個步驟做完才算是完整的探究教學。我們理解到，教師磨合理論與實務間的「探究」即是教師專業成長發展的最佳架構（Crockett, 2002），因為探究即是在片段的關係中尋找和諧的整體（Peirce, 1955）。最終，T1 在教師角色認同中覺察「佈題」是最重要的關鍵，步驟、程序與策略皆是促進學生學習理解的手段。我們誠然相信，理論仍然具有參考的價值，因為理論是多人經驗的累積，在我們對於未知情境一無所悉之前，理論是最佳的經驗指引，但不同的人在實踐理論的過程會有不同的詮釋與調整，然而這不就是探究的真義—「探究」是工具（as a tool）更是本體存在的一種方式（as a way of being）（Jaworski, 2006）。

二、建議

本研究旨於探討一位國中現職教師發展數學臆測探究教學歷程，因此最終本研究擬從研究設計、研究方法與未來研究方向提出建議。

（一）教師專業成長社群的設置有助於教師專業成長

T1 在回顧這段專業發展歷程時勾勒出研究實踐社群對於教師教學改變始終是溫暖而間堅強的助力。此外，在 T1 所屬學校的教師社群中，研究者了解到有些教師雖有改變傳統教學意願但卻無所適從。建議未來協助在職教師進行專業成長的研究計畫，應融入教師日常教學活動，並協助有意願進行教學改變的教師共同組成專業成長學習社群，相信在研究實踐社群的支持下，教師必能在專業成長歷程中具體進行教學改革。

（二）關於改革取向教學

教育改革實踐與傳統教學間之所以存在不可調和的張力（Gravemeijer, 1997），其中可能原因除了教師所持有的教學信念外，事實上，教師發展探究教學是一漫長的信念與實務的改變過程（林勇吉、秦爾聰、段曉林，2010），從 T1 的專業成長歷程中我們可以發現，T1 因著教師自我角色認同覺察，發現在其初始信念的影響下，為學生擔負了大部分的學習責任，隨著學習責任中心的轉移，T1 也更能專注於學習環境的建置與佈題脈絡的精緻化。因此，建議初步嘗試教學改革的教師，應先行於課室中建立數學學習常規（Yackel & Cobb, 1996），如論述管理、小組角色（組長、風紀）的責任與賦權等以利建構學生探究學習社群（Goos, 2004）。

（三）關於教學設計

在本研究中參考以「探究」作為關鍵聯盟（critical alignment）的三階層研究設計（數學中的探究、數學教學中的探究與數學教學發展研究中的探究）（Jaworski, 2006），作為促進個案教師專業成長的三一架構，由於該架構將探究分三個層次來探討，若能依照該結構進行研究設計預期能有更細緻的研究產出，建議未來從事發展探究教學的研究者可以參考該研究設計。另外，不同的數學任務設計足以引動學生不同的臆測思維路徑（林碧珍，2015；Cañadas, et. al., 2007），在本研究中個案教師的任務設計僅略分為實體操作與抽象思考，並且，研究者未針對學生的數學思維發展做進一步資料蒐集與分析，建議未來有志於從事發展臆測探究教學研究之研究者，可進一步針對不同的臆測任務類型進行設計，相信根據學生的臆測思維路徑分析可以提供教師作為提升探究教學效能之參考。

（四）關於敘說探究研究方法

本研究採敘說探究作為主要質性研究方法，研究者發現敘說探究的定義眾說紛云，特別是在名詞的界定上如敘說探究、敘說分析、分析敘說，或者分析方法的區辨上如敘說分析、個案研究與論述分析等，對於初次嘗試以敘說探究作為研究方法的研究者而言可能莫衷一是。由於敘說探究文本撰寫是以故事方式呈現研究對象的經歷及遭遇，並且探究過程中研究者親自參與這些故事是「如何說出」以及「如何被說」，最後以參與者的角度詮釋及重現研究對象的經驗。

有鑑於此，建議未來初次採用敘說探究進行質性分析的研究者，除先釐清敘說探究的意義及敘說結構應如何形成外，對於需要邏輯實證的情節不妨輔以紮根理論進行分析，相信必有助於故事情節的配置發展及詮釋。

參考文獻

- 李天堯 (2011 年 5 月)。試辦「數學領域全市專業成長社群」之經驗與省思。李林滄 (主持人)，**主題二**。99 學年度「數學領域輔導團永續經營研討會」暨「期末委員會議」發表之論文，國立臺北教育大學。【Lee, Tian-Yao (May, 2011). Experiences and reflections on the pilot of "Professional Development Community of Hsinchu City in Mathematics". In Lin-Tsang Lee (Chair), *Second theme*. Paper presented at the 2010 academic year of "Seminar on continuing management of Compulsory Education Counseling Group in Mathematics" and "Term of Committee Meeting", National Taipei University of Education. (in Chinese)】
- 李源順、林福來、陳美芳。(2012)。理論與實務持分者對不同身分國小教師所需數學教學專業知能觀點之比較研究。*科學教育學刊*，**26**(6)，539-562。doi: 10.6173/CJSE.2012.2006.03【Lee, Yuan-Shun, Lin, Fou-Lai, & Chen, Mei-Fang (2012). Professional knowledge/competence of mathematics teaching of different elementary teacher identities: The compare of theory and practice stakeholders. *Chinese Journal of Science Education*, 26(6), 539-562. doi: 10.6173/CJSE.2012.2006.03 (in Chinese)】
- 林勇吉、秦爾聰、段曉林 (2010)。以敘說探究探討一位國中教師發展數學探究教學之信念與實務。*教育科學研究期刊*，**55**(3)，1-32。【Lin, Yung-Chi, Chin, Erh-Tsung, & Tuan, Hsiao-Lin (2010). Utilization of a narrative approach case study to investigate the implementation of mathematics inquiry teaching. *Journal of Research in Education Sciences*, 55(3), 1-32. (in Chinese)】
- 林碧珍 (2015)。國小三年級課室以數學臆測活動引發學生論證初探。*科學教育學刊*，**23**(1)，83-110。doi: 10.6173/CJSE.2015.2301.04【Lin, Pi-Jen (2015). The exploration of conjecturing provoking argumentation of mathematics in a third grade classroom. *Chinese Journal of Science Education*, 23(1), 83-110. doi: 10.6173/CJSE.2015.2301.04 (in Chinese)】
- 姚如芬 (2006)。成長團體之「成長」—小學教師數學教學專業之探究。*科學教育學刊*，**14**(3)，309-331。doi: 10.6173/CJSE.2006.1403.04【Yao, Ju-Fen (2006). Investigation of elementary teachers' professional development in mathematics instruction through a community "MTGG". *Chinese Journal of Science Education*, 14(3), 309-331. doi: 10.6173/CJSE.2006.1403.04 (in Chinese)】
- 陳英娥、林福來 (1998)。數學臆測的思維模式。*科學教育學刊*，**6**(2)，191-218。【Chen, Ing-Er, & Lin, Fou-Lai (1998). A thinking model of conjecturing. *Chinese Journal of Science Education*, 6(2), 191-218. (in Chinese)】
- American Association for the Advancement of Science. (1993). *Benchmarks for scientific literacy: Project 2061*. New York, NY: Oxford University Press.
- American Federation of Teachers. (2002). *Principles for professional development*. Washington, DC: Author.

- Arbaugh, F. (2003). Study groups as a form of professional development for secondary mathematics teacher. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 6(2), 139-163. doi: 10.1023/A:1023928410992
- Aulls, M. W., & Shore, B. M. (2008). *Inquiry in education. Volume I: The conceptual foundations for research as a curricular imperative*. New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.
- Biesta, G., Priestley, M., & Robinson, S. (2015). The role of beliefs in teacher agency. *Teachers and Teaching*, 21(6), 624-640. doi: 10.1080/13540602.2015.1044325
- Branch, J. L., & Oberg, D. (2004). *Focus on inquiry: A teacher's guide to implementing inquiry-based learning*. Edmonton, AB: Alberta Learning.
- Briscoe, C. (1991). The dynamic interactions among beliefs, role metaphors, and teaching practices: A case study of teacher change. *Science Education*, 75(2), 185-199. doi: 10.1002/sce.3730750204
- Cañadas, M. C., Deulofeu, J., Figuerias, L., Reid, D., & Yevdokimov, O. (2007). The conjecturing process: Perspectives in theory and implications in practice. *Journal of Teaching and Learning*, 5(1), 55-72. doi: 10.22329/jtl.v5i1.82
- Clandinin, D. J., & Connelly, F. M. (1996). Teachers' professional knowledge landscapes: Teacher stories—stories of teachers—school stories—stories of schools. *Educational Researcher*, 25(3), 24-30. doi: 10.3102/0013189X025003024
- Clandinin, D. J., & Connelly, F. M. (2000). *Narrative inquiry. Experience and story in qualitative research*. San Francisco, CA: Wiley.
- Clarke, D., & Hollingsworth, H. (2002). Elaborating a model of teacher professional growth. *Teaching and Teacher Education*, 18(8), 947-967. doi: 10.1016/S0742-051X(02)00053-7
- Cochran-Smith, M., & Lytle, S. L. (1999). Relationships of knowledge and practice: Teacher learning in communities. *Review of Research in Education*, 24, 249-305. doi: 10.3102/0091732X024001249
- Cohen, D. K., McLaughlin, M. W., & Talbert, J. E. (Eds.). (1993). *Teaching for understanding: Challenges for policy and practice*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.
- Connelly, F. M., & Clandinin, D. J. (1990). Stories of experience and narrative inquiry. *Educational Researcher*, 19(5), 2-14. doi: 10.3102/0013189X019005002
- Crockett, M. D. (2002). Inquiry as professional development: Creating dilemmas through teachers' work. *Teaching and Teacher Education*, 18(5), 609-624. doi: 10.1016/S0742-051X(02)00019-7
- Desimone, L. M. (2011). A primer on effective professional development. *Phi Delta Kappan*, 92(6), 68-71. doi: 10.1177/0031721711109200616
- Fennema, E., & Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 147-164). New York, NY: Macmillan Publishing Company.
- Franco, C., Sztajn, P., & Ortigão, M. I. R. (2007). Mathematics teachers, reform, and equity: Results from the Brazilian national assessment. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(4), 393-419.
- Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L., & Fennema, E. (2001). Capturing teachers' generative change: A follow-up study of professional development in mathematics. *American Educational Research Journal*, 38(3), 653-689. doi: 10.3102/00028312038003653

- Franke, M. L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 225-256). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Furinghetti, F., & Pehkonen, E. (2002). Rethinking characterizations of beliefs. In G. C. Leder, E. Pehkonen, & G. Törrner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education* (pp. 39-57). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.
- Glaser, B. G. (1992). *Basics of grounded theory analysis: Emergence vs forcing*. Mill Valley, CA: Sociology Press.
- Goos, M. (2004). Learning mathematics in a classroom community of inquiry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(4), 258-291. doi: 10.2307/30034810
- Gravemeijer, K. (1997). Solving word problems: A case of modelling? *Learning and Instruction*, 7(4), 389-397. doi: 10.1016/S0959-4752(97)00011-X
- Guskey, T. R. (2002). Professional development and teacher change. *Teachers and Teaching: Theory and Practice*, 8(3), 381-391. doi: 10.1080/135406002100000512
- Harlen, W. (2014). Helping children's development of inquiry skills. *Inquiry in Primary Science Education*, 1, 5-19.
- Jaworski, B. (1992). Mathematics teaching: What is it? *For the Learning of Mathematics*, 12(1), 8-14.
- Jaworski, B. (1994). *Investigating mathematics teaching: A constructivist enquiry*. London, UK: The Falmer Press.
- Jaworski, B. (2001). Developing mathematics teaching: Teachers, teacher educators, and researchers as co-learners. In F. L. Lin & T. J. Cooney (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 295-320). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. doi: 10.1007/978-94-010-0828-0_14
- Jaworski, B. (2006). Theory and practice in mathematics teaching development: Critical inquiry as a mode of learning in teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9(2), 187-211. doi: 10.1007/s10857-005-1223-z
- Jaworski, B. (2015). Mathematics meaning-making and its relation to design of teaching. *PNA*, 9(4), 261-272.
- Kaasila, R. (2007). Using narrative inquiry for investigating the becoming of a mathematics teacher. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 39(3), 205-213. doi: 10.1007/s11858-007-0023-6
- Kent, B. (1997). The interconnectedness of Peirce's diagrammatic thought. In N. Houser, D. D. Roberts, & J. Van Evra (Eds.), *Studies in the logic of Charles Sanders Peirce* (pp. 445-459). Indianapolis, IN: Indiana University Press.
- Labov, W. (1972). *Language in the inner city: Studies in the black English vernacular*. Philadelphia, PA: University of Pennsylvania Press.
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge, UK: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9781139171472

- Lave, J. (1996). Teaching, as learning, in practice. *Mind, Culture, and Activity*, 3(3), 149-164. doi: 10.1207/s15327884mca0303_2
- Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge, UK: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9780511815355
- Lavonen, J., Jauhiainen, J. Koponen, T. I., & Kurki-Suonio, K. (2004). Effect of a long-term in-service training program on teachers' beliefs about the role of experiments in physics education. *International Journal of Science Education*, 26(3), 309-328. doi: 10.1080/095006903200007433
- Leatham, K. R. (2006). Viewing mathematics teachers' beliefs as sensible systems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9(1), 91-102. doi: 10.1007/s10857-006-9006-8
- Lin, F. L., & Tsao, L. C. (1999). Exam maths re-examined. In C. Hoyles, C. Morgan, & G. Woodhouse (Eds.), *Rethinking the mathematics curriculum* (pp. 228-239). London, UK: Falmer Press.
- Little, J. W. (1993). Teachers' professional development in a climate of educational reform. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 15(2), 129-151. doi: 10.3102/01623737015002129
- Little, J. W. (2006). *Professional community and professional development in the learning-centered school*. Washington, DC: National Education Association.
- Mason, J. (1998). Enabling teachers to be real teachers: Necessary levels of awareness and structure of attention. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1(3), 243-267.
- Mason, J., Burton L., & Stacey, K. (2010). *Thinking mathematically* (2nd ed.). Harlow, UK: Pearson Education Limited.
- Meyer, M. (2010). Abduction — A logical view of investigation and initiating processes of discovering mathematical coherence. *Educational Studies in Mathematics*, 74(2), 185-205. doi: 10.1007/s10649-010-9233-x
- National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Research Council (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.
- Peirce, C. S. (1955). The nature of mathematics. In J. Buchler (Ed.), *Philosophical writings of Peirce* (pp. 135-149). New York, NY: Dover.
- Polkinghorne, D. E. (1995). Narrative configuration in qualitative analysis. *International Journal of Qualitative Studies in Education*, 8(1), 5-23. doi: 10.1080/0951839950080103
- Putnam, R. T., & Borko, H. (2000). What do new views of knowledge and thinking have to say about research on teacher learning? *Educational Researcher*, 29(1), 4-15. doi: 10.3102/0013189X029001004
- Richards, J. (1991). Mathematical discussions. In E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 13-51). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer. doi: 10.1007/0-306-47201-5_2
- Riessman, C. K. (1993). *Narrative analysis. Qualitative research methods series, volume 30*. Newbury Park, CA: Sage.

- Rushton, S. P. (2004). Using narrative inquiry to understand a student-teacher's practical knowledge while teaching in an inner-city school. *The Urban Review*, 36(1), 61-79. doi: 10.1023/B:URRE.0000042736.78181.61
- Sarason, S. B. (1990). *The predictable failure of educational reform: Can we change course before it's too late?* San Francisco, CA: Jossey-Bass.
- Schön, D. A. (1983). *The reflective practitioner: How professionals think in action*. New York, NY: Basic Books.
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114-145. doi: 10.2307/749205
- Simon, M. A. (1997). Developing new models of mathematics teaching: An imperative for research on mathematics teacher development. In E. Fennema & B. Scott-Nelson (Eds.), *Mathematics teachers in transition* (pp. 55-86). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1997). Understanding and improving classroom mathematics instruction: An overview of the TIMSS video study. *Phi Delta Kappan*, 79(1), 14-21.
- Strauss, A., & Corbin, J. (1990). *Basics of qualitative research: Grounded theory procedures and techniques*. Newbury Park, CA: Sage.
- Strauss, A., & Corbin, J. (1998) *Basics of qualitative research: Grounded theory procedures and techniques* (2nd ed.) London, UK: Sage.
- Trowbridge, L. W., & Bybee, R. W. (1990). *Becoming a secondary school science teacher* (5th ed.). New York, NY: Merrill.
- Wenger, E. (2015, April 15). *Communities of practice: A brief introduction*. Retrieved from <http://wenger-trayner.com/introduction-to-communities-of-practice/>
- Witherell, C., & Noddings, N. (1991). *Stories lives tell: Narrative and dialogue in education*. New York, NY: Teachers College Press.
- Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458-477. doi: 10.2307/749877