

蔣姿儀、林思婷（2017）。
學齡前幼兒幾何形體概念之發展。
臺灣數學教師，38（2），19-41
doi: 10.6610/TJMT.20171027.01

學齡前幼兒幾何形體概念之發展

蔣姿儀¹ 林思婷¹

¹ 國立臺中教育大學幼兒教育學系

本研究以幼兒園 3-6 歲幼兒為研究對象，探討幼兒在幾何形體概念的認知發展，並進一步探討不同教學模式的幾何課程，對幼兒學習幾何形體概念的影響。為達上述研究目的，本研究首先透過文獻探討，擬定 3-6 歲幼兒幾何形體評量試題，並邀請學者專家審查，完成測驗题目的擬定。其次，針對臺中市兩所以一般主題教學與蒙特梭利教學課程模式為主的幼兒園之幼兒，進行一一的訪談施測，進一步分析不同教學模式、年齡、性別的幼兒，在幾何形體概念的表現及差異。研究結果發現，在兩園幼兒整體年齡未有顯著的差異之下，蒙特梭利教學幼兒園之幼兒，其幾何形體的總得分顯著高於非蒙特梭利教學幼兒園之幼兒。年齡也與幾何形體發展有顯著之正相關，幼兒年齡愈大，則其幾何形體概念發展就愈好，但男女幼兒在幾何形體概念的發展上並無顯著之差異。

關鍵詞：幼兒園；幾何形體；教學模式

壹、緒論

一、研究背景與動機

幼兒一出生就具備觀察周遭環境的能力，也會漸漸記住母親的臉，而對於圖形的概念也早在幾個月的嬰兒時期就已經開始發展了，直到三、四歲，幼兒已可認得圓形與三角形等簡單的幾何形體（張慧芝，2011）。幾何形體對個體發展的影響，包含數理與語文兩方面，數理方面包含平面圖形與立體圖形的認識，語文亦同，文字對幼兒而言也是抽象的圖像符號，如果幼兒的幾何形體概念越好，對其語言的認讀也會有正面的影響與關聯。有研究指出，形體的學習與個體美感、設計、創造力與問題解決能力有關（王俞雅、曾啟雄，2015）。Wolf（1996）也視幾何形體為書寫能力的感官預備，可使幼兒注意到形狀的不同。由此可知形體的學習對幼兒不同領域發展的影響。

生活中到處充滿各式各樣的形體，對幼兒而言，是學習的最佳時機與環境。張英傑（2003）指出，幾何世界的探索是一種問題解決的重要形式，進而可以發展個體問題解決的能力。幼兒生活的環境到處充滿各式各樣的形體，從教室的積木或是路上紅綠燈都是由許多不同的圖案組合起來。幼兒發展學者 Piaget 提出，幼兒階段的感覺器官特別敏銳，若能在此時期善用其感覺器官進行學習，從生活環境進行具體教學，將有助於其學習的成效。林嘉綏與李丹玲（1999）在幼兒數學教材教法一書中提到，幾何形體與語言、實際形狀都是有相關的。幼兒教育是個體學習的起點，幼兒以感官探索這個世界，從基本的形的學習開始，進而培養其尋求策略與解決問題的能力，依據教育部（2016）「幼兒園教保活動課程大綱」（以下簡稱幼兒園課程大綱）「認知」領域的「生活環境中的數學」學習面向，解決問題正是幼兒認知學習的終極目標，為學前幼兒亟欲培養的重要能力與素養。除了認知領域的學習之外，在幼兒園課程大綱中也明列美感領域是幼教課程的六大領域之一，以設計領域的觀點來看，從產品造型、視覺傳達、空間設計、乃至幾何動畫，都可以看見幾何形體的應用。從基本的點、線、面的圖形概念，一直發展至今日的數位影像設計，幾何形體扮演著重要的角色，是藝術創作中不可或缺的元素。

現今臺灣幼教教學模式最為常見的包括，傳統分科教學、單元教學、主題教學、方案教學、蒙特梭利（以下簡稱蒙氏）教學與華德福教學等教保模式，蒙氏教學是學齡前較有結構性的教學模式，也受到部份家長的認同，蒙氏教學以其教具最為著名，蒙氏教具大都具有自動更正的特性，再透過老師的示範與指導，經過反覆的操作教具，幼兒能夠更了解教具所要表達的知識概念，反觀一般主題教學模式的學校是以統整性的方式將

幾何形體融入一般的課程中，因此本研究想經由本研究進一步瞭解，在以蒙氏教學為主的幼兒，其幾何形體概念的發展是否比主題教學模式的幼兒為佳，兩者是否存有顯著差異，此外，羅惠玲（2005）以大臺北地區五所公私立幼稚園 5 足歲大班幼兒為對象之研究發現，大班幼兒在立體幾何物件的語言理解與分類作業上都表現甚佳。那年齡較小的中小班幼兒之表現是否相同，引發研究者探討的動機，故本研究也想進一步探討年齡不同的幼兒，在幾何形體概念的發展與差異。

本研究基於此，以學齡前 3-6 歲幼兒的幾何形體概念為主題，進而探討不同教學模式、年齡與性別之幼兒，其幾何形體概念的發展，進而瞭解其幾何形體概念發展的差異。

二、研究目的

基於上述研究動機，本研究具體的研究目的有以下幾點：

- (一) 分析幼兒在立體幾何與平面幾何概念之發展。
- (二) 比較蒙氏幼兒園與主題幼兒園幼兒在幾何形體概念的發展。
- (三) 分析年齡不同的幼兒在幾何形體的發展與差異。
- (四) 比較男女幼兒在幾何形體發展之差異。

貳、文獻探討

一、幾何形體概念的理論與內涵

凡是形體都可以從外觀看出一些基本的特徵，如形狀、顏色及大小等，而其它的基本性質，則需要經過探究與組織化之後才能進一步求得，形體的分類可由基本特徵或性質著手，並給予名稱，例如正方形、長方形與三角形。幾何形體即為從實物中抽象出的各種圖形，而抽象化的能力始於能運用符號、圖形或其他數學語言。

幾何形體概念的發展與研究，依 Clements 與 Battista(1992)的研究指出，包括 Piaget 理論、van Hiele 理論與認知心理學理論等三種理論。

Piaget 等人 (Piaget, Inhelder, & Szeminska, 1960; Piaget & Inhelder, 1967) 認為學童幾何形體的認知大概可以分為三個階段：1.位相性 (topological)：幾何形體整體的性質，與大小形狀無關，3-4 歲幼兒處於此階段，判斷圖形是依據圖形是否封閉或開放，無法顧及大小、邊長或角度等與歐氏幾何有關，此階段幼兒幾何形體發展完全在基本的拓樸幾何概念；2.反射性 (projective)：由不同的角度觀看，對形體有不同的看法與解釋；3.

歐幾里德性 (Euclidean)：考慮一個物體大小的距離及方向，會涉及到長度、角度和平行，要到 6 歲以後，學童才有此概念。

Piaget 的研究重點在建構幾何概念，與幼兒年齡的發展有關，相對於此，荷蘭數學教育家 Dina van Hiele-Geldof 和 Pierre M. van Hiele 夫婦共同提出的兒童幾何思考模式 (van Hiele, 1986) 與教學因素有關，其認為幾何思考的發展較不受年齡與成熟因素的影響。據此，教師課程活動的安排對幼兒學習幾何形體的認知值得進一步加以探究。Shaughnessy 與 Burger (1985) 將 van Hiele 的五個思考層次特徵描述如下：

1. **視覺 (Visualization)**：依據外觀，辨認並操作各種形狀的圖形與其他的幾何構圖。這個層次的學童，對於幾何形體的認識來自圖形整體外貌，學童會依據圖形外貌來學習辨認圖形。但不能確認這些圖形的組成要素。
2. **分析 (Analysis)**：根據圖形間組成要素和這些要素間的關係分析圖形，依據操作經驗來建立某類圖形的特性，並用這些特性解決問題。
3. **非形式演繹/抽象 (Informal deduction/Abstract)**：能形成並使用定義，但是不能掌握公理化演繹的意義，不能形式地區分敘述和其逆敘述。
4. **演繹 (Deduction)**：在一個公設系統下建立定理與定理網路間的相互關係。
5. **嚴密 (Rigor)**：在不同的公設系統下嚴謹地建立定理並且分析、比較這些系統。

國內曾有研究應用 Van Hiele 理論在圖形的研究上，對平面幾何形體概念的探討作思考層次的調查，及應用在教學診斷上 (吳德邦、馬秀蘭、藍同利，2006；謝貞秀、張英傑，2003)。Clements (2001) 和 Clements 與 Sarama (2000) 的研究即指出，幼兒對形體的概念與認知早在其入學前就已開始。Hannibal (1999) 也指出，幼兒對基本圖形，如圓形、正方形、三角形和長方形的概念源自於每天的生活經驗。此外，也有部份學者認同 van Hiele 幾何形體的發展理論共分五個層次，且提到各階層是一個層次一個層次漸次提升，學童必須具備學習策略，才能從一個層級晉升到下一個層級，且透過學習可以促進幼兒提升其層級 (周淑惠，2000；Clements & Battista, 1992；Van Hiele, 1986；Van DeWalle, 1990；Yin, 2003)。

二、幼兒階段幾何形體概念之發展

教育部 2016 年在幼兒園課程大綱中提到，圖像為幼兒生活環境中的數學，幾何圖像包含了知識性的概念以及生活性的應用。大多數的幼兒園關於幾何圖像的概念建立大多都是在積木角，幼兒藉由玩積木的同時產生其形狀和空間的概念。表 1 即為幼兒園課

程大綱數學領域提到與形狀學習有關的課程目標與學習指標，本研究在擬定幾何形體評量時，參考了上述內容。學前教育並非國民義務教育，幼兒園是否運用課綱，目前並未有嚴格的規定，但政府自 2013 年起，在全國各縣市非常積極地在推動課綱研習，期望能促進幼兒園教師對課綱的瞭解，並進一步加以運用在教學上。

表 1

幼兒園課程大綱與幾何空間有關之內容

課程目標	2-3 歲學習指標	3-4 歲學習指標	4-5 歲學習指標	5-6 歲學習指標
蒐集生活環境中的數學訊息	探索物體的外形	辨識與命名物體的形狀	辨識與命名物體的形狀	覺知物體的形狀會因觀察角度的不同而不同

由表 1 可以看出，幼兒園幼幼班幼兒先從探索物體的外形開始，先就環境中的形體進行探索，豐富其背景知識，到了小班與中班可藉由先前對形體的背景知識對基本的形體進行辨識與命名，到了大班更能從不同的角度進一步瞭解圖形的變化。此外，本研究亦參考李文貞與鍾志從（2006）、洪文東與沈宴竹（2011）、張靜文與張麗芬（2014）以及李英（2016）等人的研究發現，幼兒階段宜讓幼兒認識正方形、三角形、長方形與圓形，辨識與命名物體的形狀，以及覺知物體的形狀會因觀察角度的不同而不同，包括平面與立體幾何形體的認識。因此本研究探討的內容包括幼兒在平面幾何形體的命名描述與判讀、立體幾何形體的命名描述與觸覺判讀，以及一五方連塊的平移、旋轉與翻面的判斷。

有關幼兒幾何形體概念發展與差異的相關研究，在國外研究方面，Warren（1995）曾以 4-11 歲學童為研究對象之研究指出，9 歲以前的幼兒會習慣使用日常生活的物品描述形體的形狀，例如正方形像書，長方形像門。9 歲以後，學童就能描述形體的性質，例如正方形有四個相等的邊，四個直角。Hannibal（1999）以 24 個 3-6 歲幼兒為對象，探討幼兒幾何形體的發展的研究指出，3 歲幼兒可以辨識圓形，且可以區別圓形與橢圓形。Dağlı 與 Halat（2016）針對 82 位 5-6 歲的幼兒採一對一的訪談，以瞭解他們對三角形概念的瞭解，研究結果顯示有 93%-96% 的幼兒可以成功地辨認三角形，但有一半左右的幼兒在辨認三角形的大小、類型以及方向是有困難的。

在年齡的差異上，Hannibal（1999）研究發現，幼兒對形體的描述會因年齡而有不同，6 歲幼兒比 4、5 歲幼兒較能用一致的方式說明形狀，而較小的幼兒容易受干擾而改

變說法。Clements、Sarama 與 Wilson (2001) 以 60 位 4-7 歲的幼兒為對象，發現不同年齡幼兒的思考層次是有差異的，孩子在平面的合成和分解上透過層次移動，其合成幾何形狀的能力不足。

在國內研究方面，張英傑 (2001) 曾探討兒童描述基本幾何形體所使用之語彙及其背景時，發現幼稚園或國小一、二、三年級兒童，對於任何基本圖形，無論在視覺或觸覺察看或作分類之活動時，兒童對圖形的特徵都不能全部說出必要充分的相關屬性。高耀琮 (2002) 針對幼兒園大班至小二學童的平面幾何形體概念進行探討，研究發現，不同性別的兒童，對於幾何形體整體上的辨認，以及對於各個圖形的辨認，都未達顯著差異。張靜文與張麗芬 (2014) 在幼兒幾何形體辨識之研究中，以南部地區 120 名幼兒為研究對象，研究結果顯示在圓形辨識、開放圖形題型和類似圖形題，發現有年齡的差異，5 歲半幼兒的表現優於 4 歲幼兒。近年來國內以性別探討幼兒幾何形體概念之研究不多，或年代已久，本研究欲進一步瞭解不同性別的幼兒在幾何形體概念的發展與差異。

三、蒙氏教學與主題教學模式之幾何形體教學

(一) 蒙氏教學

在蒙氏教學中有一套幾何形體教學的教具，其屬於感官教育的內涵，共分成三種：

- 1.幾何拼圖櫥：各種平面幾何形體，有示範櫥—（圓形、正方形、三角形）、接著是一櫥（圓形）、二櫥（矩形）、三櫥（三角形）、四櫥（多邊形）、五櫥（四邊形）、六櫥（不規則曲線）。
- 2.幾何立體組：柱體（正方體、長方體、圓柱體與三角柱）、錐體（三角錐、四角錐與圓錐）以及球體、橢圓體與蛋形體共 10 種。
- 3.三角形組合：各種三角形的形狀，包括正三角形、直角三角形與等腰鈍角、等腰直角三角形等。

蒙氏教具都是感官導向的教具，其依循同一個設計原則，帶領孩子不自覺地從簡入繁、從具體到抽象地學習，所有教具的設計期能讓孩子在操作中自我檢查錯誤，因此，當錯誤產生時，孩子不但可以自行察覺到，還可以完全不需要依賴他人幫助而自行修正，屬於一種系統化的學習方法。此外，蒙特梭利並不將幾何形體的教具歸在數學教具中，而將之放在感官教育中進行，且其實施的年齡從小班開始，到中班幾乎會示範教授，大班再進行複習的工作。

誠如前述，在蒙氏教具中幾何形體是屬於感官教育，其教具由幾何拼圖櫥（示範櫥—

圓形、正方形、三角形)、接著是圓形、矩形、三角形、多邊形、四邊形與不規則曲線，接著便是幾何立體組，年齡三歲以上幼兒係依其個人能力而決定教學進度，在學習幾何形體上是以教具的操作與感知為主。

(二) 主題教學模式

在教育部公佈的幼兒園課綱大綱中，強調統整性主題課程的設計，主題課程是一種有別於傳統分科教學的課程，主題課程以統整的方式，融合六大領域的學習，課程強調以幼兒為中心，並且讓幼兒有自行操作與探索的機會，強調做中學，並強調能力的培養，而非知識的複製與灌輸。主題教學模式之下的教學，會將幾何形體的概念融入在主題教學課程中，或是幼兒的例行性活動，如一日作息中，不會強調分科，為了教幾何形體而進行直接的授課，例如：老師在進行圖畫書教學時，即會將與圖形有關的概念結合，或是在一日作息中在進行日期與時間說明時，會以時鐘的形狀來形容圓形，在進行食物主題時，會引導孩子討論各種蔬菜或水果，切開來的剖面、側面或正面會是什麼形狀，並讓幼兒親自動手做，例如：楊桃、西瓜或芹菜、紅蘿蔔等可以蓋出什麼形狀。在課程的實施上，重視幼兒認知思考。本研究對象幼兒園的教學模式，在每一班的教室都有積木角，幼兒在主題課程的進行過程中，通常會運用積木來建構，例如主題為菜市場，當課程延伸到蓋菜市場時，幼兒會運用積木角的各式積木建構菜市場，若進行到花園主題時，幼兒們會也會試圖運用各式積木以搭建花園。因此，幼兒平日接觸立體形體的機會很多，但老師不會以課程的方式，直接教幼兒立體形體的名稱或加以分類。

經由上述文獻可以得知，不同教學模式的幼兒園，各有其教學上的差異，本研究擬進一步探討在兩種不同教學模式下，幼兒在幾何形體概念的表現與差異。

參、研究方法

一、研究方法與研究對象

本研究主要之研究方法採用測驗調查與觀察法，以臺中市兩所幼兒園 3-6 歲的大班、中班與小班幼兒為研究對象，一間以蒙氏教學為主，幼兒人數是 55 人，含大班 18 人、中班 22 人、小班 15 人；另一間則採用主題教學，幼兒人數為 58 人，其中大班 11 人、中班 23 人、小班 24 人，施測幼兒人數共計 113 人。在性別的分佈上，蒙氏教學的男幼童為 30 人、女幼童為 25 人；主題教學幼兒園，男童為 27 人、女童為 31 人。本研究在

徵求受試幼兒的家長同意後，分別針對選取的幼兒進行一對一的施測，施測時間為上學期的期末，大概在一月中旬，詳細的樣本分佈見表 2 所示。

表 2

本研究樣本分佈一覽表

單位：人

性別 \ 模式	蒙氏教學			主題教學		
	大班	中班	小班	大班	中班	小班
男生	9	15	6	7	9	11
女生	9	7	9	4	14	13
小計	18	22	15	11	23	24
總計	55			58		

二、研究工具

(一) 研究工具的編製

本研究之研究工具乃參考李文貞與鍾志從（2006）、洪文東與沈宴竹（2011）、張靜文與張麗芬（2014）和李英（2016）等人之文獻所編製而成，編製完成後並請兩位學者專家進行內容的審查，之後編擬成正式評量工具，內容包括立體幾何命名（8 題）、立體幾何觸覺判斷（8 題）、平面幾何形體辨識（圓形、正方形、長方形、三角形）與平面幾何命名（圓形、正方形、長方形、三角形、菱形與梯形）以及形體的平移、旋轉與翻面（4 題）等五個部份。

(二) 研究工具的內容與計分

本研究工具的內容分為五個活動，活動目標、教具材料與計分方式分述如下：

1. 立體幾何形體辨認命名：了解幼兒描述形狀所用的詞彙。
 - (1). 教具材料：立體幾何積木 8 個（球體、圓柱體、圓錐、正方體、四角椎、三角柱、三角錐、長方體各一個）。
 - (2). 指導語與計分：隨意拿出一個立體積木，指著該形體的積木，問幼兒「小朋友，你可以說出它是什麼形體嗎？」能說出正確立體形體名稱者給 1 分，未答或答錯者 0 分，最高 8 分，最低 0 分。
2. 立體幾何觸覺判別：了解幼兒透過觸覺，對立體幾何的認知，是否能辨認出形體的不同。

- (1).教具材料：立體幾何積木（球體、圓柱體、圓錐、正方體、四角椎、三角柱、三角錐、長方體各一個）。8 個與上述形狀之圖卡各一張，共 8 張。
- (2).指導語與計分：讓幼兒從神祕袋中一次選出一種立體形體，問幼兒「小朋友，你可以選出你手中選（摸）的立體積木是那一張圖形嗎？」如幼兒能指認出與其摸的立體形體相同的照片則得 1 分，選錯或沒有選照片則 0 分，最高 8 分，最低 0 分。
3. 平面幾何圖形判斷：了解幼兒能否正確判斷圓形、正方形、三角形、長方形（含典型圖形、非典型圖形、開放圖形與相似圖形）。
- (1).教具材料：紙本測驗圖形四張一份，順序為圓形、正方形、長方形與三角形，每張形狀各有 11 個圖形供幼兒圈選。
- (2).指導語與計分：拿出圖形（圓形）測驗圖形，問幼兒「小朋友，這個是圓形，這裡有很多的圖形，請你把圓形的圖用紅筆圈起來，不是圓形的用藍筆打叉。」幼兒能正確辨識（圈出）目標圖形的典型與非典型圖形者則得 1 分，能夠辨別出（打叉）與目標圖形不同（開放圖形與相似圖形）也得 1 分，答錯或沒作答皆為 0 分。圓形、正方形、長方形、三角形計四小題，每小題總分各為 11 分，整體總分最低為 0 分，最高為 44 分。
4. 平面幾何辨認命名：了解幼兒了解幼兒描述形狀所用的詞彙。
- (1).教具材料：平面幾何套卡，有圓形、長方形、正方形、三角形、菱形與梯形六種。
- (2).指導語與計分：隨意拿出一張平面幾何圖卡，問幼兒「小朋友，你可以說出它是什麼形狀嗎？」能正確回答該形狀得到 1 分，其他答案以 0 分計算，最高 6 分，最低 0 分。
5. 五方連塊－平移、旋轉、翻面（鏡射）：目的在瞭解幼兒對特定圖形經平移、旋轉、翻面（鏡射）後的辨識能力。
- (1).教具材料：四張可以移動、旋轉和翻面的五方連塊圖形。
- (2).指導語與計分：請幼兒圈選出五方連塊圖形經平移、旋轉、翻面後之圖形。依序一次拿出一張五方連塊圖形（共四張），問幼兒「上面這個五連塊圖形可以移動、旋轉和翻面，會變成下面哪些圖形，請你把它圈出來？」幼兒能正確圈出與範例一樣的圖形則得 1 分，能夠辨別出與示範圖案不同也能 1 分，答錯或沒回答皆為 0 分，一張滿分為 12 分，總分最低為 0 分，最高為 48 分。

(三) 研究工具之信度

本研究在立體幾何命名，其內部一致性 α 值.78，平面幾何命名，內部一致性 α 值為.705，五方連塊—平移、旋轉、翻面（鏡射）， α 值為.925。整體而言，立體形體（立體命名與觸覺辨識） α 值為.665，平面形體（命名與辨識） α 值為.756，整個幾何形體總量表（平面形體與立體形體）之 Cronbach α 值為.757。

三、研究實施程序

本研究以一對一訪談的方式進行，並同時進行記錄，活動輔以錄音與錄影蒐集幼兒的反應。每名幼兒施測時間約 20-30 分鐘的時間，研究者依照評量的內容問句一一的提問，並針對幼兒回答的答案予以記錄。

四、資料處理與分析

本研究採用描述性統計中的平均數（ M ）、標準差（ SD ）、次數分配（ N ）及百分比（%）分析幼兒在幾何形體發展之現況，並進一步以皮爾森積差相關考驗年齡與幾何形體的相關，並以卡方考驗、共變數分析、多變量變異數分析，探討性別、班別與教學模式不同之幼兒在幾何形體概念的發展差異。

肆、研究結果

一、幼兒立體幾何概念與平面幾何概念之發展

(一) 幼兒立體幾何概念之發展

1. 立體幾何形體命名

如表 3 所示，整體而言，大多數的幼兒均無法對立體幾何的形體做正確的命名，有些幼兒雖然有立體幾何名稱的概念，但是沒有辦法正確對應於該物體，例如在測驗中，拿一個三角錐讓幼兒觀察讓其說出此物體的幾何名稱，有少部分幼兒會回答三角柱或是三角體，或是拿一個圓錐給幼兒，也有少數會回答三角錐，由此可知幼兒對立體形體的瞭解有限，正確命名百分比不到 5%。

表 3

幼兒立體幾何形體命名正確率分析 ($N = 113$)

立體形體	正確命名 (N)	正確命名 (%)	錯誤命名 (N)	錯誤命名 (%)
三角錐	8	7.1	105	92.9
正方體	7	6.2	106	93.8
四角錐	6	5.3	107	94.7
長方體	5	4.4	108	95.6
圓錐	5	4.4	108	95.6
圓柱體	5	4.4	108	95.6
三角柱	4	3.5	109	96.5
球體	3	2.7	110	97.3

2. 立體幾何形體觸覺辨識

由表 4 可以得知，幼兒在立體幾何形體觸覺辨識上，除了錐體的辨識較弱外，其餘的表現均在九成以上，球體與圓柱體是最容易辨識的立體幾何形體，幾乎百分之百的幼兒均能辨認出，在此題型當中最容易辨識錯誤的立體幾何形體就是三角錐及四角錐，有些幼兒在透過視覺的觀察後就能很快察覺出差異，但是少部分的幼兒還是沒有辦法透過視覺觀察出其差異。相較於命名，若讓幼兒透過感觀觸覺進行立體形體的辨識，其正確率頗高，由此可知，具體的感官接觸有助於幾何形體的學習。

表 4

幼兒立體幾何形體觸覺分析正確率分析 ($N = 113$)

立體形體	正確命名 (N)	正確命名 (%)	錯誤命名 (N)	錯誤命名 (%)
球體	112	99.1	1	.9
圓柱體	112	99.1	1	.9
長方體	110	97.3	3	2.7
三角柱	107	94.7	6	5.3
正方體	106	93.8	7	6.2
圓錐	105	92.9	8	7.1
四角錐	84	74.3	29	25.7
三角錐	82	72.6	31	27.4

(二) 幼兒平面幾何概念之發展

1. 平面幾何形體的辨識與判斷

在平面幾何形體的判斷方面(每一種形狀含典型、非典型、開放與相似圖形四種),包括圓形($M = 7.50, SD = 1.80$)、正方形($M = 5.94, SD = 1.22$)、長方形($M = 5.93, SD = 1.16$)與三角形($M = 5.08, SD = 1.47$),由平均數可以看出圓形是最容易判斷與辨識的形體,四種最難的是三角形。上述研究結果與張靜文與張麗芬(2014)的研究相同。本研究進一步以相依樣本進行差異考驗發現,幼兒對圓形的正確判讀顯著優於正方形、長方形與三角形;在四種平面形體中,三角形是最難判讀的,而在判讀正方形與長方形的正確性相當,二者並無顯著的差異。本研究推論三角形的非典型、開放與相似圖形較不容易辨識。在幼兒園的教學中,老師呈現的三角形圖形通常以正三形為主,本測內容除了大小之正三角形外,尚包括直角三角形、鈍角三角形、銳角三角形、倒立正三角形與等腰三角形等非典型圖形,施測時發現部份幼兒認為其非屬三角形,故研究結果與三角形命名有所不同。

2. 平面幾何形體命名

如表 5 所示,幼兒在平面幾何命名描述最弱的是梯形,正確率為 11.5%,辨識最佳的是三角形,有 92.9%的幼兒可以說出三角形,其次依序為圓形(91.2%)、正方形(85%)、長方形(80.5%)與菱形(46.9%)。本研究顯示三角形是幼兒最熟悉的圖形,此研究結果與李文貞(2006)針對大臺北地區幼兒為對象之研究結果有不同,該研究指圓形是幼兒最熟悉的幾何圖形(84.3%),其次為三角形(83.1%)。但該研究指出菱形(25.4%)與(3%)梯形是幼兒最陌生的圖形,則與本研究結果相同。本研究發現有近一半的幼兒認識菱形,但知道梯形的幼兒只有百分之十左右。相較於李文貞的研究,明顯高出許多,此外,該研究指出幼兒對正方形與長方形的正確命名為 71.4%與 64.6%,與本研究相較和上述亦同,由此可知,幼兒對平面幾何六種形狀的正確命名相較於十年前進步很多。

表 5

幼兒平面幾何形體命名正確率分析 ($N = 113$)

平面形體	正確命名 ($N, \%$)	錯誤命名 ($N, \%$)
三角形	105 (92.9%)	8 (7.1%)
圓形	103 (91.2%)	10 (8.8%)

表 5 (續)

正方形	96 (85%)	17 (15%)
長方形	91 (80.5%)	22 (19.5%)
菱形	53 (46.9%)	60 (53.1%)
梯形	13 (11.5%)	100 (88.5%)

二、不同教學模式幼兒園之幼兒幾何形體的差異分析

為排除年齡的影響，本研究以共變數分析進行教學模式差異分析，以年齡為共變數，探討教學模式的差異，如表 6 所示，在立體命名、平面命名、平面旋轉與幾何形體等的概念上，不同教學模式均呈現顯著差異，蒙氏幼兒園的幼兒在幾何形體的表現較一般主題教學的幼兒來得好，但在立體觸覺的辨識則無顯著差異。由上述研究可以發現，幼兒透過手去觸摸木頭形狀的幾何形體，進而指認所觸摸的形體圖卡，不論教學模式為何，是沒有顯著差異的，由此可知，觸覺辨識是先天的能力，較不受教學模式的影響，此外因本研究主題教學幼兒園大中小班教室均設有積木角，幼兒平日進行主題教學活動時，幼兒會運用各式積木進行主題教學的實物模擬建構，也可能因為平日接觸積木的機會多，其在形體的觸覺辨識能力與蒙氏教學模式幼兒並無顯著之差異。

本研究進一步以卡方檢定分析不同教學模式幼兒在立體命名的差異發現，蒙氏幼兒園幼兒對圓錐、四角錐、三角錐、三角柱等的答對百分比，顯著高於主題教學模式的幼兒。在六種平面形狀的命名的卡方差異考驗發現，蒙氏幼兒園的幼兒在正方形、菱形與梯形的命名正確率高於主題教學的幼兒。上述研究結果呼應 Clements 與 Battista (1992)、Van Hiele (1986)、Van DeWalle (1990) 和 Yin (2003) 等人的研究，透過學習可以提升幼兒幾何形體的發展概念。

表 6

不同模式幼兒園幼兒在幾何形體表現之差異分析

教學模式 幾何形體	蒙氏幼兒園 (N=55)		主題幼兒園 (N=58)		F	結果分析
	M	SD	M	SD		
立體命名	.636	1.31	.14	.73	6.04*	蒙氏>一般
立體觸覺	7.33	.90	7.16	1.04	.67	NS
平面命名	4.53	1.41	3.66	1.22	16.75***	蒙氏>一般

表 6 (續)

平面旋轉	45.66	4.12	40.97	8.16	14.51***	蒙氏>一般
立體形體	7.96	1.78	7.29	1.36	7.53**	蒙氏>一般
平面形體	29.47	4.09	27.63	3.48	4.97*	蒙氏>一般
幾何形體	83.09	6.71	75.90	10.59	21.27***	蒙氏>一般

* $p < .05$. ** $p < .01$. *** $p < .001$.

三、不同班級（年齡）幼兒幾何形體之表現差異分析

(一) 不同班級幼兒在立體幾何形體之差異分析

1. 立體幾何形體命名

由表 7 可以發現幼兒在各種立體幾何形體的描述正確率低，大班答對率平均為 8.6%，中班 6.38%，而小班則無人答對。經卡方檢定發現，各年齡層在三角柱的命名正確百分比達顯著差異 ($\chi^2(2,113) = 6.27, p < .05$)，中班幼兒顯著優於大班與小班。但研究者另以變異數分析發現，班別在三角柱的命名亦有顯著差異 ($F = 3.23, p < .05$)，但經事後比較則無顯著差異，故在推論時宜加以小心，其餘在球體等並無顯著差異。

表 7

不同班級受試幼兒對立體幾何圖形命名正確百分比卡方檢定

班別	大班 (N=29)	中班 (N=45)	小班 (N=39)	卡方	p 值
立體命名	人數 (%)	人數 (%)	人數 (%)	df = 2	
球體	2 (6.9%)	1 (2.2%)	0 (0.0%)	3.12	.211
圓柱體	3 (10.3%)	2 (4.4%)	0 (0.0%)	4.21	.122
圓錐	3 (10.3%)	2 (4.4%)	0 (0.0%)	4.21	.122
正方體	4 (13.8%)	3 (6.7%)	0 (0.0%)	5.47	.065
四角錐	2 (6.9%)	4 (8.9%)	0 (0.0%)	3.48	.176
三角柱	0 (0.0%)	4 (8.9%)	0 (0.0%)	6.27*	.044
三角錐	3 (10.3%)	5 (11.1%)	0 (0.0%)	4.55	.103
長方體	3 (10.3%)	2 (4.4%)	0 (0.0%)	4.21	.122

* $p < .05$.

2. 立體幾何形體觸覺辨識

在立體幾何觸覺辨識方面，幼兒的答對率，較命名辨識高，如表 8 所示，大班幼兒答對率平均為 95.38%，中班 92.53%，而小班也有 84.3%。在立體幾何形體的觸覺辨識上，大中小班幼兒在球體與圓柱體的觸覺辨識最好，在各年齡層都近百分之百，其次為長方體，而三角柱、正方體與圓錐之觸覺辨識也不錯，即使小班也在八成七以上，觸覺辨識較弱的為三角錐與四角錐。經卡方檢定發現，各年齡層在三角錐的觸覺辨識達顯著差異 ($\chi^2(2,113) = 14.38, p < .01$)，大班與中班幼兒均優於小班幼兒，但大班與中班幼兒則無顯著差異。

表 8

不同班級受試幼兒對立體幾何觸覺辨識正確百分比卡方檢定

立體觸覺	班別	大班 (N = 29)	中班 (N = 45)	小班 (N = 39)	χ^2 df = 2	p 值
		人數 (%)	人數 (%)	人數 (%)		
球體		29 (100.0%)	44 (97.8%)	39 (100.0%)	1.53	.467
圓柱體		28 (96.6%)	45 (100.0%)	39 (100.0%)	2.92	.232
長方體		29 (100.0%)	44 (97.8%)	37 (94.9%)	1.75	.418
三角柱		29 (100.0%)	43 (95.6%)	35 (89.7%)	3.59	.166
正方體		29 (100.0%)	43 (95.6%)	34 (87.2%)	5.10	.078
圓錐		28 (96.6%)	43 (95.6%)	34 (87.2%)	3.01	.222
四角錐		24 (82.8%)	35 (77.8%)	25 (64.1%)	3.50	.174
三角錐		26 (89.7%)	36 (80.0%)	20 (51.3%)	14.38**	.001

** $p < .01$.

(二) 不同班級幼兒在平面幾何形體之差異分析

1. 平面幾何形體的辨識

如表 9，本研究透過單因子多變量變異數分析，發現不同班級的幼兒在四種平面幾何形狀上的辨識有顯著差異 ($Wilks' \Lambda = .988, p < .001$)，再以單因子變異數分析後發現，不同班級幼兒在辨識圓形的得分達顯著之差異 ($F = 36.10, p < .001$)，表示大中小班幼兒在辨識圓形的能力有顯著的不同，經事後比較發現，大班幼兒對圓形的辨識顯著優於中班與小班，而中班也顯著優於小班。在正方形的判斷辨識上，大班幼兒的辨

識力顯著優於小班($F = 7.02, p < .01$)。但在長方形($F = 1.25, p > .05$)與三角形($F = 1.98, p > .05$)的辨識能力上，大中小班幼兒並無顯著的差異存在。

表 9

不同班級幼兒在四種圖形辨識之單因子多變量分析

平面形狀	班級	平均數	標準差	Wilks' Λ 值	F 值	事後比較
圓形	大班 ($N = 29$)	8.82	.93	.988***	36.10***	大班>中班
	中班 ($N = 45$)	7.93	1.27			大班>小班
	小班 ($N = 39$)	6.03	1.81			中班>小班
正方形	大班($N=29$)	6.55	1.21		7.02**	大班>小班
	中班 ($N = 45$)	5.93	1.29			
	小班 ($N = 39$)	5.49	.94			
長方形	大班 ($N = 29$)	6.04	1.43		1.25	
	中班 ($N = 45$)	6.07	.99			
	小班 ($N = 39$)	5.69	1.13			
三角形	大班 ($N = 29$)	4.79	1.50		1.978	
	中班 ($N = 45$)	4.98	1.40			
	小班 ($N = 39$)	5.44	1.48			

** $p < .01$. *** $p < .001$.

2. 平面幾何形體命名

表 10 為不同班別幼兒對平面幾何圖形說出正確名稱的人數與百分比及卡方檢定結果，如表可知，在平面幾何形體的命名上，除了梯形外，大班幼兒對其他五種圖形的正確命名百分比都在九成，而在個別形體的命名上，大班與中班幼兒在圓形的辨識命名最好，百分之百的幼兒都認識圓形，但約有四分之一的小班幼兒無法命名圓形。三角形的辨識度也佳，中大班幾乎均認識，而小班有五分之四的幼兒可以辨識。整體而言，梯形的辨識是最難的。經卡方檢定發現，各年齡層在圓形 ($\chi^2 (2,113) = 20.82, p < .001$)、三角形 ($\chi^2 (2,113) = 10.83, p < .01$)、正方形 ($\chi^2 (2,113) = 20.88, p < .001$)、長方形 ($\chi^2 (2,113) = 27.16, p < .001$)、菱形 ($\chi^2 (2,113) = 42.64, p < .001$) 與梯形 ($\chi^2 (2,113) = 14.63, p < .01$)的平面幾何圖形命名均達顯著差異。經事後比較發現大中班幼兒的圓形、

三角形、長方形與正方形的命名能力顯著優於小班幼兒，而在菱形與梯形的命名上，大班優於中班與小班幼兒。

表 10

不同班級幼兒在平面幾何圖形命名正確百分比卡方檢定

平面命名 \ 班別	大班 (N = 29) 人數 (%)	中班 (N = 45) 人數 (%)	小班 (N = 39) 人數 (%)	χ^2 df = 2	p 值
圓形	29 (100.0%)	45 (100.0%)	29 (74.4%)	20.82***	.000
三角形	29 (100.0%)	44 (97.8%)	32 (82.1%)	10.83**	.004
正方形	29 (100.0%)	42 (93.3%)	25 (64.1%)	20.88***	.000
長方形	28 (96.6%)	42 (93.3%)	21 (53.8%)	27.16***	.000
菱形	26 (89.7%)	23 (51.1%)	4 (10.3%)	62.64***	.000
梯形	9 (31.0%)	2 (4.4%)	2 (8.1%)	14.63**	.001

** $p < .01$. *** $p < .001$.

3. 五方連塊—平移、旋轉與翻面

如表 11，本研究透過單因子多變量變異數分析，發現不同班級的幼兒在五方連塊旋轉、平移與翻面的辨識有顯著差異 (Wilks' $\Lambda = .977$, $p < .001$)，再以單因子變異數分析後發現，不同班級幼兒在四項任務中，除了第一項沒有達到顯著差異外，其餘的三項均達顯著差異 ($F = 3.66$, $p < .05$; $F = 6.41$, $p < .01$; $F = 4.75$, $p < .05$)。而大中小班在整體的平旋翻單因子變異數分析達顯著差異 ($F = 4.72$, $p < .05$)，表示大中小班幼兒在辨識圓形的能力有顯著的不同，經事後比較發現，大班與中班幼兒的五方連塊—平移、旋轉與翻面辨識力顯著優於小班幼兒。

表 11

不同班級幼兒在四種平旋翻形體之單因子多變量分析

平面形狀	班級	平均數	標準差	Wilks' Λ 值	F 值	事後比較
平旋翻一	大班 (N = 29)	11.07	1.56		1.64	
	中班 (N = 45)	11.11	1.64			
	小班 (N = 39)	10.43	2.21			

表 11 (續)

平旋翻二	大班 ($N = 29$)	11.14	1.46	.977***	3.66*	中班>小班
	中班 ($N = 45$)	11.29	1.49			
	小班 ($N = 39$)	10.26	2.37			
平旋翻三	大班 ($N = 29$)	11.21	1.37		6.41**	大班>小班
	中班 ($N = 45$)	11.36	1.40			中班>小班
	小班 ($N = 39$)	10.07	2.24			
平旋翻四	大班 ($N=29$)	11.21	1.37		4.75*	大班>小班
	中班 ($N=45$)	10.91	2.21			
	小班 ($N=39$)	9.82	2.18			

* $p < .05$. ** $p < .01$. *** $p < .001$.

(三) 不同班級幼兒幾何形體之差異分析

本研究透過多變量變異數分析發現，不同班級幼兒在平面與立體幾何形體概念上有顯著差異 (Wilks' $\Lambda = .588$, $p < .001$)，再以單因子變異數分析後發現，不同「班級」之幼兒，其在平面幾何形體 ($F = 30.88$)、立體幾何形體 ($F = 11.15$) 與幾何形體 ($F = 18.98$) 皆達顯著之差異。

經事後比較發現大班與中班幼兒的平面與立體幾何形體均較小班幼兒佳，且大班幼兒在平面形體的概念也優於中班的幼兒 (如表 12)

表 12

不同班級幼兒在幾何形體之變異數分析摘要表

幾何形體	班級	平均數	標準差	F 值	事後比較
平面形體	大班 ($N = 29$)	31.35	.58	30.88***	大班>中班
	中班 ($N = 45$)	29.31	.47		大班>小班
	小班 ($N = 39$)	25.54	.50		中班>小班
立體形體	大班 ($N = 29$)	8.35	.28	11.15***	大班>小班
	中班 ($N = 45$)	7.91	.22		中班>小班
	小班 ($N = 39$)	6.74	.24		

表 12 (續)

幾何形體	大班 (N = 29)	84.31	1.55	18.98***	大班>小班
	中班 (N = 45)	81.89	1.24		中班>小班
	小班 (N = 39)	72.87	1.34		

*** $p < .001$.

(四) 不同班級幼兒幾何形體之差異分析

本研究欲瞭解年齡與幼兒幾何形體發展的相關程度，故以幼兒的月齡與幾何形體進行相關分析，由表 13 可以看出幼兒年齡與其幾何形體概念具有顯著之正相關，年齡愈大的幼兒，其幾何形體概念的發展愈好，無論在平面形體的描述與旋轉、立體幾何形的描述與觸覺辨識，以整體的幾何形體發展。此外，年齡與平面命名的相關性最高，而與平面旋轉的相關性低。

表 13

幼兒年齡與幾何形體概念之相關

立體命名	立體觸覺	平面命名	平面旋轉	立體形體	平面形體	幾何形體
.263**	.345***	.604***	.255**	.538***	.385***	.466***

** $p < .01$. *** $p < .001$.

四、幼兒性別在幾何形體概念發展之差異分析

經由上述分析可以看出，年齡與幼兒幾何形體的發展有正相關。為考量不同性別幼兒在年齡上的差異而間接影響其幾何形體的表現，本研究先就不同性別幼兒在年齡上是否有顯著差異進行分析，經獨立樣本 t 檢定發現，男生 ($M = 58.93$) 與女生 ($M = 56.96$) 在年齡上並無顯著差異 ($t = 1.07, p > .05$)。此外，本研究也先以教學模式與性別進行雙因子變異數分析發現，兩者在立體命名至幾何形體等均無交互作用 ($F = .12, 2.01, 1.29, 1.11, 3.73, 1.23, 3.23, p > .05$)。本研究進一步分析性別的差異 (如表 14)，發現不同性別幼兒在幾何形體概念的發展，均未呈現顯著的差異。此研究與高耀琮 (2002) 針對幼兒園大班至小二學童的研究部份相同，不同性別的兒童，對於幾何形體整體上的辨認，以及對於各個圖形的辨認，都未達顯著差異。

表 14

不同性別幼兒在幾何形體表現之差異分析

幾何形體	男生 (N = 57)		女生 (N = 56)		t	結果分析
	M	SD	M	SD		
立體命名	.58	1.34	.18	.69	2.00*	男生>女生
平面命名	4.16	1.30	4.00	1.46	.61	NS
平面旋轉	43.98	6.99	42.50	6.78	1.14	NS
立體形體	7.80	1.93	7.43	1.89	.76	NS
平面形體	28.81	3.92	28.25	3.85	1.25	NS
幾何形體	80.60	10.42	78.18	8.57	1.35	NS

* $p < .05$

伍、結論與建議

一、結論

(一) 本研究採用一對一個別訪談幼兒的方式進行觀察與記錄幼兒在幾何形體的表現，研究結果顯示幼兒在說明圖形性質，大多數是以視覺所見的直覺反應，較無法說出圖形的部份特徵，幼兒在立體幾何形體的辨識弱，但若運用實體的觸覺辨識則表現不錯，除了三角錐與四角錐之外，正確率高，在平面圖形的命名方面，最佳的是三角形，而梯形是比較陌生的形體。

(二) 在不同教學模式的差異方面，除了立體觸覺辨識無顯著差異外，蒙氏教學模式的幼兒園幼兒在平面幾何或立體幾何的表現均優於主題教學幼兒園的幼兒。本研究以評量調查的方式，瞭解在不同教學模式下幼兒幾何形體的表現，研究者推測由於蒙氏幼兒園的感官領域教學內容包括，提供幼兒平面與立體形體的教學，故其幼兒在幾何形體表現大多優於一般主題教學模式的幼兒，但由於立體觸覺的形體辨識，係以幼兒矇眼觸摸形體後，再加以指認形體，誠如上述，本研究對象主題教學幼兒園的幼兒平日接觸各式積木，並運用積木建構的機會很多，故其在立體觸覺辨識的能力與蒙氏教學的幼兒並無顯著之差異。

(三) 在平面幾何與立體幾何的表現上，大班與中班幼兒均顯著優於小班幼兒，在三角錐的辨識中大班明顯較小班幼兒佳，小班幼兒的幾何形體發展明顯較中大班幼兒弱，而

中班幼兒的形體概念與大班幼兒的差異較小。

(四) 本研究發現在兩組年齡沒有顯著之差異下，男女生在形體的發展上，除了立體命名男生優於女生外，在其餘面向上均無顯著差異。

二、建議

(一) 本研究發現在蒙氏教學模式下學習的幼兒，其幾何形體概念的發展較一般主題式幼兒園佳，由此可見，幾何形體的學習，若能結合具體的形體操作，且有系統性地進行教學能提升幼兒對形體的概念與瞭解。

(二) 本研究結果發現無論大中小班的幼兒，其對日常生活中常見的立體觸覺的辨識度高（球體、正方體、長方體、圓柱體與三角柱），也在圓形、三角形、正方形與長方形的命名正確率高，由此可見，教保服務人員宜多運用常見的生活物件進行形體的教學引導，即使是小班幼兒也能從生活中學習幾何形體。

(三) 本研究發現男女生在平面幾何、立體幾何與整體的幾何形體表現未有顯著之差異，此結果正符應幼兒園課程大綱所強調的性別平等教育的理念，也能提供教保服務人員進行幾何形體教學時之參考。

(四) 此外，本研究在施測的過程中發現，若能在五方連塊評量前，先以例子引導說明示範，再進行正式施測，則會增加幼兒對問題的瞭解，尤其是小班幼兒。

(五) 本次評量內容以訪問為主，實作評量較少，本研究在立體幾何的觸覺辨識施測時發現，幼兒對實物操作活動較有興趣，建議日後在設計相關評量內容時，可以利用平面或是立體幾何的積木或教具讓幼兒能夠進行實際的操作，再觀察幼兒的表現，除了可提高幼兒受試的意願外，也可避免產生幼兒不能理解題意的情形發生。

參考文獻

- 王俞雅、曾啟雄（2015）。剪紙創作模式探討幾何造形排列研究。《設計學報》，20（2），43-62。
- 李文貞、鍾志從（2006）。幼兒幾何形體概念發展。《人類發展與家庭學報》，8，1-29。
- 李英（2016）。教學介入與教具自由探索對幼童幾何概念提昇效益之研究（未出版之碩士論文）。國立臺中教育大學，臺中市。
- 吳德邦、馬秀蘭、藍同利（2006）。探究國小視覺型與觸覺型兒童在繪製三角形活動之

- 概念析。國立臺中教育大學學報，20（2），99-138。
- 周淑惠（2000）。*幼兒數學新論-教材教法*。臺北市：心理。
- 林嘉綏、李丹玲（1999）。*幼兒數學教材教法*。臺北市：五南。
- 洪文東、沈宴竹（2011）。幼兒幾何圖形測驗編製與施測。*幼兒保育學刊*，9，61-76
- 高耀琮（2002）。*兒童平面幾何圖形概念之探討*（未出版之碩士論文）。國立臺北教育大學，臺北市。
- 教育部（2016）。*幼兒園教保活動課程大綱*。臺北市：教育部。
- 張英傑（2001）。兒童幾何形體概念之初步探究。*國立臺北師範學院學報*，14，491-528。
- 張英傑（2003）。*兒童幾何形體概念調查及診斷教學之研究（III）*。臺北市：國科會專題研究計畫成果報告（編號：NSC 91-2522-S-152-006-91B046）。
- 張靜文、張麗芬（2014）。幼兒幾何圖形辨識之研究。*教育研究學報*，48（2），101-126。
- 張慧芝譯（2011）。*人類發展—兒童心理學*。臺北市：美商麥格羅·希爾。
- 謝貞秀、張英傑（2003）。國小三四年級平面圖形概念之研究。*國立臺北師範學院學報*，16（2），97-134。
- 羅惠玲（2005）。*幼稚園幼兒立體幾何物件概念探討*（未出版之碩士論文）。國立臺北教育大學，臺北市。
- Wolf, A. D. (1996)。一間蒙特梭利教室（蕭麗君）。臺北市：及幼。
- Clements, D. H. (2001). Mathematics in the preschool. *Teaching Children Mathematics*, 7(5), 270- 281.
- Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of reasoning on mathematics teaching and learning* (pp.420-464). New York, NY: Macmillan.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2000). The earliest geometry. *Teaching Children Mathematics*, 7(2), 82-86.
- Clements, D. H., Sarama, J., & Wilson, D. C. (2001). Composition of geometric figures. In M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 273-280). Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.

- Dağlı, Ü. Y., & Halat, E. (2016). Young Children's Conceptual Understanding of Triangle. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 12(2), 189-202.
- Hannibal, M. A. (1999). Young children's developing understanding of geometric shapes. *Teaching Children Mathematics*, 5(6), 353-57
- Piaget, J., & Inhelder, B. (1967). *The child's conception of space*. London:Routledge & Kegan Paul.
- Piaget, J., Inhelder, B. & Szeminska, A. (1960). *The child's conception of geometry*. London : Routledge and Kegan Paul.
- Shaughnessy, J. M., & Burger, W. F. (1985). Spadework prior to deduction in geometry. *Mathematics Teacher*, 78, 419-428.
- Van De Walle, J. A.(1990). *Elementary school mathematics: Teaching developmentally*. WhitePlains, N.Y.: Longman.
- Van Hiele, P.M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Orlando, FL: Academic Press.
- Warren, E., & English, L. (1995). Facility with plane Shapes : A multifaceted skill. *Educational Studies in Mathematics*, 28(4), 365-383. doi: 10.1007/BF01274079
- Yin, H. S. (2003). Young Children's Concept of Shape:Van Hiele Visualization Level of Geometric Thinking. *The Mathematics Educator*, 7(2), 71 – 85.