

ISSN 2312-7716
DOI 10.6610/TJMT

第 38 卷第 2 期
二〇一七年十月
VOL. 38 NO. 2
October 2017

臺灣數學教師

Taiwan Journal of Mathematics Teachers



國立臺灣師範大學數學系
Department of Mathematics,
National Taiwan Normal University



台灣數學教育學會
Taiwan Association
for Mathematics Education

發行單位 | 國立臺灣師範大學數學系
台灣數學教育學會

編輯委員會

主編	林原宏	國立臺中教育大學數學教育學系
副主編	李源順	臺北市立大學數學系
	林碧珍	國立清華大學數理教育研究所
編輯委員	林素微	國立臺南大學教育學系
(依姓氏筆劃排序)	徐偉民	國立屏東大學科普傳播學系
	秦爾聰	國立彰化師範大學科學教育研究所
	張淑怡	國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系
	張煥泉	苗栗縣頭份鎮信德國民小學
	陳嘉皇	國立臺中教育大學數學教育學系
	楊凱琳	國立臺灣師範大學數學系
	劉建成	桃園市平鎮區平鎮國民中學
	劉祥通	國立嘉義大學數理教育研究所
	鄭章華	國家教育研究院
	鍾 靜	國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系

地址	臺北市汀州路四段 88 號國立臺灣師範大學數學系 《臺灣數學教師》
電話	886-2-7734-6576
傳真	886-2-2933-2342
電子郵件	tjmtedit@gmail.com
網址	http://tame.tw/news/news.php?class=204

附 啟

1. 本期刊自 2014 年 35 卷起每年出版二期。
2. 本期刊原名《台灣數學教師(電子)期刊》，自 2014 年 35 卷第 2 期起改名為《臺灣數學教師》。
3. 本期刊電子郵件由自 2015 年 36 卷第 1 期起改為 tjmtedit@gmail.com。

版權所有，轉載刊登本刊文章需先獲得本刊同意，翻印必究

2016-2017 年審查委員
2016-2017 Editorial Review Board

沈明勳 Ming-Hsun Shen

國立高雄師範大學科學教育暨環境教育研究所
Graduate Institute of Science Education &
Environmental Education,
National Kaohsiung Normal University

楊晉民 Jinn-Min Yang

國立臺中教育大學數學教育學系
Department of Mathematics Education,
National Taichung University of Education

林素微 Su-Wei Lin

國立臺南大學教育學系
Department of Education,
National University of Tainan

劉宣谷 Hsuan-Ku Liu

國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系
Department of Mathematics and Information Education,
National Taipei University of Education

陳中川 Chung-Chuan Chen

國立臺中教育大學數學教育學系
Department of Mathematics Education,
National Taichung University of Education

劉祥通 Shiang-Tung Liu

國立嘉義大學數理教育研究所
Department of Applied Mathematics,
National Taitung University

陳明璋 Ming-Jang Chen

國立交通大學通識教育中心
Center for General Education,
National Chiao Tung University

鄭章華 Chang-Hua Chen

國家教育研究院
National Academy for Educational Research

陳埤淑 Ching-Shu Chen

台南應用科技大學師資培育中心
Teacher Education Center,
Tainan University of Technology

鄭博文 Bor-Wen Jeng

國立臺中教育大學數學教育學系
Department of Mathematics Education,
National Taichung University of Education

陳嘉皇 Chia-Huang Chen

國立臺中教育大學數學教育學系
Department of Mathematics Education,
National Taichung University of Education

陳榮治 Jung-Chih Chen

國立嘉義大學應用數學系
Department of Applied Mathematics,
National Chiayi University

黃一泓 Yi-Hung Huang

國立臺中教育大學數學教育學系
Department of Mathematics Education,
National Taichung University of Education

主編的話

本期刊由國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會共同發行，此次發行第 38 卷第 2 期。本期刊是有關數學教學、學習與評量等實務研究，此研究並不一定需要深奧的理論基礎，但可在數學的教與學過程中察覺而得。所以，本期刊邀請各界將數學教育實務研究投稿，讓研究論文分享來深化數學教育的實踐。近年來本期刊所刊登的論文，受到數學教師的重視與參與，讓我們繼續來深耕這份數學教育寶藏。

本期論文共有三篇，第一篇是方瓊婉、徐偉民、郭文金發表之〈運用圖形拆解法提升九年級學生幾何證明的學習表現〉，這篇論文應用互動式電子白板（IWB），以圖形拆解方式進行國中幾何證明教學。發現學生的幾何證明認知與工具使用情意都有正向結果，顯示 IWB 是幾何證明有效的教與學工具。第二篇是蔣姿儀、林思婷發表的〈學齡前幼兒幾何形體概念之發展〉，此篇論文探討幼兒的幾何形體概念，主要發現接受蒙特梭利教學的幼兒，其幾何形體認知表現高於非蒙特梭利教學的幼兒，幾何經驗在幼兒生活中具體可行，本文提供佐證依據。第三篇是陳怡如、林原宏、楊晉民發表的〈高年級學生數學閱讀表現之分群特徵探討〉，本篇論文發展生活情境導向的數學閱讀文本，來分析學童認知表現特徵。顯示不同群組的學童之數學閱讀具有認知特殊性，未來可提供數學閱讀教學的參考。

本期刊能順利出版完成，要感謝的人很多。首先要感謝審查委員撥冗審查論文並提供寶貴意見，讓論文更臻完善。同時也衷感謝兩位副主編和編輯委員會委員的鼎力奉獻，以及編輯助理的辛勞。由於您們的協助，才能讓期刊不斷精進。最後，尚祈各位先進繼續給予建議指導並投稿，支持與鼓勵是讓期刊不斷進步的原動力。

《臺灣數學教師》主編

林原宏 謹誌

臺灣數學教師

第 38 卷 第 2 期

2005 年 3 月創刊

2017 年 10 月出刊

目錄

- | | |
|---|----|
| 運用圖形拆解法提升九年級學生幾何證明的學習表現
／方瓊婉、徐偉民、郭文金 | 1 |
| 學齡前幼兒幾何形體概念之發展
／蔣姿儀、林思婷 | 19 |
| 高年級學生數學閱讀表現之分群特徵探討
／陳怡如、林原宏、楊晉民 | 42 |

Taiwan Journal of Mathematics Teachers

Vol. 38 No. 2

First Issue: March 2005

Current Issue: October 2017

CONTENTS

- | | |
|---|----|
| Using Figures Decomposition Method to Improve 9 th Graders' Learning Performance on Geometric Proofs
／Chiung-Wan Fang、Wei-Min Hsu、Wen-Jin Kuo | 1 |
| The Development of the Concept of Geometric Shape of Preschool Children
／Tzu-Yi Chiang、Si-Ting Lin | 19 |
| A Study of the Clustering Characteristics on Mathematics Reading Performance of Sixth Graders
／Yi-Ju Chen、Yuan-Horng Lin、Jinn-Min Yang | 42 |

方瓊婉、徐偉民、郭文金（2017）。

運用圖形拆解法提升九年級學生幾何證明的學習表現。

臺灣數學教師，38（2），1-18

doi: 10.6610/TJMT.20171005.01

運用圖形拆解法提升九年級學生幾何證明的學習表現

方瓊婉¹ 徐偉民² 郭文金¹

¹ 國立屏東大學科普傳播學系

² 國立屏東大學教育學系

本研究旨在探討運用互動式電子白板（IWB）呈現圖形拆解法進行幾何證明教學的歷程與學生的學習表現。以 IWB 為教學工具，透過研究者自編教材，對 29 位在補習班學習的國三學生進行 8 節課，共 360 分鐘幾何證明的教學。課程實施初期學生的證明技巧仍不純熟，課程實施中期學生於課堂上與研究者討論證明思考的歷程，並提出不同之證明方法，課程實施後期學生已能寫出完整證明推理的紀錄。課程實施後對參與學生進行認知與情意的測驗，發現學生在幾何證明認知測驗有 12 位的成績達 120 分以上。平均有 77% 的學生對運用 IWB 呈現圖形拆解方法進行幾何證明教學持正向的看法。

關鍵詞：互動式電子白板；幾何證明；圖形拆解

壹、前言

國中階段的證明課程可以培養學生的分析組合及邏輯推理的能力，雖然數學證明的理解與建構已成為中學數學課程學習的基本要素之一（呂鳳琳，2010），但由於數學證明牽涉邏輯推理、概念元素間互動的複雜任務，一般學生對於數學證明的方法與涵義不易掌握。Cheng 與 Lin（2007）研究國三學生學習幾何證明的結果顯示，學過幾何證明的國三學生有三分之一無法寫出幾何證明，有三分之一的學生寫出的幾何證明是不完整的；陳創義（2003）也發現在九年級三角形幾何證明的課程中，對嚴密性的論證要求及非典型範例有明顯的增加，但只有不到五分之一的國三學生能夠清楚了解有關幾何形狀敘述中的邏輯語詞以及性質的描述；Healy 與 Hoyles（1998, 2000）的研究以九年級成績前 20%~25% 的學生為對象，要求其描述證明的意義，判斷並給出證明，結果也發現在構建證明項目上的平均得分最高不到一半，只能以簡單的方式進行證明的學生有 28%~56%。顯見國中學生在幾何證明的學習成效並不理想。

因此，本研究利用互動式電子白板（Interactive Whiteboard，簡稱 IWB）作為九年級幾何證明教學的主要工具，以幾何圖形的拆解、用不同顏色標記顯示相同或相等條件的等視覺化的過程，看見圖形之間的關聯與聯想出相關的幾何性質，讓學生可以具體的看出圖形間的關聯，進而聯想到幾何證明相關的基本性質或定理，更進一步將觀察到的結果歸納、整理、及逐步寫出明確的證明過程。

貳、文獻探討

數學是一門證明與邏輯論證的科學，也是一門「證明的科學」（Reiss, Hellmich, & Reiss, 2002）。Stylianou、Blanton 與 Knuth（2009）指出如果解題是數學的心，則證明是數學的靈魂；The National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]（2000）也建議中學以下的數學課程應該讓學生能夠認識推理與證明，並能選擇和使用各種適當的推理形式和證明方法。美國加州公立學校數學架構指出：數學最重要目標是教授學生邏輯推理，而八年級以上的學生，應該要強化數學的敏銳度（洪萬生，2004）。國內學生第一次接觸到形式化數學證明的課程內容是幾何課程，除了可以訓練學生的演算、推理與抽象能力，也可發展學生邏輯思考的能力，以及了解數學家工作的機會（教育部，2008a）。

數學證明過程除了透過已知條件來推論待證目標外，更重要的是在解釋說明數學思維的脈絡發展，但由於數學證明牽涉邏輯推理、概念元素間互動的複雜任務，一般不易

掌握數學證明的論證手法與涵義（左台益等人，2011），雖然幾何圖形提供學習者直觀察覺的豐富訊息，但也容易造成其解讀圖形的困難。由於人腦處理訊息的能力有限，如果學習的新概念或內容過於複雜而不易理解時，可適當地將教材進行分割，以降低學習者的認知負荷（Mayer & Moreno, 2003）。

Duval（1995, 1998）認為幾何知識的學習有三種認知過程：視覺過程、構圖過程和推理過程；對幾何圖形的認知理解則可分成四種：知覺性理解、序列性理解、操作性理解和論述性理解。由 Duval 幾何的學習認知過程與認知理解，可以了解學生對幾何的學習，需先有圖形的視覺認知，有了基本的視覺表象認知後，產生知覺性的理解。所以讓學生從構圖中對圖形能有知覺性和序列性的理解，再透過分割拆解圖形的過程，讓學生對幾何圖形的已知條件間能有操作性的理解，進而整合已知條件，達到論述性的理解。所以，Duval（1998）指出幾何證明的理解是一個需要高度認知要求的複雜過程，因此在幾何教學上常需幫助學習者掌握其中所蘊含的脈絡訊息，透過幾何知識的學習的三個認知過程，對幾何圖形先有視覺認知，才能產生知覺性的理解，進而整合已知條件，達到論述性的理解。本研究也將透過圖形拆解的方式，將複雜且隱藏在圖形中的訊息呈現出來，希望能夠降低學生的認知負荷，提升其幾何證明的論證成效。

Van Hiele 幾何認知發展的五個層次主要是說明學習者的幾何概念發展具有層次性，且層次的進展取決於適當的教學而非年齡，所以 Van Hiele（1986）認為適當的教學比起學生的年齡或成熟度更容易提升學生的幾何思考層次。為引導學生到較高的思考層次，Van Hiele 提出五階段教學模式：（一）詢問階段；（二）引導學習方向階段；（三）表達階段；（四）自由探索階段；（五）統整階段。在完成這五個階段之後，學生應可逐漸從最基本的視覺思考層次階段開始，一層一層往前學習，最後應可到達嚴密性思考層次階段。在本研究是以 Van Hiele 的幾何學習階段做為課程實施的進行方式。

IWB 為一具有高度互動性的科技輔助工具，具有繪圖書寫及螢幕等多重功能，可完整呈現圖形的重複建構、拆解、組合和分解，提供視覺效果。Duroisin、Temperman 與 De Lièvre（2015）的研究結果顯示，使用 IWB 可增加中學二年級學生之間的互動，對學習成效也有正面的效果；Nejem 與 Muhanna（2014）的研究也顯示使用 IWB 在中學生的數學成就和保留上有正向的效果。在動機和態度上，Akturk、Mihci 與 Celik（2015）研究指出中學生對 IWB 有很高的正向看法，且可以提升學生和老師的態度；Çakir（2015）的研究結果顯示在數學課程中使用 IWB 有顯著的效益，可以提升中學生的好奇心和動機；Cakiroglu（2015）認為老師對在班級中使用 IWB 大都抱持正向的觀點，參與實驗

的老師也提到 IWB 另一個優勢是提供結合各種特性的教學的機會。

參、研究方法

本研究設計 IWB 的幾何證明教學環境，來改善學生的幾何證明學習困境，由於這是不斷的變動過程，隨時都要針對教師教學和學生學習中遇到的問題進行修正，所以本研究採用行動研究法。

一、研究對象

本研究對象為本文第一作者任教補習班的國中三年級學生，他們來自高雄市三所不同的國中，共 29 人，並由本文第一作者進行教學。雖然不同學校段考試題有難易之分，但參與本研究學生在校數學段考平均成績，約在 70 到 90 分之間，其數學學習表現屬於中上程度。

二、研究工具

(一) IWB 教學環境

本研究使用 PowerPoint 軟體設計教學環境，再透過 IWB 進行教學，IWB 同時扮演著「白板」與「電腦螢幕」雙重的角色，教師透過手指或是特殊的筆接觸電子白板之面板，可以在電子白板上書寫任何的文字、繪圖、圖畫顏色，具有繪圖、書寫及螢幕等多重功能，這也是僅單純使用 PowerPoint 加上布幕無法做到的功能，這也是本研究選擇使用 IWB 進行教學的目的。

國中數學第五冊第三章第一節幾何證明的學習目標為培養學生用推理的方式來證明一些常見的幾何性質，利用基本全等性質及相似性質以推理證明的方式來得到幾何性質及公式。故本研究 IWB 教學環境以幾何證明為主要的學習範疇，教學內容包含基本全等性質、相似性質及其應用，包括老師講解之例題 21 題，與學生課後回家練習之演練題 14 題。有些題型使用一次證明，有些則是兩次證明。一次證明是指經過一次的推理證明程序即可得到待證之結果，兩次證明是指需要經過兩次的推理證明程序才能得到待證之結果，若需透過兩次演繹推理程序才可得到待證之結果也歸類到兩次證明。

(二) 幾何證明認知測驗卷

本測驗主要參閱教育部(2008b)編訂的九七課綱中的數學領域能力指標，共 15 題，

結構表如表 1。

表 1

認知測驗結構表

年級	單元名稱	題數	題目類型	全等或相似性質
國中三年級	幾何證明	1	全等證明	ASA
		4		SAS
		4		AAS
		1		SSS
		2		RHS
		2	相似應用	平行比例線段
		1	幾何證明	三角形邊角關係應用

認知測驗給分說明如下：

- 1.證明條件是題目給定的，一條件給 1 分。
- 2.由題目所給的條件推導出的，一條件給 2 分。
- 3.寫出全等或相似的兩個三角形，給 1 分。
- 4.寫出全等或相似性質，給 3 分。能寫出全等或相似性質，表示學生對此題有整合性的理解，故給分較高。
- 5.將待證之結果列出，給 0.5 分。
- 6.有些特殊題型，需畫出輔助線才可解題，此為解題關鍵，故將證明解題關鍵之輔助線畫出，給 2 分。
- 7.若寫出的證明方式與研究者所列之答案不相似的證明解題方法，但其證明及解題方法合乎邏輯及證明順序結構，則給此題完整的分數

本測驗 1~15 題的滿分分別為 8.5 分、8.5 分、8 分、12.5 分、9.5 分、8.5 分、8.5 分、6.5 分、8.5 分、10 分、8.5 分、8.5 分、15 分、4.5 分、6.5 分，總分為 132 分。

在效度方面，測驗之內容乃依據九年一貫課程綱要之能力指標：「S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。」及「S-4-15：能理解三角形和多邊形的相似性質，並應用於解題和推理。」，依此兩能力指標設計認知測驗卷，三角形全等性質有五種分別為 AAS、ASA、SAS、SSS、RHS 全等性質，三角形相似性質分為 AA、SAS、SSS 相似三種，涵蓋教學實施時欲達成的教學目標，所以具有內容效度。此外也請數學

教育專長的學者及有二十年教學經驗之資深教師審閱，亦具有專家效度。評分者信度的建立，由本文的第一作者、一位有 6 年國中數學教學經驗的現職教師及一位有 18 年國中數學教學經驗的補教界老師共同評分。經分析評分者信度值為 0.98，顯示有良好的評分信度。

(三) 情意量表

本研究情意量表主要是瞭解以 IWB 進行幾何證明教學，是否能提升學生學習興趣及對幾何證明的幫助情形。本量表為五點量表，總分為 20 分。總得分在 16-20 分，表示學生非常喜歡且認為此教學方式很有幫助；得分在 12-15 分，表示有點喜歡與有幫助；得分在 8-11 分，表示學生認為此教學方式沒太大幫助且不太喜歡；得分在 8 分以下，表示此教學方式對幾何證明的學習上沒有幫助，且學生非常不喜歡。

(四) 錄影錄音工具

錄音資料為研究者於課後針對課程實施的反思札記，配合學生的課後訪談錄音，同步進行蒐集及整理資料，讓研究者可以針對學生所提出的問題及上課的流暢度與課堂上的缺失，做為後續修正教學方向的依據。

三、教學實施

本研究共實施 8 節課，每節 45 分鐘，共 360 分鐘，並依 Van Hiele 的幾何學習階段進行教學，實施的歷程說明如下：

- (一)詢問：首先呈現圖形，詢問學生在圖形中看到了什麼？
- (二)引導學習方向：將題目所給的已知條件用不同顏色標註顯示，再將待證之結果標註顏色，引導學生將已知條件與待證之結果關係找出其關聯性。
- (三)明顯化：將全等或相似三角形圖形拉出，呈現相似或全等的三角形，協助學生找出解題關鍵。
- (四)自由探索：圖形明顯化後，學生依圖形的顯示即可知道全等或相似的幾何性質為何，以圖形先做一次幾何證明。
- (五)整合：以圖形先做一次幾何證明，再以正式的條列式做完整的證明，讓學生思考及概覽所使用的方法，並請學生提出其他的解題模式，且試著去濃縮曾探索過的幾何性質方法，老師協助學生對解題做一統合概念的整合。

四、資料整理與分析

(一) 認知測驗與情意量表的分析

認知測驗和情意量表皆以描述性統計分析學生的學習成效及學習態度。

(二) 上課錄影與訪談資料

錄影與訪談的目的是讓研究者了解課程的實施時學生的反應，並做為課後反思檢討修正的依據。接著將教學錄影資料及課後訪談資料編碼，編碼以「類別－人員－日期」的方式編碼。編碼說明如表 2：

表 2

編碼方式與範例表

編碼代號	編碼類別	編碼範例
Ob	教學實施觀察影帶	Ob1025，代表 10 月 25 日教學實施觀察影帶
In	課後學生訪談紀錄	InSn1025，代表 10 月 25 日課後學生訪談紀錄
Rf	研究者課後反思紀錄	Rf1025 代表 10 月 25 日研究者課後反思紀錄

肆、研究結果與分析

一、初期實施的情形與反思

(一) 初期教學實施概況

第 1、2 節的上課內容為例題 1 至例題 9。研究者先將圖例顯示於 IWB 上，再將已知條件列出，依序塗上不同顏色，將題目完整呈現於 IWB 後，詢問學生該如何解題，但學生似乎並沒有解題的想法及對題目有太大的反應，但當圖形於 IWB 上拆解出來時，就有部分學生說出全等性質，研究者再依序先以圖形證明一次，再以正式的文字條列證明一次給學生看。教學實施步驟以其中一例題說明於表 3：

表 3

教學實施步驟表

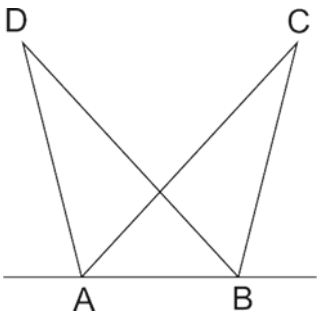
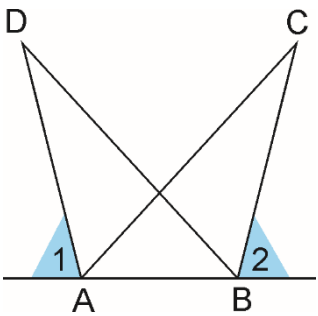
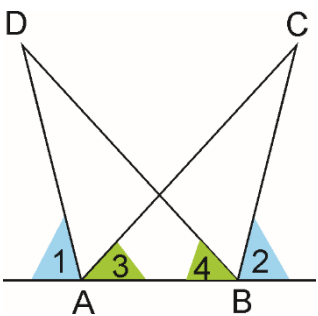
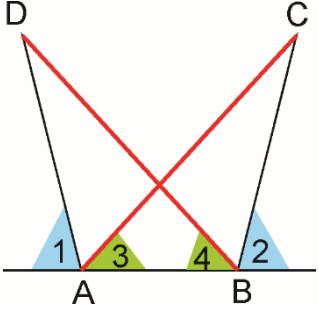
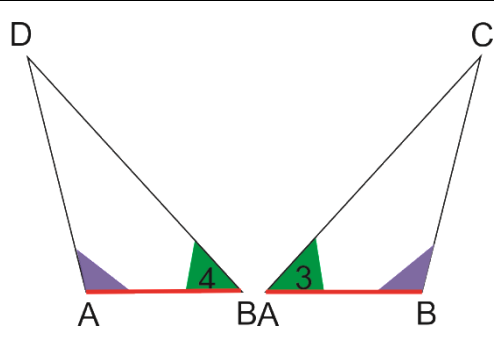
步驟	步驟說明	IWB 學習環境內容
一	先顯示題目圖形	
二	再顯示題目條件	已知 如圖， $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 3 = \angle 4$ 。
三	將已知條件塗上顏色	
四	將已知條件塗上顏色	
五	將待證結果列出	求證 $\overline{AC} = \overline{BD}$ 。
六	將待證結果塗上顏色	

表 3 (續)

七	詢問學生有何想法及如何證明？（此時學生對題目沒有太大的感覺）	
八	將全等的兩圖形拉出	
九	此時有部份學生說出三角形的全等性質	
十	研究者利用圖形說明，並做一次全等證明	在$\triangle ABD$ 與$\triangle BCA$ 中 $\angle DAB = \angle CBA$ $\overline{AB} = \overline{AB}$ (共用邊) $\angle 3 = \angle 4$ (已知) $\triangle ABD \cong \triangle BAC$ (ASA) $\overline{AC} = \overline{BD}$ (對應邊等長)

(二) 初期課堂觀察與課後訪談

經過第 1、2 節的 IWB 教學之後，想要了解學生對 IWB 的看法為何，所以將課堂上的觀察及課後訪談整理如後。

1. 學生對學習課程內容的反應

學生對 IWB 教學感到好奇，所以未把注意力放在課程內容上，只注意 IWB 上的圖形變化，對題目提供的訊息及重點不太去思考，研究者則透過不斷的提問，將學生的焦點拉回待證題目上，提醒學生注意題目要表達及訴求的重點，慢慢將焦點集中在課程內容上 (Ob1130)。

研究者以塗上顏色及拆解圖形的方式，先將圖形證明一次，再用文字列式方法證明一次 (Ob1130)。起初要學生寫出完整的條列式證明，對學生而言是件困難的事，但慢慢地一題兩題將圖形證明完後，再說明講解一次，列出論證，說明論證條列寫法，讓學生習慣書寫證明的過程，發現學生有逐漸能掌握證明的技巧及圖形的拆解方式 (Ob1130)。

2. 學生對運用 IWB 進行幾何證明的教學方式接受度

課後由另一位數學教師對參與上課之學生做課後訪談，彙整學生的反應大致分成以下三類：

- (1)有些地方會反光，看的較不清楚。字太小，坐後面較看不清楚（InS51130）。在 29 位學生中，有 9 位學生有類似的反應。
- (2)圖形比老師用粉筆畫的還要工整漂亮，圖示的標示很清楚，可以幫助理解圖形拆解完成的樣子（InS111130）。在 29 位學生中，有 7 位學生有類似的反應。
- (3)圖形已事先畫好，老師只要點一下圖就拉出來，上課速度變快了（InS161130）。

(三) 初期教學反思與修正

課後研究者針對學生的反應及觀看錄影後，對上課的內容及順序，再做一次反省及自我檢討，並於下次課程實施前完成修正。修正部分如下：

- 1.學生課後反應字體太小。將字體大小由原本的 14 點修改成 18 點。
- 2.將淡黃色改成藍色或淡綠色避免反光。
- 3.在上課時有些文字標示錯誤，修改後也將其他未上的例題及練習題一併再做一次校正修改。
- 4.觀看錄影後，將課程的文字說明與文字列式論證以不同顏色呈現，黑色斜體字為說明輔助，讓學生知道結果的由來，藍色字為證明過程。
- 5.研究者放慢講課速度，延長每一步驟的時間，並將圖形拉出的時間延長，原本是快閃拉出改成緩慢拉開。

研究者將依據學生對這次上課的反應，調整上課步驟，希望於下次上課時能利用節省下來的時間多與學生互動引發學生的想像與思考能力。

二、反思修改後的再次出擊

(一) 教學實施概況

第 3、4 節上課內容為例題 9 至例題 17。這次，也依據上次上課後學生所提出來的問題，將電腦化面的字體大小、顏色以及圖形拆解後拉出的時間做了修正，而且學生已較適應用 IWB 上課的方式，對呈現的已知條件有較多的想法，且會提出解題的想法。學生也對上一節課的例題提出不同的解題策略及方法，並詢問研究者其可行性及正確性（Ob1204）。研究者先將學生的解題方式，書寫於 IWB 的右側後，再將研究者的解題方

式，以不同顏色標示已知條件後，再以文字列式的方式，書寫在 IWB 的左側，讓學生知道證明的方式不只一種。舉例說明如下：

<研究者證法>

已知 如圖， $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 3 = \angle 4$ 。

求證 $\overline{AC} = \overline{BD}$ 。

(已知)

$$180^\circ - \angle 1 = 180^\circ - \angle 2$$

$$\therefore \angle DAB = \angle CBA$$

在 $\triangle ABD$ 與 $\triangle BCA$ 中

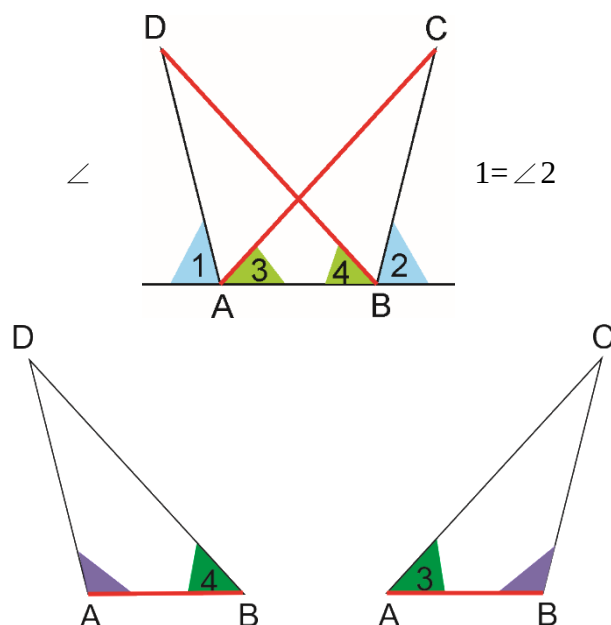
$$\angle DAB = \angle CBA$$

$$\overline{AB} = \overline{AB} \text{ (共用邊)}$$

$$\angle 3 = \angle 4 \text{ (已知)}$$

$$\triangle ABD \cong \triangle BAC \text{ (ASA)}$$

$$\overline{AC} = \overline{BD} \text{ (對應邊等長)}$$



<學生提出之證法>

$$\angle 1 = \angle 2$$

$$\angle 1 = \angle 4 + \angle D, \angle 2 = \angle 3 + \angle C$$

$$\angle 3 = \angle 4 \text{ 故 } \angle D = \angle C$$

在 $\triangle ABD$ 與 $\triangle BCA$ 中

$$\angle D = \angle C$$

$$\overline{AB} = \overline{AB} \text{ (共用邊)}$$

$$\angle 3 = \angle 4 \text{ (已知)}$$

$$\triangle ABD \cong \triangle BAC \text{ (AAS)}$$

$$\overline{AC} = \overline{BD} \text{ (對應邊等長)}$$

(二) 課堂觀察

經過前次學生的建議和教學反思，經學習環境做了修正後，在這次的課堂中已沒有學生反映字體太小或太大、反光等問題，標示錯的地方也做了修正，放慢講課的速度以及延長圖形拉開的時間，由於使用 IWB 上課已先將教學內容設計好再依序呈現，也因

此教師省去了許多在黑板上作圖的時間，可有較充裕的時間清楚的看到學生的反應。經過上次兩堂課的教學後，學生對於以 IWB 為教學工具的上課方式，已經比較習慣了，漸漸的會去思考題目，也有較多的想法，並願意提出解題的想法。同時，研究者也發現多數學生會以不同的顏色將已知條件標示出來，完整的將證明過程書寫於筆記上 (Ob1204)，如圖 1。學生的筆記整理如下：

國三數學
幾何證明 8

例題 12

已知：如圖， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， $\overline{AD} = \overline{AE}$ ，
 $\overline{BP} = \overline{CQ}$ 。

求證： $\angle DQB = \angle EPC$ ， $\overline{DQ} = \overline{EP}$ 。

$\therefore \overline{AB} = \overline{AC}$
 $\therefore \angle B = \angle C$

又 $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， $\overline{AD} = \overline{AE}$
 $\overline{AB} - \overline{AD} = \overline{AC} - \overline{AE} \Rightarrow \overline{BD} = \overline{CE}$

又 $\overline{BP} = \overline{CQ}$
 $\overline{BP} + \overline{PQ} = \overline{CQ} + \overline{PQ} \Rightarrow \overline{BQ} = \overline{CP}$

在 $\triangle BDQ$ 和 $\triangle CEP$ 中
 $\overline{BD} = \overline{CE}$ ， $\angle B = \angle C$
 $\overline{BQ} = \overline{CP}$
 $\therefore \triangle BDQ \cong \triangle CEP (SAS)$
 $\therefore \angle DQB = \angle EPC$
 $\overline{DQ} = \overline{EP}$

例題 13

已知：在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AM}$ 是底邊 $\overline{BC}$ 的中線，
 且 $\overline{BD} \perp \overline{AM}$ ， $\overline{CE} \perp \overline{AM}$ ， D 、 E 是垂足。

求證： $\overline{BD} = \overline{CE}$ 。

在 $\triangle BDM$ 和 $\triangle CEM$ 中
 $\angle BDM = 90^\circ = \angle CEM$
 $\angle DMB = \angle CME$ (對頂角)
 $\overline{BM} = \overline{CM}$ (M 為 $\overline{BC}$ 中點)
 $\therefore \triangle BDM \cong \triangle CEM (AAS)$
 $\overline{BD} = \overline{CE}$ (對應邊等長)

練習 12

已知： A 、 B 、 D 三點共線， A 、 C 、 E 三點亦共線，
 而且 $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， $\overline{BD} = \overline{CE}$ 。

求證： $\overline{DF} = \overline{EF}$

$\therefore \overline{AB} = \overline{AC}$ ， $\overline{BD} = \overline{CE}$
 $\overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AC} + \overline{CE}$
 則 $\overline{AD} = \overline{AE}$

在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle ABE$ 中
 $\angle A = \angle A$ (公共角)
 $\overline{AB} = \overline{AC}$ (已知)
 $\overline{AD} = \overline{AE}$
 $\therefore \triangle ADC \cong \triangle ABE (SAS)$
 $\therefore \angle D = \angle E$ (對應角相同)

在 $\triangle BDF$ 和 $\triangle CEF$ 中
 $\angle D = \angle E$ (證明得)
 $\angle BFD = \angle CFE$ (對頂角)
 $\overline{BD} = \overline{CE}$ (已知)
 $\therefore \triangle BDF \cong \triangle CEF (AAS)$
 $\overline{DF} = \overline{EF}$ (對應邊等長)

練習 13

已知： $\triangle ABC$ 為正三角形，且 $\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF}$ 。

求證： $\triangle DEF$ 為正三角形

$\therefore \triangle ABC$ 為正三角形
 $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$ ①
 $\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF}$ ②

①-②
 $\overline{AB} - \overline{AD} = \overline{AC} - \overline{CF} = \overline{BC} - \overline{BE}$
 $\therefore \overline{BD} = \overline{EC} = \overline{AF}$

在 $\triangle BDE$ 和 $\triangle ADF$ 和 $\triangle CFE$ 中
 $\overline{BD} = \overline{EC} = \overline{AF}$
 $\overline{BE} = \overline{CF} = \overline{AD}$ (已知)
 $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$
 $\therefore \triangle BDE \cong \triangle ADF \cong \triangle CFE (SAS)$
 故 $\overline{DE} = \overline{EF} = \overline{DF}$
 $\therefore \triangle DEF$ 為正三角形

圖 1 學生上課筆記

(三) 教學反思

利用四節課將 17 題例題講解完，學生對證明已有較完整的概念，雖然部分學生會提出自己的解題策略，但多數學生仍然不會主動提出解題的想法，也較不善表達自己的想法，若學生能說出題目的所以然來，表示學生已理解了，也可從中了解學生的錯誤及迷思概念在哪裡（Rf1204）。期待能找出與學生溝通及提升他們自我思考解題能力的模式。

三、IWB 教學實施後期學生的表現及回應

(一) 後期 IWB 教學實施概況

IWB 教學共實施 8 節課，後期的第 5 節至第 8 節課的主要內容是檢討學生回家功課－練習題，因學生已事先寫完，故學生對題目已有初步的概念及對這些題目的解題策略。檢討題目的順序是老師先將正確解答列出，讓學生自己批改自己的作業，之後再提出不會的題目，再由研究者講解。

(二) 後期課堂觀察與課後訪談

在後面的 4 節課中，發現學生已有自己的想法及解題策略，在檢討過程中，學生對於自己的解題錯誤非常在意，也會詢問研究者，除了研究者所給的答案外是否還有其他的解題方式；有些題型則需要畫輔助線才能進行解題，學生會提出為何不同的輔助線無法得證，研究者也針對學生的問題一一解答，很高興學生能動腦思考題目（Ob1207）。

於第 8 節下課後，立刻對參與的 29 位學生實施認知測驗，並請一位教師於測驗完成後，對學生訪談。請學生對運用 IWB 進行幾何證明教學的感覺及在學習上是否有幫助等提出感想。學生感想及反應整理後分成下列幾點：

- 1.容易反光，看太久眼睛容易酸澀不舒服（InS₂1207）。
- 2.電子白板比黑板來的整齊，但電子白板少了一點老師跟學生同步解題互動的那種感覺（InS₇1207）。
- 3.在圖形上因有顏色標示，較清楚且容易辨認（InS₂₁1207）。
- 4.圖形工整清楚，圖形可以拆解，看得更詳細明瞭（InS₂₃1207）。
- 5.使用白板上課老師節省了繪圖時間，課程進度變快，課程內容變多，可以多學些東西（InS₄1207）。
- 6.老師可以不斷的重複題目、多次重覆拆解，讓我們看得更清楚，不會像黑板一樣，在

同一圖形或線段上重複畫好幾次，愈畫愈亂（InS₆1207）。

7.顏色的劃分會比較清楚，而且圖片比較精美，圖會劃的比較清楚，作答比較容易下手（InS₁₈1207）。

(三) 後期教學反思

經過 8 堂課的實施，研究者發現學生已有自己的想法並會主動提出自己的解題策略及步驟，此一進展可能是來自於研究者在課程實施中強調觀察 IWB 中的已知條件與圖形之間的關聯性，並藉由不斷的提問，觸發學生的思考，鼓勵其表達，進而提高學生的學習動機與興趣（Rf1207）。另一個令研究者好奇的是 InS₇1207 提到電子白板少了一點老師跟學生同步解題互動的那種感覺，經過詢問該位學生後，了解這位學生想要表達的是以往使用黑板教學時，老師一邊講解一邊將解題過程寫在黑板上，學生也跟著老師一起計算，學生與老師同步的跟著文字的寫出進入題目的解題過程，但電子白板老師只要一點一下解答就跳出，少了學生與老師同步解題的互動。

四、IWB 教學實施後學生表現與感受

(一) 幾何證明認知測驗表現

認知測驗共 15 題，總分為 132 分，測驗結果統計如表 4：

表 4

認知測驗得分統計表

分數	30-39	40-49	80-89	90-99	100-109	110-119	120-129	130-139
人數	1	1	4	4	4	3	7	5
累計	1	2	6	10	14	17	24	29

這 29 學生從國中一年級到國中二年級下學期，在校數學段考成績平均分數，在 70~79 分的有 6 位，80~89 分的有 20 位，90 分以上有 3 位。而從表 4 可知，多數學生在此單元的後測分數表現達 80 分以上，若換算成滿分為 100 分，有 12 位學生達到 122 分以上，相當於 90 分以上。陳創義（2003）的研究指出，只有不到五分之一的國三學生能夠清楚了解有關幾何形狀敘述中的邏輯語詞以及性質的描述；Healy 與 Hoyles（1998, 2000）的研究以九年級成績前 20%~25% 的學生為對象，要求其描述證明的意義，判斷並給出證明，結果也發現在構建證明項目上的平均得分最高不到一半。本研究的結果有將近 80% 的學生分數達 90 分以上，相當於 80 分，顯示運用 IWB 進行幾何證明的教學

方式，對大部分的學生在幾何證明的學習有不錯的表現。

(二) 學生感受

情意量表的第 1 題是對運用 IWB 上幾何課程的感覺，第 2 題是運用 IWB 上幾何課程的幫助程度，第 3 題是對運用 IWB 上課的喜好程度，第 4 題是運用 IWB 拆解圖形的方式對其題目及題型理解的程度。情意量表統計如表 5。

表 5
情意量表的統計表

類別 題號	非常喜歡/ 很有幫助	喜 歡/ 有幫助	尚可	不喜歡/ 沒有幫助	非常不喜歡	平均得分
1	2	21	6	0	0	3.86
2	4	21	4	0	0	4
3	1	16	11	1	0	3.59
4	9	15	5	0	0	4.14

從表 5 來看，第 1 題平均得分為 3.86 分，第 2 題平均得分 4 分，第 3 題平均得分 3.59 分，第 4 題平均得分 4.14 分，四題總平均得分為 15.89 分，接近 16 分，顯示學生偏向喜歡以 IWB 的方式來上幾何證明的課程，同時也認為對其在幾何證明的學習上有所幫助。

從上述的研究結果顯示，在認知測驗方面除了 2 位學生表現較不理想外，其餘學生都有不錯的表現，都能透過圖形的拆解發現相對應關係與相關全等的性質，進而寫出完整的幾何證明過程。在情意方面平均有 77%以上的學生，對運用 IWB 的上課方式持正向的看法。

伍、結論與建議

本研究運用 IWB 呈現圖形拆解法進行幾何證明學習的行動研究，期間歷經學習環境編修及教學反思修正，以下將針對研究目的來說明整個研究的發現：

一、運用 IWB 呈現圖形拆解法進行幾何證明的教學可提高學生在幾何證明

的學習興趣與動機

本研究依據 Duval 認知過程、Van Hiele 的幾何學習設計學習環境並教學，學生從不知如何證明、隨意猜用全等性質、注意力大都焦點在 IWB 上，到能在課中與研究者互動並說出正確的全等性質、討論回家作業並提出自己的解題策略，到後期則能完整的證明過程，都可看出運用 IWB 呈現圖形拆解法的教學方式，可提高學生在幾何證明的學習興趣與動機。

二、運用 IWB 呈現圖形拆解法進行幾何證明的教學，可提升大部分學生在幾何證明的學習成效

Van Hiele (1986)曾提及教師應以適合學生的層次及學習經驗進行教學，才能讓學生融入教師的教學中，得到良好的學習成效。此外，教師在教學過程中，除了將概念傳授給學生外，還要讓學生真正的理解，才能在學習的過程中不斷提升自己的數學能力，並將資訊轉化為知識與能力。IWB 將已知條件塗上顏色、拆解圖形的方式，可提高學生的學習興趣及動機外，更可進一步提升大部分學生幾何證明的學習成效。

根據研究過程及結果提出兩點建議：

- (一) IWB 呈現圖形拆解法在幾何證明單元的學習上，可提高學生的學習興趣及學習成效，但在數學其他單元的學習上是否有相同的成效？未來研究可針對不同的單元測試其學習興趣及學習成效上的效益。
- (二) 建議未來的研究可針對其他應用在數學教學的電腦輔助軟體，如動態幾何、GoeGebra 等軟體在幾何證明的輔助教學上做進一步的研究。

參考文獻

- 左台益、呂鳳琳、曾世綺、吳慧敏、陳明璋、譚寧君（2011）。以分段方式降低任務複雜度對專家與生手閱讀幾何證明的影響。教育心理學報，43，291-314。doi: 10.6251/BEP.20110517
- 呂鳳琳（2010）。幾何證明不同文本呈現方式對學生認知負荷與閱讀理解影響之研究。（未出版之碩士論文）。國立臺灣師範大學，臺北市。
- 洪萬生（2004）。教改爭議聲中，證明所為何事？師大學報，49（1），1-13。doi: 10.6300/JNTNU.2004.49(1).01

- 陳創義（2003）。青少年的數學概念學習研究—子計畫六：青少年的幾何形狀概念發展研究（2/2）。行政院國家科學委員會補助專題研究計畫（編號：NSC-91-2522-S-003-007）。
- 教育部（2008a）。中小學資訊教育白皮書**2008-2011**。台北市。
- 教育部（2008b）。國民中小學九年一貫課程綱要。台北市。
- Akturk, A. O., Mihci, S., & Celik, I. (2015). Metaphors of high school students about the concept of “interactive whiteboard”. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, 3(2), 120-131. doi: 10.18404/ijemst.01532
- Çakır, A. (2015). Effects of Using Interactive Whiteboards at High School Mathematics Classrooms. *Journal of Education*, 4(1), 17-23.
- Cakiroglu, O. (2015). Teachers' views on the use of interactive whiteboards in secondary schools. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 11(2), 251-259.
- Cheng, Y. H., & Lin, F. L. (2007). *The effectiveness and limitation of Reading and coloring strategy in learning geometry proof*. ISSN 0771-100X, 113.
- Duroisin, N., Temperman, G., & De Lièvre, B. (2015). Restrict or Share the Use of the Interactive Whiteboard? The Consequences on the Perception, the Learning Processes and the Performance of Students within a Learning Sequence on Dynamic Geometry. *Turkish Online Journal of Educational Technology*, 14(2), 144.
- Duval, R. (1995). Geometrical Picture: Kinds of Representation and Specific Processing. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting Mental Imagery with computers in Mathematics Education*, pp. 142-157. Berlin: Springer.
- Duval, R. (1998). *Geometry from a cognitive of view: Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st century*. An ICMI Study, pp.37-52.
- Healy, L., & Hoyles, C. (1998). *Justifying and proving in school mathematics, executive summary*. London: Institute of Education, University of London.
- Healy, L. & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 396-428. doi: 10.2307/749651
- NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

- Nejem, K. M., & Muhanna, W. (2014). The Effect of Using Smart Board on Mathematics Achievement and Retention of Seventh Grade Students. *International Journal of Education*, 6(4), 107-119. doi: 10.5296/ije.v6i4.6753
- Mayer, R. E., & Moreno, R. (2003). Nine ways to reduce cognitive load in multimedia learning. *Educational Psychologist*, 38(1), 43-52. doi: 10.1207/S15326985EP3801_6
- Reiss, K., Hellmich, F., & Reiss, M. (2002). *Reasoning and proof in geometry: Prerequisites of knowledge acquisition in secondary school students* In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), Proceedings of the 26th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 4, pp. 113-120), Norwich, England.
- Stylianou, D. A., Blanton, M. L., & Knuth E. J. (2009). *Teaching and Learning Proof Across the Grade: a K-16 perspective*. London: Routledge.
- Van Hiele, P. V. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. New York.

蔣姿儀、林思婷（2017）。
學齡前幼兒幾何形體概念之發展。
臺灣數學教師，38（2），19-41
doi: 10.6610/TJMT.20171027.01

學齡前幼兒幾何形體概念之發展

蔣姿儀¹ 林思婷¹

¹ 國立臺中教育大學幼兒教育學系

本研究以幼兒園 3-6 歲幼兒為研究對象，探討幼兒在幾何形體概念的認知發展，並進一步探討不同教學模式的幾何課程，對幼兒學習幾何形體概念的影響。為達上述研究目的，本研究首先透過文獻探討，擬定 3-6 歲幼兒幾何形體評量試題，並邀請學者專家審查，完成測驗题目的擬定。其次，針對臺中市兩所以一般主題教學與蒙特梭利教學課程模式為主的幼兒園之幼兒，進行一一的訪談施測，進一步分析不同教學模式、年齡、性別的幼兒，在幾何形體概念的表現及差異。研究結果發現，在兩園幼兒整體年齡未有顯著的差異之下，蒙特梭利教學幼兒園之幼兒，其幾何形體的總得分顯著高於非蒙特梭利教學幼兒園之幼兒。年齡也與幾何形體發展有顯著之正相關，幼兒年齡愈大，則其幾何形體概念發展就愈好，但男女幼兒在幾何形體概念的發展上並無顯著之差異。

關鍵詞：幼兒園；幾何形體；教學模式

壹、緒論

一、研究背景與動機

幼兒一出生就具備觀察周遭環境的能力，也會漸漸記住母親的臉，而對於圖形的概念也早在幾個月的嬰兒時期就已經開始發展了，直到三、四歲，幼兒已可認得圓形與三角形等簡單的幾何形體（張慧芝，2011）。幾何形體對個體發展的影響，包含數理與語文兩方面，數理方面包含平面圖形與立體圖形的認識，語文亦同，文字對幼兒而言也是抽象的圖像符號，如果幼兒的幾何形體概念越好，對其語言的認讀也會有正面的影響與關聯。有研究指出，形體的學習與個體美感、設計、創造力與問題解決能力有關（王俞雅、曾啟雄，2015）。Wolf（1996）也視幾何形體為書寫能力的感官預備，可使幼兒注意到形狀的不同。由此可知形體的學習對幼兒不同領域發展的影響。

生活中到處充滿各式各樣的形體，對幼兒而言，是學習的最佳時機與環境。張英傑（2003）指出，幾何世界的探索是一種問題解決的重要形式，進而可以發展個體問題解決的能力。幼兒生活的環境到處充滿各式各樣的形體，從教室的積木或是路上紅綠燈都是由許多不同的圖案組合起來。幼兒發展學者 Piaget 提出，幼兒階段的感覺器官特別敏銳，若能在此時期善用其感覺器官進行學習，從生活環境進行具體教學，將有助於其學習的成效。林嘉綏與李丹玲（1999）在幼兒數學教材教法一書中提到，幾何形體與語言、實際形狀都是有相關的。幼兒教育是個體學習的起點，幼兒以感官探索這個世界，從基本的形的學習開始，進而培養其尋求策略與解決問題的能力，依據教育部（2016）「幼兒園教保活動課程大綱」（以下簡稱幼兒園課程大綱）「認知」領域的「生活環境中的數學」學習面向，解決問題正是幼兒認知學習的終極目標，為學前幼兒亟欲培養的重要能力與素養。除了認知領域的學習之外，在幼兒園課程大綱中也明列美感領域是幼教課程的六大領域之一，以設計領域的觀點來看，從產品造型、視覺傳達、空間設計、乃至幾何動畫，都可以看見幾何形體的應用。從基本的點、線、面的圖形概念，一直發展至今日的數位影像設計，幾何形體扮演著重要的角色，是藝術創作中不可或缺的元素。

現今臺灣幼教教學模式最為常見的包括，傳統分科教學、單元教學、主題教學、方案教學、蒙特梭利（以下簡稱蒙氏）教學與華德福教學等教保模式，蒙氏教學是學齡前較有結構性的教學模式，也受到部份家長的認同，蒙氏教學以其教具最為著名，蒙氏教具大都具有自動更正的特性，再透過老師的示範與指導，經過反覆的操作教具，幼兒能夠更了解教具所要表達的知識概念，反觀一般主題教學模式的學校是以統整性的方式將

幾何形體融入一般的課程中，因此本研究想經由本研究進一步瞭解，在以蒙氏教學為主的幼兒，其幾何形體概念的發展是否比主題教學模式的幼兒為佳，兩者是否存有顯著差異，此外，羅惠玲（2005）以大臺北地區五所公私立幼稚園 5 足歲大班幼兒為對象之研究發現，大班幼兒在立體幾何物件的語言理解與分類作業上都表現甚佳。那年齡較小的中小班幼兒之表現是否相同，引發研究者探討的動機，故本研究也想進一步探討年齡不同的幼兒，在幾何形體概念的發展與差異。

本研究基於此，以學齡前 3-6 歲幼兒的幾何形體概念為主題，進而探討不同教學模式、年齡與性別之幼兒，其幾何形體概念的發展，進而瞭解其幾何形體概念發展的差異。

二、研究目的

基於上述研究動機，本研究具體的研究目的有以下幾點：

- (一) 分析幼兒在立體幾何與平面幾何概念之發展。
- (二) 比較蒙氏幼兒園與主題幼兒園幼兒在幾何形體概念的發展。
- (三) 分析年齡不同的幼兒在幾何形體的發展與差異。
- (四) 比較男女幼兒在幾何形體發展之差異。

貳、文獻探討

一、幾何形體概念的理論與內涵

凡是形體都可以從外觀看出一些基本的特徵，如形狀、顏色及大小等，而其它的基本性質，則需要經過探究與組織化之後才能進一步求得，形體的分類可由基本特徵或性質著手，並給予名稱，例如正方形、長方形與三角形。幾何形體即為從實物中抽象出的各種圖形，而抽象化的能力始於能運用符號、圖形或其他數學語言。

幾何形體概念的發展與研究，依 Clements 與 Battista(1992)的研究指出，包括 Piaget 理論、van Hiele 理論與認知心理學理論等三種理論。

Piaget 等人 (Piaget, Inhelder, & Szeminska, 1960; Piaget & Inhelder, 1967) 認為學童幾何形體的認知大概可以分為三個階段：1.位相性 (topological)：幾何形體整體的性質，與大小形狀無關，3-4 歲幼兒處於此階段，判斷圖形是依據圖形是否封閉或開放，無法顧及大小、邊長或角度等與歐氏幾何有關，此階段幼兒幾何形體發展完全在基本的拓樸幾何概念；2.反射性 (projective)：由不同的角度觀看，對形體有不同的看法與解釋；3.

歐幾里德性 (Euclidean)：考慮一個物體大小的距離及方向，會涉及到長度、角度和平行，要到 6 歲以後，學童才有此概念。

Piaget 的研究重點在建構幾何概念，與幼兒年齡的發展有關，相對於此，荷蘭數學教育家 Dina van Hiele-Geldof 和 Pierre M. van Hiele 夫婦共同提出的兒童幾何思考模式 (van Hiele, 1986) 與教學因素有關，其認為幾何思考的發展較不受年齡與成熟因素的影響。據此，教師課程活動的安排對幼兒學習幾何形體的認知值得進一步加以探究。Shaughnessy 與 Burger (1985) 將 van Hiele 的五個思考層次特徵描述如下：

1. **視覺 (Visualization)**：依據外觀，辨認並操作各種形狀的圖形與其他的幾何構圖。這個層次的學童，對於幾何形體的認識來自圖形整體外貌，學童會依據圖形外貌來學習辨認圖形。但不能確認這些圖形的組成要素。
2. **分析 (Analysis)**：根據圖形間組成要素和這些要素間的關係分析圖形，依據操作經驗來建立某類圖形的特性，並用這些特性解決問題。
3. **非形式演繹/抽象 (Informal deduction/Abstract)**：能形成並使用定義，但是不能掌握公理化演繹的意義，不能形式地區分敘述和其逆敘述。
4. **演繹 (Deduction)**：在一個公設系統下建立定理與定理網路間的相互關係。
5. **嚴密 (Rigor)**：在不同的公設系統下嚴謹地建立定理並且分析、比較這些系統。

國內曾有研究應用 Van Hiele 理論在圖形的研究上，對平面幾何形體概念的探討作思考層次的調查，及應用在教學診斷上 (吳德邦、馬秀蘭、藍同利，2006；謝貞秀、張英傑，2003)。Clements (2001) 和 Clements 與 Sarama (2000) 的研究即指出，幼兒對形體的概念與認知早在其入學前就已開始。Hannibal (1999) 也指出，幼兒對基本圖形，如圓形、正方形、三角形和長方形的概念源自於每天的生活經驗。此外，也有部份學者認同 van Hiele 幾何形體的發展理論共分五個層次，且提到各階層是一個層次一個層次漸次提升，學童必須具備學習策略，才能從一個層級晉升到下一個層級，且透過學習可以促進幼兒提升其層級 (周淑惠，2000；Clements & Battista, 1992；Van Hiele, 1986；Van DeWalle, 1990；Yin, 2003)。

二、幼兒階段幾何形體概念之發展

教育部 2016 年在幼兒園課程大綱中提到，圖像為幼兒生活環境中的數學，幾何圖像包含了知識性的概念以及生活性的應用。大多數的幼兒園關於幾何圖像的概念建立大多都是在積木角，幼兒藉由玩積木的同時產生其形狀和空間的概念。表 1 即為幼兒園課

程大綱數學領域提到與形狀學習有關的課程目標與學習指標，本研究在擬定幾何形體評量時，參考了上述內容。學前教育並非國民義務教育，幼兒園是否運用課綱，目前並未有嚴格的規定，但政府自 2013 年起，在全國各縣市非常積極地在推動課綱研習，期望能促進幼兒園教師對課綱的瞭解，並進一步加以運用在教學上。

表 1

幼兒園課程大綱與幾何空間有關之內容

課程目標	2-3 歲學習指標	3-4 歲學習指標	4-5 歲學習指標	5-6 歲學習指標
蒐集生活環境中的數學訊息	探索物體的外形	辨識與命名物體的形狀	辨識與命名物體的形狀	覺知物體的形狀會因觀察角度的不同而不同

由表 1 可以看出，幼兒園幼幼班幼兒先從探索物體的外形開始，先就環境中的形體進行探索，豐富其背景知識，到了小班與中班可藉由先前對形體的背景知識對基本的形體進行辨識與命名，到了大班更能從不同的角度進一步瞭解圖形的變化。此外，本研究亦參考李文貞與鍾志從（2006）、洪文東與沈宴竹（2011）、張靜文與張麗芬（2014）以及李英（2016）等人的研究發現，幼兒階段宜讓幼兒認識正方形、三角形、長方形與圓形，辨識與命名物體的形狀，以及覺知物體的形狀會因觀察角度的不同而不同，包括平面與立體幾何形體的認識。因此本研究探討的內容包括幼兒在平面幾何形體的命名描述與判讀、立體幾何形體的命名描述與觸覺判讀，以及一五方連塊的平移、旋轉與翻面的判斷。

有關幼兒幾何形體概念發展與差異的相關研究，在國外研究方面，Warren（1995）曾以 4-11 歲學童為研究對象之研究指出，9 歲以前的幼兒會習慣使用日常生活的物品描述形體的形狀，例如正方形像書，長方形像門。9 歲以後，學童就能描述形體的性質，例如正方形有四個相等的邊，四個直角。Hannibal（1999）以 24 個 3-6 歲幼兒為對象，探討幼兒幾何形體的發展的研究指出，3 歲幼兒可以辨識圓形，且可以區別圓形與橢圓形。Dağlı 與 Halat（2016）針對 82 位 5-6 歲的幼兒採一對一的訪談，以瞭解他們對三角形概念的瞭解，研究結果顯示有 93%-96% 的幼兒可以成功地辨認三角形，但有一半左右的幼兒在辨認三角形的大小、類型以及方向是有困難的。

在年齡的差異上，Hannibal（1999）研究發現，幼兒對形體的描述會因年齡而有不同，6 歲幼兒比 4、5 歲幼兒較能用一致的方式說明形狀，而較小的幼兒容易受干擾而改

變說法。Clements、Sarama 與 Wilson (2001) 以 60 位 4-7 歲的幼兒為對象，發現不同年齡幼兒的思考層次是有差異的，孩子在平面的合成和分解上透過層次移動，其合成幾何形狀的能力不足。

在國內研究方面，張英傑 (2001) 曾探討兒童描述基本幾何形體所使用之語彙及其背景時，發現幼稚園或國小一、二、三年級兒童，對於任何基本圖形，無論在視覺或觸覺察看或作分類之活動時，兒童對圖形的特徵都不能全部說出必要充分的相關屬性。高耀琮 (2002) 針對幼兒園大班至小二學童的平面幾何形體概念進行探討，研究發現，不同性別的兒童，對於幾何形體整體上的辨認，以及對於各個圖形的辨認，都未達顯著差異。張靜文與張麗芬 (2014) 在幼兒幾何形體辨識之研究中，以南部地區 120 名幼兒為研究對象，研究結果顯示在圓形辨識、開放圖形題型和類似圖形題，發現有年齡的差異，5 歲半幼兒的表現優於 4 歲幼兒。近年來國內以性別探討幼兒幾何形體概念之研究不多，或年代已久，本研究欲進一步瞭解不同性別的幼兒在幾何形體概念的發展與差異。

三、蒙氏教學與主題教學模式之幾何形體教學

(一) 蒙氏教學

在蒙氏教學中有一套幾何形體教學的教具，其屬於感官教育的內涵，共分成三種：

- 1.幾何拼圖櫥：各種平面幾何形體，有示範櫥—（圓形、正方形、三角形）、接著是一櫥（圓形）、二櫥（矩形）、三櫥（三角形）、四櫥（多邊形）、五櫥（四邊形）、六櫥（不規則曲線）。
- 2.幾何立體組：柱體（正方體、長方體、圓柱體與三角柱）、錐體（三角錐、四角錐與圓錐）以及球體、橢圓體與蛋形體共 10 種。
- 3.三角形組合：各種三角形的形狀，包括正三角形、直角三角形與等腰鈍角、等腰直角三角形等。

蒙氏教具都是感官導向的教具，其依循同一個設計原則，帶領孩子不自覺地從簡入繁、從具體到抽象地學習，所有教具的設計期能讓孩子在操作中自我檢查錯誤，因此，當錯誤產生時，孩子不但可以自行察覺到，還可以完全不需要依賴他人幫助而自行修正，屬於一種系統化的學習方法。此外，蒙特梭利並不將幾何形體的教具歸在數學教具中，而將之放在感官教育中進行，且其實施的年齡從小班開始，到中班幾乎會示範教授，大班再進行複習的工作。

誠如前述，在蒙氏教具中幾何形體是屬於感官教育，其教具由幾何拼圖櫥（示範櫥—

圓形、正方形、三角形)、接著是圓形、矩形、三角形、多邊形、四邊形與不規則曲線，接著便是幾何立體組，年齡三歲以上幼兒係依其個人能力而決定教學進度，在學習幾何形體上是以教具的操作與感知為主。

(二) 主題教學模式

在教育部公佈的幼兒園課綱大綱中，強調統整性主題課程的設計，主題課程是一種有別於傳統分科教學的課程，主題課程以統整的方式，融合六大領域的學習，課程強調以幼兒為中心，並且讓幼兒有自行操作與探索的機會，強調做中學，並強調能力的培養，而非知識的複製與灌輸。主題教學模式之下的教學，會將幾何形體的概念融入在主題教學課程中，或是幼兒的例行性活動，如一日作息中，不會強調分科，為了教幾何形體而進行直接的授課，例如：老師在進行圖畫書教學時，即會將與圖形有關的概念結合，或是在一日作息中在進行日期與時間說明時，會以時鐘的形狀來形容圓形，在進行食物主題時，會引導孩子討論各種蔬菜或水果，切開來的剖面、側面或正面會是什麼形狀，並讓幼兒親自動手做，例如：楊桃、西瓜或芹菜、紅蘿蔔等可以蓋出什麼形狀。在課程的實施上，重視幼兒認知思考。本研究對象幼兒園的教學模式，在每一班的教室都有積木角，幼兒在主題課程的進行過程中，通常會運用積木來建構，例如主題為菜市場，當課程延伸到蓋菜市場時，幼兒會運用積木角的各式積木建構菜市場，若進行到花園主題時，幼兒們會也會試圖運用各式積木以搭建花園。因此，幼兒平日接觸立體形體的機會很多，但老師不會以課程的方式，直接教幼兒立體形體的名稱或加以分類。

經由上述文獻可以得知，不同教學模式的幼兒園，各有其教學上的差異，本研究擬進一步探討在兩種不同教學模式下，幼兒在幾何形體概念的表現與差異。

參、研究方法

一、研究方法與研究對象

本研究主要之研究方法採用測驗調查與觀察法，以臺中市兩所幼兒園 3-6 歲的大班、中班與小班幼兒為研究對象，一間以蒙氏教學為主，幼兒人數是 55 人，含大班 18 人、中班 22 人、小班 15 人；另一間則採用主題教學，幼兒人數為 58 人，其中大班 11 人、中班 23 人、小班 24 人，施測幼兒人數共計 113 人。在性別的分佈上，蒙氏教學的男幼童為 30 人、女幼童為 25 人；主題教學幼兒園，男童為 27 人、女童為 31 人。本研究在

徵求受試幼兒的家長同意後，分別針對選取的幼兒進行一對一的施測，施測時間為上學期的期末，大概在一月中旬，詳細的樣本分佈見表 2 所示。

表 2

本研究樣本分佈一覽表

單位：人

性別 \ 模式	蒙氏教學			主題教學		
	大班	中班	小班	大班	中班	小班
男生	9	15	6	7	9	11
女生	9	7	9	4	14	13
小計	18	22	15	11	23	24
總計	55			58		

二、研究工具

(一) 研究工具的編製

本研究之研究工具乃參考李文貞與鍾志從（2006）、洪文東與沈宴竹（2011）、張靜文與張麗芬（2014）和李英（2016）等人之文獻所編製而成，編製完成後並請兩位學者專家進行內容的審查，之後編擬成正式評量工具，內容包括立體幾何命名（8 題）、立體幾何觸覺判斷（8 題）、平面幾何形體辨識（圓形、正方形、長方形、三角形）與平面幾何命名（圓形、正方形、長方形、三角形、菱形與梯形）以及形體的平移、旋轉與翻面（4 題）等五個部份。

(二) 研究工具的內容與計分

本研究工具的內容分為五個活動，活動目標、教具材料與計分方式分述如下：

1. 立體幾何形體辨認命名：了解幼兒描述形狀所用的詞彙。

(1). 教具材料：立體幾何積木 8 個（球體、圓柱體、圓錐、正方體、四角椎、三角柱、三角錐、長方體各一個）。

(2). 指導語與計分：隨意拿出一個立體積木，指著該形體的積木，問幼兒「小朋友，你可以說出它是什麼形體嗎？」能說出正確立體形體名稱者給 1 分，未答或答錯者 0 分，最高 8 分，最低 0 分。

2. 立體幾何觸覺判別：了解幼兒透過觸覺，對立體幾何的認知，是否能辨認出形體的不同。

- (1).教具材料：立體幾何積木（球體、圓柱體、圓錐、正方體、四角椎、三角柱、三角錐、長方體各一個）。8 個與上述形狀之圖卡各一張，共 8 張。
 - (2).指導語與計分：讓幼兒從神祕袋中一次選出一種立體形體，問幼兒「小朋友，你可以選出你手中選（摸）的立體積木是那一張圖形嗎？」如幼兒能指認出與其摸的立體形體相同的照片則得 1 分，選錯或沒有選照片則 0 分，最高 8 分，最低 0 分。
3. 平面幾何圖形判斷：了解幼兒能否正確判斷圓形、正方形、三角形、長方形（含典型圖形、非典型圖形、開放圖形與相似圖形）。
- (1).教具材料：紙本測驗圖形四張一份，順序為圓形、正方形、長方形與三角形，每張形狀各有 11 個圖形供幼兒圈選。
 - (2).指導語與計分：拿出圖形（圓形）測驗圖形，問幼兒「小朋友，這個是圓形，這裡有很多的圖形，請你把圓形的圖用紅筆圈起來，不是圓形的用藍筆打叉。」幼兒能正確辨識（圈出）目標圖形的典型與非典型圖形者則得 1 分，能夠辨別出（打叉）與目標圖形不同（開放圖形與相似圖形）也得 1 分，答錯或沒作答皆為 0 分。圓形、正方形、長方形、三角形計四小題，每小題總分各為 11 分，整體總分最低為 0 分，最高為 44 分。
4. 平面幾何辨認命名：了解幼兒了解幼兒描述形狀所用的詞彙。
- (1).教具材料：平面幾何套卡，有圓形、長方形、正方形、三角形、菱形與梯形六種。
 - (2).指導語與計分：隨意拿出一張平面幾何圖卡，問幼兒「小朋友，你可以說出它是什麼形狀嗎？」能正確回答該形狀得到 1 分，其他答案以 0 分計算，最高 6 分，最低 0 分。
5. 五方連塊－平移、旋轉、翻面（鏡射）：目的在瞭解幼兒對特定圖形經平移、旋轉、翻面（鏡射）後的辨識能力。
- (1).教具材料：四張可以移動、旋轉和翻面的五方連塊圖形。
 - (2).指導語與計分：請幼兒圈選出五方連塊圖形經平移、旋轉、翻面後之圖形。依序一次拿出一張五方連塊圖形（共四張），問幼兒「上面這個五連塊圖形可以移動、旋轉和翻面，會變成下面哪些圖形，請你把它圈出來？」幼兒能正確圈出與範例一樣的圖形則得 1 分，能夠辨別出與示範圖案不同也能 1 分，答錯或沒回答皆為 0 分，一張滿分為 12 分，總分最低為 0 分，最高為 48 分。

(三) 研究工具之信度

本研究在立體幾何命名，其內部一致性 α 值.78，平面幾何命名，內部一致性 α 值為.705，五方連塊—平移、旋轉、翻面（鏡射）， α 值為.925。整體而言，立體形體（立體命名與觸覺辨識） α 值為.665，平面形體（命名與辨識） α 值為.756，整個幾何形體總量表（平面形體與立體形體）之 Cronbach α 值為.757。

三、研究實施程序

本研究以一對一訪談的方式進行，並同時進行記錄，活動輔以錄音與錄影蒐集幼兒的反應。每名幼兒施測時間約 20-30 分鐘的時間，研究者依照評量的內容問句一一的提問，並針對幼兒回答的答案予以記錄。

四、資料處理與分析

本研究採用描述性統計中的平均數（ M ）、標準差（ SD ）、次數分配（ N ）及百分比（%）分析幼兒在幾何形體發展之現況，並進一步以皮爾森積差相關考驗年齡與幾何形體的相關，並以卡方考驗、共變數分析、多變量變異數分析，探討性別、班別與教學模式不同之幼兒在幾何形體概念的發展差異。

肆、研究結果

一、幼兒立體幾何概念與平面幾何概念之發展

(一) 幼兒立體幾何概念之發展

1. 立體幾何形體命名

如表 3 所示，整體而言，大多數的幼兒均無法對立體幾何的形體做正確的命名，有些幼兒雖然有立體幾何名稱的概念，但是沒有辦法正確對應於該物體，例如在測驗中，拿一個三角錐讓幼兒觀察讓其說出此物體的幾何名稱，有少部分幼兒會回答三角柱或是三角體，或是拿一個圓錐給幼兒，也有少數會回答三角錐，由此可知幼兒對立體形體的瞭解有限，正確命名百分比不到 5%。

表 3

幼兒立體幾何形體命名正確率分析 ($N = 113$)

立體形體	正確命名 (N)	正確命名 (%)	錯誤命名 (N)	錯誤命名 (%)
三角錐	8	7.1	105	92.9
正方體	7	6.2	106	93.8
四角錐	6	5.3	107	94.7
長方體	5	4.4	108	95.6
圓錐	5	4.4	108	95.6
圓柱體	5	4.4	108	95.6
三角柱	4	3.5	109	96.5
球體	3	2.7	110	97.3

2. 立體幾何形體觸覺辨識

由表 4 可以得知，幼兒在立體幾何形體觸覺辨識上，除了錐體的辨識較弱外，其餘的表現均在九成以上，球體與圓柱體是最容易辨識的立體幾何形體，幾乎百分之百的幼兒均能辨認出，在此題型當中最容易辨識錯誤的立體幾何形體就是三角錐及四角錐，有些幼兒在透過視覺的觀察後就能很快察覺出差異，但是少部分的幼兒還是沒有辦法透過視覺觀察出其差異。相較於命名，若讓幼兒透過感觀觸覺進行立體形體的辨識，其正確率頗高，由此可知，具體的感官接觸有助於幾何形體的學習。

表 4

幼兒立體幾何形體觸覺分析正確率分析 ($N = 113$)

立體形體	正確命名 (N)	正確命名 (%)	錯誤命名 (N)	錯誤命名 (%)
球體	112	99.1	1	.9
圓柱體	112	99.1	1	.9
長方體	110	97.3	3	2.7
三角柱	107	94.7	6	5.3
正方體	106	93.8	7	6.2
圓錐	105	92.9	8	7.1
四角錐	84	74.3	29	25.7
三角錐	82	72.6	31	27.4

(二) 幼兒平面幾何概念之發展

1. 平面幾何形體的辨識與判斷

在平面幾何形體的判斷方面（每一種形狀含典型、非典型、開放與相似圖形四種），包括圓形（ $M = 7.50, SD = 1.80$ ）、正方形（ $M = 5.94, SD = 1.22$ ）、長方形（ $M = 5.93, SD = 1.16$ ）與三角形（ $M = 5.08, SD = 1.47$ ），由平均數可以看出圓形是最容易判斷與辨識的形體，四種最難的是三角形。上述研究結果與張靜文與張麗芬（2014）的研究相同。本研究進一步以相依樣本進行差異考驗發現，幼兒對圓形的正確判讀顯著優於正方形、長方形與三角形；在四種平面形體中，三角形是最難判讀的，而在判讀正方形與長方形的正確性相當，二者並無顯著的差異。本研究推論三角形的非典型、開放與相似圖形較不容易辨識。在幼兒園的教學中，老師呈現的三角形圖形通常以正三角形為主，本測內容除了大小之正三角形外，尚包括直角三角形、鈍角三角形、銳角三角形、倒立正三角形與等腰三角形等非典型圖形，施測時發現部份幼兒認為其非屬三角形，故研究結果與三角形命名有所不同。

2. 平面幾何形體命名

如表 5 所示，幼兒在平面幾何命名描述最弱的是梯形，正確率為 11.5%，辨識最佳的是三角形，有 92.9% 的幼兒可以說出三角形，其次依序為圓形（91.2%）、正方形（85%）、長方形（80.5%）與菱形（46.9%）。本研究顯示三角形是幼兒最熟悉的圖形，此研究結果與李文貞（2006）針對大臺北地區幼兒為對象之研究結果有不同，該研究指圓形是幼兒最熟悉的幾何圖形（84.3%），其次為三角形（83.1%）。但該研究指出菱形（25.4%）與（3%）梯形是幼兒最陌生的圖形，則與本研究結果相同。本研究發現有近一半的幼兒認識菱形，但知道梯形的幼兒只有百分之十左右。相較於李文貞的研究，明顯高出許多，此外，該研究指出幼兒對正方形與長方形的正確命名為 71.4% 與 64.6%，與本研究相較和上述亦同，由此可知，幼兒對平面幾何六種形狀的正確命名相較於十年前進步很多。

表 5

幼兒平面幾何形體命名正確率分析（ $N = 113$ ）

平面形體	正確命名（ $N, \%$ ）	錯誤命名（ $N, \%$ ）
三角形	105（92.9%）	8（7.1%）
圓形	103（91.2%）	10（8.8%）

表 5 (續)

正方形	96 (85%)	17 (15%)
長方形	91 (80.5%)	22 (19.5%)
菱形	53 (46.9%)	60 (53.1%)
梯形	13 (11.5%)	100 (88.5%)

二、不同教學模式幼兒園之幼兒幾何形體的差異分析

為排除年齡的影響，本研究以共變數分析進行教學模式差異分析，以年齡為共變數，探討教學模式的差異，如表 6 所示，在立體命名、平面命名、平面旋轉與幾何形體等的概念上，不同教學模式均呈現顯著差異，蒙氏幼兒園的幼兒在幾何形體的表現較一般主題教學的幼兒來得好，但在立體觸覺的辨識則無顯著差異。由上述研究可以發現，幼兒透過手去觸摸木頭形狀的幾何形體，進而指認所觸摸的形體圖卡，不論教學模式為何，是沒有顯著差異的，由此可知，觸覺辨識是先天的能力，較不受教學模式的影響，此外因本研究主題教學幼兒園大中小班教室均設有積木角，幼兒平日進行主題教學活動時，幼兒會運用各式積木進行主題教學的實物模擬建構，也可能因為平日接觸積木的機會多，其在形體的觸覺辨識能力與蒙氏教學模式幼兒並無顯著之差異。

本研究進一步以卡方檢定分析不同教學模式幼兒在立體命名的差異發現，蒙氏幼兒園幼兒對圓錐、四角錐、三角錐、三角柱等的答對百分比，顯著高於主題教學模式的幼兒。在六種平面形狀的命名的卡方差異考驗發現，蒙氏幼兒園的幼兒在正方形、菱形與梯形的命名正確率高於主題教學的幼兒。上述研究結果呼應 Clements 與 Battista (1992)、Van Hiele (1986)、Van DeWalle (1990) 和 Yin (2003) 等人的研究，透過學習可以提升幼兒幾何形體的發展概念。

表 6

不同模式幼兒園幼兒在幾何形體表現之差異分析

教學模式 幾何形體	蒙氏幼兒園 (N=55)		主題幼兒園 (N=58)		F	結果分析
	M	SD	M	SD		
立體命名	.636	1.31	.14	.73	6.04*	蒙氏>一般
立體觸覺	7.33	.90	7.16	1.04	.67	NS
平面命名	4.53	1.41	3.66	1.22	16.75***	蒙氏>一般

表 6 (續)

平面旋轉	45.66	4.12	40.97	8.16	14.51***	蒙氏>一般
立體形體	7.96	1.78	7.29	1.36	7.53**	蒙氏>一般
平面形體	29.47	4.09	27.63	3.48	4.97*	蒙氏>一般
幾何形體	83.09	6.71	75.90	10.59	21.27***	蒙氏>一般

* $p < .05$. ** $p < .01$. *** $p < .001$.

三、不同班級（年齡）幼兒幾何形體之表現差異分析

(一) 不同班級幼兒在立體幾何形體之差異分析

1. 立體幾何形體命名

由表 7 可以發現幼兒在各種立體幾何形體的描述正確率低，大班答對率平均為 8.6%，中班 6.38%，而小班則無人答對。經卡方檢定發現，各年齡層在三角柱的命名正確百分比達顯著差異（ $\chi^2(2,113) = 6.27, p < .05$ ），中班幼兒顯著優於大班與小班。但研究者另以變異數分析發現，班別在三角柱的命名亦有顯著差異（ $F = 3.23, p < .05$ ），但經事後比較則無顯著差異，故在推論時宜加以小心，其餘在球體等並無顯著差異。

表 7

不同班級受試幼兒對立體幾何圖形命名正確百分比卡方檢定

班別	大班 (N=29)	中班 (N=45)	小班 (N=39)	卡方	p 值
立體命名	人數 (%)	人數 (%)	人數 (%)	df = 2	
球體	2 (6.9%)	1 (2.2%)	0 (0.0%)	3.12	.211
圓柱體	3 (10.3%)	2 (4.4%)	0 (0.0%)	4.21	.122
圓錐	3 (10.3%)	2 (4.4%)	0 (0.0%)	4.21	.122
正方體	4 (13.8%)	3 (6.7%)	0 (0.0%)	5.47	.065
四角錐	2 (6.9%)	4 (8.9%)	0 (0.0%)	3.48	.176
三角柱	0 (0.0%)	4 (8.9%)	0 (0.0%)	6.27*	.044
三角錐	3 (10.3%)	5 (11.1%)	0 (0.0%)	4.55	.103
長方體	3 (10.3%)	2 (4.4%)	0 (0.0%)	4.21	.122

* $p < .05$.

2. 立體幾何形體觸覺辨識

在立體幾何觸覺辨識方面，幼兒的答對率，較命名辨識高，如表 8 所示，大班幼兒答對率平均為 95.38%，中班 92.53%，而小班也有 84.3%。在立體幾何形體的觸覺辨識上，大中小班幼兒在球體與圓柱體的觸覺辨識最好，在各年齡層都近百分之百，其次為長方體，而三角柱、正方體與圓錐之觸覺辨識也不錯，即使小班也在八成七以上，觸覺辨識較弱的為三角錐與四角錐。經卡方檢定發現，各年齡層在三角錐的觸覺辨識達顯著差異 ($\chi^2(2,113) = 14.38, p < .01$)，大班與中班幼兒均優於小班幼兒，但大班與中班幼兒則無顯著差異。

表 8

不同班級受試幼兒對立體幾何觸覺辨識正確百分比卡方檢定

班別	大班 (N = 29)	中班 (N = 45)	小班 (N = 39)	χ^2	p 值
立體觸覺	人數 (%)	人數 (%)	人數 (%)	df = 2	
球體	29 (100.0%)	44 (97.8%)	39 (100.0%)	1.53	.467
圓柱體	28 (96.6%)	45 (100.0%)	39 (100.0%)	2.92	.232
長方體	29 (100.0%)	44 (97.8%)	37 (94.9%)	1.75	.418
三角柱	29 (100.0%)	43 (95.6%)	35 (89.7%)	3.59	.166
正方體	29 (100.0%)	43 (95.6%)	34 (87.2%)	5.10	.078
圓錐	28 (96.6%)	43 (95.6%)	34 (87.2%)	3.01	.222
四角錐	24 (82.8%)	35 (77.8%)	25 (64.1%)	3.50	.174
三角錐	26 (89.7%)	36 (80.0%)	20 (51.3%)	14.38**	.001

** $p < .01$.

(二) 不同班級幼兒在平面幾何形體之差異分析

1. 平面幾何形體的辨識

如表 9，本研究透過單因子多變量變異數分析，發現不同班級的幼兒在四種平面幾何形狀上的辨識有顯著差異 ($Wilks' \Lambda = .988, p < .001$)，再以單因子變異數分析後發現，不同班級幼兒在辨識圓形的得分達顯著之差異 ($F = 36.10, p < .001$)，表示大中小班幼兒在辨識圓形的能力有顯著的不同，經事後比較發現，大班幼兒對圓形的辨識顯著優於中班與小班，而中班也顯著優於小班。在正方形的判斷辨識上，大班幼兒的辨

識力顯著優於小班($F = 7.02, p < .01$)。但在長方形($F = 1.25, p > .05$)與三角形($F = 1.98, p > .05$)的辨識能力上，大中小班幼兒並無顯著的差異存在。

表 9

不同班級幼兒在四種圖形辨識之單因子多變量分析

平面形狀	班級	平均數	標準差	Wilks' Λ 值	F 值	事後比較
圓形	大班 ($N = 29$)	8.82	.93	.988***	36.10***	大班>中班
	中班 ($N = 45$)	7.93	1.27			大班>小班
	小班 ($N = 39$)	6.03	1.81			中班>小班
正方形	大班($N=29$)	6.55	1.21		7.02**	大班>小班
	中班 ($N = 45$)	5.93	1.29			
	小班 ($N = 39$)	5.49	.94			
長方形	大班 ($N = 29$)	6.04	1.43		1.25	
	中班 ($N = 45$)	6.07	.99			
	小班 ($N = 39$)	5.69	1.13			
三角形	大班 ($N = 29$)	4.79	1.50		1.978	
	中班 ($N = 45$)	4.98	1.40			
	小班 ($N = 39$)	5.44	1.48			

** $p < .01$. *** $p < .001$.

2. 平面幾何形體命名

表 10 為不同班別幼兒對平面幾何圖形說出正確名稱的人數與百分比及卡方檢定結果，如表可知，在平面幾何形體的命名上，除了梯形外，大班幼兒對其他五種圖形的正確命名百分比都在九成，而在個別形體的命名上，大班與中班幼兒在圓形的辨識命名最好，百分之百的幼兒都認識圓形，但約有四分之一的小班幼兒無法命名圓形。三角形的辨識度也佳，中大班幾乎均認識，而小班有五分之四的幼兒可以辨識。整體而言，梯形的辨識是最難的。經卡方檢定發現，各年齡層在圓形 ($\chi^2 (2,113) = 20.82, p < .001$)、三角形 ($\chi^2 (2,113) = 10.83, p < .01$)、正方形 ($\chi^2 (2,113) = 20.88, p < .001$)、長方形 ($\chi^2 (2,113) = 27.16, p < .001$)、菱形 ($\chi^2 (2,113) = 42.64, p < .001$) 與梯形 ($\chi^2 (2,113) = 14.63, p < .01$) 的平面幾何圖形命名均達顯著差異。經事後比較發現大中班幼兒的圓形、

三角形、長方形與正方形的命名能力顯著優於小班幼兒，而在菱形與梯形的命名上，大班優於中班與小班幼兒。

表 10

不同班級幼兒在平面幾何圖形命名正確百分比卡方檢定

平面命名 \ 班別	大班 (N = 29)	中班 (N = 45)	小班 (N = 39)	χ^2 df = 2	p 值
	人數 (%)	人數 (%)	人數 (%)		
圓形	29 (100.0%)	45 (100.0%)	29 (74.4%)	20.82***	.000
三角形	29 (100.0%)	44 (97.8%)	32 (82.1%)	10.83**	.004
正方形	29 (100.0%)	42 (93.3%)	25 (64.1%)	20.88***	.000
長方形	28 (96.6%)	42 (93.3%)	21 (53.8%)	27.16***	.000
菱形	26 (89.7%)	23 (51.1%)	4 (10.3%)	62.64***	.000
梯形	9 (31.0%)	2 (4.4%)	2 (8.1%)	14.63**	.001

** $p < .01$. *** $p < .001$.

3. 五方連塊—平移、旋轉與翻面

如表 11，本研究透過單因子多變量變異數分析，發現不同班級的幼兒在五方連塊旋轉、平移與翻面的辨識有顯著差異 (Wilks' $\Lambda = .977$, $p < .001$)，再以單因子變異數分析後發現，不同班級幼兒在四項任務中，除了第一項沒有達到顯著差異外，其餘的三項均達顯著差異 ($F = 3.66$, $p < .05$; $F = 6.41$, $p < .01$; $F = 4.75$, $p < .05$)。而大中小班在整體的平旋翻單因子變異數分析達顯著差異 ($F = 4.72$, $p < .05$)，表示大中小班幼兒在辨識圓形的能力有顯著的不同，經事後比較發現，大班與中班幼兒的五方連塊—平移、旋轉與翻面辨識力顯著優於小班幼兒。

表 11

不同班級幼兒在四種平旋翻形體之單因子多變量分析

平面形狀	班級	平均數	標準差	Wilks' Λ 值	F 值	事後比較
平旋翻一	大班 (N = 29)	11.07	1.56		1.64	
	中班 (N = 45)	11.11	1.64			
	小班 (N = 39)	10.43	2.21			

表 11 (續)

平旋翻二	大班 (N = 29)	11.14	1.46	.977***	3.66*	中班>小班
	中班 (N = 45)	11.29	1.49			
	小班 (N = 39)	10.26	2.37			
平旋翻三	大班 (N = 29)	11.21	1.37		6.41**	大班>小班 中班>小班
	中班 (N = 45)	11.36	1.40			
	小班 (N = 39)	10.07	2.24			
平旋翻四	大班 (N=29)	11.21	1.37		4.75*	大班>小班
	中班 (N=45)	10.91	2.21			
	小班 (N=39)	9.82	2.18			

* $p < .05$. ** $p < .01$. *** $p < .001$.

(三) 不同班級幼兒幾何形體之差異分析

本研究透過多變量變異數分析發現，不同班級幼兒在平面與立體幾何形體概念上有顯著差異 (Wilks' $\Lambda = .588$, $p < .001$)，再以單因子變異數分析後發現，不同「班級」之幼兒，其在平面幾何形體 ($F = 30.88$)、立體幾何形體 ($F = 11.15$) 與幾何形體 ($F = 18.98$) 皆達顯著之差異。

經事後比較發現大班與中班幼兒的平面與立體幾何形體均較小班幼兒佳，且大班幼兒在平面形體的概念也優於中班的幼兒 (如表 12)

表 12

不同班級幼兒在幾何形體之變異數分析摘要表

幾何形體	班級	平均數	標準差	F 值	事後比較
平面形體	大班 (N = 29)	31.35	.58	30.88***	大班>中班
	中班 (N = 45)	29.31	.47		大班>小班
	小班 (N = 39)	25.54	.50		中班>小班
立體形體	大班 (N = 29)	8.35	.28	11.15***	大班>小班
	中班 (N = 45)	7.91	.22		中班>小班
	小班 (N = 39)	6.74	.24		

表 12 (續)

幾何形體	大班 (N = 29)	84.31	1.55	18.98***	大班>小班
	中班 (N = 45)	81.89	1.24		中班>小班
	小班 (N = 39)	72.87	1.34		

*** $p < .001$.

(四) 不同班級幼兒幾何形體之差異分析

本研究欲瞭解年齡與幼兒幾何形體發展的相關程度，故以幼兒的月齡與幾何形體進行相關分析，由表 13 可以看出幼兒年齡與其幾何形體概念具有顯著之正相關，年齡愈大的幼兒，其幾何形體概念的發展愈好，無論在平面形體的描述與旋轉、立體幾何形的描述與觸覺辨識，以整體的幾何形體發展。此外，年齡與平面命名的相關性最高，而與平面旋轉的相關性低。

表 13

幼兒年齡與幾何形體概念之相關

立體命名	立體觸覺	平面命名	平面旋轉	立體形體	平面形體	幾何形體
.263**	.345***	.604***	.255**	.538***	.385***	.466***

** $p < .01$. *** $p < .001$.

四、幼兒性別在幾何形體概念發展之差異分析

經由上述分析可以看出，年齡與幼兒幾何形體的發展有正相關。為考量不同性別幼兒在年齡上的差異而間接影響其幾何形體的表現，本研究先就不同性別幼兒在年齡上是否有顯著差異進行分析，經獨立樣本 t 檢定發現，男生 ($M = 58.93$) 與女生 ($M = 56.96$) 在年齡上並無顯著差異 ($t = 1.07, p > .05$)。此外，本研究也先以教學模式與性別進行雙因子變異數分析發現，兩者在立體命名至幾何形體等均無交互作用 ($F = .12, 2.01, 1.29, 1.11, 3.73, 1.23, 3.23, p > .05$)。本研究進一步分析性別的差異 (如表 14)，發現不同性別幼兒在幾何形體概念的發展，均未呈現顯著的差異。此研究與高耀琮 (2002) 針對幼兒園大班至小二學童的研究部份相同，不同性別的兒童，對於幾何形體整體上的辨認，以及對於各個圖形的辨認，都未達顯著差異。

表 14

不同性別幼兒在幾何形體表現之差異分析

性別 幾何形體	男生 (N = 57)		女生 (N = 56)		t	結果分析
	M	SD	M	SD		
立體命名	.58	1.34	.18	.69	2.00*	男生>女生
平面命名	4.16	1.30	4.00	1.46	.61	NS
平面旋轉	43.98	6.99	42.50	6.78	1.14	NS
立體形體	7.80	1.93	7.43	1.89	.76	NS
平面形體	28.81	3.92	28.25	3.85	1.25	NS
幾何形體	80.60	10.42	78.18	8.57	1.35	NS

* $p < .05$

伍、結論與建議

一、結論

(一) 本研究採用一對一個別訪談幼兒的方式進行觀察與記錄幼兒在幾何形體的表現，研究結果顯示幼兒在說明圖形性質，大多數是以視覺所見的直覺反應，較無法說出圖形的部份特徵，幼兒在立體幾何形體的辨識弱，但若運用實體的觸覺辨識則表現不錯，除了三角錐與四角錐之外，正確率高，在平面圖形的命名方面，最佳的是三角形，而梯形是比較陌生的形體。

(二) 在不同教學模式的差異方面，除了立體觸覺辨識無顯著差異外，蒙氏教學模式的幼兒園幼兒在平面幾何或立體幾何的表現均優於主題教學幼兒園的幼兒。本研究以評量調查的方式，瞭解在不同教學模式下幼兒幾何形體的表現，研究者推測由於蒙氏幼兒園的感官領域教學內容包括，提供幼兒平面與立體形體的教學，故其幼兒在幾何形體表現大多優於一般主題教學模式的幼兒，但由於立體觸覺的形體辨識，係以幼兒矇眼觸摸形體後，再加以指認形體，誠如上述，本研究對象主題教學幼兒園的幼兒平日接觸各式積木，並運用積木建構的機會很多，故其在立體觸覺辨識的能力與蒙氏教學的幼兒並無顯著之差異。

(三) 在平面幾何與立體幾何的表現上，大班與中班幼兒均顯著優於小班幼兒，在三角錐的辨識中大班明顯較小班幼兒佳，小班幼兒的幾何形體發展明顯較中大班幼兒弱，而

中班幼兒的形體概念與大班幼兒的差異較小。

（四）本研究發現在兩組年齡沒有顯著之差異下，男女生在形體的發展上，除了立體命名男生優於女生外，在其餘面向上均無顯著差異。

二、建議

（一）本研究發現在蒙氏教學模式下學習的幼兒，其幾何形體概念的發展較一般主題式幼兒園佳，由此可見，幾何形體的學習，若能結合具體的形體操作，且有系統性地進行教學能提升幼兒對形體的概念與瞭解。

（二）本研究結果發現無論大中小班的幼兒，其對日常生活中常見的立體觸覺的辨識度高（球體、正方體、長方體、圓柱體與三角柱），也在圓形、三角形、正方形與長方形的命名正確率高，由此可見，教保服務人員宜多運用常見的生活物件進行形體的教學引導，即使是小班幼兒也能從生活中學習幾何形體。

（三）本研究發現男女生在平面幾何、立體幾何與整體的幾何形體表現未有顯著之差異，此結果正符應幼兒園課程大綱所強調的性別平等教育的理念，也能提供教保服務人員進行幾何形體教學時之參考。

（四）此外，本研究在施測的過程中發現，若能在五方連塊評量前，先以例子引導說明示範，再進行正式施測，則會增加幼兒對問題的瞭解，尤其是小班幼兒。

（五）本次評量內容以訪問為主，實作評量較少，本研究在立體幾何的觸覺辨識施測時發現，幼兒對實物操作活動較有興趣，建議日後在設計相關評量內容時，可以利用平面或是立體幾何的積木或教具讓幼兒能夠進行實際的操作，再觀察幼兒的表現，除了可提高幼兒受試的意願外，也可避免產生幼兒不能理解題意的情形發生。

參考文獻

- 王俞雅、曾啟雄（2015）。剪紙創作模式探討幾何造形排列研究。**設計學報**，20（2），43-62。
- 李文貞、鍾志從（2006）。幼兒幾何形體概念發展。**人類發展與家庭學報**，8，1-29。
- 李英（2016）。教學介入與教具自由探索對幼童幾何概念提昇效益之研究（未出版之碩士論文）。國立臺中教育大學，臺中市。
- 吳德邦、馬秀蘭、藍同利（2006）。探究國小視覺型與觸覺型兒童在繪製三角形活動之

- 概念析。國立臺中教育大學學報，20（2），99-138。
- 周淑惠（2000）。幼兒數學新論-教材教法。臺北市：心理。
- 林嘉綏、李丹玲（1999）。幼兒數學教材教法。臺北市：五南。
- 洪文東、沈宴竹（2011）。幼兒幾何圖形測驗編製與施測。幼兒保育學刊，9，61-76
- 高耀琮（2002）。兒童平面幾何圖形概念之探討（未出版之碩士論文）。國立臺北教育大學，臺北市。
- 教育部（2016）。幼兒園教保活動課程大綱。臺北市：教育部。
- 張英傑（2001）。兒童幾何形體概念之初步探究。國立臺北師範學院學報，14，491-528。
- 張英傑（2003）。兒童幾何形體概念調查及診斷教學之研究（III）。臺北市：國科會專題研究計畫成果報告（編號：NSC 91-2522-S-152-006-91B046）。
- 張靜文、張麗芬（2014）。幼兒幾何圖形辨識之研究。教育研究學報，48（2），101-126。
- 張慧芝譯（2011）。人類發展—兒童心理學。臺北市：美商麥格羅·希爾。
- 謝貞秀、張英傑（2003）。國小三四年級平面圖形概念之研究。國立臺北師範學院學報，16（2），97-134。
- 羅惠玲（2005）。幼稚園幼兒立體幾何物件概念探討（未出版之碩士論文）。國立臺北教育大學，臺北市。
- Wolf, A. D. (1996)。一間蒙特梭利教室（蕭麗君）。臺北市：及幼。
- Clements, D. H. (2001). Mathematics in the preschool. *Teaching Children Mathematics*, 7(5), 270- 281.
- Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of reasoning on mathematics teaching and learning* (pp.420-464). New York, NY: Macmillan.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2000). The earliest geometry. *Teaching Children Mathematics*, 7(2), 82-86.
- Clements, D. H., Sarama, J., & Wilson, D. C. (2001). Composition of geometric figures. In M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 273-280). Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.

- Dağlı, Ü. Y., & Halat, E. (2016). Young Children's Conceptual Understanding of Triangle. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 12(2), 189-202.
- Hannibal, M. A. (1999). Young children's developing understanding of geometric shapes. *Teaching Children Mathematics*, 5(6), 353-57
- Piaget, J., & Inhelder, B. (1967). *The child's conception of space*. London: Routledge & Kegan Paul.
- Piaget, J., Inhelder, B. & Szeminska, A. (1960). *The child's conception of geometry*. London : Routledge and Kegan Paul.
- Shaughnessy, J. M., & Burger, W. F. (1985). Spadework prior to deduction in geometry. *Mathematics Teacher*, 78, 419-428.
- Van De Walle, J. A. (1990). *Elementary school mathematics: Teaching developmentally*. White Plains, N.Y.: Longman.
- Van Hiele, P.M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Orlando, FL: Academic Press.
- Warren, E., & English, L. (1995). Facility with plane Shapes : A multifaceted skill. *Educational Studies in Mathematics*, 28(4), 365-383. doi: 10.1007/BF01274079
- Yin, H. S. (2003). Young Children's Concept of Shape: Van Hiele Visualization Level of Geometric Thinking. *The Mathematics Educator*, 7(2), 71 – 85.

陳怡如、林原宏、楊晉民（2017）。

高年級學生數學閱讀表現之分群特徵探討。

臺灣數學教師，38（2），42-63

doi: 10.6610/TJMT.20171031.01

高年級學生數學閱讀表現之分群特徵探討

陳怡如¹ 林原宏² 楊晉民²

¹臺中市南屯區永春國小教師

²國立臺中教育大學數學教育學系

本研究根據數學閱讀相關理論並參考國小六年級數與量主題內容，發展融合生活情境之數學閱讀文本，探討學童在數學閱讀的表現和分群後各群組的表現特徵。本研究的數學閱讀包含一般閱讀理解、數學背景知識和數學特殊技能三個向度，研究者據以自編數學閱讀文本評量工具，並利用模糊集群分析施測資料以進行最佳分群。本研究發現結果如下：一、學童在數學閱讀各向度的表現中，以一般閱讀理解最佳，數學特殊技能最低，且各向度間達顯著相關；二、根據模糊集群進行最佳化分群，學童可分成三個群組，此三個群組的學童，都是一般閱讀理解高於數學背景知識，數學背景知識高於數學特殊技能，但各群組中各向度間卻無顯著相關；三、此三個群組的學童，其數學閱讀各向度的表現，由低至高都是依次為一般閱讀理解、數學背景知識和數學特殊技能，且兩兩之間有顯著差異。本研究之結果與發現，可進階瞭解學童在數學閱讀的認知特徵，可供教師在數學閱讀教學策略精進之依據，以及數學閱讀理解補救教學的參考，本文亦提出未來研究的相關建議。

關鍵詞：數學文本；數學閱讀；閱讀

壹、緒論

一、研究動機

閱讀 (reading) 是知識學習的基礎，世界各國對於閱讀教育的日益重視，透過閱讀可以提升語文能力，而語文能力更是學科內容知識學習重要活動。所以，近年來學科閱讀 (disciplinary reading) 逐受討論，其立論觀點是認為學科閱讀是學科內容知識與理解的主要認知活動，所以諸如數學閱讀、科學閱讀、科技閱讀等研究已是重要的議題。所謂數學閱讀 (mathematics reading) 是指閱讀含有數學內容的文字、符號、圖示等表徵，而數學閱讀的文本類型非常多元，包括繪本、漫畫、教科書、科普文章等，較多的數學閱讀的研究焦點是學童在數學解題過程中的閱讀理解與認知歷程，較少探討學童在數學科普文章的閱讀表現。因此，本研究擬發展科普形式之數學閱讀文本，探討學童在此數學文本閱讀的表現，此為本研究動機之一。

我國國民中小學九年一貫課程數學學習領域綱要中指出，數學之所以被納入國民教育的基礎課程，其原因之一是「數學是一種語言」。簡單的數學語言，融合在人類生活世界的諸多面向，精鍊的數學語句，則是人類理性對話最精確的語言 (教育部，2010)。而「連結」主題中的「溝通」，則指出數學語言和一般語言的在數學學習過程的重要性。因此，數學語言不只是一種溝通語言，是理性與自然界對話時最自然的語言，更是所有科學的工具語言 (Astrid, 1994)。數學閱讀是學數學語言學習的一部份，數學閱讀過程是一個完整的心理活動，包含語言符號 (文字、數學符號、術語、公式、圖表等) 的感知和認讀、概念的同化和順應、閱讀材料的理解和記憶等各種心理活動因素。

許多相關文獻指出，學童在數學閱讀過程常出現困難 (Vukovic, Lesaux, & Siegel, 2010)，例如學童閱讀能力差，對於題意不了解，學童的解題表現亦不理想等。然而，有關學童在數學閱讀表現的類型和特徵，這方面的文獻較少探討。因此根據數學閱讀表現進行適切分群，據以瞭解學童在數學閱讀表現的認知特徵，實有必要與可行之處。因此，本研究擬應用模糊集群 (fuzzy clustering) 進行數學閱讀表現的分群，俾探討學童在數學閱讀的認知特徵，此為本研究動機之二。

數學閱讀也和近年來各國所重視的數學素養表現有關，近年來 PISA (the Programme for International Student Assessment，以下簡稱 PISA) 所強調的「數學

素養」是指個人在各種情境脈絡裡形成、使用並詮釋數學的能力，其中包括了數學推理，以及使用數學概念、程序、事實、工具來描述、解釋、預測現象（Organization for Economic Co-operation and Development [OECD], 2013, p. 25），在 2012 年 PISA 評量中，臺灣學童對解數學算式的題目得分很高，但是需閱讀情境內容再解題的應用問題則相對較弱。而在 2015 年 PISA 測驗中，數學素養與閱讀素養高成就學童比例都下降，尤其數學素養高成就層級的比率從 2012 年 18% 降至 10.1%（科技部，2016）。除了因為臺灣的數學教學時間不足和制式的考試方式，導致數學情境閱讀教育的困難，使得數學與生活脫節，因此學童無法用閱讀來理解含有數學內容的情境問題深刻體會（張鎮華，2015）。數學閱讀含有多向度的認知向度（cognition dimension），Mckenna 與 Robinson（2002）所提出的學科閱讀，包含一般讀寫技巧、學科背景知識及學科特殊讀寫技巧，此觀點能解釋數學學科閱讀的本質。此外，若欲深化數學閱讀教育，必須先瞭解學童在這些數學閱讀的認知向度的相關和差異情形，由於「數與量」在國小階段數學課程所佔比例最高，數與量的主題也和學童的生活情境脈絡連結密切。因此，本研究擬以「數與量」的主題初探內容，基於 Mckenna 與 Robinson（2002）所提出的觀點，發展數學閱讀文本並進行施測分析，根據模糊集群分析結果，探討學童各認知向度的相關和差異，此為本研究動機之三。

綜合前述，本研究評述數學閱讀學理基礎，根據 Mckenna 與 Robinson（2002）所提出的學科閱讀認知向度觀點，以國小六年級的「數與量」為主題內容，發展數學閱讀文本。本研究並以模糊集群分析評量資料，瞭解學童在數學閱讀的各群組特徵，以及各群組學童在各認知向度的相關和差異。根據本研究結果和發現，希冀能提供未來進行數學閱讀的教學與評量等研究和實務參考。

二、研究目的

基於上述研究動機，本研究旨在發展國小六年級數學領域數與量主題的數學閱讀文本，並探討學童在數學閱讀文本上的表現，以及分析不同群組學童在數學閱讀測驗表現之相關和差異。綜上所述，本研究目的如下：

- （一）發展數學閱讀文本，分析學童在數學文本閱讀各向度表現。
- （二）應用模糊集群分析，進行數學閱讀文本表現分群和特徵探討。
- （三）探討各群組學童在數學閱讀文本的表現相關和差異。

貳、文獻探討

一、數學閱讀之意涵

學科閱讀的研究在國外已經有相當長的研究探討，它也是閱讀研究者所關注議題，以學科領域內容的閱讀，可提升學科素養與內容知識，而學科閱讀教學策略也是重要議題（洪月女，2016）。美國在 2010 開始推行 Common Core State Standards（CCSS）課程，即指出「每一種科學或工程的課程，在某方面而言也是一種語言課程」(Every science or engineering lesson is in part a language lesson)」（Committee on Conceptual Framework for the New K-12 Science Education Standards, 2011）。就數學學科教學而言，大多研究傾向於關注數學要教什麼樣的課程內容（what），講求數學概念的理解，但數學教學也應重視數學閱讀，強調數學文本該如何（how）來說明數學概念（秦麗花，2006）。R. T. Vacca 與 J. L. Vacca（2002）認為「每個教師都是閱讀教師」（every teacher a reading teacher），認為各種不同的學科都需要提供該學科的閱讀指導，因此數學教師應關注學童的數學閱讀能力。美國數學教師協會（National Council of Teachers of Mathematics，簡稱 NCTM）於 2000 年提出，學童若能使用口語或文字書寫等多元方式與他人進行數學交流時，可使自己的數學概念更加清楚，並且於交流過程中將自己的數學概念再次進行統整。所以，數學閱讀在數學的教與學中，佔有相當重要的地位。

數學閱讀過程的認知活動與成分頗多，Ilany 與 Margolin（2010）提出處理數學問題需要閱讀的認知活動，包括解釋符號和圖表、理解意涵、理解情境意義、應用數學基模，以及語言情境與數學基模的連結。Adams and Lowery（2007）則認為數學閱讀是學習數學的重要成分，閱讀過程中的文字、數字、符號或圖表，透過閱讀能幫助引導學生更加的理解數學。高文君、韓聯郡與高紅偉（2006）提出數學閱讀能力的構成有數學語言的理解应用能力、閱讀推理能力、聯想記憶能力、概括數學材料的能力及後設認知能力。吳昭容與鄭英豪（2012）探討大學生在幾何證明數學文本閱讀的眼動現象，分析數學詞彙、符號、圖表等閱讀歷程。研究顯示，大學生閱讀幾何證明的時間較相似篇幅的科學文本多，且幾何證明對大學生仍相當困難。

Österholm（2006）的研究中指出，數學閱讀是獨特的能力，因為他的研究顯示學生在數學文本符號版本的閱讀理解表現低於文字版本，且數學文本文字版

和歷史文本的相關顯著，但數學符號符號版和歷史文本的相關不顯著。Lindeman (2000) 的研究中，發現數學閱讀和語文閱讀有相關，且數學閱讀和語文閱讀共同享有的字串念讀和邏輯推理兩種能力。(Jordan, Kaplan, & Hanich, 2002) 在縱貫性研究中，指出語文閱讀是數學閱讀的中介變項，因此語文閱讀能力會影響數學閱讀的學習表現過程。

Mckenna 與 Robinson (2002) 提出的學科閱讀包含三種主要的技能為背景，分別為一般讀寫技巧、學科背景知識及學科特殊讀寫技巧來包含數學閱讀組成成分。三者關係如圖 1 所示：

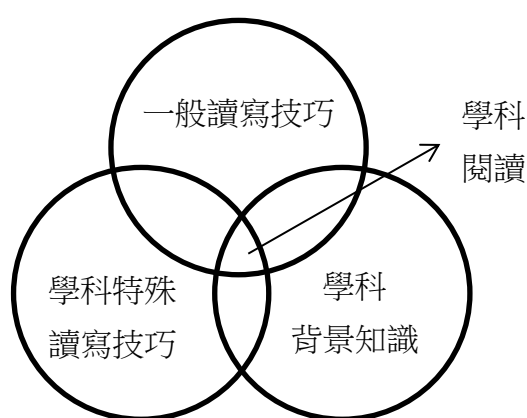


圖 1 學科閱讀的認知技能 資料來源：Teaching through text-reading and writing in the content area. (p9), by M. C. Mckenna, & R. D. Robinson, 2002, Boston: Allyn & Bacon.

Mckenna 與 Robinson (2002) 所提出的學科閱讀認知成分，頗能解釋數學閱讀的本質，本研究依據 Mckenna 與 Robinson (2002) 提出的學科閱讀包含三種主要認知成分，研究者將數學閱讀界定為三種認知向度，亦即一般閱讀理解、數學背景知識以及數學特殊技能。其中，一般閱讀理解為語文閱讀的理解；數學背景知識為學童在該階段已經學得的數學知識及概念；數學特殊技能則為數學解題的認知能力，包括數學語言和文字的意義、符號圖形等表徵應用和轉換、以及使用背景知識進行數學解題等。

二、模糊集群分析

Zadeh (1965) 提出模糊理論 (fuzzy theory)，該理論是描述元素 (element)

與集合(set)的關係,不再是傳統的二元邏輯(binary logic)關係之明確集合(crisp set)。模糊理論將元素和集合之間用介於[0, 1]之間隸屬度(membership)之模糊集合(fuzzy set)來描述(林原宏, 2007; Klir & Yuan, 1995)。令 U 表示全域(universal set), μ 為一函數, 即 $\mu: U \rightarrow [0, 1]$, 則基於 U 之模糊集合 A 的隸屬函數(membership function)記為 $\mu_A(x)$ 。若有一集合為 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, 則其隸屬於模糊集合 A 的程度, 可用表模糊集合表示為(Zimmermann, 2011):

$$A = \left(\frac{\mu_A(x_1)}{x_1}, \frac{\mu_A(x_2)}{x_2}, \dots, \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} \right) = \left(\frac{\mu_A(x_i)}{x_i} \middle| x_i \in U \text{ and } 0 \leq \mu(x_i) \leq 1 \right)$$

模糊理論原為資訊與工程領域資料分析方法, 近十年來逐漸廣泛應用於教育和社會科學等領域的資料分析(Cole & Persichitte, 2000; Ragin, 2000)。集群分析(cluster analysis)屬於多變量統計學方法, 其目的是根據資料點的相似性, 進行適當分群後使得「群內同質, 群間異質」, 進而達到瞭解各群特徵(林邦傑, 1981; 林原宏, 2007), 模糊集群(fuzzy clustering)即是模糊理論與集群分析兩種概念之結合(Jain, 2010)。在模糊集群中, 隸屬度(membership grade)為決定元素間距離的重要因素, 其範圍介於0到1之間, 隸屬值愈大表示該元素屬於某一個集合的程度越大(吳柏林, 2005; Smithson & Verkuilen, 2006)。

模糊集群的分析方法眾多, 目標函數法(objective function)雖不具集群階層性但分析觀察值的隸屬度, 適合大樣本資料, 是相當廣泛使用的方法(林原宏, 2007)。因此, 本研究以模糊集群目標函數法, 分析學童的數學閱讀表現分群結果及各群特徵。假設已知觀察資料矩陣(data matrix)為 $X = (x_{nm})_{N \times M}$, 而未知的為隸屬度矩陣(membership matrix) $U = (u_{cn})_{C \times N}$ 和群中心矩陣 $V = (v_{cm})_{C \times M}$, 則模糊集群目標函數法步驟簡述如下(Bezdek, 1981):

1. 定義目標函數(objective function)為 $J(U, V) = \sum_{n=1}^N \sum_{c=1}^C (u_{cn})^2 d^2(c, n)$, 其中

$$d^2(c, n) = \sum_{m=1}^M (x_{nm} - v_{cm})^2$$

2. 由於 $\sum_{c=1}^C u_{cn} = 1$, 因此用Lagrange's multipliers方法, 求 $J(U, V)$ 之極小值,

$$\text{令 } F = \sum_{n=1}^N \sum_{c=1}^C (u_{cn})^2 d^2(c, n) + \sum_{n=1}^N \left[\lambda_n \left(\sum_{c=1}^C u_{cn} - 1 \right) \right]$$

3. 針對函數 F 進行偏微分求極值，得到 μ_{cn} 和 v_{cm} 的關係式為 $v_{cm} = \frac{\sum_{n=1}^N (u_{cn})^2 (x_{nm})}{\sum_{n=1}^N (u_{cn})^2}$ ，

透過設定初始值（initial value）和迭代（iteration），可得 μ_{cn} 和 v_{cm} 最佳解。

群數決定是分群效度（clustering validity）的問題，文獻上分群效度的指標相當多，本研究採較常用的兩個指標如下（Bezdek, 1981）：

1. 分割係數（partition coefficient）

分割係數 $F(U;C)$ 定義為 $F(U;C) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{c=1}^C (u_{cn})^2$ ，此數值的範圍是

$\frac{1}{C} \leq F(U;C) \leq 1$ ，當其較大值時，為較佳的分割數。

2. 分割亂度（partition entropy）

分割亂度 $H(U;C)$ 定義為 $H(U;C) = -\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{c=1}^C u_{cn} \ln(u_{cn})$ ， $\forall u_{cn} \neq 0$ ，此數值的

範圍是 $0 \leq H(U;C) \leq \ln(C)$ ，當其較小值時，為較佳的分群數。

參、研究方法

一、研究架構

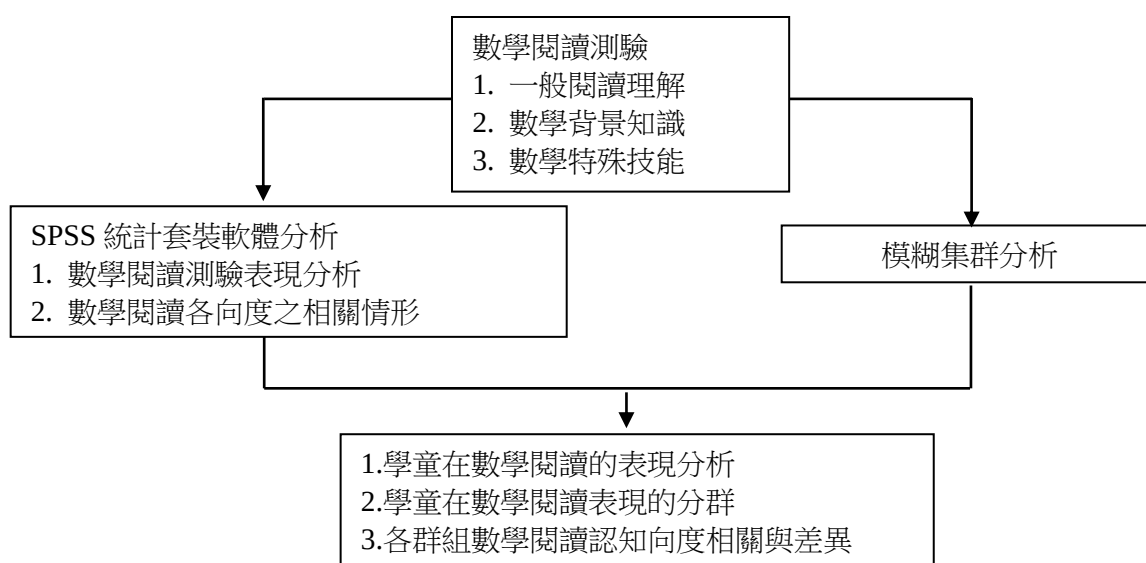


圖 2 研究架構圖

二、研究對象

本研究以國小六年級學童為研究對象，由於研究樣本取得不易，本研究採方便取樣。應過預試後，正式施測樣本有效樣本人數及分配情形，列於表 1。

表 1

有效樣本人數及分配情形

縣市	學校	班級數	男生	女生	合計
新北市	甲	3	37	41	78
	乙	2	29	22	51
臺中市	丙	1	9	13	22
	丁	1	13	12	25
臺南市	戊	5	67	67	134
高雄市	己	2	30	21	51
合計	6	14	185	176	361

三、研究工具與資料分析

(一) 數學閱讀測驗內容編製

本研究有兩份文本（分別為文本 A、文本 B），文本 A 主題為「體脂肪」，文本 B 主題為「台灣地震帶」。每份文本均包含一般閱讀理解、數學背景知識、數學特殊技能三個內容和測驗向度，每個向度有 5 題試題，因此每份文本共有 15 題試題。文本 A 的內容和試題舉例如附錄 1，本研究依據民國 97 年國民中小學九年一貫課程綱要，數學領域六年級「數與量」分年細目，並以 McKenna 與 Robinson（2002）所歸納學科閱讀的三種認知技能：一般讀寫技巧、學科背景知識及學科特殊讀寫技巧三個部分編製而成。本研究中各向度的內容的意義為：

1. 一般閱讀理解：能理解文章內容詞彙並提取訊息，進行訊息的詮釋、推論和評估等。
2. 數學背景知識：能使用先備知識來理解文本中的數學內容，本研究中的數學背景知識包括分數與小數的概念，及其基本除法計算等。
3. 數學特殊技能：能理解文本所述的情境內容和關係敘述，並根據文本中所提供的數學內容訊息，以數學詞彙、符號和方法，進行延伸問題的解決。本文中的

數學特殊技能是指能處理小數除法的生活問題、取概數進行估算以及比和比值與速度的解題。

表 2 為兩份文本各試題的難度(通過率)和鑑別度(Pearson 積差相關係數)，由該表可知，各向度試題的難度高低有別，且都具有鑑別度。

表 2
正式施測文本的難度、鑑別度分析

向度	文本 A			文本 B		
	題號	難度	鑑別度	題號	難度	鑑別度
一般閱讀 理解	A11	.75	.47**	B11	.73	.52**
	A12	.92	.37**	B12	.92	.45**
	A13	.48	.40**	B13	.81	.49**
	A14	.74	.54**	B14	.85	.51**
	A15	.76	.44**	B15	.62	.54**
數學背景 知識	A21	.83	.40**	B21	.68	.44**
	A22	.42	.50**	B22	.50	.45**
	A23	.65	.50**	B23	.58	.50**
	A24	.40	.47**	B24	.33	.37**
	A25	.45	.46**	B25	.45	.55**
數學特殊 技能	A31	.33	.40**	B31	.49	.46**
	A32	.50	.45**	B32	.25	.24**
	A33	.86	.39**	B33	.21	.31**
	A34	.28	.28**	B34	.39	.35**
	A35	.40	.38**	B35	.45	.51**

** $p < .01$.

(二) 信度分析

本研究以 Cronbach's α 係數，求得測驗的內部一致性。正式施測文本(A)的 Cronbach's α 值為.68、正式施測文本(B)的 Cronbach's α 值為.71，全測驗之 Cronbach's α 係數則達.79。因此，本研究工具的信度可以接受。

(三) 效度分析

效度分析採內容效度進行分析，本研究以 McKenna 與 Robinson (2002) 的觀點為基礎，界定數學閱讀的認知向度為一般閱讀理解、數學背景知識、數學特殊技能三個向度。研究工具經過三位數學教育學科專家和四位國小教師檢核並提

供修正意見，因此本研究工具具有內容效度（content validity）。

(四) 資料分析工具

本研究利用 SPSS 20.0 軟體進行信度和敘述性統計、變異數分析等統計分析，以及研究者撰寫 FCUT 軟體進行模糊集群分析。

肆、結果

一、數學閱讀測驗表現分析

(一) 數學閱讀測驗表現情形

本研究數學閱讀正式施測文本（A）與正式施測文本（B）題目共 30 題，試題皆為二元計分，答對一題以 1 分計，答錯一題以 0 分計。如表 3 所示，一般閱讀理解平均答對率為.76、數學背景知識平均答對率為.53、數學特殊技能平均答對率為.41。欲瞭解學童在各向度的表現差異，成對樣本 *t* 檢定如表 4 所示，可知數學閱讀各向度兩兩皆達顯著差異。整體而言，學童在一般閱讀理解的表現較佳，其次為數學背景知識，而數學特殊技能相對較低。

表 3

數學閱讀測驗平均答對率摘要表

向度	題數	平均答對率	標準差
一般閱讀理解	10	.76	.20
數學背景知識	10	.53	.23
數學特殊技能	10	.41	.20

表 4

數學閱讀各向度成對樣本 *t* 檢定摘要表

成對樣本	得分平均數差異	<i>t</i> 值
一般閱讀理解 — 數學背景知識	2.31	21.60***
數學背景知識 — 數學特殊技能	1.14	9.76***
數學特殊技能 — 一般閱讀理解	-3.45	-31.02***

N = 361. ****p* < .001.

(二) 數學閱讀各向度相關分析

本研究以 Pearson 積差相關分析，探討全體學童於數學閱讀各向度之相關情形，結果如表 5 所示。可知一般閱讀理解、數學背景知識及數學特殊技能三個向度兩兩呈現顯著正相關。此研究頗能呼應 Lindeman（2000）所提出的觀點，數學閱讀和語文閱讀有相關性且共享相同認知能力。

表 5

全體學童於數學閱讀各向度相關係數分析

認知成分	一般閱讀理解	數學背景知識	數學特殊技能
一般閱讀理解	—		
數學背景知識	.552***	—	
數學特殊技能	.422***	.459***	—

$N = 361$. *** $p < .001$.

二、模糊集群分析結果

本研究以兩份數學閱讀文本的一般閱讀理解、數學背景知識和數學特殊技能三個向度的標準化分數，據以進行模糊集群分析。一般而言，若僅分為兩群組可能過於粗略，故研究者將群數設定為 3 到 8 群，選擇收斂標準 10^{-5} 以及 $q = 1.25$ ，根據模糊集群分析結果，各群數之分割係數與分割亂度如表 6 所示。根據表 6 所示，群數為 3 時分割係數最大為.88836，分割亂度最小為.18782，故本研究將全體受測學童分為三群，此三群分別以第一群、第二群、第三群表示。

表 6

各群數之分割係數及分割亂度

群數	分割係數	分割亂度
3	.88836	.18782
4	.88576	.21084
5	.87265	.23283
6	.87434	.23626
7	.86910	.24878
8	.85849	.27007

本研究以一般閱讀理解、數學背景知識和數學特殊技能三個向度的試題平均答對率進行模糊集群分析，群組的群中心即是該群受試者的各向度表現特徵。表 7 呈現三個群組的人數和百分比，以及各群組的群中心，此群中心的數值為各向度的試題平均答對率。

表 7
各群組人數及群中心

群組	人數（百分比）	各群組的群中心		
		一般閱讀理解	數學背景知識	數學特殊技能
第一群	90（24.9%）	0.485178	0.312171	0.281965
第二群	148（41.0%）	0.811534	0.46521	0.347333
第三群	123（34.1%）	0.899842	0.758698	0.588779

經由表 7 各群組人數及群中心之分析，可得以下結果：

- 1.依可知，第三群學童在各向度表現最佳，第二群學童在各向度表現次之，第一群學童在各向度表現最低。故將第一群學童稱為「數學閱讀表現低分組」，第二群學童稱為「數學閱讀表現中分組」，第三群學童稱為「數學閱讀表現高分組」。
- 2.第三群「數學閱讀表現高分組」的占34.1%，第二群「數學閱讀表現中分組」的第二群學童占41%，人數最多；第一群「閱讀表現低分組」的學童占24.9%，人數最少。各群組的群中心為試題平均答對率，若以0.7的來區分精熟與否，可知第一群學童在各向度表現均未精熟，在各向度的能力方面均有待加強。第二群學童人數最多，僅在「一般閱讀理解」表現精熟，在「數學背景知識」、「數學特殊技能」卻未精熟，所以在數學學習上應重視數學閱讀的能力培養。第三群學童人數次多，在「一般閱讀理解」、「數學背景知識」均達精熟，但「數學特殊技能」未達精熟，可知學童以數學詞彙與符號為工具，來進行延伸問題的解決能力尚待加強。所以，根據表7各群組的群中心數值，可瞭解各群組學童在數學閱讀表現的特徵。

三、各群學童在數學閱讀測驗表現分析

(一) 數學閱讀三向度中各群學童之表現

由於模糊集群僅呈現最佳的分群，並無法呈現各向度試題平均答對率是否有顯著差異。因此，本研究進行單因子變異數分析（One Way ANOVA）。資料檢定顯示符合變異數同質性，因此變異數分析摘要表和事後比較結果如表 8。由該表可知，針對數學閱讀的每個向度，其各群組的平均數之間均有顯著差異，可知這三個群組學童在數學閱讀有截然不同的認知表現。

表 8

數學閱讀三向度中各群學童變異數分析摘要表

向度	來源	平方和	自由度	平均平方和	<i>F</i> 值	事後比較
一般閱 讀理解	組間	9.842	2	4.921	424.915***	一<二<三
	組內	4.146	358	.012		
	總和	13.988	360			
數學背 景知識	組間	11.226	2	5.613	266.724***	一<二<三
	組內	7.534	358	.021		
	總和	18.760	360			
數學特 殊技能	組間	5.808	2	2.904	128.392***	一<二<三
	組內	8.097	358	.023		
	總和	13.905	360			

*** $p < .001$.

(二) 各群學童在數學閱讀各向度之表現

本文進一步針對每個群組的學童，三個向度答對率平均的差異，因此進行相依樣本 *t* 檢定，答對率平均和檢定分析結果如表 9 所示。由表 9 可知，三個群組學童在各向度答對平均率呈現顯著差異，且以「一般閱讀理解」最高，「數學背景知識」次之，而「數學特殊技能」較低。

表 9

各群學童數學閱讀測驗表現摘要表

群別	向度	答對率平均	成對樣本	t 值
第一群	一般閱讀理解	.48	一般閱讀理解 — 數學背景知識	7.52***
	數學背景知識	.32	數學背景知識 — 數學特殊技能	10.70***
	數學特殊技能	.29	數學特殊技能 — 一般閱讀理解	-1.48***
第二群	一般閱讀理解	.81	一般閱讀理解 — 數學背景知識	22.62***
	數學背景知識	.47	數學背景知識 — 數學特殊技能	31.44***
	數學特殊技能	.35	數學特殊技能 — 一般閱讀理解	-6.85***
第三群	一般閱讀理解	.90	一般閱讀理解 — 數學背景知識	10.76***
	數學背景知識	.76	數學背景知識 — 數學特殊技能	18.24***
	數學特殊技能	.59	數學特殊技能 — 一般閱讀理解	-7.85***

*** $p < .001$.

(三) 各群學童數學閱讀測驗相關分析

本文以 Pearson 積差相關分析探討各群學童於數學閱讀各向度之相關情形，並加以分析各群學童於數學閱讀各向度之相關情形，分析結果如表 10 所示。由該表可之，第一群及第二群學童，其在數學閱讀三個向度相關，呈現「一般閱讀理解」、「數學背景知識」與「數學特殊技能」皆未達顯著相關。只有第三群學童在「一般閱讀理解」與「數學背景知識」間的 Pearson 積差相關係數為.279 ($p < .01$)，呈現顯著正相關。此結果之發現，頗能部分呼應 Österholm (2006) 所認為的數學閱讀是獨特的能力之觀點，因為本研究結果顯示，三個群組學童的數學閱讀各向度之間大多無相關性。

表 10

各群學童數學閱讀各向度相關係數分析

群別	向度	一般閱讀理解	數學背景知識	數學特殊技能
第一群	一般閱讀理解	-		
	數學背景知識	-.106	-	
	數學特殊技能	.171	.145	-
第二群	一般閱讀理解	-		
	數學背景知識	-.064	-	
	數學特殊技能	-.107	-.133	
第三群	一般閱讀理解	-		
	數學背景知識	.279**	-	
	數學特殊技能	.096	-.146	-

** $p < .01$.

伍、結論與建議

一、結論

依據本研究數學閱讀文本及資料分析結果，本研究提出結論如下：

(一) 數學閱讀測驗相關分析

1. 數學閱讀測驗的表現

國小六年級學童在數與量主題的數學閱讀表現上，各向度平均得分兩兩皆達顯著差異，且依據學童數學閱讀測驗成對樣本 t 檢定中可知學童表現「一般閱讀理解」高於「數學背景知識」高於「數學特殊技能」。因此，數學閱讀測驗對學童而言，以「一般閱讀理解」最容易，其次為「數學背景知識」，而「數學特殊技能」則相對較為困難。

2. 數學閱讀各向度的相關情形

在整體學童的數學閱讀三向度表現情形上，「一般閱讀理解」、「數學背景知識」與「數學特殊技能」之間，兩兩皆達顯著正相關 ($p < .001$)。此研究頗能呼應 Lindeman (2000) 所提出的觀點，數學閱讀和語文閱讀有相關性且共享相同

認知能力。但由於各群組學童的數學閱讀各向度之間大多無相關性，此結果之發現，又頗能部分呼應 Österholm (2006) 所認為的數學閱讀是獨特的能力之觀點。由於本研究結果顯示，整體學童在閱讀各向度之間又呈現顯著正相關，但以群組分析下，其結果卻有所不同，顯示國小學童的數學閱讀有異質性潛在特質結構 (latent trait structure)，本研究結果可供數學閱讀教學與評量後續研究參考。

(二) 模糊集群分析

根據分群結果依群中心之數值及變異數分析，將第一群學童命名為「數學閱讀表現低分組」、第二群學童命名為「數學閱讀表現中分組」、第三群學童命名為「數學閱讀表現高分組」，其比例分別為 24.9%、41%及 34.1%。第一群學童在一般閱讀理解、數學背景知識、數學特殊技能的三個向度的表現上均顯著最低，且第三群學童在一般閱讀理解、數學背景知識、數學特殊技能的三個向度的表現上均顯著最高。整體而言，本研究發現各群組學童在數學閱讀認知向度表現，呈現「平行式的顯著差異」現象，後續有關數學閱讀的研究，可繼續深入探究其原因。

二、建議

(一) 未來研究議題

本研究第一群學童在三個向度的表現上均顯著最低，且第三群學童在三個向度的表現上均顯著最高。有關影響數學閱讀表現的變因，未來可針對影響學童數學閱讀表現的相關背景和心理變項進行解釋。

(二) 樣本與文本內容

本研究對象只針對國小六年級學童，因此建議未來的研究樣本可以採取多樣性，擴展至其他年級及地區，有助於了解整體國小學童的數學閱讀能力，將能擴大研究的推論。此外，本研究只針對「數與量」中的內容進行數學閱讀探究，未來可繼續探討其他主題的數學閱讀表現。

參考文獻

- 吳柏林 (2005)。模糊統計導論：方法與應用。臺北市：五南圖書公司。
- 吳昭容、鄭英豪 (2012)。數學文本閱讀的眼動現象。國家科學委員會專題研究計畫成果報告 (編號：NSC 99-2511-S-003-023-MY2)。臺

- 北市：國立臺灣師範大學教育心理與輔導學系。
- 林邦傑（1981）。集群分析及其應用。*教育與心理研究*，4，31-57。
- 林原宏（2007）。模糊理論在社會科學研究的方法論之回顧。*量化研究學刊*，1（1），53-84。
- 洪月女（2016）。學科閱讀研究與教學之探討。*高雄師大學報*，40，19-39。
- 科技部（2016）。科技部與教育部聯合記者會新聞資料－PISA 2015 臺灣學童的表現。2017 年 03 月 12 日取自：
https://www.most.gov.tw/folksonomy/detail?subSite=&l=ch&article_id=57b7c383-4064-4300-b481-1a6231dfac3e&menu_id=9aa56881-8df0-4eb6-a5a7-32a2f72826ff&content_type=P&view_mode=listView。
- 高文君、韓聯郡、高紅偉（2006）。數學閱讀能力的構成及數學閱讀教學的原則。*內蒙古電大學刊*，4，71-72。
- 秦麗花（2006）。從數學閱讀特殊技能看兒童數學閱讀的困難與突破。*特殊教育季刊*，99，1-12。
- 教育部（2010）。國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域。臺北市：教育部。
- 張鎮華（2015）。數學教育與十二年國教 or 十二年國教的數學教育。取自：<http://hdl.handle.net/11536/129227>。
- Anderberg, M. R. (1973), *Cluster Analysis for Applications*, New York: Academic Press.
- Astrid, D. (1994). *The readability of the mathematics textbook: With special reference to the mature student*. M.T.M. dissertation, Concordia University (Canada), Canada. Retrieved March 4, 2011, from Dissertations & Theses: A & I (Publication No. AAT MQ44873).
- Adams, T. L., & Lowery, R. M. (2007). An analysis of children's strategies for reading mathematics. *Reading & Writing Quarterly*, 23(2), 161-177.
- Bezdek, J. C. (1981). *Pattern recognition with fuzzy objective function algorithm*. New York: Plenum.
- Cole, J. R., & Persichitte, K. A. (2000). Fuzzy cognitive mapping: Applications in

- education. *International Journal of Intelligent Systems*, 15, 1-25. doi: 10.1002/(SICI)1098-111X(200001)15:1<1::AID-INT1>3.0.CO;2-V
- Committee on Conceptual Framework for the New K-12 Science Education Standards (2001). *A framework for L-12 science education: Practices, crosscutting concepts, and core ideas*. Washington, DC: The National Academies Press.
- Ilany, B. S., & Margolin, B. (2010). Language and mathematics: Bridging between natural language and mathematical language in solving problems in mathematics. *Creative Education*, 1(03), 138-148. doi: 10.4236/ce.2010.13022
- Jain, A. K. (2010). Data clustering: 50 years beyond K-means. *Pattern recognition letters*, 31, 651-666. doi: 10.1016/j.patrec.2009.09.011
- Jordan, N. C. , Kaplan, D., & Hanich, L. B. (2002). Achievement growth in children with learning difficulties in mathematics: Findings of a two-year longitudinal study. *Journal of Educational Psychology*, 94, 586-597. doi: 10.1037//0022-0663.94.3.586
- Klir, G., & Yuan, B. (1995). *Fuzzy sets and fuzzy logic*. New Jersey: Prentice Hall.
- Lindeman, J. (2000). *ALLU reading rest for primary school: technical information*. Turku, Finland: University of Turku Centre for Research on Learning.
- McKenna, M. C., and Robinson, R. D. (2002). *Teaching through text: Reading and writing in the content areas*. Boston: Allyn & Bacon.
- OECD (2013). *PISA 2012 assessment and analytical framework: Mathematics, reading, science, problem solving and financial literacy*. Paris, France: Author.
- Österholm, M. (2006). Characterizing reading comprehension of mathematical texts. *Educational Studies in Mathematics*, 63, 325-346. doi: 10.1007/s10649-005-9016-y
- Ragin, C. C. (2000). *Fuzzy-set social science*. University of Chicago Press.
- Smithson, M., & Verkuilen, J. (2006). *Fuzzy set theory: Applications in the social sciences* (No. 147). Sage.

- Vacca, R. T., & Vacca, J. L. (2002). *Content area reading: Literacy and learning across the curriculum* (7th ed.). Boston, MA: Allyn and Bacon.
- Vukovic, R. K., Lesaux, N. K., & Siegel, L. S. (2010). The mathematics skills of children with reading difficulties. *Learning and Individual Differences*, 20, 639-643. doi: 10.1016/j.lindif.2010.08.004
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and control*, 8(3), 338-353. doi: 10.1016/S0019-9958(65)90241-X
- Zimmermann, H. J. (2011). *Fuzzy set theory-and its applications*. Springer Science & Business Media.

附錄 1 文本 A 的內容和試題舉例

第一部分：閱讀理解



體重是由骨骼、肌肉、內臟、水分及脂肪的總和。隨著個人性別的不同，以及年齡、生育或活動量等差異，身體組成的比例也會產生變化。

如果體內堆積過多脂肪，便會產生肥胖，若是肥胖與三高症(高血壓、高血脂、高血糖)組合在一起，發生心臟疾病的危險性便隨之增加。一般來說，正常人體內約有四分之一是體脂肪，為了方便檢視，我們會以「體脂肪率」來表示身體脂肪佔全身體重的百分比。按照脂肪在人體不同部位的堆積情形，體脂肪又分為皮下脂肪和內臟脂肪。

(1) 內臟脂肪型：各種病症的導火線

內臟脂肪是附著在腹部、胃腸周圍的脂肪組織。雖然內臟脂肪的增加與高血壓、糖尿病、高血脂症、心血管疾病的發生率有很大的關係，但是適當程度的脂肪是有存在的必要，因為它可以保護並且固定我們的內臟。

(2) 皮下脂肪型：體態變形的主因

皮下脂肪就是附著在皮膚之下的脂肪。它不只能儲存脂肪，還能抵抗來自外界的寒冷或衝擊，在維持健康上占了非常重要的角色。另外，皮下脂肪也塑造人們的身體外形，尤其是年輕女性，為了要承受懷孕及生產，皮下脂肪就更容易囤積。

了解體脂肪的類型及功能，可以知道適量的脂肪對人體具有保護作用，有其存在的必要性。

試題舉例：

()這篇文章主要說明有關體重的哪些內容？

- (1)肥胖的成因與影響
- (2)體脂肪的類型與功能
- (3)男女體重組成比例的差異
- (4)三高症對人體健康的威脅

第二部分：數學背景知識



身體質量指數(BMI)是世界衛生組織(WHO)推薦使用作為肥胖指標的重要依據，一種以身高及體重的比例來評估體重的一種簡易工具。其計算方式如下：

$$\text{身體質量指數 BMI} = \text{體重} \div \text{身高} \div \text{身高}$$

體重單位：公斤

身高單位：公尺

依據不同身體質量指數，我們可以從成人體重分級與標準(如下)，了解自己的體重屬於何種等級：

表 1 成人體重分級與標準

成人體重分級標準	BMI 指數
體重過輕	$\text{BMI} < 18.5$
正常範圍	$18.5 \leq \text{BMI} < 24$
體重過重	$24 \leq \text{BMI} < 27$
輕度肥胖	$27 \leq \text{BMI} < 30$
中度肥胖	$30 \leq \text{BMI} < 35$
重度肥胖	$\text{BMI} \geq 35$

試題舉例：

()某位蔡姓歌手整年度的 BMI 值為 18.85，已知上半年度為 19，依據成人體重分級標準，這位歌手下半年度的體重應屬於何種範圍？

- (1)體重過輕
- (2)正常範圍
- (3)體重過重
- (4)輕度肥胖

第三部分：數學特殊技能



一般而言，男生正常體脂肪率約在 14%～20%之間，女生正常體脂肪率約在 17%～24%之間，如果成年男子的體脂肪率超過 25%或成年女子的體脂肪率超過 30%，就達到醫學上所謂的「肥胖」。

若要避免肥胖，就要減少脂肪的形成，計算熱量的攝取及消耗便是一種控制脂肪形成的好方法。熱量消耗的途徑主要有三個部分——基礎代謝率、身體活動及食物的熱效應。

基礎代謝率是維持人體重要器官運作所需的最低熱量。基礎代謝率越高，熱量的消耗越多，脂肪越不容易形成；如果基礎代謝率越低，則熱量無法消耗，便會以脂肪的形態儲存在體內。計算基礎代謝率公式如下：

$$\text{男性} = 66 + (13.7 \times \text{體重}) + (5 \times \text{身高}) - (6.8 \times \text{年齡})$$

$$\text{女性} = 655 + (9.6 \times \text{體重}) + (1.8 \times \text{身高}) - (4.7 \times \text{年齡})$$

體重單位：公斤，身高單位：公分，年齡單位：歲

試題舉例：

()兩位身高同為 180 公分，體重同為 70 公斤的父子，若 20 歲的兒子基礎代謝率為 1789 卡路里，則 50 歲的父親基礎代謝率應為多少卡路里？

- (1)1789
- (2)1585
- (3)1985
- (4)1855

《臺灣數學教師》稿約

2013.09.27 編審委員會會議通過
2014.09.04 編審委員會會議修訂通過
2015.05.24 編輯委員會會議修訂通過
2016.05.15 編輯委員會會議修訂通過

- 壹、《臺灣數學教師》（原名為《台灣數學教師(電子)期刊》）（Taiwan Journal of Mathematics Teachers）（以下簡稱本刊）是國立臺灣師範大學數學系及台灣數學教育學會共同發行之期刊，內容以出版數學教育領域相關議題的原創性論文為宗旨。本刊徵求符合宗旨之教學實務文稿，內容包含探討數學教學策略、學生迷思概念之教學引導、數學教育課程、教材與教法等實務經驗分享、研究問題評析、數學教育之構想、書評、論文批判、數學教學與應用性研究、數學教育研究趨勢介紹、專題演講講稿、數學學習評量、電子媒材設計、數學教師專業發展及其他數學教育相關議題等內容。
- 貳、本刊每年發行兩期，分別於四月、十月出刊，並採電子方式發行。全年徵稿，隨收隨審。
- 參、本刊所刊之文稿須為原創性的教學實務文章，即未曾投遞或以全論文形式刊登於其他期刊、研討會彙編或書籍。若文稿在送審後自行撤稿，或出現一稿多投、修正稿回覆逾期、侵犯著作權等違反學術倫理等情況，將依下列規則處理：
- 一、來稿一經送審，不得撤稿。因特殊理由而提出撤稿申請者，案送主編決定；非特殊理由而自行撤稿者，一年內將不再接受該作者的投稿。
 - 二、若文稿被發現一稿多投、侵犯著作權或違反學術倫理等情況，除文稿隨即被拒絕刊登外，一切責任由作者自負，且本刊於三年內不接受該作者來稿，並視情節嚴重程度求償。
 - 三、作者應於發出文稿修正通知的二週內回傳修正稿及修正回覆說明書，逾期視同撤稿。若有特殊情況請先與本刊聯絡。
- 肆、未經本刊同意，已獲本刊接受之文章不得再於他處發表。投遞本刊之文稿須經編審委員會送請專家學者審查通過後予以刊登，被刊登文章之著作財產權歸國立臺灣師範大學數學系及台灣數學教育學會共同擁有，文責由作者自負。
- 伍、文稿請以中文撰寫，以8,000字為原則（包含摘要、文章全文、圖表、附註、參考文獻、附錄等）。文稿的呈現請使用單行間距之12級字新細明體或Times New Roman字體，以橫書方式於A4規格紙張上，文稿上下左右各留2.5公分空白，並以Microsoft Word 98以上之繁體中文文書軟體處理。

陸、文稿格式請參考《臺灣數學教師》期刊論文撰寫體例的說明或已發行之文稿，若有需要引用英文文獻以及數學符號、公式等請參考APA第六版出版手冊。交遞稿件時需注意下列事項：

一、提交投稿基本資料表

(一) 文稿基本資料。

(二) 通訊作者之姓名、服務單位、職稱、通訊地址、聯絡電話和電子郵件地址。

一位以上作者時，非通訊作者只需填寫姓名、服務單位和職稱。

(三) 任職機構及單位：請寫正式名稱，分別就每位作者寫明所屬系所或單位。

(四) 頁首短題（running head）：以不超過15個字為原則。

(五) 作者註（author note）：說明與本篇研究相關的資訊。

二、提交已簽署的《臺灣數學教師》著作財產權讓與同意書。

三、文稿除正文外，還需包含中文摘要，摘要請獨立一頁呈現，並置於正文之前。

摘要頁內容包括論文題目（粗體20級字、置中）、摘要（不分段，限500字以內）、與關鍵詞（以五個為上限，並依筆畫順序由少到多排列）。

四、若為修正稿，遞交修正的文稿上請以色字標示修改處，並需提交「修正回覆說明書」，依審查意見逐項說明修改內容或提出答辯。作者應於發出文稿修正通知的二週內回傳修正稿及修正回覆說明書，若有特殊情況請先與本刊聯絡。

柒、文稿以電子郵件方式投遞，包括作者基本資料表、著作財產權讓與同意書與全文共三份資料。作者應負論文排版完成後的校對之責，編輯委員僅負責格式上之校對。

捌、投稿電子郵箱：tjmtedit@gmail.com

《臺灣數學教師》投稿基本資料表

篇名		(中文)	
		(英文)	
總字數		稿件全文(含中英文摘要、正文、參考文獻、附錄等)共_____字。	
關鍵詞 (最多五個)		(中文)	
		(英文)	
頁首短題 (running head)		(請以不超過15個中文字或40個英文字元為原則。)	
通訊作者資料	姓名	(中文)	(英文)
	職稱		
	服務單位 (或就讀校系)	(中文)	
		(英文)	
	E-mail		
	通訊地址		
	電話	辦公室：() 分機 行動電話：	
如為共同著作，請詳填以下共同著作人欄位，非共同著作則不需填寫。(以下欄位不敷填寫時請自行增加)			
共同著作人	姓名	服務單位 (或就讀校系)	職稱
第一作者 (□通訊作者)	(中文)	(中文)	
	(英文)	(英文)	
第二作者 (□通訊作者)	(中文)	(中文)	
	(英文)	(英文)	
第三作者 (□通訊作者)	(中文)	(中文)	
	(英文)	(英文)	
作者註 (可複選)	☐ 本篇論文為碩、博士論文改寫，指導教授為_____。 ☐ 本篇論文曾於_____發表。 ☐ 本篇論文獲科技部補助，計劃編號：_____。		
1.茲保證本論文符合研究倫理。 2.茲保證所填基本資料正確，文稿未曾以任何方式出版或發行，且無一稿多投、違反學術倫理，或違反著作權相關法令等事情。 3.茲瞭解並同意貴刊著作權授權規範，並保證有權依此規範進行相關授權。 4.茲保證文稿已經所有作者同意投稿至《臺灣數學教師》。			
填表人：_____		填表日期：_____年____月____日	

《臺灣數學教師》著作財產權讓與同意書

茲同意投稿至國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會共同發行的《臺灣數學教師》之一文，名稱為：

立書人聲明及保證本著作為從未出版之原創性著作，所引用之文字、圖表及照片均符合著作權法及相關學術倫理規範，如果本著作之內容有使用他人以具有著作權之資料，皆已獲得著作權所有者之（書面）同意，並於本著作中註明其來源出處。著作人並擔保本著作未含有毀謗或不法之內容，且絕未侵害他人之智慧財產權，並同意無償授權國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會於本著作通過審查後，以論文集、期刊、網路電子資料庫等各種不同方法形式，不限地域、時間、次數及內容利用本著作，並得進行格式之變更，且得將本著作透過各種公開傳輸方式供公眾檢索、瀏覽、下載、傳輸及列印等各項服務。國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會並得再授權他人行使上述發行之權利。惟著作人保有下列之權利：

- 1.本著作相關之商標權及專利權。
- 2.本著作之全部或部份著作人教學用之重製權。
- 3.出版後，本著作之全部或部份用於著作人之書中或論文集中之使用權。
- 4.本著作用於著作人受僱機關內部分送之重製權或推銷用之使用權。
- 5.本著作及其所含資料之公開口述權。

著作人同意上述任何情形下之重製品應註明著作財產權所屬，以及引自《臺灣數學教師》。

如果本著作為二人以上之共同著作，下列簽署之著作人已通知其他共同著作人本同意書之條款，並經各共同著作人全體同意，且獲得授權代為簽署本同意書。如果本著作係著作人於受僱期間為雇用機構所作，而著作權為讓機構所有，則該機構亦同意上述條款，並在下面簽署。

本著作之著作財產權係屬（請勾選一項）

- ☐ 著作人所有
☐ 著作人之僱用機構所有

立同意書人（著作人或僱用機構代表人）簽章：_____

著作人姓名或僱用機構名稱：_____

（正楷書寫）

中華民國 年 月 日

Publisher	Department of Mathematics, National Taiwan Normal University Taiwan Association for Mathematics Education
-----------	--

Editorial Board

Chief Editor	Yuan-Horng Lin (Department of Mathematics Education, National Taichung University of Education)
Vice Chief Editor	Yuan-Shun Lee (Department of Mathematics, University of Taipei) Pi-Jen Lin (Graduate Institute of Mathematics and Science Education, National Tsing Hua University)
Editorial Panel	Su-Wei Lin (Department of Education , National University of Tainan) Wei-Min Hsu (Department of Science Communication, National Pingtung University) Erh-Tsung Chin (Graduate Institute of Science Education, National Changhua University of Education) Shu-Yi Chang (Department of Mathematics Education and Information Education, National Taipei University of Education) Huan-Chuan Chang (Sinde Elementary School, Toufen, Miaoli) Chia-Huang Chen (Department of Mathematics Education, National Taichung University of Education) Kai-Lin Yang (Department of Mathematics, National Taiwan Normal University) Jian-Cheng Liou (Ping-jhen Junior High School, Taoyuan City) Shiang-Tung Liu (Graduate school of Math and Science Education , National Chiayi University) Chang-Hua Chen (National Academy for Educational Research) Jing Chung (Department of Mathematics Education and Information Education, National Taipei University of Education)

Address	No.88 Sec. 4, Ting-Chou Rd., Taipei City, Taiwan, R.O.C. Department of Mathematics, National Taiwan Normal University " <i>Taiwan Journal of Mathematics Teachers</i> "
TEL	886-2-7734-6576
FAX	886-2-2933-2342
E-mail	tjmtedit@gmail.com
Website	http://tame.tw/news/news.php?class=204

1 運用圖形拆解法提升九年級學生幾何證明的學習表現

/ 方瓊婉、徐偉民、郭文金

Using Figures Decomposition Method to Improve 9th Graders' Learning Performance on Geometric Proofs

/ Chiung-Wan Fang、Wei-Min Hsu、Wen-Jin Kuo

19 學齡前幼兒幾何形體概念之發展

/ 蔣姿儀、林思婷

The Development of the Concept of Geometric Shape of Preschool Children

/ Tzu-Yi Chiang、Si-Ting Lin

42 高年級學生數學閱讀表現之分群特徵探討

/ 陳怡如、林原宏、楊晉民

A Study of the Clustering Characteristics on Mathematics Reading Performance of Sixth Graders

/ Yi-Ju Chen、Yuan-Horng Lin、Jinn-Min Yang

