

蘇意雯、陳政宏、王淑明、王美娟（2015）。
幾何文本閱讀理解的實作研究。
臺灣數學教育期刊，2（2），25-51。
doi: 10.6278/tjme.20151001.002

幾何文本閱讀理解的實作研究

蘇意雯¹ 陳政宏² 王淑明³ 王美娟¹

¹臺北市立大學數學系

²國立臺灣師範大學數學系

³新北市立明治國民中學

本研究主要是由師資培育者與現場教師一齊探討如何開發出幫助學生閱讀理解之幾何文本。參與教師利用所開發之幾何文本，進行班級教學，並根據學生基礎素養國際研究計畫（Programme for International Student Assessment, PISA）所提的擷取與檢索、統整與解釋、省思與評鑑的閱讀理解歷程，設計評量試題，觀察學生學習狀況，作為教師教學反思之參考。本研究開發出主題為「平行與截線性質」之幾何文本，藉由此教學實作，發現閱讀融入數學史素材的幾何文本，能幫助學生對於數學主題之理解，在統整與解釋面向，實驗組學生與控制組學生有顯著差異。另外在幾何閱讀文本的編排上，可以先提綱挈領，讓學生明瞭學習主題梗概。

關鍵詞：幾何文本、閱讀理解、數學史

通訊作者：蘇意雯，e-mail：yiwen@uTaipei.edu.tw

收稿：2015年3月26日；

接受刊登：2015年10月1日。

Su, Y. W., Chen, C. H., Wang, S. M., & Wang, M. C. (2015).
Teaching practices for reading comprehension of geometry texts.
Taiwan Journal of Mathematics Education, 2(2), 25-51.
doi: 10.6278/tjme.20151001.002

Teaching Practices for Reading Comprehension of Geometry Texts

Yi-Wen Su¹ Cheng-Hung Chen² Shu-Ming Wang³ Mei-Chuan Wang¹

¹ Department of Mathematics, University of Taipei

² Department of Mathematics, National Taiwan Normal University

³ New Taipei Municipal Mingzhi Junior High School

In this study, a teacher educator and in-service teachers collaborated to develop geometry texts that helped students improve their reading comprehension. The teachers used geometry texts, conducted classroom instruction, and, according to the Programme for International Student Assessment guidelines, designed assessment questions and observed students' learning styles as a teaching reference. We developed reading materials, addressed geometric concepts—including the transversal line properties of parallel lines—and created assessments for math reading, thereby enabling students to access and retrieve, interpret and integrate, and reflect on and evaluate information. This study discovered the following: Integrating the history of mathematics into texts can help students understand geometric concepts. In addition, individual students exhibit significant differences in interpretation and integration skills. Furthermore, the arrangement of geometry reading texts should be focused on vital information, to enable students to understand the learning topic outline.

Keywords: geometry text, reading comprehension, history of mathematics

壹、緒論

數學是很多同學在求學過程中頭痛的科目。在教學過程中研究者發現，各階段的學生只有少部分能從數學解題的過程中獲得些許的成就感，對於大多數學生來說，不僅不清楚數學概念的發展，也不知道為什麼要學習數學，更別說體會數學在日常生活中的應用。即使是在數學成績表現優良的表象下，學生對數學的興趣依舊不高，以國際數學與科學教育成就趨勢調查（Trends in International Mathematics and Science Study, TIMSS）2011 為例，台灣八年級學生數學成就位居第三名，四年級學生排名第四，但是台灣學生對數學學習的正向態度及自信心卻明顯偏低（Mullis, Martin, Foy, & Arora, 2012）。對於這門被喻為「科學之母」的學科，如何發掘其迷人之魅力？如何在教學中針對課程內容設計教材進行教學，讓學生能了解數學，欣賞數學，正是身為一名數學教育工作者念茲在茲努力的方向。從 1980 年代開始，解題、溝通與連結等數學能力的培養一直是數學教育界的目標，而數學論證能力是其中不可輕忽的一環。Balacheff（1990）發現數學論證教材太強調證明的邏輯觀點，忽略了數學活動中社會實作的面向。為了提升學生的論證能力，也因此，有一些學者（Selden & Selden, 2003; Yang & Lin, 2008, 2012）關注到了運用閱讀策略來幫助證明理解之研究取向。

事實上，閱讀能力與終身學習的能力息息相關，也因此近年來各國越來越重視培養學生的閱讀能力，為了瞭解學生的閱讀表現，也產生了一些國際性的評量，例如由經濟合作暨發展組織（Organization for Economic Cooperation and Development [OECD]）主辦，針對 15 歲學生所舉辦的全球性學生評量－學生基礎素養國際研究計畫（Programme for International Student Assessment, PISA）；以及由國際教育學習成就調查委員會（International Association for the Evaluation of Educational Achievement [IEA]）辦理，評量對象為 9 到 10 歲，亦即四年級學生的閱讀能力的促進國際閱讀素養研究（Progress in International Reading Literacy Study, PIRLS）這樣國際性的閱讀評比，PIRLS 是五年循環一次的國際評比，測量兒童閱讀素養成就以及與讀寫能力有關之政策、實務的發展趨勢，這個研究的調查結果也提供了各國作為改善閱讀教學的參考依據。2006 年共有 45 個國家和地區參加 PIRLS 研究，臺灣學生名列第 22（閱讀與學習研究室，2009）。至於 PISA 的調查結果，PISA 2006 共有 57 個國家及經濟體參與，在閱讀素養方面台灣學生名列 16；PISA 2009 共有 65 個國家及經濟體參與，在閱讀素養方面，臺灣學生與丹麥並列 23 名（臺灣 PISA 國家研究中心，2011）。PISA 報告也指出，一般而言，閱讀測驗平均分數可以反映國家教育的品質。如果絕大部分國中畢業生閱讀能力都在平均水準之下，那麼國家未來的勞動人力很可能缺乏必備的技能，國民的判斷力也可能不足（臺灣 PISA 國家研究中心，2008）。由前述國際評比發現，閱讀素養的加強及能力的培養實為台灣教育當務之急。

有鑑於閱讀的重要性，教育部不但持續推動閱讀教育，強化推廣學習素養取向之教學，在國中小部分也加強提升各領域閱讀能力，將閱讀納入九年一貫各領域課程與教學輔導群未來推動重點。讓閱讀不只是國語文教育的事，而是各學科均應提倡的重要目標，例如：數學閱讀、社會閱讀、科學閱讀…等，並發展閱讀教學實務方案，系統性的協助學生發展閱讀樂趣（行政院中部聯合服務中心，2010）。經過一連串的推動及加強，PISA 2012 和 PIRLS 2011 的閱讀素養評比表現，分別進步至第 8 名和第 9 名（行政院，2013），顯見國內推動閱讀教育之成效。為了因應十二年國教啟動，臺北市政府教育局也於 101 學年度第一學期舉辦國中素養評量工作坊，分為數學素養評量及閱讀理解評量兩大組，讓參與教師認識素養理論到命題實作，可見中學階段對於閱讀的重視。

人類在學習知識的過程中，是先經由動態的語言獲得新知，再藉由靜態的「閱讀」得到更多的資訊。Mayer 認為「閱讀」是學生獲得訊息的最重要手段，學生在剛入學的階段「學習閱讀」（learn to read），到高年級階段則「經由閱讀而學習」（read to learn）。前者是指學會將印刷文字轉換成其他的形式，亦即學習將一些低層次之技能自動化，後者則是指藉由閱讀的方式來獲得新知（Mayer, 1987/1997）。因此，我們知道在學習過程中時時刻刻離不開閱讀，然而「閱讀」是一個複雜的過程，在學生心智歷程的模型中包含識字和閱讀理解，其中識字是閱讀理解的先備條件，而閱讀理解是閱讀行為的重心；故此，不論閱讀的目的為何，如果沒有理解，所花的精神和時間都可能是白白浪費。

一般談到閱讀，通常以語文素材為主；數學相關的閱讀常是讓人忽略的教學活動，也是被一般教師遺忘的盲點；這導致數學課本之敘述在數學教學中常被忽略，而只重在計算、思考、解題技巧等方面的練習，也造成當學生作獨立閱讀思考學習時，會面臨到障礙。九年一貫數學學習領域的五大主題是數與量、代數、幾何、機率與統計、連結。幾何學從希臘時代便有卓著的發展，是當時的四藝之一，雖然幾何也被視為中學數學領域中極重要的學習素材，然而從研究中均可發現中學生在學習幾何時碰到許多困難、學生的幾何直觀推理能力與學習成就不佳，對於幾何證明也是望之卻步（Fey, 1984; Senk, 1985）。為了讓閱讀素材更多樣性，也呼應教育部積極提升學子閱讀素養的要求，本研究嘗試開發幾何文本，並利用此文本進行教學，希望能增進學生的閱讀理解。

承上所述，本研究之研究目的為發展幾何文本，探討學生對於所開發之幾何文本的閱讀理解情形。因此，本計畫之研究問題為：

學生對於所開發之幾何文本的閱讀理解情形為何？

貳、文獻探討

以下的篇幅，我們將討論學習理論及閱讀教學架構，並根據閱讀教學架構的發展步驟，探討數學閱讀策略，由於本研究關注於幾何文本的閱讀理解，因此也探討幾何主題相關文獻，本章節分別以（1）學習相關理論（2）閱讀教學架構（3）數學閱讀策略與（4）幾何主題相關研究來呈現。

一、學習相關理論

Vygotsky 認為，每一個兒童在各領域有其實際發展的水準（actual development level），即未經協助下所能表現的水準，另一個是潛在的發展水準，即在協助下所能表現的水準。實際的發展水準和潛在的發展水準之間的區域，即是所謂的近側發展區（Zone of Proximal Development, ZPD）。從學習的觀點，他亦認為個人的發展與學習的速度並不一致，教學的主要特徵在於創造近側發展區，以刺激一系列的內在發展歷程（Vygotsky, 1978）。學校教學的結構提供了文化經驗，使得較高的心理功能歷程得以形成。在教育機構進行的教育歷程的核心就其觀點來說是兒童與成人以獨特的合作方式進行互動，藉由該互動歷程，兒童得以獲得知識並建立較高等的心智功能，這種歷程是透過成人的參與而發生（Vygotsky, 1978）。

鷹架（scaffolding）意指兒童內在的心理能力之成長有賴於成人的協助，而這些協助應建立在學習者當時的認知基礎上，當成人有系統地給予指導時，學習者較易超越原來的層次。本研究期望藉由教師對於幾何文本閱讀理解的教學設計實施，增進學生數學閱讀理解的能力。

McKenna 與 Robinson（2002）認為所有的學科閱讀必須包含三種主要的技能，分別是一般讀寫技能、學科的先備知識與學科特殊的閱讀技巧，三者的關係如圖 1 所示：

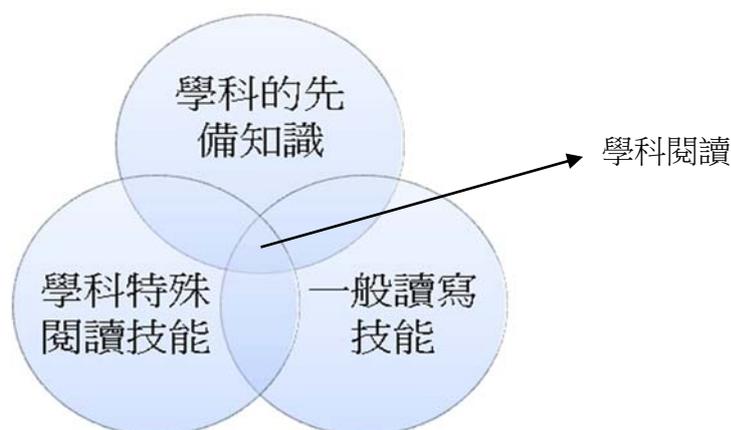


圖 1 學科閱讀的認知技巧。引自 *Teaching through Text: Reading and Writing in the Content Area* (p.9), by. M. C. McKenna & R. D. Robinson, 2002, New York, NY: Pearson.

由圖 1 我們可以知道數學閱讀顯然與一般的語文閱讀不同，答題者必須經由閱讀理解才能針對問題作出解釋性回答，而當外來資訊若存在文字問題時，將會對學生有限的處理能力增加負擔 (Muth, 1984)；數學閱讀有其特定的學科閱讀技能，其中包含了數學先備知識、數學圖示理解、數學詞彙符號理解、和數學作圖程序理解 (秦麗花、邱上真, 2004)。數學閱讀是經由數學語言而建構意義的過程 (秦麗花, 2007)，數學被視為一種科學的語言，事實上，學生要經由數學閱讀來學習新概念。Pólya (1945) 提出的解題歷程，其四個步驟依序為閱讀並了解題意、提出解題計畫、執行解題計畫、回顧及驗證。其中以「閱讀」並了解題意 (文意) 是理解問題、解決問題的首要關鍵。Woodward 與 Elliott (1990) 針對中學生的研究，發現有 67% 到 90% 的課堂教學是以教科書為主要來源，但也發現大部分的學生並無法經由閱讀理解教科書的結構 (Allington, 2006; Budiansky, 2001)。

本研究針對幾何主題，由國中教師發展相應之幾何文本學習工作單，融入閱讀策略，希望能幫助學生之閱讀理解，強化其學習。當參與教師在進行閱讀教學之時，有何教學架構可供參照呢？相關之閱讀教學架構，研究者將於以下篇幅加以敘述。

二、閱讀教學架構

很多學者 (Herber, 1978; Richardson, Morgan, & Fleener, 2011; Singer & Donlan, 1985; Vaughan & Estes, 1986) 提出學科領域閱讀教學架構，這些學科領域閱讀架構都包含了如下的三個基本的假定：

- (1) 學習者必須準備好去學習
- (2) 學習者必須在學習中被引導，以致在課程中能發展理解
- (3) 學習者必須複習學到了甚麼，此步驟的一部份是教師必須提供閱讀之後的學習機會，幫助學生保持學習。

如果這些基本步驟在教學序列中一直重複，學習者就開始能獨立的使用它們 (Richardson et al., 2011)。此處研究者舉 PAR (preparation, assistance, reflection) 領域閱讀教學架構，此架構包含準備、協助及反思三個步驟，以下加以說明。在準備步驟，教師需要考慮文本問題以及學生的背景知識。此步驟幫助引發學生閱讀動機。接著教師移至協助步驟，於此處提供課程的教學脈絡，這正是幫助學生較佳理解的決定性步驟。往往教師引動學生後就讓他們在教室自行閱讀或當回家作業，殊不知思考貧乏的學生並沒有足夠的研讀技能或是批判性的思考，這些學生在閱讀時都需要協助以建立理解。如果選擇策略讓學生於閱讀時有所反應，則可以改善理解的程度，這些策略也對於完成閱讀提供了一個具體清楚的目的。至於反思步驟，教師使用閱讀素材提供延展、豐富及批判性思考的機會。真實的反思發生在學生自問難題，例如「我從這個閱讀學到甚麼？」、「它適合我嗎？」、「我相信作者所言嗎？」、「此份閱讀素材值得保留嗎？」等等，

當學生在一個閱讀上真正反思時，他們才能將素材深層的牢記不忘 (Richardson et al., 2011)。

由上述可知，在準備步驟，教師除了了解學生之先備知識外，也應引起學生之學習動機，經由數學史融入數學教學實作，我們發現透過數學史能為學生揭開數學神秘的面紗，讓學生了解數學的起源，也能正面增強他們的數學學習態度 (沈志龍、蘇意雯，2009；林妙霜、蘇意雯，2009；蔡幸寬、蘇意雯，2009)。數學史融入數學教學的實施，可以經由介紹數學思維的發展歷史，讓學生體會數學是人類的活動，也能了解數學的發展與社會文化脈絡息息相關，進而開拓學生的視野 (洪萬生，2000；洪萬生等，2009)。以下的篇幅，研究者將討論數學閱讀策略。

三、數學閱讀策略

Brown 和 Palincsar 根據 Vygotsky 認知理論所提出的交互教學法是用來幫助學生主動進行有意義的閱讀，利用教導學生提出問題 (questioning)、摘錄重點 (summarizing)、澄清 (clarifying)，以及預測下段文章內容 (predicting) 等認知策略，讓學生從文本中獲得有意義的學習 (Palincsar & Brown, 1984)。閱讀理解包括語言與思考，也就是在讀中想、在想中讀。其中包括了預測文字意義、檢驗所預測的以及超越所讀的。以 PISA 的閱讀素養為例，閱讀理解歷程包含了擷取與檢索、統整與解釋、省思與評鑑 (OECD, 2010)，也就是擷取資訊、理解資訊、詮釋資訊、反思與評估資訊內容以及反思與評估資訊形式。所謂的擷取與檢索主要是針對文本資訊，也就是能從閱讀的文本中，找到所需的資訊。統整與解釋則是針對閱讀內容，涉及文本內部的統整，要求了解文本各部分的關係，包括問題與解決方法、因果關係、分類與舉例、等價、比較與對照、部分與整體的關係，意即閱讀後，能正確解讀資訊的意義。至於省思與評鑑則需連結文本資訊與利用文本外在知識、想法和價值，能夠將所讀內容，與自己原有的知識、想法和經驗相連結，綜合判斷後，提出自己的觀點。此一歷程要求讀者從文本抽離，以進行客觀思考，並評鑑文本的品質與適切性 (臺灣 PISA 國家研究中心，2011)。關於閱讀理解的策略首先是「摘要」，也就是提供摘要圖，接著是「預測」，就是提供閱讀停看聽的時機，以及猜想。再來是「自問自答」，也就是詰問自己「我懂了什麼，我不懂什麼」、「如果是…，如果不是…」，接著是「澄清」，也就是比較前後想法和比較他人想法，最後則是「反思」，思索為什麼及如何等問題 (林福來，2011)。

Ostler (1997) 在他的數學課堂中實施幫助學生閱讀課本的行動研究，他發現在自己的教學中習慣於將課本當作用來練習題目的資料，而非用來理解內容而閱讀的資料，並且注意到學生時常無法從課文中擷取意義或看到課本上的主題與表徵之間的連結，他假定學生在閱讀小說時是採用相同的方法，因此學生未意識到知道如何閱讀數學文本中的數學記號與數學語言能使他們成功的理解課文。

透過觀察後，Ostler 提出閱讀數學文本時的四個要素並針對各要素提供教學策略，其研究將十一年級的 21 位學生與 16 位學生分成實驗組與控制組，在實驗組內使用數學閱讀策略，進行為期四周的實驗教學，而從家庭作業的完成度做二組之間的比較。Ostler 所提出之要素及相應之策略茲敘述如下：

(一) 專門用語 (Terminology)：

此要素主要觀察自學生閱讀時，若非完全跳過技術性名詞，不然就是直接記憶章節最後重點整理的所有名詞，這兩種方式在本質上皆非好方法，因此教學策略應要求學生在解例題時辨別與學習本題內之專門用語，在每個例題中如此的重複到章節結束。

(二) 視覺模式 (Eye patterns)：

此要素主要觀察自學生趨向於由左至右閱讀數學式，就如同閱讀一般資料文本，但許多數學式利用到小括號，因應適當的計算程序需要由內運算至外，因此教學策略應鼓勵學生更加注意數學運算的適當程序。

(三) 圖文交互作用 (Graph/text interaction)：

此要素主要觀察自學生在看到例題中圖文並列時，通常在嘗試找出問題與圖形之間的關係前，就先閱讀詳解，因此教學策略應鼓勵學生在例題上的某一階段做適當停留，並找出同時出現在圖形中的規則。

(四) 閱讀方向 (Reading direction)：

此要素主要觀察自學生較常依由前至後的順序閱讀問題，但是在閱讀數學文本例題時，有時候從解法的最後一步驟開始去推敲每一個步驟是如何由前一個步驟推演而來，反而對學生會有幫助。

Fuentes (1998) 在自己的課堂中為了讓學生閱讀理解數學文本所使用的教學方法叫做 FLIP (Schumm & Mangrum, 1991)，其中做到兩件事，一方面增加學生感到有趣的角色和閱讀的先備知識，另一方面讓學生意識到辨別文本的結構和語言困難度的用處。這個方法主要是用於閱讀前的策略，但在閱讀中與閱讀後同樣也有效果。用為閱讀前的策略時，先要求學生瀏覽文本並尋找特別的特徵，然後判斷哪些部分對他們而言會有難度，這些判斷包含學生決定對於任務而言哪些策略可以或不可以產生好結果。

F 是指「親切度 (friendliness)」，要求學生查看文本並決定其親切或不親切的程度。如果文本看起來親切，學生可能期望使用親切的特徵去幫助他們理解，如果文本看來不親切，學生可能預期會有關於理解的問題並且希望在閱讀時能有外在的幫助。親切與否的討論在閱讀前後都能提升學生感知文本的語言和文本的構件。

L 是指「語言 (language)」，要求學生瀏覽一個段落並決定出語言的困難度，此特色的討論包含看複雜的句子和大量的字彙。學生看到一個段落包含許多冗長及複雜的句子，困難的字彙或注釋，可能決定去找出在看每一個句子後哪些會是理解的，或者他們可能決定減緩速度，分析和再次閱讀。

I 是指「興趣 (Interest)」，要求學生在閱讀一個段落後決定出個人感興趣的程度。雖然興趣具高度的主觀及變動的特性，在理解過程中卻是極為重要的因素。當學生興致低落，所投注的精力就少。對學生而言認知到理解的失敗在於興趣低落而非策略的效用是重要的，因為這些策略需要投注高度的精力。因此當學生評論某個策略不實用時，教師可以先詢問學生對於任務的感興趣程度。增加興趣的程度有許多策略，有時可用活化先備知識來幫助，尋找理解的第一瞬間可以激起興趣；學生需要給予機會去談論興趣如何影響他們的閱讀、為什麼興趣低落會是一個問題、當需要的時候學生的責任是要如何增進興趣、以及多少興趣可以被增進。

P 是指「先備知識 (prior knowledge)」，學生需要了解這個學習的基本原則：從一個人已經知道的事中學習，他所學到的必定很少。應用在閱讀，學生需要了解關於他所知道很少或不知道的學習主題的文本會是困難的—如果可能的話—去理解它。在閱讀前先檢視文本可以幫助學生決定關於閱讀的事前準備有哪些，並且經由它而讓閱讀有所進展。舉例來說，學生若被要求閱讀一段對他而言是完全陌生的主題，那麼在他開始任務前應被給予機會去取得一些相關知識。或者如果學生正在閱讀並對先備知識感知不全，學生要注意應該做某些事去確信是否理解。

Carter 和 Dean (2006) 調查數學教師教導學生閱讀數學文本時所使用的策略，他們研究教師在閱讀文本的過程中所使用的方法與閱讀技巧，調查的對象共有八位具有五年級至十二年級教學經驗的數學教師，他們企圖去瞭解教師如何培養學生三個面向的數學閱讀技巧：解讀文字與符號、瞭解字彙的意義、理解問題。此研究結果發現，針對解碼策略應包含為了使學生更正對符號的誤解而要求他們重複閱讀，讓學生讀出聲音或提供學生正確的文字與符號的解釋。針對字彙應教學生使用策略去幫助他們連結概念與專門用語，包含設計許多活動使學生藉由看出文字與數學項目之間的關係去建立概念性的知識。至於理解策略應包含教師透過與學生談論他們剛閱讀完的內容而使學生自我提問，如「我讀了什麼？」、「那是什麼意思？」或者老師可藉由學生用自己的語言去重新敘述問題進而做出解釋與摘要，此外，教師應該幫助學生辨識文本中重要的資訊，例如：教師可引導學生將解題中重要的資訊與不相關的內容分開，老師也可以使用直接提問的策略去評估學生對於問題的理解程度。

Borasi、Siegel、Fonzi 與 Smith (1998) 利用交易閱讀理論 (transactional reading theory) 探究在中學數學教學中的四個閱讀策略，也就是讓學生對於文本說出、寫下、畫出以及扮演，提供他們以具體的方式建構以及協商解釋所閱讀到的資訊。研究顯示，利用上述四種策略，提供

了學生閱讀教科書的不同方式，也鼓勵學生持續地修正他們的解釋，考慮另類的觀點，甚至推衍探究教科書之外的新問題。

有關數學圖文的教學，Pengelley (2011) 在大學課堂上使用原典，以巴斯卡的數學歸納法及組合數為例，讓學生研讀原始文本，除了數學知識的獲得外，學生也更珍視現代符號的便利。同樣借助原始文本，也可以只採用圖像表徵的方式在中學課堂上施行，利用歷史圖像讓學生敘事，幫助了解數學 (Dematte & Furinghetti, 2011)。Dematte 和 Furinghetti 以歷史圖像融入數學教學的立場主要是認為對於數學知識的初始進路來說，敘事不失為一個好方法，因為學生對於特定敘事的潛能發展，可能對他們所學賦予意義。也就是說，雖然有時歷史圖像對於寫成的文本來說只是裝飾用途，沒有參照的作用，但是有時它們也被賦予了解釋的功能，成為數學溝通的重要元素。此教學實驗施行方式是佈置人類從事一些與數學相關之活動的圖像，例如用不同的工具測量或是把計算的結果記錄下來等等。此研究讓學生閱讀圖像，然後要求學生針對數學面向寫下在此場景中發生了甚麼事。此種讀圖敘事，引入了一個對學生來說相當可接近又具激發動機的模式，這個模式包含了對原典的詮釋學取向，也強調數學的文化面向，並提供連接敘事的邏輯思考以促進創造推論的技能，從中得到如果能正確實施隱含數學史的歷史圖畫，將可以獲得教育上的功能的結論 (Dematte & Furinghetti, 2011)。上述研究所提供的是歷史圖像，那麼如果針對幾何主題的圖文教學，又會獲得何種結論呢？下一節，研究者將針對本研究幾何主題之相關文獻，提出探討。

四、幾何主題相關研究

九年一貫課程綱要裡對於國中幾何教學的目標，提到「首先在於提供學生日後有用的核心幾何知識，其次是提供豐富的背景，可以展示數學推理證明的過程與威力，而推理能力的培養正是國中數學教育的重點之一。」(教育部，2008)。另外對於國中的幾何學習，綱要也提及是由直觀、歸納轉入幾何推理與證明。並強調「幾何教學起初仍然以學生的幾何直覺經驗為前導，但開始強調幾何觀念的明確定義，及幾何相關量的計算，甚至代數演算，學生同時應開始學習閱讀幾何性質的嚴格推理，最後，再學習自己動手寫出較短的證明」(教育部，2008)。本研究關注於如何開發幾何文本，以幫助學生之閱讀理解。

在探討閱讀幾何證明的相關文獻中，左台益等人 (2011) 探討將一個複雜的幾何證明用分段方式呈現，降低任務的複雜度對專家 (28 位準中學數學教師和 21 位中學數學教師) 與生手 (66 位八年級學生) 在認知負荷感受與閱讀理解之影響。本研究結果顯示：(1) 不論是對專家或對生手而言，證明文本以分段方式呈現，有助於提高其閱讀意願以及降低其閱讀證明時的困難度和所花費的心力，但對他們在閱讀理解的表現上，則未造成顯著差異。(2) 不論證明文本以分段或未分段呈現，專家的閱讀意願與信心指數皆顯著高於生手，而其閱讀證明時的困難度

和所花費的心力則顯著低於生手；且專家的閱讀理解表現也顯著優於生手。以分段方式呈現幾何文本，正可以作為本計畫之參考。Yang 與 Lin (2008) 嘗試將認知策略設計於工作單內，增進學生對於幾何證明的閱讀理解，並探討學生感知使用認知和後設認知閱讀策略與幾何證明的閱讀理解能力間的結構關係 (Yang, 2012)。另外也有研究比較閱讀導向和書寫導向兩種實施類型下，學生對於幾何證明的閱讀理解效果 (Yang & Lin, 2012)。此處的閱讀導向是以閱讀策略和佈題的理念設計，依照前文所提之交互教學法的四個認知閱讀策略：提出問題、摘錄重點、澄清、預測，以及另一個後設認知閱讀策略：省思而設計。書寫導向則是指一般的證明教學。研究對象為分處於 22 個班級，年齡介於 14 到 15 歲之間的 683 位九年級學生，還有 12 位中學教師參與本項研究，該研究為準實驗研究，利用兩節 45 分鐘的課程讓實驗組及控制組學生完成所設計之工作單。研究顯示，實驗組的延後測成績顯著高於控制組的成績。在此研究，兩位研究者首先瀏覽交互教學法之相關文獻，然後根據問題推導、澄清、摘錄重點、預測等四個閱讀認知策略，設計教材並加入後設認知的閱讀策略，也就是反思，接著進行課堂實作，最後提供一個證明，請學生思索其命題，藉此迫使學生重新思索論證的邏輯形式及激發他們的閱讀策略。

因此，若是中學教師除了具備學科內容領域知識之外，也能瞭解如何運用閱讀策略，幫助學生對於教科書的閱讀理解，應該對於學生的學習會有助益。本研究即是針對幾何主題，規劃參與之國中教師共同研發國中課程相關幾何文本，希望能幫助學生的閱讀理解，並提出可行之設計建議。

參、研究方法

本研究為準實驗設計，採方便取樣的方式，選取參與教師所任教程度相當的兩個班級，一個班級為實驗組，利用研究團隊所開發之幾何文本為上課內容；另一個班級為控制組，利用數學課本為上課內容。研究對象為新北市某國民中學八年級學生二個班級共 61 人，實驗組學生和控制組學生分別為 33 人和 28 人。在本研究中，研究團隊共同討論研發適用於國中幾何文本，接著再實施於教學現場，希望能幫助學生之閱讀理解，以下篇幅將進行詳細說明。

一、研究設計

在本研究中，研究團隊開發「平行與截線性質」文本，並進行教學。教學者為研究者之一，實驗組與控制組兩班學生原本就皆由教學者授課，在本次教學實驗上，實驗組與控制組學生並無適應教師之問題。課程實施共兩節，在教學活動中，實驗組與控制組之前、後測工具均一致，兩組最主要之差異為閱讀素材之不同。實驗組以「平行與截線性質」文本閱讀為主進行教學活動，控制組以閱讀教科書為主進行教學活動。有關教科書的內容，主題一是平行線的意義，利用「在一平面上，兩直線如果可以找到一條共同的垂直線，我們就稱這兩直線互相平行。」、「在一平

面上，當兩直線平行時，若一直線與其中一條平行線垂直，則此直線必與另一條線平行線垂直。」作說明，並請學生思考「在一平面上有相異三直線， L_1 、 L_2 、 L_3 ，若 $L_1 \parallel L_2$ 、 $L_2 \parallel L_3$ ，則 L_1 與 L_3 有什麼關係？」。主題二是截線與截角，介紹在平面上，一直線同時與另兩直線交於不同的兩點，這一直線稱為截線，截角與截角之間，隨著彼此的位置關係，會有不同的名稱。接下來是平行線的截線性質以及平行線的截線性質的應用。控制組第一節課先讓學生閱讀完教科書之後進行前測，第二節課再依照課本的內容，教師一邊做適當的引導，讓學生一邊閱讀教科書後，再做後測。實驗組第一節課先讓學生閱讀完「平行與截線性質」文本進行前測，第二節課依照文本的內容，教師一邊做適當的引導，讓學生一邊閱讀文本後，再進行後測。

關於實驗組的教學進行，在第一節課授課教師先以歐幾里得《幾何原本》的平行設準與《數理精蘊》的平行定義引起動機，讓學生利用 25 分鐘時間自行閱讀文本，並利用文本來回答學習工作單的評量問題。第二節課則是教師引領學生閱讀文本，再進行 15 分鐘的後測。

本研究之研究工具為研究團隊所開發之「平行與截線性質」幾何文本，以及前、後測所用之學習工作單。關於「平行線截線性質」幾何文本之設計理念，以及學習工作單，研究者將於下一小節加以介紹。

二、研究工具

(一)「平行與截線性質」幾何文本

有關「平行與截線性質」幾何文本之教材地位如下圖 2 所示，研究者之設計理念詳述於後：

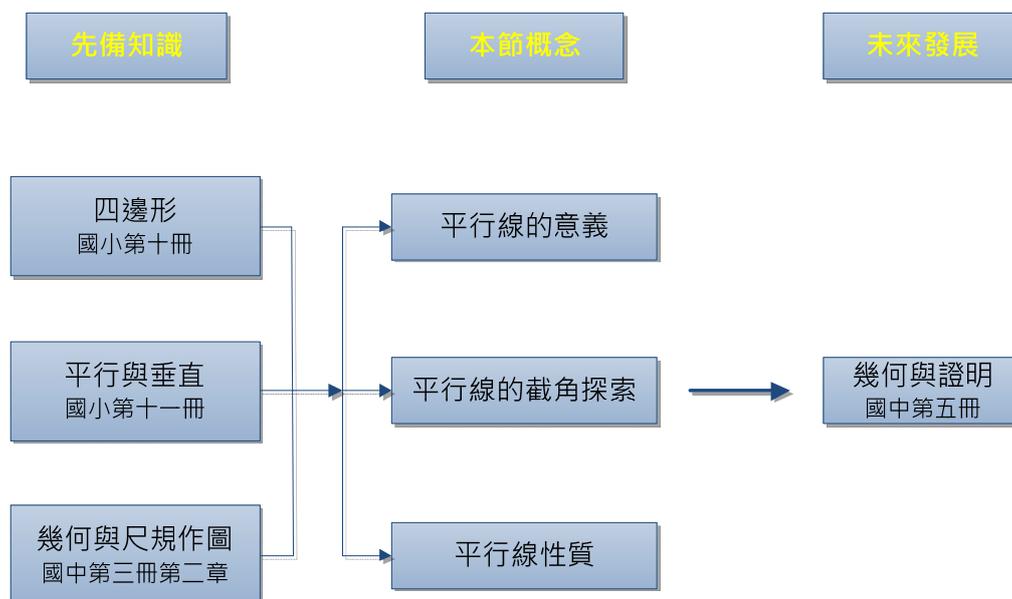


圖 2 「平行線截線性質」幾何文本之教材地位

研究者先從古代數學文本蒐集與平行相關的資料，作為幫助學生引起動機的素材，所引入的史料是《幾何原本》與《御製數理精蘊》。歐幾里得的《幾何原本》是一部百科全書式的著作。本書奠基於前人的工作，將希臘數學建築於統一的邏輯基礎之上。歐幾里得建造了平面幾何的理論，《幾何原本》非常完整且清楚，從歐幾里得的時代開始，《幾何原本》就被世人奉為學習平面幾何的圭臬。《幾何原本》全書共 13 卷，卷 1 從 5 個公理和 5 個設準開始。其中第五設準也稱作平行設準，困擾了很多數學家，為了揭開此設準的神秘面紗，導致非歐幾何的出現 (Berlinghoff & Gouvea, 2004/2008)。

清朝康熙皇帝時期的一本關於數學的書籍《御製數理精蘊》，簡稱《數理精蘊》，是一部介紹包括西方數學知識在內的數學百科全書。全書分上下兩編及附錄。上編五卷專講數理，立綱明體，是全書的基本理論部分。卷二至卷四為《幾何原本》，是根據張誠、白晉的法文譯本修訂的，共 12 章，分別講述了三角形、四邊形、圓及內接外切多邊形、立體幾何、比例、相似形、勾股定理、圓錐體及球與橢圓體的表面積和體積、幾何作圖法等內容 (韓琦, 1993)。

研究者以前述兩份數學史料引起學生動機，再參照課本內容設計成「平行與截線性質」幾何文本。關於文本的布置，首先研究者讓學生思考「什麼是平行？請利用日常生活中的例子來說明平行的意義。」，讓學生嘗試自行說出平行的意義。接著從古代數學文本《幾何原本》的平行設準：「一條直線與另外兩條直線相交，若某一側的兩個內角和小於兩直角，則這兩條直線不斷延長後在這一側相交。」、以及《數理精蘊》中關於平行線的定義：「凡二線之間寬狹相離之分俱等，則此二線謂之平行線也。」其後鋪排數學課本中平行的定義：「(1) 在同一平面上，兩直線同時垂直於另一直線，則稱此兩直線互相平行。(2) 當兩條直線平行時，若有一條直線與其中另一條平行直線垂直，則此直線必與另一條平行直線垂直。(3) 兩平行線間的距離處處相等。平行線間的距離指的是做垂直線段的長度。」，讓學生思考彼此之異同，加深對平行意義的印象。此一部分教師主要鋪陳數學文本上關於平行的意義讓學生與現在平行的定義做比較，幫助學生學習。接著由平面上任意兩直線被一直線所截，介紹八個截角的名稱，之後介紹兩平行線被一垂直線所截，這八個截角都是 90 度，接續介紹兩平行線被任一直線所截，這八個截角的名稱與角度關係。再來是說明平行線與不平行線的截角性質，讓學生透過圖形記住截角名稱、位置、性質。

「平行與截線性質」幾何文本編排方式是先介紹平行的定義再鋪排例題；接著介紹截線、截角的意義再接續例題；以及截角性質的內容鋪陳再引進例題。至於課本內容則是由例題得出平行的意義，由平行與不平行去了解截線與截角，再說明平行線截角性質。研究團隊完成此份文本後，也經由另外兩位國中教師檢視，並延請數學教育專家進行審查，再做定稿確認，實施於教學。

(二)「平行與截線性質」學習工作單

有關學習工作單裡的題目所對應之 PISA 閱讀理解歷程，如下表 1 所示：

表 1

「平行與截線性質」學習工作單內容分析表

學習工作單之題目	PISA 閱讀理解歷程
1. 在一平面上有相異三直線 L_1 、 L_2 、 L_3 ，若 $L_1 \perp L_2$ ， $L_2 \perp L_3$ ，則 L_1 與 L_3 有什麼關係？	擷取與檢索
2. 如圖 1， $L_1 \parallel L_2$ ，那麼同位角 $\angle 1$ 與 $\angle 5$ 、 $\angle 3$ 與 $\angle 7$ 、 $\angle 4$ 與 $\angle 8$ 的度數相等嗎？	擷取與檢索
3. 如圖 2， $\angle 3 = 80^\circ$ ，求其他七個截角的度數。	擷取與檢索
4. 如圖 3， $L_1 \parallel L_2$ ， M 、 N 都是 L_1 與 L_2 的截線， $\angle 2 = 108^\circ$ 、 $\angle 4 = 81^\circ$ ，求 $\angle 1$ 、 $\angle 3$ 和 $\angle 5$ 的度數。	統整與解釋
5. 如圖 4， $L_1 \parallel L_2$ ， $M_1 \parallel M_2$ ，求 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 的度數。	擷取與檢索
6. 若 $\angle A$ 與 $\angle B$ 角的兩邊互相平行， $\angle A = 70^\circ$ ，則 $\angle B = \underline{\hspace{2cm}}$ 。	省思與評鑑
7. 如圖 5， $L_1 \parallel L_2$ ，已知 $\angle 1 = 135^\circ$ ， $\angle 2 = 55^\circ$ ，求 $\angle ABC$ 的度數。	統整與解釋

此份學習工作單之題目來源大部分選自課本及習作，至於閱讀理解歷程的「擷取與檢索」，表示能從所閱讀的題目中，找到所需要的資訊；「統整與解釋」指的是閱讀後，能正確解讀資訊的意義，完成解題；「省思與評鑑」則是將所閱讀內容，與自己原有的知識、想法和經驗相連結，綜合判斷後，提出自己的解法。研究團隊完成此份學習工作單，同樣也經由另外兩位國中教師檢視，並延請數學教育專家進行審查，再做定稿確認，做為教學實驗前、後測之用。

三、資料蒐集與分析

本研究的資料收集方式，主要以「文本收集」之方式取得，此處的文本是指學生所填答的學習工作單，也就是教學實驗中學生對於幾何文本的理解情形填答。學生是學習的主體，我們從實作中觀察學生之反應，探究如何開發合適之幾何文本，幫助國中生之閱讀理解。文本收集所得之資料由研究者分析後，也經由研究團隊成員加以討論確認。

肆、結果與討論

在本研究中，參與教師們首先討論對學生閱讀理解幾何文本的認識及教學掌握，研究團隊交叉討論，集思廣義，再行統整定稿。所完成之文本經過專家審查後，參與教師進行班級實作，從中體會所開發之幾何文本與相應之教學活動如何進行及了解學生之回饋。研究團隊所完成之「平行與截線性質」幾何文本中的評量試題依照擷取與檢索、統整與解釋、省思與評鑑分類，藉由參與教師在自己所任教班級之教學實驗，蒐集學生閱讀幾何文本之資料，作為日後設計幾何文本以幫助學生閱讀理解教學之參考。以下針對本次教學實驗所得之結果，進行整理與分析。

本研究的前測在實驗組指的是學生自行閱讀「平行與截線性質」幾何文本後，填寫學習工作單；在控制組學生指的是學生自行閱讀課本後作的測驗。後測在實驗組指的是教師引導學生閱讀「平行與截線性質」幾何文本後作的測驗；在控制組指的是教師引導學生閱讀課本後作的測驗。研究者分別計算擷取與檢索（第 1、2、3、5 題）、統整與解釋（第 4、7 題）、省思與評鑑（第 6 題），以及整份測驗的答對題數，以代表受試者在各向度試題的答題情況。

表 2 為組內迴歸係數同質性檢定的考驗結果，「擷取與檢索」的 $F(1,59) = 0.777, p > .05$ 、「統整與解釋」的 $F(1,59) = 0.448, p > .05$ 、「總分」的 $F(1,59) = 0.547, p > .05$ ，均未達顯著水準，應接受虛無假設，表示實驗組與控制組的組內迴歸係數沒有顯著差異，符合共變數組內迴歸係數同質性的假設，可以進行共變數分析。由於二組學生在前測的省思與評鑑（第 6 題）均未答對，無法進行組內迴歸係數同質性檢定考驗，故此部分直接對後測進行共變數分析。

表 2

組內迴歸係數同質性檢定摘要表

變異來源	平方和	<i>df</i>	平均平方和	<i>F</i>	顯著性
組別 * 擷取與檢索（前測）	0.750	1	0.750	0.777	.382
組別 * 統整與解釋（前測）	0.211	1	0.211	0.448	.506
組別 * 省思與評鑑（前測）	0.000	0			
組別 * 總分（前測）	1.038	1	1.038	0.547	.463

註：依變數為後測各向度

表 3 為共變數分析的結果，在排除前測的影響後，實驗組與控制組在「擷取與檢索」的 $F(1,58) = 0.997, p > .05$ 、在「省思與評鑑」的 $F(1,58) = 0.873, p > .05$ 、以及在「整體測驗」的 $F(1,58) = 0.047, p > .05$ ，均未達顯著水準，應接受虛無假設，表示實驗組與控制組在這三部分的試題答題情況均沒有顯著差異；而在「統整與解釋」的 $F(1,58) = 5.767, p < .05$ ，達顯著水準，應拒絕虛無假設，表示實驗組與控制組在「統整與解釋」的試題答題情況有顯著差異，即不同

的教學法對於受試者在「統整與解釋」的試題答題情況有顯著影響。

表 3

共變數分析摘要表

變異來源	平方和	<i>df</i>	平均平方和	<i>F</i>	顯著性
共變項：擷取與檢索（前測）	62.099	1	62.099	64.578	.000
組間：組別	0.959	1	0.959	0.997	.322
誤差	55.774	58	0.962		
共變項：統整與解釋（前測）	12.813	1	12.813	27.402	.000
組間：組別	2.697	1	2.697	5.767	.020
誤差	27.121	58	0.468		
共變項：省思與評鑑（前測）	0.001	1	0.001	0.057	.813
組間：組別	0.015	1	0.015	0.873	.354
誤差	0.969	58	0.017		
共變項：總分（前測）	155.830	1	155.830	82.714	.000
組間：組別	0.089	1	0.089	0.047	.829
誤差	109.270	58	1.884		

註：依變數為後測各向度

表 4 為實驗組與控制組的原始平均數與調整後平均數摘要表。在排除前測的影響後，實驗組在「統整與解釋」的試題答題情況（調整後的平均數 $M = 1.156$ ）顯著優於控制組的試題答題情況（調整後的平均數 $M = 0.709$ ）。

此外，為探討實驗組的學生在前、後測上有無明顯地改變，以下將針對實驗組的學生分別在「平行與截線性質」擷取與檢索、統整與解釋、省思與評鑑和總分進行後測－前測的成對樣本 t 檢定。

表 4

後測原始平均數與調整後平均數摘要表

	組別	人數	原始平均數 (標準誤)	調整後平均數 (標準誤)
擷取與檢索	實驗組	33	2.82 (1.467)	2.803 (0.171)
	控制組	28	3.04 (1.347)	3.054 (0.185)
統整與解釋	實驗組	33	1.30 (0.918)	1.156 (0.122)
	控制組	28	0.54 (0.693)	0.709 (0.133)
省思與評鑑	實驗組	33	0.03 (0.174)	0.031 (0.023)
	控制組	28	0.00 (0.000)	0.000 (0.025)
總分	實驗組	33	4.15 (2.360)	3.921 (0.240)
	控制組	28	3.57 (1.794)	3.843 (0.261)

由表 5 可知，實驗組後測和前測的成對樣本 t 檢定的結果，在「擷取與檢索」的 $t(32) = 0.511$, $p > .05$ ，未達顯著水準，應接受虛無假設，表示實驗組學生在這部分的試題答題情況沒有顯著差異，但是後測略優於前測（後測-前測 $M = .091$ ）。在「統整與解釋」的 $t(32) = 2.811$, $p < .01$ ，達顯著水準，應拒絕虛無假設，表示實驗組學生在這部分的試題答題情況有顯著差異，而且後測顯著優於前測（後測-前測 $M = 0.424$ ）。在「省思與評鑑」僅有 1 題，而且前、後測的試題答對情形一樣，所以無法比較。在「總分」的 $t(32) = 2.026$, $p > .05$ ，未達顯著水準，應接受虛無假設，表示實驗組學生在這部分的試題答題情況沒有顯著差異，但是後測略優於前測（後測-前測 $M = 0.515$ ）。

表 5

實驗組後測和前測的成對樣本 t 檢定摘要表

測驗	平均數	標準差	平均數 的標準誤	t	自由度	顯著性 (雙尾)
擷取與檢索(後-前)	0.091	0.947	0.165	0.511	32	.585
統整與解釋(後-前)	0.424	0.867	0.151	2.811**	32	.008
省思與評鑑(後-前)	0.000	0.250	0.044	0.000	32	1.000
總分(後-前)	0.515	1.460	.254	2.026	32	.051

註：** $p < .01$

根據上述的統計分析結果，在「統整與解釋」的試題答題情況，後測實驗組顯著優於控制組，即表示以文本閱讀為主進行的教學活動優於以閱讀課本為主進行的教學活動。而在探討實驗組的學生在前、後測上有無明顯改變的結果中，實驗組學生的後測表現優於前測的表現，顯示教學實驗對實驗組的學生在本測驗有良好的效果。整體而言，學生在「平行與截線性質」文本的課程實施中，後測的表現皆優於前測的表現。

伍、結論與建議

本研究所開發之幾何文本，首先藉由數學史料的鋪陳，引起學生之學習動機及思索。Fasanelli (2000) 認為在數學教學上可以藉由文本讓學生比較不同解題方法或思考方向，解放對數學的單一思考方式。研究者鋪陳《幾何原本》中數學史料的目的，是藉由介紹平行公設的內容，讓學生了解「平行」的意義。至於呈現《數理精蘊》中關於平行線部分的文本，則是讓學生經由欣賞《數理精蘊》古文中對於平行的描述，能更加清楚「平行」的概念。透過《幾何原本》和《數理精蘊》兩份數學文本對於「平行」的不同敘寫，希望學生能進一步探索，再進行之後平行課程的教學。

本份幾何文本在各主題的進行上，都先將主題概念整理在最前面，讓學生可以經由閱讀先了解此主題所要學習的重點，再來由練習範例與隨堂練習的題目，加深對本主題的了解。參與教師以 PISA 閱讀理解歷程為參考，讓學生在閱讀文本中，體會擷取與檢索、統整與解釋及省思與評鑑的歷程。在教學進行中，授課教師首先讓學生思考學過的平行或是想想生活中有那些是平行的例子，再代入《幾何原本》與《數理精蘊》中平行的定義，讓學生對於平行多一些了解，以引起學生的興趣。接著介紹截線與截角、截角性質，讓學生可以利用學過的截角性質完成之後的學習工作單。從教學觀察中發現，閱讀融入數學史素材的幾何文本，能幫助學生對於數學主題之理解，學生經由閱讀文本的過程中，發現《幾何原本》與《數理精蘊》中對於平行的定義不同，也引發相互之討論。或許是由於這樣的引導鋪陳，以致從前、後測之結果顯示出，在統整與解釋的面向上，實驗組班級有優於控制組班級的表現。

至於學習工作單上，省思與評鑑面向的題目只編入第 6 題一題，有關本題的布置，學生要思考如何畫出兩個角的兩邊要互相平行的圖形，又要進行解題，這對於剛學完平行概念的學生來說並不容易，而且大部分會畫出圖形並回答的學生，都只寫出一個答案，但是研究者要求回答兩個答案才給分，這也是學生前、後測表現都不理想的原因之一。如何開發更完整之幾何文本，讓學生在擷取與檢索及省思與評鑑的歷程上都能有所精進，正有待研究者更進一步的努力。

致謝

本文之得以完成，主要來自國科會的專題研究計畫（計畫編號：NSC 102-2511-S-845 -009）的研究成果，在此感謝國科會之補助，至於文責，則由作者自負。

參考文獻

- 左台益、呂鳳琳、曾世綺、吳慧敏、陳明璋、譚寧君（2011）。以分段方式降低任務複雜度對專家與生手閱讀幾何證明理解的影響。**教育心理學報**，**43**（閱讀專刊），291-314。doi: 10.6251/BEP.20110517
- 行政院（2013年12月5日）。江揆聽取「我國中小學學生學習表現之國際評比：現況分析與展望」報告。檢自
http://www.ey.gov.tw/News_Content.aspx?n=F8BAEBE9491FC830&s=D0739C9FEB21D331
- 沈志龍、蘇意雯（2009）。當動畫與學習工作單相遇－數學史融入國小數學教學之實作研究。**教師天地**，**163**，70-77。
- 林妙霜、蘇意雯（2009）。數學史讓數學變有趣。**師友月刊**，**509**，81-83。
- 林福來（2011年11月23日）。**數學閱讀、猜想與建模**。國立科學工業園區實驗高級中學之演講，新竹，臺灣。
- 洪萬生（2000）。《無異解》中的三案初探：一個 HPM 的觀點。**科學教育學刊**，**8**（3），215-224。
- 洪萬生、英家銘、蘇意雯、蘇惠玉、楊瓊茹、劉柏宏（2009）。**當數學遇見文化**。臺北：三民。
- 秦麗花、邱上真（2004）。數學文本閱讀理解相關因素探討及其模式建立之研究～以角度單元為例。**特殊教育與復健學報**，**12**，99-121。
- 秦麗花（2007）。**數學閱讀指導的理論與實務**。臺北：紅葉文化。
- 教育部（2008）。**國民中小學九年一貫課程綱要**。臺北：作者。
- 行政院中部聯合服務中心（2010年12月13日）。**我國參與國際學生能力評量計畫（PISA）2009 結果**。檢自
http://www.ey.gov.tw/eycc/News_Content.aspx?n=DF52F83A5B7D2A47&sms=114B66117B4BF117&s=D0C45A32CD5F9B3B
- 臺灣 PISA 國家研究中心（2008）。**PISA 閱讀素養應試指南**。檢自
http://pisa.nutn.edu.tw/download/Publishing/pisa_read_guide.pdf
- 臺灣 PISA 國家研究中心（2011）。**臺灣 PISA 2009 結果報告**。臺北：心理。
- 蔡幸霓、蘇意雯（2009）。數學史融入國小數學教學之實作研究－以分數乘、除法為例。**台灣數學教師（電子）期刊**，**20**，17-40。
- 閱讀與學習研究室（2009年5月11日）。**臺灣四年級學生閱讀素養（PIRLS 2006 報告）**。檢自
<http://lrn.ncu.edu.tw/Teacher%20web/hwawei/PIRLS%202006%20National%20Report%EF%BC%882nd%20Edition%EF%BC%89.pdf>
- 韓琦（1993）。**數理精蘊提要**。收錄於郭書春（主編），**中國科學技術典籍通彙：數學卷第三分冊**（頁 1-10）。鄭州：河南教育。

- Berlinghoff, W. P., & Gouvea, F. Q. (2008)。溫柔數學史：從古埃及到超級電腦（洪萬生、英家銘暨 HPM 團隊譯）。臺北：博雅書屋。（原作出版於 2004 年）
- Mayer, R. E. (1997)。教育心理學－認知取向（林清山譯）。臺北：遠流。（原作出版於 1987 年）
- Allington, R. L. (2006). *What really matters for struggling readers: Designing research-based programs* (2nd ed.). Boston, MA: Allyn & Bacon.
- Balacheff, N. (1990). Towards a Problématique for Research on Mathematics Teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(4), 258-272. doi: 10.2307/749524
- Borasi, R., Siegel, M., Fonzi, J. & Smith, C. F. (1998). Using transactional reading theory to support sense-making and discussion in mathematics classrooms: An exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(3), 275-305. doi: 10.2307/749791
- Budiansky, S. (2001). The trouble with the text books. *Prism*, 10(6), 24-27.
- Carter, T. A., & Dean, E. O. (2006). Mathematics intervention for grades 5-11: Teaching mathematics, reading, or both? *Reading Psychology*, 27(2-3), 127-146. doi: 10.1080/02702710600640248
- Dematte, A. & Furinghetti, F. (2011). History, figures and narratives in mathematics teaching. In V. Katz & C. Tzanakis (Eds.), *Recent developments on introducing a historical dimension in mathematics education* (pp. 103-112). Washington, DC: MAA. doi: 10.5948/UPO9781614443001.011
- Fasanelli, F. (2000). The political context. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study* (pp. 1-38). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. doi: 10.1007/0-306-47220-1_1
- Fey, J. T. (Ed.). (1984). *Computing and mathematics: The impact on secondary school curricula*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Fuentes, P. (1998). Reading comprehension in mathematics. *The Clearing House: A Journal of Educational Strategies, Issues and Ideas*, 72(2), 81-88. doi: 10.1007/0-306-47220-1_1
- Herber, H. (1978). *Teaching reading in the content areas* (2nd ed.). Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- McKenna, M. C., & Robinson, R. D. (2002). *Teaching through text: Reading and writing in the content area*. New York, NY: Pearson.
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., & Arora, A. (2012). *TIMSS 2011 international results in mathematics*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.
- Muth, K. D. (1984). Solving arithmetic word problems: Role of reading and computational skills. *Journal of Educational Psychology*, 76(2), 205-210. doi: 10.1037//0022-0663.76.2.205
- OECD (2010). *PISA 2009 Assessment framework: Key competencies in reading, mathematics and science*. Paris, France: OECD Publishing. doi: 10.1787/9789264062658-en
- Ostler, E. (1997). The effect of learning mathematical reading strategies on secondary students' homework grades. *The Clearing House: A Journal of Educational Strategies, Issues and Ideas*, 71(1), 37-40. doi: 10.1080/00098659709599320
- Palinscar, A. S., & Brown, A. L. (1984). Reciprocal teaching of comprehension-fostering and comprehension-monitoring activities. *Cognition and instruction*, 1(2), 117-175. doi: 10.1207/s1532690xci0102_1

- Pengelly, D. (2011). Teaching with primary historical sources: Should it go mainstream? Can it? In V. Katz & C. Tzanakis (Eds.), *Recent developments on introducing a historical dimension in mathematics education* (pp. 1-8). Washington, DC: MAA. doi: 10.5948/UPO9781614443001.002
- Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Richardson, J. S., Morgan, R. F., & Fleener, C. E. (2011). *Reading to learn in the content areas* (8th ed.). Belmont, CA: Wadsworth.
- Schumm, J. S., & Mangrum, C. T. (1991). FLIP: A framework for content area reading. *Journal of Reading*, 35(2), 120-124.
- Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(1), 4-36. doi: 10.2307/30034698
- Senk, S. L. (1985). How well do students write geometry proofs? *Mathematics Teacher*, 78(6), 448-456.
- Singer, H., & Donlan, D. (1985). *Reading and learning from text*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Vaughan, J. L., & Estes, T. H. (1986). *Reading and reasoning beyond the primary grades*. Boston, MA: Allyn & Bacon.
- Vygotsky, L. (1978). Interaction between learning and development. In M. Gauvain & M. Cole (Eds.), *Readings on the development of children* (pp. 34-40). New York, NY: Scientific American Books.
- Woodward, A. & Elliott, D. L. (1990). Textbooks: Consensus and controversy. In D. L. Elliott & A. Woodward (Eds.), *Textbooks and schooling in the United States* (Yearbook of the National Society for the Study of Education) (Vol. 89, pp.146-161). Chicago, IL: University of Chicago Press.
- Yang, K. L. (2012). Structures of cognitive and metacognitive reading strategy use for reading comprehension of geometry proof. *Educational Studies in Mathematics*, 80(3), 307-326. doi: 10.1007/s10649-011-9350-1
- Yang, K. L., & Lin, F. L. (2008). A model of reading comprehension of geometry proof. *Educational Studies in Mathematics*, 67(1), 59-76. doi: 10.1007/s10649-007-9080-6
- Yang, K. L., & Lin, F. L. (2012). Effects of reading-oriented tasks on students' reading comprehension of geometry proof. *Mathematics Education Research Journal*, 24(2), 215-238. doi: 10.1007/s13394-012-0039-2

附錄一

平行與截線性質文本

請問：什麼是平行？請利用日常生活中的例子來說明平行的意義。

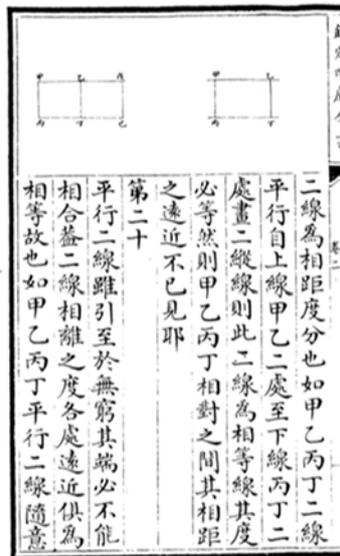
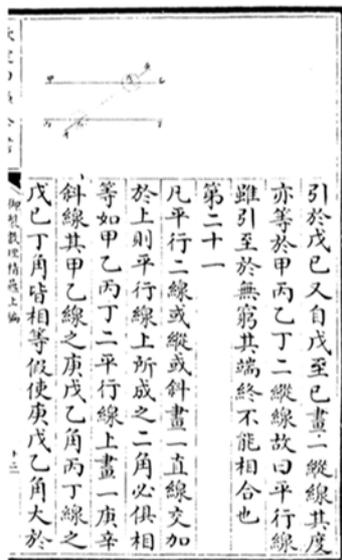
一、《幾何原本》的平行公設

歐幾里得 (Euclid, 公元前 300 年前後) 的《幾何原本》是幾何史上第一本有系統地討論幾何的著作。雖然本書裏面的結果大多數都是前人已知的，但它所採用的公理方法卻被數學家沿用至今。精心選出來的 5 條公理、5 條設準，充份顯示出歐幾里得的天才及驚人的洞察力。特別是第五設準的引入，吸引了無數一流的數學家嘗試去證明，這導致非歐幾何的出現，讓我們對歐氏幾何有更深入的了解。

平行設準：如果一條線段與兩條直線相交，在某一側的內角和小於兩直角，那麼這兩條直線在不斷延伸後，會在內角和小於兩直角的一側相交。

二、在《數理精蘊》中關於平行線的部分

清朝康熙皇帝時期的一本關於數學的書籍《御製數理精蘊》，簡稱《數理精蘊》，是一部介紹包括西方數學知識在內的數學百科全書。全書分上下兩編及附錄。上編五卷專講數理，立綱明體，是全書的基本理論部分。卷二至卷四為《幾何原本》，是根據張誠、白晉的法文譯本修訂的，共 12 章，分別講述了三角形、四邊形、圓及內接外切多邊形、立體幾何、比例、相似形、勾股定理、圓錐體及球與橢圓體的表面積和體積、幾何作圖法等內容。以下是在《數理精蘊》中關於平行線的部分 (<http://archive.org/stream/06076284.cn#page/n76/mode/2up>)



主題一：平行

觀察學校運動場的直線跑道，各跑道之間的分隔線是否互相平行不會相交？起跑線是否與各分隔線都垂直？在日常生活中，常用「平行」來描述同一平面上兩條永不相交的直線，但是只靠延長直線去檢查兩條直線有沒有相交是很困難的。

平行線的意義：

- (1) 在同一平面上，兩直線同時垂直於另一直線，則稱此兩直線互相平行。
- (2) 當兩條直線平行時，若有一條直線與其中另一條平行直線垂直，則此直線必與另一條平行直線垂直。
- (3) 兩平行線間的距離處處相等。平行線間的距離指的是做垂直線段的長度。

例 1. 如圖 1，若直線 L_1 與直線 L_2 同時垂直 L 於 A 、 B 兩點，則 L_1 與 L_2 會相交嗎？

說明：設 L_1 、 L_2 交於一點 C ，如下圖，則 A 、 B 、 C 三點可形成一個三角形。

在 $\triangle ABC$ 中， $\because \angle CAB$ 、 $\angle CBA$ 都是直角， $\therefore \angle CAB + \angle CBA + \angle C > 180^\circ$ ，但已知三角形的內角和為 180° ，不可能超過 180° ，所以我們的假設是錯誤的，因此當 L_1 與 L_2 同時垂直於 L 時， L_1 與 L_2 不會相交

在一平面上，兩直線如果可以找到一條共同的垂直線，我們就稱這兩直線互相平行，如圖 2， L_1 與 L_2 同時垂直於直線 L ，所以它們互相平行，記作「 $L_1 \parallel L_2$ 」，讀作「 L_1 平行於 L_2 」。

例 2. 如圖 3，在一平面上有相異三直線 L_1 、 L_2 、 L_3 ，若 $L_1 \parallel L_2$ ， $L_2 \parallel L_3$ ，則 L_1 與 L_3 有什麼關係？

說明：若 $L_1 \parallel L_2$ ，則會有一條直線 M 同時垂直於 L_1 、 L_2 ，又 $L_2 \parallel L_3$ 時， M 也會垂直於 L_3 ， $\therefore M$ 同時垂直於 L_1 、 L_3 ，因此 $L_1 \parallel L_3$ 。

也就是說，平面上的相異三直線 L_1 、 L_2 、 L_3 ，若 $L_1 \parallel L_2$ ， $L_2 \parallel L_3$ ，則 $L_1 \parallel L_3$ 。

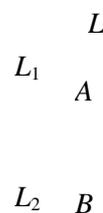


圖 1

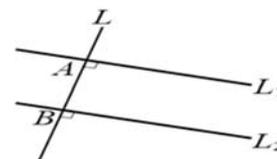


圖 2

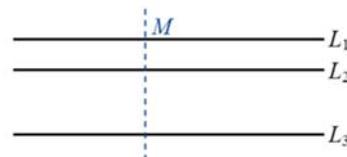


圖 3

主題二：截線與截角

在一平面上如圖 4，若直線 L 同時與另兩條直線 L_1 、 L_2 交於不同的兩點，如圖 3，我們稱直線 L 為 L_1 、 L_2 的截線。

而截線 L 與 L_1 、 L_2 形成八個交角，即圖中的 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、……、 $\angle 7$ 、 $\angle 8$ ，這些角都稱為截角。

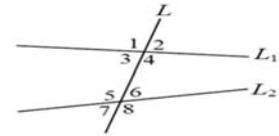


圖 4

截角與截角之間，隨著彼此的位置關係，會有不同的名稱。

同位角： $\angle 1$ 與 $\angle 5$ 分別在 L_1 與 L_2 的上方，且都在截線 L 的左方，像這樣位置對應相同的一組角稱為同位角。同樣的， $\angle 2$ 與 $\angle 6$ 、 $\angle 3$ 與 $\angle 7$ 、 $\angle 4$ 與 $\angle 8$ 也是同位角。

內錯角： $\angle 4$ 與 $\angle 5$ 在 L_1 與 L_2 的內側，且交錯在截線 L 的兩側，像這樣的一組角稱為內錯角。同樣的， $\angle 3$ 與 $\angle 6$ 也是內錯角。

同側內角： $\angle 3$ 與 $\angle 5$ 在 L_1 與 L_2 的內側，且都在截線 L 的同側，像這樣的一組角稱為同側內角。同樣的， $\angle 4$ 與 $\angle 6$ 也是同側內角。

例 3. 如圖 5，直線 L 為 L_1 、 L_2 的截線，則：

- (1) $\angle 2$ 的同位角是_____。
- (2) $\angle 3$ 的內錯角是_____。
- (3) $\angle 4$ 的同側內角是_____。

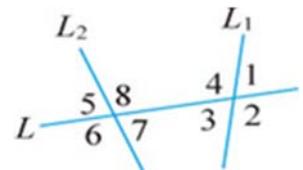


圖 5

主題三：平行線的截線與應用

兩平行線被一直線所截的同位角相等、內錯角相等、同側內角互補。

當兩條平行線被另一條線所截時，截出來的同側內角、內錯角、同位角有什麼性質呢？我們來看下面的說明。

☆如圖 6， $L_1 \parallel L_2$ ，若截線 L 與 L_1 垂直，則 L 也必與 L_2 垂直，此時 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、……、 $\angle 7$ 、 $\angle 8$ 八個截角都是直角。

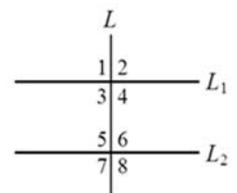


圖 6

☆但是如果截線與平行線不垂直呢？如圖 7， $L_1 \parallel L_2$ ， L 是截線，而且 L 與 L_1 、 L_2 不垂直。

我們先來看同位角，如圖 7 中的 $\angle 2$ 與 $\angle 6$ 。

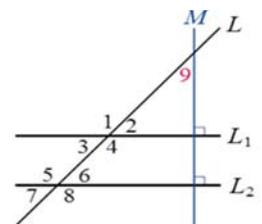


圖 7

$\because L_1 \parallel L_2$ ，因此可找到一條垂直線 M 同時與 L_1 、 L_2 垂直。

由圖 7 可知 $\angle 2 + \angle 9 + 90^\circ = 180^\circ$ ， $\angle 6 + \angle 9 + 90^\circ = 180^\circ$ ，

因此 $\angle 2 + \angle 9 + 90^\circ = \angle 6 + \angle 9 + 90^\circ$ ， $\therefore \angle 2 = \angle 6$ 。

由上可知，兩平行線被一直線所截的同位角相等。

接下來，我們來看兩平行線的內錯角，如圖 7 中的 $\angle 3$ 與 $\angle 6$ 。

當 $L_1 \parallel L_2$ 時，同位角 $\angle 2 = \angle 6$ ，又 $\angle 3 = \angle 2$ (對頂角相等)，

$\therefore \angle 3 = \angle 6$ 。同樣的，另一組內錯角 $\angle 4 = \angle 5$ 。

因此，兩平行線被一直線所截的內錯角相等。

最後來看同側內角，如圖 8 中的 $\angle 4$ 與 $\angle 6$ 。

當 $L_1 \parallel L_2$ 時，同位角 $\angle 2 = \angle 6$ ，又 $\angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle 4 + \angle 6 = 180^\circ$ 。同樣的，另一組同側內角 $\angle 3 + \angle 5 = 180^\circ$ 。

因此，兩平行線被一直線所截的同側內角互補。

例 4. 如圖 9， $L_1 \parallel L_2$ ， L 是 L_1 與 L_2 的截線，若 $\angle 1 = 50^\circ$ ，則：

- (1) $\angle 1$ 的同位角是_____，它是_____度。
- (2) $\angle 3$ 的同位角是_____，它是_____度。
- (3) $\angle 4$ 的內錯角是_____，它是_____度。
- (4) $\angle 3$ 的同側內角是_____，它是_____度。

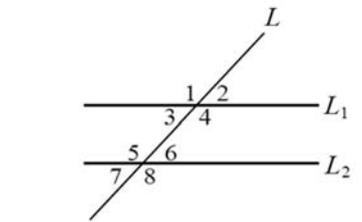


圖 8

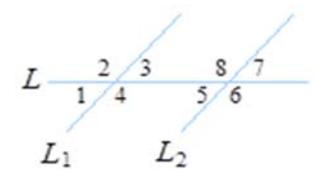


圖 9

解： $\because \angle 1$ 是 $\angle 3$ 的對頂角 $\therefore \angle 1 = \angle 3 = 50^\circ$ ， $\angle 2$ 和 $\angle 4$ 都是 $\angle 1$ 的補角，

$\therefore \angle 4 = \angle 2 = 180^\circ - \angle 3 = 130^\circ$ 。 \because 平行線所截的同位角相等 $\therefore \angle 5 = \angle 1 = 50^\circ$ ，

$\angle 6 = \angle 4 = 130^\circ$ ， $\angle 7 = \angle 3 = 50^\circ$ ， $\angle 8 = \angle 2 = 130^\circ$ 。

由上可知， $\angle 1 = \angle 5 = \angle 3 = \angle 7 = 50^\circ$ ； $\angle 2 = \angle 8 = \angle 4 = \angle 6 = 130^\circ$ 。

例 5. 如圖 10， $L_1 \parallel L_2$ ， M 、 N 都是 L_1 與 L_2 的截線，

其中 $N \perp L_2$ 。根據圖上所標示的度數，

求 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle 3$ 和 $\angle 4$ 的度數。

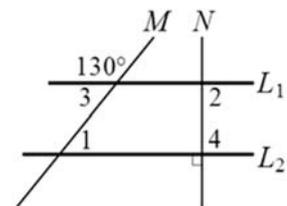


圖 10

例 6. 如圖 11， $L_1 \parallel L_2$ ， $M_1 \parallel M_2$ ，求 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 的度數。

解： $\because M_1 \parallel M_2$ ， $\therefore \angle 1 = 68^\circ$ (同位角相等)；

$\because L_1 \parallel L_2$ ， $\therefore \angle 2 = \angle 1 = 68^\circ$ (同位角相等)。

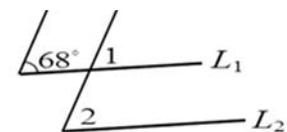


圖 11

例 7. 如圖 12, $L_1 \parallel L_2$, 已知 $\angle 1 = 50^\circ$, $\angle 2 = 60^\circ$, 求 $\angle ABC$ 的度數。

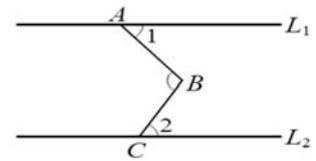


圖 12

如圖 13, $\because L_1 \parallel L_2$, $\therefore \angle ADC = \angle 2 = 60^\circ$ (內錯角相等),
 $\because \angle ABC$ 是 $\triangle ABD$ 的外角,
 $\therefore \angle ABC = \angle 1 + \angle ADC = 50^\circ + 60^\circ = 110^\circ$ 。

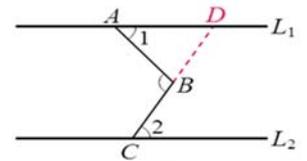


圖 13

如圖 14, 過 B 點作 $L_3 \parallel L_1$ $\because L_1 \parallel L_2$, $\therefore L_3 \parallel L_2$ 。
 $\because L_1 \parallel L_3$, $\therefore \angle 3 = \angle 1 = 50^\circ$ (內錯角相等),
 $\because L_2 \parallel L_3$, $\therefore \angle 4 = \angle 2 = 60^\circ$ (內錯角相等),
 因此 $\angle ABC = \angle 3 + \angle 4 = 50^\circ + 60^\circ = 110^\circ$ 。

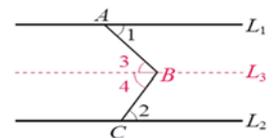


圖 14

附錄二

平行與截線性質學習工作單

班級：____ 座號：____ 姓名：_____

1. 在一平面上有相異三直線 L_1 、 L_2 、 L_3 ，若 $L_1 \perp L_2$ ， $L_2 \perp L_3$ ，
則 L_1 與 L_3 有什麼關係？

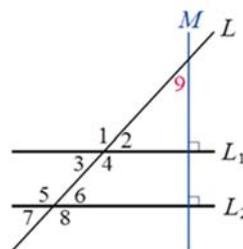


圖 1

2. 如圖 1， $L_1 \parallel L_2$ ，那麼同位角 $\angle 1$ 與 $\angle 5$ 、 $\angle 3$ 與 $\angle 7$ 、
 $\angle 4$ 與 $\angle 8$ 的度數相等嗎？

3. 如圖 2， $\angle 3 = 80^\circ$ ，求其他七個截角的度數。

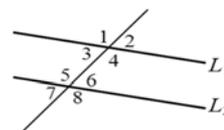


圖 2

4. 如圖 3， $L_1 \parallel L_2$ ， M 、 N 都是 L_1 與 L_2 的截線， $\angle 2 = 108^\circ$ 、
 $\angle 4 = 81^\circ$ ，求 $\angle 1$ 、 $\angle 3$ 和 $\angle 5$ 的度數。

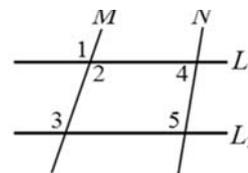
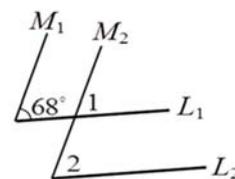


圖 3

5. 如圖 4， $L_1 \parallel L_2$ ， $M_1 \parallel M_2$ ，求 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 的度數。



6. 若 $\angle A$ 與 $\angle B$ 角的兩邊互相平行， $\angle A = 70^\circ$ ，
則 $\angle B =$ _____。

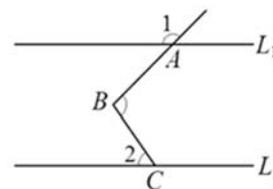


圖 5

7. 如圖 5， $L_1 \parallel L_2$ ，已知 $\angle 1 = 135^\circ$ ， $\angle 2 = 55^\circ$ ，
求 $\angle ABC$ 的度數。