

ISSN 2312-7716
DOI 10.6610/TJMT

第 39 卷第 2 期
二〇一八年十月
VOL. 39 NO. 2
October 2018

臺灣數學教師

Taiwan Journal of Mathematics Teachers



國立臺灣師範大學數學系
Department of Mathematics,
National Taiwan Normal University



台灣數學教育學會
Taiwan Association
for Mathematics Education

發行單位 | 國立臺灣師範大學數學系
台灣數學教育學會

編輯委員會

主編	林原宏	國立臺中教育大學數學教育學系
副主編	李源順	臺北市立大學數學系
	林碧珍	國立清華大學數理教育研究所
編輯委員	林素微	國立臺南大學教育學系
(依姓氏筆劃排序)	徐偉民	國立屏東大學教育學系
	秦爾聰	國立彰化師範大學科學教育研究所
	張淑怡	國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系
	張煥泉	苗栗縣頭份鎮信德國民小學
	陳嘉皇	國立臺中教育大學數學教育學系
	楊凱琳	國立臺灣師範大學數學系
	劉建成	桃園市平鎮區平鎮國民中學
	劉祥通	國立嘉義大學數理教育研究所
	鄭章華	國家教育研究院
	鍾靜	國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系

地址	臺北市汀州路四段 88 號國立臺灣師範大學數學系 《臺灣數學教師》
電話	886-2-7734-6576
傳真	886-2-2933-2342
電子郵件	tjmtedit@gmail.com
網址	http://tame.tw/news/news.php?class=204

附 啟

1. 本期刊自 2014 年 35 卷起每年出版二期。
2. 本期刊原名《台灣數學教師(電子)期刊》，自 2014 年 35 卷第 2 期起改名為《臺灣數學教師》。
3. 本期刊電子郵件由自 2015 年 36 卷第 1 期起改為 tjmtedit@gmail.com。

版權所有，轉載刊登本刊文章需先獲得本刊同意，翻印必究

2017-2018 年審查委員
2017-2018 Editorial Review Board

王美娟 Mei-Chuan Wang

臺北市立大學數學系
Department of Mathematics,
University of Taipei

左太政 Tai-Cheng Tso

國立高雄師範大學數學系
Department of Mathematics,
National Kaohsiung Normal University

李心儀 Shin-Yi Lee

臺北市立大學教育學系
Department of Education,
University of Taipei

阮正誼 Cheng-I Juan

高雄市梓官國民小學
Zihguan Elementary School,
Kaohsiung City

林松江 Hsiao-Fang Lin

國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系
Department of Mathematics and Information Education,
National Taipei University of Education

姚如芬 Ju-Fen Yao

國立嘉義大學數理教育研究所
Graduate Institute of Mathematics & Science Education,
National Chiayi University

施皓耀 Haw-Yaw Shy

國立彰化師範大學數學系
Department of Mathematics,
National Changhua University of Education

孫扶志 Fu-Chih Sun

朝陽科技大學幼兒保育系
Department of Early Childhood Development and
Education, Chaoyang University of Technology

徐偉民 Wei-Min Hsu

國立屏東大學教育學系
Department of Education,
National Pingtung University

袁媛 Yuan Yuan

中原大學教育研究所
Graduate School of Education,
Chung Yuan Christian University

曾建銘 Chien-Ming Cheng

國家教育研究院
National Academy for Educational Research

張子貴 Tzu-Kuei Chang

國立東華大學應用數學系
Department of Applied Mathematics,
National Dong Hwa University

張其棟 Chi-Tung Chang

逢甲大學應用數學系暨微積分教學中心
Department of Applied Mathematics,
Feng Chia University

張淑怡 Shu-Yi Chang

國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系
Department of Mathematics and Information Education,
National Taipei University of Education

許慧玉 Hui-Yu Hsu

國立清華大學數理教育研究所
Graduate Institute of Mathematics and Science,
National National Tsing Hua University

陳嘉皇 Chia-Huang Chen

國立臺中教育大學數學教育學系
Department of Mathematics Education,
National Taichung University of Education

2017-2018 年審查委員 (續)
2017-2018 Editorial Review Board (continued)

黃一泓 Yi-Hung Huang

國立臺中教育大學數學教育學系
Department of Mathematics Education,
National Taichung University of Education

黃馨瑩 Yi-Hung Huang

國家教育研究院
National Academy for Educational Research

葉啟村 Chi-Tsuen Yeh

臺南大學應用數學系
Department of Applied Mathematics,
National University of Tainan

楊晉民 Jinn-Min Yang

國立臺中教育大學數學教育學系
Department of Mathematics Education,
National Taichung University of Education

劉宣谷 Hsuan-Ku Liu

國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系
Department of Mathematics and Information Education,
National Taipei University of Education

鄭章華 Chang-Hua Chen

國家教育研究院
National Academy for Educational Research

鄭英豪 Ying-Hao Cheng

臺北市立大學數學系
Department of Mathematics,
University of Taipei

謝佳叡 Chia-Jui Hsieh

國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系
Department of Mathematics and Information Education,
National Taipei University of Education

主編的話

近來台灣各地漸有涼涼的秋意，而秋天代表收穫的季節，也正是本期刊近年來努力發展的寫照。本期刊由國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會共同發行，此次發行第 39 卷第 2 期。這個期刊的論文主軸為數學教學與學習活動的實證研究，經過這幾年大家的努力，已成為數學教育實務研究論文發表與交流的園地。誠摯歡迎大家持續將數學教與學的研究論文投稿至本期刊。透過大家分享與交流，提昇數學教育紮根研究。

本期論文共有三篇，第一篇是莊純芬、劉祥通、林威宇、方盈云所發表之〈個案資優生對平均數問題解題表現之研究〉，是有關六年級資優生在「平均數問題」的問題解決表現之個案研究，根據結構式工作單晤談和 Polya 解題步驟分析，可以發現資優生在問題解決思維和表現有特殊性。目前國小數學課程中並無「平均數問題」單元但其問題卻可見於各種數學內容，本文研究發現可以後續研究參考。第二篇是王筱妮、梁淑坤所發表之〈桌遊融入國小三年級數與計算課程之設計與反思〉，在數與計算的課程學習後輔以自行設計之桌遊活動，在質量兼具的分析中發現，桌遊活動能提升學習興趣及學業成績。第三篇是蔡育知所發表〈數學素養導向教學：七年級以密碼為主題之代數課程與教學設計〉，這篇論文以國中「一元一次方程式」單元，設計跨領域的密碼主題，設計素養導向的教學模組，可以發現能有效引起學生學習興趣，而作者也提出其教學過程想法和反思。

本期刊能順利出版完成，必須感謝很多人。首先，感謝所有審查委員撥冗貢獻專業提供寶貴審查意見，同時也要由衷感謝兩位副主編和編輯委員會所有委員的奉獻協助，以及編輯助理的辛勞認真。由於您們的協助參與，讓本期刊品質不斷精進以臻於完善。最後，尚祈教育先進繼續給予本期刊建議與鼓勵，讓本期刊在精益求精中不斷成長。

《臺灣數學教師》主編

林原宏 謹誌

臺灣數學教師

第 39 卷 第 2 期

2005 年 3 月創刊

2018 年 10 月出刊

目錄

- | | |
|--|----|
| 個案資優生對平均數問題解題表現之研究
／莊純芬、劉祥通、林威宇、方盈云 | 1 |
| 桌遊融入國小三年級數與計算課程之設計與反思
／王筱妮、梁淑坤 | 23 |
| 數學素養導向教學：七年級以密碼為主題之代數課程與教學
設計
／蔡育知 | 50 |

Taiwan Journal of Mathematics Teachers

Vol. 39 No. 2

First Issue: March 2005

Current Issue: October 2018

CONTENTS

- | | |
|---|----|
| A Study of a Gifted Student's Problem Solving Performance on Mathematical Averaging Problems
／Chun-Fen Chuang、Shiang-Tung Liu、Wei-Yu Lin、Ying-Yun Fang | 1 |
| A Research on the Development and Integration of Board Game into 3rd Grade Number and Operation Instruction
／Hsiao-Ni Wang、Shuk-Kwan S. Leung | 23 |
| A Mathematical Literacy-Based Curriculum : Curriculum Designs of Algebra Courses with Basic Cryptography for Grade 7 Students
／Yu-Jr Tsai | 50 |

莊純芬、劉祥通、林威宇、方盈云（2018）。

個案資優生對平均數問題解題表現之研究。

臺灣數學教師，39（2），1-22

doi: 10.6610/TJMT.201810_39(2).0001

個案資優生對平均數問題解題表現之研究

莊純芬¹ 劉祥通² 林威宇² 方盈云²

¹雲林縣油車國小

²國立嘉義大學數理教育研究所

主要目的在探討一位六年級資優生，對於平均數問題之解題表現。本研究為個案研究，工作單以平均數問題為主軸，設計基礎題和進階題各五個題目，限於篇幅本文僅呈現三題，本研究運用結構式工作單晤談法蒐集資料，並以 Polya 解題步驟來分析資料。研究結果如下述：「瞭解問題」：個案具有敏銳的洞察力看到問題的脈絡與核心。「擬定計畫」：個案在看透問題脈絡的關鍵後，能夠擬定完備的解題計畫，有效的整合題目給予的條件以縮短解題路徑，並獲得正確答案。「驗算與回顧」：個案在解決問題後有反思的表現或提出其他策略，以回顧答案的合理性。

關鍵詞：平均數；資優生；解題表現

壹、研究背景

美國數學教師協會（National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000）所發表之學校數學原則與標準（Principles and Standards for School Mathematics）中，強調數學之五大能力的第一項為數學即問題解決（Mathematics as Problem Solving）。我國自九年一貫以來，數學學習領域課程的目標之一也是在強調能力的養成，培養學生「發展形成問題與解決數學問題的能力」（中華民國教育部，2000）。學生解題時，如何思考問題、整合資源，找到通往解題的路徑，甚而在解題的過程中自我省思而獲得新的洞見，方是數學解題之價值所在。

數學學習的主要目的在於培養學生解決日常生活問題，而平均數是日常生活中經常被運用到的數學知識之一。對很多學生來說，處理平均數只是一種計算的行為，而非一個概念；關於平均數的知識從頭到尾只是一個無創造性的計算公式（Pollatsek, Lima & Well, 1981），但平均數的應用範圍很廣泛，並非可以用公式解決所有與平均數相關的問題。

研究者認為資優生天生賦與的特質，讓資優生具有厚實的數學知識架構，面對問題時，應該可以快速的找到問題與概念之間所連接的橋梁而順利解題。Steiner（2006）對於資優生的解題策略認為，當面對較新奇或非例行性的問題情境時，資優生較一般生能選擇正確的解題策略，在解題策略的運用上，資優生會使用其原先所具備的概念為基礎，進行有效率的策略思考與分析，建構自己的解題計劃。本研究的目的旨在於資優生較勇於嘗試以舊知識或經驗，來解決所面對的問題，經由分析資優個案的解題表現，找出其解題策略，可以瞭解資優生如何運用各種數學知識去解決問題，也可以使學校教師瞭解資優生的解題思維。

本研究對象選擇一位智能優異的國小學生小郡（化名）。由於個案在上、下山的速率問題裡，藉由對問題的理解與思考後使用舊經驗與知識連結，而得到有創意的解題策略；小郡過去不曾參與坊間數學相關之補習，因此研究者藉由此個案的特質來探討資優生在平均數的解題表現。而根據前述之研究目的，本研究所欲探討的問題為：根據個案資優生在結構式工作單上平均數非例行性問題的解題表現，依據 Polya（1957）解題步驟中所提出「瞭解問題」、「擬定計畫」和「驗算與回顧」三個面向為分析架構，分析個案資優生的解題表現為何。

貳、文獻探討

為探究個案資優生對平均數問題之解題表現，文獻分成數學問題解決、數學解題歷程與因素、資優生的數學解題和平均數等四項，作為研究者研究時的理論與依據。

一、數學問題解決

問題解決可以被視為有兩個組成要素：首先是探索，探索問題中所有可能存在的關係，並採用歸納策略以幫助發現；其次是確認，利用演繹法證明一般化的綜合歸納，而對這些相關性予以檢驗確認（Morris, 1983）。「問題解決（簡稱解題）」是一個複雜的結構，涉及高層次思維技能，不只是在知識面上回答問題，且存在於許多不同的學科和專業領域裡，有許多不同的意義（Liu, 1993）。

Mayer 和 Hegarty(1996)認為數學問題的型態有二：「例行性問題」(routine problem)與「非例行性問題」(non-routine problem)。「例行性問題」是指問題解決者知道如何解決這個問題也知道何種解法最適切；「非例行性問題」是指問題者有了問題卻不能立刻知道如何解決。1977 年美國數學督導協會(National Council of Supervisors of Mathematics [NCSM])，制定了一個全國數學教師行動綱領報告，其中提出「解題」是非常重要的，尤其是在解非例行性的問題。

Polya (1957) 在其所著的「怎樣解題」(How to solve it) 一書中，討論了問題解決的四個階段：(一)理解問題(understanding the problem)；(二)擬定計劃(devising a plan)；(三)執行計劃(carrying out the plan)；(四)回顧解答(looking back)。在第一階段裡，解題者必需瞭解題意，並識別已知數與未知數，以及題意中所能運用的條件；在第二階段裡，解題者根據題意，從自我舊經驗中搜尋相關性的問題，而後設計可能成功的計畫；在第三階段，解題者將計畫付諸實行，並核對步驟的正確性與否；最後，解題者根據題意的條件，對答案再做一次的驗算與確認（Leblanc, Proudfit, & Putt, 1980）。研究者舉例說明如後：一輛校車最多能載 45 人，今有 100 位同學要參加旅行，請問需要幾輛校車來載？此問題分成四個階段來解析，理解問題：校車最多能載 45 人，是不能超載的，多出來的人數 10，就要多一輛車來載；擬訂計畫：中低年級學生可能用畫圖來表徵連減法策略、也可能直接用除法運算（包含除）求商數；執行計畫：得到商 2，餘數 10，正確是 3 輛車，有些學生回答 2 輛車，也有些回答 2 輛車，剩下位 10 同學，回顧解答：除了驗算外，反思答案的合理性更重要，回顧是否回答了問題？否則答非所問，不就是

沒有回顧答案的合理性？

根據 Freudenthal (1991) 的觀點，數學活動是一個解決問題的活動，從真實的情境中去找問題、組織問題。美國數學教師協會 (NCTM, 2000) 課程標準指出解題的重要，並強調所有學生能夠透過解題建立新的數學知識、解決情境中所產生之問題、發展多樣策略以解決問題與監督和反思解題過程。因此，透過數學解題任務的過程，解題活動不僅僅是學習數學的目標，也是學習數學的方法，更是學習數學的必要條件。因此，為深入瞭解數學解題的意涵，本節分為兩部分，第一部份探討數學解題歷程，第二部份探討非例行性數學解題。

兒童在入學前就會利用手指或具體物來協助計算，這是兒童生活經驗中的非正式算術，但在入學後，接觸的是正式的運算過程及公式，對學童而言，較難理解與應用。當兒童在面對問題時，會很自然的在腦海中浮現解決的方法，這些方法通常是兒童感覺最容易理解的方式，但這些簡單的、自然的心理過程，卻常常隱藏於兒童的心理層面，形成另外一種解題能力 (Lamon, 2002)。因此兒童常會自創過程 (Ginsburg, 1989; Groen & Resnick, 1977)，也就是結合正式與非正式的數學經驗與知識，發明一些方法來解決問題，而這些自行發明的解題策略，通常具有原創性（因為學生尚未經歷解這些問題的課程），也常被教師拿來當作引導教學時的參考 (Cai, 2005)。

綜合上述學者觀點，學生透過解決非例行性問題，應用先前學習的概念、知識或原理來擬定適當的解題策略，從而培養出帶著走的基本能力。

二、數學解題歷程與影響的因素

Mayer (1992) 從認知心理學的觀點來看數學解題的過程，將其區分成：問題轉譯 (problem translation)、問題整合 (problem integration)、解題計畫及監控 (solution planning and monitoring)、解題執行 (solution execution) 四階段。Mayer (1992) 也強調解文字題時，問題轉譯需要有語言 (linguistic) 知識與語意 (semantic) 知識，問題整合需要有基模 (schematic) 知識，解題計畫及監控需要有策略 (strategies) 知識，解題執行則需有程序性 (procedural) 知識。

Schoenfeld (1985) 強調數學解題需要考慮四個變因：資源 (resources)、捷思 (heuristics)、監控 (control) 及信念系統 (belief system)。

(一)資源

是指解題者所擁有的數學知識能有效地解決問題，包括了數學事實、程序及技巧等訊息。

(二)捷思

是指捷思策略而言，許多的解題研究都非常重視受試者在解題歷程所使用的捷思策略（即一般的解題技巧和策略）；例如：圖示、與所利用的相關問題與所重新形成的問題等。

(三)監控

是指著重解題者在解題時，如何決定計畫、如何選擇目標和次目標，以及如何評估解題結果等方面，包括計畫、監控、決策的評估與有意識的後設認知行為。Schoenfeld（1985）認為控制的因素與心理學上的後設認知能力有相當大的關連性。

(四)信念系統

是指解題者對於數學的觀點，其決定性的因素，包含關於自己、關於環境、關於題材與關於數學等決定個體的解題行為。

說明例：某水果商以每斤 40 元的價格買進水果 50 斤，依過去的經驗，有些水果因損壞而賣不出去，而賣出去的比率是 80%，水果如果想賺 20%，每斤應該賣多少元？研究者說明如下：

資源： $40 \times 50 = 2000$ （計算出成本為 2000 元）

$50 \times 80\% = 40$ （計算出可賣出水果的斤數）

$40 \times 50 \times 120\% = 2400$ （計算賺 20%的總金額）

捷思： $40 \times 50 \times 120\% = \square \times 40 \Rightarrow \square = 60$ （元）

（透過賺 20%的總金額，回推一斤單價）

監控： $60 \times 40 = 2400 = 2000 \times 120\%$

（檢驗本金的 120%是否等於售價×賣出的重量數）

信念：某些學生認為，題目中敘述水果有 20%沒有賣完，卻要賺 20%，必定不可能，所以相信無解。可見，有此信念，影響了他們解題的表現與動機。從另一觀點，學

生的解題資源不足，也會影響了他們的解題信念。東西沒有賣完，只要售價夠高，還是有可能賺取利潤，有了這樣的解題先備知識，比較不會有錯誤的信念。

因此研究者認為：解題者在解非例行性問題時，思考問題、整合資源以找到通往解題的路徑，甚至藉由解題過程中自我省思並獲得新的洞見，這樣才能稱為有意義的學習。

三、資優生的數學解題特質與策略

Borkowski 與 Peck（1986）指出，大多數成功的資優生通常能夠了解自己的認知歷程，且能把握適當的時機，運用最適當的策略解決問題。因此，在解題策略的應用上，資優生會使用原先所具備的概念為基礎，建構自己的解題計畫（Steiner, 2006）。

Davis 與 Rimm（2004）統整出許多資優生的特質，與解題較有關的特質如下：

- （一）優異的分析能力與卓越的推理、解題能力。
- （二）使用抽象、複雜與具邏輯性的高層次思考能力與有效率的解題策略。
- （三）具有洞察力、看見問題的架構、歸納規律並推廣到其他問題。
- （四）自我反思、較佳的自覺與後設認知能力。
- （五）具有創意與想像力，探究為何（why）以及如何（how）。

Polya（1957）認為成功的解題主要來自於擬定一個可行的策略，策略可能是逐漸地形成，也可能是在不成功的嘗試及一段時間的醞釀之後，瞬間突然產生的靈感（inspiration）。所謂的解題策略是指在數學解題的歷程中，對一個特殊的非例行性問題，擬定一個適當的解題計畫（黃敏晃，1987）。

Steiner（2006）對於資優生的解題策略指出，當其面對較新奇的非例行性問題時，資優生通常比一般生更能選擇正確的解題策略，在解題策略的運用上，資優生會運用其原先所具備的數學知識，進行有效率的策略思考與分析，建構出自己的解題計畫。例如 Grouws（2011）的「約翰買了一些蘋果。如果，每顆價錢為 0.3 美元，他會剩下 3 美元；若每顆 0.4 美元則會不夠 1 美元。請問，約翰買了多少顆蘋果？」中，一般解法應是 0.3 美元和 0.4 美元為 0.1 美元之價差是影響約翰剩下 3 美元和不夠 1 美元，所以 $0.3x + 3 = 0.4x - 1$ ，經過移項成 $0.1x = 4$ ，故 $4 \div 0.1 = 40$ ；而也有個學生的解法為 $\frac{4}{0.1} = 40$ ，此種解法即說明總價差 = 單價差 × 個數。

四、平均數

本研究所指的平均數係指算數平均數，為深入瞭解平均數，分為平均數的意義與平均數的學習表現。

(一)平均數的意義

Russell 與 Mokros (1990) 將平均數分類為五種不同的概念：平均數視為眾數 (average as mode)，平均數視為演算法 (average as algorithm)，平均數視為合理性的 (average as reasonable)，平均數視為中點 (average as midpoint) 及平均數視為平衡點 (average as point of balance)。

而 Russell 與 Mokros (1990) 進一步指出：「眾數思維」(modal-thinking) 的學生，沒有注意到資料數據的一個整體性，只關注個別的數據值；將平均數視為演算法的學生無法連接計算程序和資料中的原始數據；而將平均數視為合理性的學生傾向於認為平均數是一個近似值而不是可以計算的；甚至將平均數視為中點或是平衡點的學生太強化了平均數的概念。

(二)平均數的實證研究

關於平均數的實證研究，Mevarech (1983) 發現有一些大學生在求 n 個數的平均數時，他們把 n 個數加起來再除以個數 (n)，沒有考慮這 n 個樣本大小是否一樣，計算其平均數時需經加權 (引自劉秋木，1996；Watson & Moritz, 2000)。例如：「電梯裡有 4 位女生和 6 位男生；女生平均體重為 120 磅，男生平均體重為 180 磅，問：電梯裡的這十個人的平均體重為多少？」此題利用加權平均數的概念，先以男生的平均體重 $\times$ 人數 = 男生總體重，以女生的平均體重 $\times$ 人數 = 女生總體重，相加之後除以總人數。

上述大學生有不理想的表現，再看看以下高二學生的表現：在問題「Edith 的五次考試平均為 80 分，他的下一次必須考幾分，才能將平均提高到 81 分？」(National Assessment of Educational Progress, 簡稱 NAEP, 第四次測驗)」Brown 與 Silver (1989) 發現，高二學生答對率為 24%，解此題要利用平均數與總分的關係來解題，六次總分減五次的總分，就是第六次的分數，而有 31% 的高二學生選擇 85 分這個答案，只考慮前面五次考試都需增加 1 分，而忽略第六次的成績也會影響最後的平均。

以下二題是國內國中學生的表現：張少同(2005)以二道問題來分析，問題一「.....，有一天四人比較誰的班級考得好，對話如下：大明說：『我們班的總分是 2050 分，你們

班總分 1764 分，我們班考得比較好。』小美接著說：『我們班平均 84 分，你們班平均 82 分，我們班考得比較好。』大華又說：『我們班的最高分比你們班高，我們考得比較好。』，大昌最後說：『你們班不及格的人多，所以我們班比較好。』請問誰說的最正確？A.大明 B.小美 C.大華 D.大昌 E.四人都不正確，雖然選項中的總和（大明）、最大值（大華）及極端值（大昌）皆是明確的評斷指標，但是仍不及平均數（小美）可以解釋為「代表性」分數（Pollatsek, A., Lima, S. & Well, A. D., 1981）的有效指標，僅有 3 成 5 左右的學生能選出正確答案 B，顯示出大多數的國中學生並未能正確理解平均數其具有代表的意涵的概念。

問題二：「大雄、靜香、小夫和胖虎一起玩彈珠，小夫數了彈珠共 10 顆，然後說：『我們平均有 2.5 顆彈珠』靜香接著說：『平分的話不可能有 2.5 顆，頂多平均每個人 2 顆彈珠。』最後胖虎說：『大雄最笨了，分他 1 顆就好，所以平均每人 3 顆。』請問誰說的最正確？A.小夫 B.靜香 C.胖虎 D.都不正確。」正確答案為 A，答對比例卻只有 11.09%，答案 B 選項卻高達 62.85%，顯示大多數國中生認為實質上只能分到 2 顆，所以平均可得到 2 顆，犯了「平均數必為整數」的迷思概念。

再看看 NAEP 測驗七年級學生的結果，「Louise 買了一些軟糖。香草口味的軟糖 1 磅 90 角，買了 2 磅；巧克力口味的軟糖 1 磅 1.6 美元，買了 3 磅。試問平均下來 1 磅軟糖花費多少元？（NAEP，第四次測驗）」其實題目需要以加權平均值的方式才能計算出正確答案，答對率僅有 12%；竟然有 25% 的七年級學生選擇「重量」的數據直接相加除以 2，得到「花費」2.5 美元的值。

研究者認為，根據上述的實證研究對象為大學、中學，有些學生雖能正確計算出平均數，卻未必能理解平均數實際的意涵，也未必體會平均數、總數、個數之間的關係。

參、研究方法

本章旨在說明本研究所採取的研究方法，以下分成研究方法、研究參與者，結構式工作單以及資料蒐集與分析，茲分別敘述如下：

一、研究方法

本研究為個案研究（case study），旨在探討個案資優生在平均數問題的解題表現，藉由分析資優生的解題歷程，瞭解資優生的學習潛能。同時為求能夠獲得更完整的研究

資料，因此本研究採用結構式工作單為基礎的訪談（structured, task-based interview）（Goldin, 2000）來蒐集資料，藉以幫助研究者能夠根據個案在工作單上的解題表現加以訪談，以達更深入的探討資優生在平均數問題的解題表現。

以結構式工作單為基礎的訪談，研究者要先依據主題設計相關的問題並編寫成結構化的工作單，然後將此工作單提供給個案進行解題，作為研究者進一步訪談的線索，以深入訪談的方式蒐集資料，探求研究問題以回應研究目的。

二、研究參與者

（一）研究對象

本研究對象小郡（化名），是通過個別智力測驗評量結果在平均數正二個標準差或百分等級九十七以上的國小一般智能優異的學生，目前學籍在雲林縣普通班六年級。

研究者以問題「某人上山速率是200公尺/分，下山速率是250公尺/分，請問這趟爬山的平均速率？」為預試題目。

研究者認為個案小郡瞭解速率的公式「距離＝速率×時間」，也察覺到上山距離和下山距離是一樣的，於是利用未知數 x ，列出方程式解題，然而個案小郡無法解此方程式，因此小郡重新思考另一種解題方向，改採數值假設法，即由上山的時間為 $x \times 1\frac{1}{4}$ 和下山的時間為 x ，將之虛擬數值化為5分鐘（ $x \times 1\frac{1}{4}$ ）和4分鐘（ x ），得到虛擬距離為1000公尺（ $200 \times 5 = 250 \times 4 = 1000$ ）；再利用虛擬總距離（1000公尺×2）÷虛擬總時間（4分鐘+5分鐘）＝平均速率而成功解題。

研究者認為個案在解題策略的思考上，藉由自己對問題的理解，經由思考並與數學知識、舊經驗做連結，而形成解題計畫，並嘗試執行。其思考方式不失合理性與正確性，且表現出喜歡推理與思考，對數學難題具有高度的挑戰興趣及積極的學習態度。而且，小郡沒有參與坊間與數學相關之補習活動。因此研究者想藉由此個案的特質，探討資優生在平均數問題中的解題表現。

（二）研究者

研究者在數學教育研究所進修期間，因指導教授研究之專業背景以及閱讀學長姊之相關研究，發現資優生具有喜歡嘗試與挑戰的精神，以及具有積極的態度以面對新的概念和問題，因此資優生常會自己創造解題策略。所以，依據研究目的與文獻探討以及指導教授之建議，設計有關平均數問題之結構式工作單，讓個案資優生從事解題，以探究

資優生內在所隱藏的潛力。

本研究為質性研究，而質性研究的過程中充滿了不確定性和可變性，必須依靠研究者本身作為研究工具才能順應這種多變的研究情境（Lincoln & Guba, 1985）。因此，在整個研究過程中，研究者除了是結構式工作單的設計者外，也扮演了蒐集學生的解題資料以及深入訪談、分析的角色。研究者在文獻探討中（Goodchild, 1988；Russell & Mokros, 1990）發現學生對於「平均數」的定義多不甚瞭解，多只是用制式的公式來進行此類問題的運算、解題。所以，個案在工作單上所呈現的所有解題表現是研究者的研究焦點。因此，個案資優生在解工作單之前，研究者會告知個案盡量詳細寫出解題過程，可以利用算式、圖畫或是文字說明等等不同的表徵方式呈現。在個案解題結束後，研究者會根據個案在工作單上的解題紀錄，初步假設其解題運用的策略和想法，進而擬定訪談架構，再進行深入的訪談，期望透過訪談能適當地引導個案將更深層的想法，或是工作單解法表達不夠清楚的地方，能夠完整地敘述出來。最後，研究者多次的檢視及修正所有蒐集的資料，期能分析與呈現出個案最完整的解題表現。

三、工作單

(一)設計理念

本研究旨在瞭解資優生在平均數問題的解題表現，將研究的焦點聚焦在經由直觀而呈現自發性的解題表現上。因此，在這個背景支撐之下，依據研究目的、文獻、康軒版（教科書）的教材內容和課外參考書，將工作單的題目類型分成兩類：平均數應用問題基礎題和平均數應用問題進階題，各五題。

(二)設計內容

研究者根據上述之設計理念，設計了平均數問題的結構式工作單。礙於篇幅，僅呈現討論的題號 3、6、8 題：

題號 3：班上男女生共有 50 個人，這次考試成績男生平均 80 分，女生平均 90 分，全班平均 86 分，請問班上男女生各有多少人？（平均數應用問題基礎題）

題號 6：氣象台有五個地區的平均雨量值為 138 公厘，已知台北、新竹、台中三個地區的平均雨量為 148 公厘，且台中、台南、高雄的平均雨量為 127 公厘，請問台中地區的降雨量是多少？（平均數應用問題進階題）

題號 8：甲班有幾位同學組隊參加 400 公尺接力賽，如果曉明再快 7 秒，整隊的平均秒

數是 48 秒；如果曉明慢 9 秒，整隊的平均秒數是 50 秒。請問小明與幾位同學一起參加接力賽？（平均數應用問題進階題）。

四、資料蒐集與分析

(一)資料的蒐集

本研究的主要資料來源為解題紀錄與訪談紀錄兩種。解題紀錄係指研究者先就個案於結構式工作單上的所有解題記錄，分析其數學解題想法和解題策略；訪談紀錄係指研究者在觀察個案的解題歷程與初始記錄後，擬晤談內容，再對個案進行晤談，並進行持續追問所運算的源由，以確認個案的解題是否如研究者所分析的思考策略。

(二)資料的分析

Polya (1957) 提出問題解決分成四個階段：瞭解問題、擬定計劃、執行計劃、以及回顧。因為執行計畫屬於程序性知識，對於小郡來說，是最簡易的程序，因此採用 Polya (1957) 解題步驟中的三個步驟所提之瞭解問題、擬定計畫和回顧三個面向做為分析之架構而進行分析、探討資優生在平均數問題中的解題表現。

為了增進研究的效度，檢驗解答與表徵法是否一致（交叉比對）；而為了增進研究的信度，則追問：「怎麼證明你的答案是對的？」，並請他提出證據（持續比對）。

肆、研究結果與討論

限於篇幅本章只呈現三個原案，分別為原案三（基礎題）、原案六與八（進階題）之解題分析。

一、原案三

問題 3：班上男女生共有 50 個人，這次考試成績男生平均 80 分，女生平均 90 分，全班平均 86 分，請問班上男女生各有多少人？

(一)個案之解題記錄

$$\begin{aligned}
 86 \times 50 &= 4300 \\
 80 \times 50 &= 4000 \\
 4300 - 4000 &= 300 \\
 90 - 80 &= 10 \\
 300 \div 10 &= 30 \\
 50 - 30 &= 20
 \end{aligned}$$

① 男 20人
A ② 女 30人

圖 1 小郡面對問題 3 之解題記錄

(二)分析個案解題表現

對於題目中的各種已知條件之間的關係，他是非常清楚的；所以在解題時，個案對於所寫下的每個算式的涵義都是非常明瞭的。

1. 了解問題之面向分析

個案小郡讀題之後，研究者提問「你可以告訴老師題目的意思嗎？」，他回答「就是用平均數去求出班上男生有幾個，女生有幾個。」，研究者認為，小郡能清楚描述題目，也抓住破題的關鍵點。

2. 擬定計畫之面向分析

研究者請小郡說明解題的過程，他回答「男生平均 80 分，女生平均 90 分，就是只要一個男生換成一個女生全班的總分就會增加 10 分」我先算出全班總分是 4300 分，然後再假設全班人都是男生的話，那總分是 4000 分，比全班的總分少了 300 分，因此要有 30 位女生（ $300 \div 10$ ）來補這 300 分。」小郡利用「全班平均」求出總分後，擬定「全班均為男生」的計畫，算出新總分與原總分比較，求得新總分比原總分少 300 分，再以「補分」作為解題策略，求得女生人數。

3. 驗算與回顧之面向分析

研究者提問「怎麼證明自己的答案是對的？」，小郡回答「男生 20 人乘以 80 分在加上女生 30 人乘以 90，看看有沒有等於 4300」，他將答案（男生 20 人，女生 30 人）帶回題目中，驗算答案的合理性。

※持續考驗

研究者接著問「如果將全班假想成全是女生，該怎麼做？」請個案小郡再次解題（如圖 2），他回答「先算全班的總分是 4300，那全班都是女生的總分就是 4500 分，多出全班總分 200 分，表示要將 20 位女生換成男生。」

研究者以「替換主詞」改變策略的方式，個案小郡仍能順利解題。表示他對於題目中的各種已知條件之間的關係是非常瞭解的，對於自己在解題時所寫下每個算式的涵義也是非常清楚。

$$\begin{aligned}
 86 \times 50 &= 4300 \\
 50 \times 90 &= 4500 \\
 4500 - 4300 &= 200 \\
 90 - 80 &= 10 \\
 200 \div 10 &= 20 \\
 50 - 20 &= 30
 \end{aligned}$$

①男 20人
 A ②女 30人

圖 2 小郡面對限制「替換主詞」問題再次解答

二、原案六

問題 6：氣象台有五個地區的平均雨量值為 138 公厘，已知台北、新竹、台中三個地區的平均雨量為 148 公厘，且台中、台南、高雄的平均雨量為 127 公厘，請問台中地區的降雨量是多少？

(一)個案之解題記錄

$$\begin{aligned}
 138 \times 5 &= 690 \\
 127 \times 3 &= 381 \\
 148 \times 3 &= 444 \\
 690 - 444 &= 246 \\
 690 - 381 &= 309 \\
 246 + 309 &= 555 \\
 690 - 555 &= 135 \\
 A &135 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

圖 3 小郡面對問題 6 之解題記錄

(二)分析個案解題表現

運用集合運算中的「交集」、「聯集」整合來解出台中的雨量，在驗證答案時，雖然也是運用集合運算中的「交集」、「聯集」，但是利用的是不同的條件。

1. 了解問題之面向分析

研究者請個案小郡描述題目意思，他回答「已經知道五個地區的平均雨量值為 138 公厘」，要根據台北、新竹、台中三個地區的平均雨量為 148 公厘；台中、台南、高雄的平均雨量為 127 公厘，這兩組三地區的平均雨量值來求出台中的雨量」。

2. 擬定計畫之面向分析

小郡在了解題意之後，並找出題目關鍵，利用集合運算中的「交集」與「聯集」概念，擬訂解題計畫進行解題。研究者請小郡解釋運算過程，他說「全部的總雨量－台北、新竹、台中的總雨量＝台南、高雄的總雨量；全部的總雨量－台南、高雄、台中的總雨量＝台北、新竹的總雨量，最後全部的總雨量－（台南、高雄的總雨量＋台北、新竹地區的總雨量）就解出台中的雨量了。研究者用以下圖形表徵他的想法（如圖 4）。」。

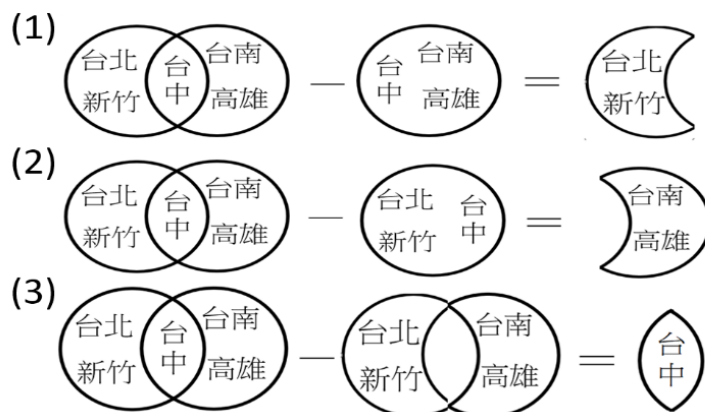


圖 4 小郡的解題策略

3. 驗算與回顧之面向分析

研究者接著問「怎麼證明你的答案是對的？」個案小郡回答「...台北、新竹、台中三個地區加台中、台南、高雄三個地區，變成六個地區，多出來的一個地區就是台中算了兩次，所以再把台中的 135 減掉...」由上可知，他在驗證答案時，雖然也是集合運算中的「交集」、「聯集」，；不過，研究者認為小郡能夠利用不同策略來驗證，可見小郡具有敏銳的洞察力來發現題意的關鍵與歸納、推廣其解題過程，也展現了卓越的分析、

思考能力，更表現出小郡具備了豐厚的數學概念。研究者將小郡的二種驗算策略，以圖形表徵之（圖五）。

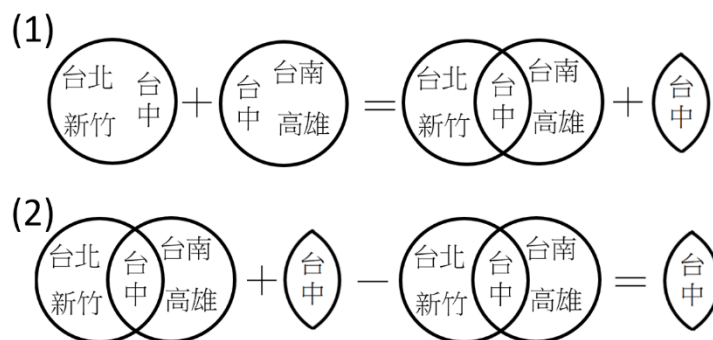


圖 5 小郡驗算的策略

三、原案八

問題 8：甲班有幾位同學組隊參加 400 公尺接力賽，如果曉明再快 7 秒，整隊的平均秒數是 48 秒；如果曉明慢 9 秒，整隊的平均秒數是 50 秒。請問曉明與幾位同學一起參加接力賽？

(一)個案之解題記錄

$50 - 48 = 2$
~~48~~
 $7 + 9 = 16$
 $16 \div 2 = 8$
 $8 - 1 = 7$
 $\Delta 7$ 位

圖 6 小郡面對問題 8 之解題記錄

(二)分析個案解題表現

洞察個人的秒數會影響到整隊的總秒數，因而也影響到整隊的平均秒數。

1. 了解問題之面向分析

研究者提問「你可以說一下題目的意思嗎？」，小郡讀題後回答「曉明再快 7 秒，整隊的平均秒數是 48 秒；如果曉明慢 9 秒，整隊的平均秒數是 50 秒，就是曉明個人差距 16 秒」。研究者發現他瞭解個人的「快 7 秒和慢 9 秒」就是「個人差距 16 秒」的意涵，因而研究者認為他已有初始的正負數概念。

2. 擬定計畫之面向分析

研究者繼續追問「可以再說明一下你的做法嗎？」，小郡回答「因為曉明個人的快 7 秒和慢 9 秒，影響全隊平均秒數從 48 秒變為 50 秒，所以曉明個人差距 16 秒，造成全隊的平均秒數是 2 秒之差，所以全隊會有 16 除以 2 等於 8 人...」，研究者認為個案小郡還能從個人時間的差距影響至全隊的平均秒數，這也可以發現個案的平均數概念是完備的。

3. 驗算與回顧之面向分析

研究者提問「怎麼證明你的答案是對的？」，小郡回答「因為題目說如果曉明再快 7 秒，...，整隊的秒數是 384 秒；如果曉明慢 9 秒，...，整隊的秒數是 400 秒；相差...。16 就是「小明的快 7 秒和慢 9 秒共差距 16 秒」，與原先的假設相同，再結合平均秒數的差距是 2 秒，與答案 8 人也相符。研究者認為，他求得的答案（8 人）依題意列出算式，並進行判斷是否符合題目之條件，並能明瞭和解釋每一步驟的概念和細節，正充分展現了監控反思數學的解題過程。

伍、結論與建議

本章的內容分為兩節：第一節為針對第四章的分析提出研究的結論，第二節為建議。

一、結論

在本研究中，研究者認為：個案具有敏銳的洞察力看到問題的脈絡與核心；在看透問題脈絡的關鍵後，能夠擬定完備的解題計畫，有效的整合題目給予的條件以縮短解題路徑。在解決問題後經常有反思的表現或提出其他策略，以回顧答案的合理性。

以下將分為瞭解問題、擬定計畫以及回顧三個面向，分述如下：

(一)從瞭解問題的面向討論

個案具有敏銳的洞察力看到問題的脈絡與核心能瞭解題意，方有機會成功的解題。個案小郡在平均數之基礎題和平均數之進階題兩大類型共十個原案裡，均能成功的解題，首要關鍵在於小郡讀題之後，均能完全的瞭解題目的意涵，展現出敏銳的洞察力看到問題的脈絡與核心。

研究者認為每一個學習者都有著不同的學習歷程和經驗，以及不同的先備知識，這些先備知識與經驗的差異，使得學習者在面對遷移情境時會有不同的詮釋，因而影響了學習遷移（transfer of learning）和類化（generalization）的表現情形。而資優生天生賦與的特質，讓資優生具有厚實的數學知識架構，面對問題時，可以快速的找到問題與問題之間所連接的橋梁而順利解題。

在原案三中，個案小郡解「平均與總分問題」時，連結到過去解雞兔同籠問題的經驗，因而把此「平均與總分問題」題目，看成是相關的問題。雞兔同籠問題與上述平均與總分問題，情境上雖然不同，但因結構相同，此兩題稱為同構試題（isomorphic problem）（Reed, 1987）。

(二)從擬定計畫的面向討論

擬定完備的解題計畫，有效的整合題目給予的條件以縮短解題路徑。資優生優越的直觀性，為自己在解某些題目時發揮了甚為重要的角色，降低了問題的複雜性，縮短了解題的路徑（江奇婉、劉祥通，2011）。Wilder（1984）也強調，沒有直覺就沒有創造力，而直覺是根基於先備知識發展而來的。John-Steiner（1997）也指出直觀性就好像是資優生在尚未真正解答前就已經找到了策略一樣。在本研究中，研究者也認為，資優生在解決問題時，不僅表現出優異的解題策略，在看透問題脈絡的關鍵後，能夠擬定完備的解題計畫，有效的整合題目給予的條件以縮短解題路徑。

例如在原案八中，一般的解法是：設 x 人參加接力比賽，所以 $50x - 9 = 48x + 7$ ，經過移項成 $2x = 16$ ，故 $16 \div 2 = 8$ 。而小郡察覺「全隊總秒數相差 16 秒」影響到「全隊平均秒數 2 秒之差」，洞察到「總秒數差 $\div$ 平均秒數差 = 全隊人數」的關係來擬定解題計畫，也就是 $16 \div 2 = 8$ 。無獨有偶，小郡的此種解法，與 Grouws（2011）所介紹的方法有異曲同工之妙。

(三)從驗算與回顧的面相討論

經常有反思的表現或提出其他策略，以回顧答案的合理性。學生的解題過程，後設

認知 (meta-cognition) 佔有重要的地位 (Hartman, 1998; Lucangeli & Cornoldi, 1997)，回顧解題過程與評估答案，即屬於後設認知。在 Schoenfeld (1985) 的相關研究中，認為控制因素居於解題較關鍵的地位。因此學生是否有好的控制答案合理性的能力，為解題成功的重要因素。而監控反思數學的解題過程亦是 NCTM (2000) 所強調的數學解題的教學目標之一。

在本研究中，個案小郡均有進行檢驗答案的合理性與否，而且在檢驗的過程中，每個數字、每個運算式所表達的含意都非常的清楚。例如，在原案六，小郡運用聯集與交集的方法，近似於聯立方程式中的加減消去法來驗證答案，並且利用不同條件來驗證，充分證明了個案小郡明瞭問題結構與解題策略。

二、建議

研究者藉由個案資優生的解題表現，提出如下的建議：

(一)表揚學生創造自發性的方法，以幫助其他學生理解

在本研究中，研究個案皆能成功的解題。在預試題目一求平均速率中，小郡虛擬總距離 (2000 公尺) 為 2S，得到上坡與下坡時間分別為 4 分鐘與 5 分鐘，利用總距離 (2000 公尺) $\div$ 總時間 (4 分鐘 + 5 分鐘) = 平均速率。以上方法，可謂數值假設法，也是他的自發性解法，這種方法，不需先學習調和平均數的公式，就能成功解題，老師可以透過表揚他，間接使其他同學知道此方法可成功解題並嘗試理解。

(二)解釋學生的自發性，並引導學生激發出更多的自發性解題

在本研究中，研究者發現資優生能順利解題是因能察覺問題中所隱含的關鍵點，原案八，小郡察覺到「快 7 秒和慢 9 秒」就是「個人差距 16 秒」，和影響整隊平均秒數差距的意涵，也洞察到「總秒數差 $\div$ 平均秒數差 = 全隊人數」。但是這個渾然天成的公式，其他同儕未必能理解；如果老師能將小郡的上述式子轉換成「平均秒數差 $\times$ 全隊人數 = 總秒數差」，也許能夠得到更多同學的共鳴。同時，教師可再給予資優生具有挑戰性的非例行性問題，以問題導向的教學方式引導資優生從題目中發掘題意背後所隱藏的線索，讓資優生在未經教導以代數解題的模式進行解題活動，或許可以激發資優生更多令人讚嘆的自發性解題策略。

參考文獻

- 江奇婉、劉祥通（2011）。以追趕問題為例探討資優個案的解題表現。《資優教育季刊》，116，18-24。
- 張少同（2005）。青少年數學概念學習與教學之研究—子計畫三：青少年統計概念學習與教學之研究（1/3）。行政院國家科學委員會專題研究計畫期中進度報告（報告編號：NSC 93-2521-S-003-014-）。臺北市：國科會。
- 張少同（2006）。青少年數學概念學習與教學之研究—子計畫三：青少年統計概念學習與教學之研究（2/3）。行政院國家科學委員會專題研究計畫期中進度報告（報告編號：NSC 94-2521-S-003-009-）。臺北市：國科會。教育部（2000）。國民中小學九年一貫課程暫行綱要。教育部。
- 黃敏晃（1987）。如何解數學題？—數學解題策略簡介。《科學月刊》，18，515-522。
- 劉秋木（1996）。國小數學科教學研究。臺北市：五南圖書出版公司。
- Borkowski, J. G., & Peck, V. A. (1986). Causes and consequences of metamemory in gifted children. In R. J. Sternberg & J. Davidson (Eds.), *Conceptions of giftedness* (pp.182-200). Boston, MA: Cambridge.
- Brown, C. A., & Silver E. A. (1989). Data Organization and Interpretation. In M. M. Lindquist (Ed). *Results from the Fourth Mathematics Assessment of the National Assessment of Educational Progress* (pp.28-34). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Cai, J. (2005). What research tells us about teaching mathematics through problem solving. In F. K. Lester, & R. I. Carles (Eds.), *Teaching mathematics through problem solving* (pp. 241-253). Reston, VA: NCTM.
- Davis, G. A., & Rimm, S. B. (2004). *Education of the gifted and talented*. Boston, MA: Pearson Education Press.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. China Lectures. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Ginsburg, H. P. (1989). *Children's arithmetic: How they learn it and how you teach it*(2nd Ed.). Austin, TX: Pro-Ed.

- Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, tasked-based interviews, in mathematics education research., In A. E. Kelly, & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp.217-545). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum.
- Goodchild, S. (1988). School Pupils' Understanding of Average. *Teaching Statistics*, 10, 77-81. doi: 10.1111/j.1467-9639.1988.tb00017.x
- Groen, G. & Resnick, L. B. (1977). Can preschool children invent addition algorithms ? *Journal of Educational Psychology*, 69, 645-652. doi: 10.1037//0022-0663.69.6.645
- Grouws, D. A. (2011). Advancing Mathematics Curriculum Research: Design Considerations and Recent Findings and Implications. *Paper presented at Conference on investigating the relationships between mathematics curriculum implementation and the performance of students' mathematical learning, National Pingtung University of Education*, 2-13.
- Hartman, H. J. (1998). Metacognition in teaching and learning: An introduction. *Instructional Science*, 26, 1-3.
- John-Steiner, V. (1997). *Notebooks of the Mind*, Oxford, Oxford University Press.
- Lamon, S. J. (2002). Part-whole comparisons with unitizing. In B. Litweller & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratio, and proportions* (pp.162-175). Reston, VA: NCTM.
- Leblanc, J. F., Proudfit, L., & Putt, L. J. (1980). Teaching problem solving in the elementary school. In S. Krulik, & E. R. Reys (Eds.), *Problem solving in school mathematics:1980 yearbook* (pp. 104-116). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Lincoln, Y. S., & Guba, E. G.(1985). *Naturalistic inquiry*. Beverly Hill, CA:Sage.
- Liu, S. T. (1993). *Effects of teaching calculator use and problem solving strategies on mathematics performance and attitude of fifth grade Taiwanese male and female students*. A Dissertation of the Doctor of Education Degree of University of Memphis, USA.
- Lucangeli, D., & Cornoldi, C. (1997). Mathematics and metacognition: What is the nature of the relationship? *Mathematical Cognition*, 3(2), 121-139. doi: 10.1080/135467997387443
- Mayer, R. E. & Hegarty, M. (1996). *The process of understanding mathematical problems*. In

- R. J. Sternberg & T. Ben-Zeev (Eds.), *The nature of mathematical thinking*. NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Mayer, R. E. (1992). *Thinking, problem solving, cognition*, (2nd ed.). NY: Freeman.
- Mevarech, Z. (1983). A deep structure model of students' statistical misconceptions. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 415-429. doi: 10.1007/BF00368237
- Morris, J. (1983). *How to develop problem solving using a calculator*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. (ERIC Document Reproduction Service No.ED 202 698)
- National Council of Supervisors of Mathematics. (1977). Position paper on basic mathematical skills. *Arithmetic Teacher*, 25, 19-22.
- National Council of Teachers of Mathematics.(2000). *Principles and standards for school mathematics*.Reston,VA: NCTM.
- Pollatsek, A., Lima. S. & Well A. D. (1981). Concept or computation: Students' understanding of the mean. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 191-204. doi: 10.1007/BF00305621
- Polya, G. (1957). *How to solve it* (2nd ed.). Garden City, NY: Doubleday and Co., Inc.
- Reed, S. K. (1987). A structure –mapping model for word problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 13, 124-139. doi: 10.1037/0278-7393.13.1.124
- Russell, S. J., & Mokros, J. R. (1990). What's typical? Children's and teachers' ideas about average. In D. Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of the 3rd International Conference on Teaching Statistics. Vol. 1. School and General Issues* (pp. 307-313). Voorburg: International Statistical Institute.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press. doi: 10.1016/B978-0-12-628870-4.50008-6
- Steiner, H. H. (2006). A microgenetic analysis of strategic variability in gifted and average-ability children, *Gifted Child Quarterly*, 50(1), 62-74. doi: 10.1177/001698620605000107
- Watson, J. M., & Moritz, J. B. (2000). The longitudinal development of understanding of

average. *Mathematical Thinking and Learning*, 2(1&2), 11–50. doi: 10.1207/S15327833MTL0202_2

Wilder, R. L. (1984). The role of intuition, In Campbell, D. M. and Higgins, J.C. (Eds), *Mathematics: People, Problem, Results, Vol. 2* (pp. 37-45)., Belmont, CA, Wadsworth International.

王筱妮、梁淑坤（2018）。
桌遊融入國小三年級數與計算課程之設計與反思。
臺灣數學教師，39（2），23-49
doi: 10.6610/TJMT.201810_39(2).0002

桌遊融入國小三年級數與計算課程之設計與反思

王筱妮¹ 梁淑坤¹

¹國立中山大學教育研究所

本研究主要目的在探討桌遊的設計融入國小三年級數學教材之可行性，因應此目的整理出教師在進行桌遊融入教學時，可能遭遇的困境和解決及突破的方法，最後推動出適合在教室裡進行教學的數學桌遊，以幫助更多學童，擴大更多對於數學感到恐懼的學童之學習數學的機會，探究將自行設計之桌遊融入國小三年級數學計算課程後，對於學童的學習興趣及學業成績轉變情形。本研究透過與學生之訪談、數學學習興趣量表和自編單元能力測驗卷等相關資料，分析探究學生的學習興趣轉變與學業成績轉變情形，並根據所蒐集得的資料改進教學方法與技巧，以回答三個研究問題，根據研究結果顯示：第一、桌遊設計融入數學領域教學活動是可行的，在教學活動進行後，研究者發現當桌遊融入數學教學領域時，學生更加積極參與數學課程，並且對於數學課程不再感到排斥，甚至有所期待；第二、學童的學習興趣的轉變，根據學生之訪談、數學學習興趣量表之分析，顯示當桌遊融入數學領域教學後，孩童對於數學學習之學習興趣明顯提高；第三、透過自編單元能力測驗卷之分析，桌遊融入國小數學領域課程，對於孩童的學業成績具有明顯提升。針對以上三個研究結果，研究者提出對未來研究及桌遊融入教學的建議。

關鍵詞：三年級數與計算；數學遊戲；學習興趣；學業成績

壹、緒論

一、研究動機

數學是科學之母，而且學童在學習數學時也可以訓練思考能力及推理能力(陳嘉皇，2010)，想及早訓練學童則從小學開始，而國小數學的學習尤其又以「數與計算」為重。以教育部三年級課綱，十個數學單元中有六個單元為數與計算。可是研究者進入教育現場後，發現許多學童毫無數感，去年暑假發現學童們熱衷於玩「桌遊」，因此思考，若是針對數學的學習，尤其是在生活上有數感，可以嘗試設計一些數學遊戲，促使平常被動學習的學童，在遊戲的過程中扮演主導的角色。也即是說，從被動轉為主動，希望能提高學業成績，使學童獲得更大的成就感。本研究旨在設計一款趣味性高的桌遊，既能夠融入課程，又能統整數學單元，在玩的時候有效提升學童的學習興趣與學業成績。

二、研究目的及研究問題

本研究探討桌遊的設計及融入國小三年級數學計算課程之後，與學童的學習興趣以及學業成績之關係，本研究目的如下：

- (一) 探討桌遊融入國小三年級數學教材之可行性。
- (二) 探討透過桌遊融入國小三年級數學課程後，學童的學習興趣轉變情形。
- (三) 探討透過桌遊融入國小三年級數學課程後，學童的學業成績轉變情形。

貳、文獻探討

一、學習理論與合作學習

學習為人類生命重要的一環，從出生到老去，人類以不同的方式學習各式事物。學齡前，家庭教育扮演重要的角色，而進入學校後，透過學校教育，學童能夠學習新的知識與方法，以適應未來的生活。老師所擔任的角色，更是舉足輕重，因此，教師所安排的教學活動，對於整體學童的學習影響甚大。Ainley 與 Luntley (2005) 認為，身在課堂之教師，必須熟悉各項學習理論，更應在其授課的內容上反映課程目標與價值，使達成最完整的教學價值。因此教師除了熟悉授課內容與概念外，應知曉各項學習理論，了解學童的心理發展，將課程完整的使學童理解，設計適當的教學活動，以提高學習效果。

合作學習 (cooperative learning) 為一種利用小組分組學習的方式，提升小組其他成員彼此之間的學習效果的教學方法 (Slavin, 1985)。合作學習是學童共同解決問題或達成另一個共同目標的一種教學安排，學童在學習的過程互相尊重、信任且相互依賴，因此學習的成效亦取決於小組成員是否能互助合作，因此相互支持才能夠進步 (Kagan, 2000)。藉由小組合作競賽的過程，學生能夠從中領悟團結合作的重要性，更能從彼此不同的想法與意見中促進相互溝通協調的能力 (梁淑坤、張嘉玲、王全興, 2009)。Slavin (1985) 認為合作學習為具有完整結構與系統的教學策略。在學習過程中，教師依據學習者的能力、性別、背景，將四至六位學童以異質性分組方式進行學習，透過分享經驗、接受獎勵，增強學習效率 (張新仁, 2003)。

二、遊戲教學的設計與理論基礎

在多樣化的教學活動裡，遊戲是引發孩童學習的一重要途徑，教學融入遊戲，不僅能夠提高學習者的興趣，更能夠讓教學效果大大提升，並且使得學習更加生活化，尤其數學領域若能以生活化的概念融入學習，更能讓數學學習具有最初的意義。九年一貫課程綱要指出：「數學童活化」，期許學童在學校教育中，能夠利用教育活動與個人經驗相互連結，以幫助學習者學習 (江美娟, 2013)。團體遊戲融入教學活動後，除了能夠幫助學生理解數學概念外，同時也能改善學童對於數學的恐懼與提升數學的自信心 (趙翊君、梁淑坤, 2017)。

因此教學者應該設計適合的遊戲，遊戲是否符合此課程之概念要求？是否對於教學具有幫助？另外遊戲必須具有趣味性，且年齡層是否符合學習者，而容易操作、玩法簡單也是教學者必須考量的因素，遊戲的設計應考量難易性、參與性、紀律性、學習性，並自行加上了延伸性，讓遊戲導入教學能更確實的影響到學生在學習上的改變 (周士傑、梁淑坤, 2007)。在饒見維 (1996) 指出數學遊戲教學為數學領域的教學活動轉變成遊戲教學活動的模式，也就是指教師有計畫地在所安排的遊戲活動中，提供學童機會學習做選擇及做決定，並從中獲取概念性的知識，參考國內學者饒見維 (1996) 所提出之遊戲設計具備四個要點：

(一)挑戰性

在一個遊戲活動中，教師通常會設定某種思考任務或目標，學童設法運用自己已有的數學知能來克服教師所訂的限制條件來完成目標。限制條件愈多，挑戰性就愈大。反

之，如果完全沒有限制條件，只是叫學童作枯燥的計算或反應就不能稱作遊戲。

(二)競賽性或合作性

競賽往往能激起人類的好勝的天性，並造成活動的挑戰性與趣味，增加學童參與活動的動機與興趣。團體的競賽裡，不僅具有競爭的成分，也具有合作的成分。學童在團體裡必須和其他同學合作，共同對抗別的團體，不是完全憑個人的力量。良好的遊戲要有適當的合作成分，不要造成個人與個人之間太過激烈的競爭。

(三)機遇性或趣味性

遊戲之所以稱為遊戲，往往是因為遊戲的過程具有某種機遇的因素，造成遊戲的趣味性。

(四)教育性

以上幾點是指一般遊戲所具有的特性，而教學遊戲則必須再具有教育性。也就是說，好的教學遊戲要以不著痕跡的方式來達成教學目標。讓學童運用自己具有的數學知能來解題。因此從教育的觀點而言，數學教學遊戲的最大特性便是訓練學童的思考能力。

遊戲呈現的方式多樣化，其中桌上遊戲與其他種類的遊戲（如：團康遊戲）相比，具有低門檻、便利性高及團體概念等特點，因此適合藉此做為人際互動之媒，桌上遊戲的名稱源於英文的 Table-Top Games，能夠在桌面或者任何平面上進行的一種遊戲，而桌上遊戲也簡稱為桌遊，與需要一定人數、場地或肢體活動的團康遊戲、運動比賽等名詞進行區別而形成，泛指在桌子或任何平面上進行的遊戲，也可稱為不插电遊戲（吳承翰，2009）。

激發學童的學習興趣，是教學者在進行教學時的首要任務，因此教學者理當深入了解學習興趣，以提高學習者之學習效率。之後，研究者用學童喜愛的大富翁編擬「聯邦圍城」為桌遊，參考三年級 4 個單元內容，以底盤的 6 個格子和 3 種遊戲卡融入單元 1~4。單元 1：數線、單元 2：10000 以內的數、單元 3：10000 以內的加減、單元 4：乘法。

參、研究方法

一、研究流程

研究者採取改編桌遊大富翁融入數學教學活動。因本研究目的是要探討桌遊之研發以及融入數學教學中，設計桌遊融入國小三年級數學領域實施的可行性。當桌遊融入教學為可行之後，研究者透過試版、最終版，並分析研究者進行桌遊融入數學領域教學後，學童之學習興趣和學業成績是否提昇。研究者透過前測、後測來了解學童的學業表現情形，再透過數學學習興趣量表，分析學童的學習興趣轉變。

研究的流程分為三階段，第一階段為教學前的準備：選定數學單元、設計桌遊、數學學習興趣前測的施測與訪談；第二階段為進行一般數學課程，共四次，並進行數學學習成效前測的資料蒐集與訪談，最後透過複習課程，將桌遊融入教學；第三階段為教學後的評估成效，進行數學學習興趣後測的資料蒐集與訪談、數學學習成效後測的資料蒐集與訪談，並將所蒐集之資料進行分析。

二、研究對象

本研究的桌遊主要針對高雄市國小三年級學童進行教學。在每週課後輔導時間進行本研究實驗。研究過程研究參與者包含教學者、學童以及協同教學教師。

三、研究工具

本研究以數學學習興趣量表【表】、自編單元能力測驗卷【卷】和訪談紀錄【前訪、後訪】為研究工具。除此之外，更有自行設計的桌遊【桌】和教學省思紀錄【省】。

(一)數學學習興趣量表

本研究選用黃月純、楊德清（2011）所編製的數學學習興趣量表，分別透過情意（第 1-3 題）、認知（第 4-5 題）、期望（第 6-7 題）及行動（第 8-10 題）四個向度進行測驗。因三年級學童的閱讀理解稍顯不足，所以本研究將透過一對一訪談再由成人代為填入量表。

本量表共十題，每題有三個選項，每題擇一勾選，第一為 3 分、第二為 2 分、第三為 1 分，十題加總，分數越高代表數學學習興趣越高。此量表能夠顯示學童的學習興趣，在桌遊融入數學領域教學前後的改變關係。

在效度方面，經過六位專家對量表的構面和試題內容進行審查後形成預試量表。而該量表的信度分析，Cronbach α 值為 0.735，Cronbach α 係數大於 0.6，屬於可信程度。

(二)數學學業成績測驗卷

本測驗卷以 106 年翰林出版社之命題光碟，國小三年級數學中第一單元至第四單元共挑選 12 題選擇題，挑選的方式為以 Bloom 認知歷程向度中六大向度：記憶、了解、應用、分析、評鑑與創造，六大向度共挑選 12 題，以此作為前測卷，再依照相同認知歷程向度及難易度，更改題目內容作為後測卷。

(三)訪談紀錄（前、後）

本研究在桌遊融入數學領域課程前、後，各施以一次一對一的訪談，主要針對學童的學習反應、學習態度以及對於教學的看法來擬訂訪談的大綱，藉由學童對於訪談問題的看法，比對數學學習興趣量表與前、後測數學成績測驗卷之資料。

桌遊融入數學領域教學前

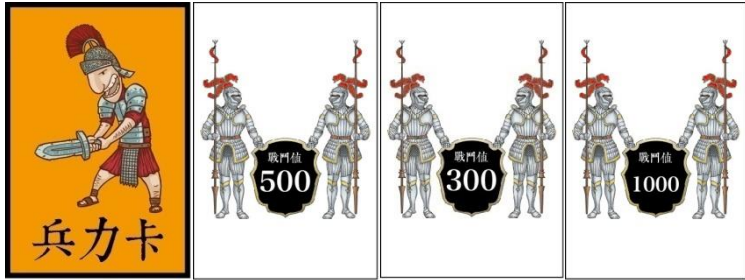
1. 你覺得你的數學好不好？為什麼？
2. 你喜歡上數學課嗎？你希望老師怎麼教你數學？
3. 在學習過程，如果遇到不懂的概念敢問老師嗎？你會怎麼辦？
4. 你覺得用什麼方法可以讓你更喜歡數學、可以讓你的數學成績進步？

桌遊融入數學領域教學後

1. 喜歡老師所設計的桌遊嗎？特別喜歡哪個部份呢？
2. 你覺得透過桌遊的方式上數學課，對你的數學學習有幫助嗎？
3. 你覺得透過桌遊的方式上課，你有更喜歡數學課嗎？會期待上課嗎？

(四)自製桌遊-聯邦圍城

單元名稱	第 1 單元數線 第 2 單元 10000 以內的數 第 3 單元 10000 以內的加減 第 4 單元乘法	版本	翰林版第五冊
適用年級	三年級	遊戲人數	8 人
教學策略	1. 操作教學：透過操作建立量感。 2. 合作學習：透過分組合作，培養學童表達數學和分享的能力。 3. 重視舊經驗與新知識的連結。 4. 強調數學與生活的連結。 5. 透過遊戲熟練計算方法：中年級需熟練基本的加、減、乘、除計算，透過桌遊讓學童熟練此計算。		

教學準備	1. 遊戲盤一張 
教學準備	2. 遊戲鈔票 1 組，包括五種：100 元（50 張）；500 元（40 張）；1000 元（50 張）；1500 元（30 張）；2000 元（30 張），共 200 張。  3. 兵力卡 1 組，包括三種：戰鬥值 1000（30 張）；戰鬥值 500（30 張）；戰鬥值 300（30 張），共 90 張。  4. 援軍卡 1 組 

	5. 攻城卡 1 組  兵勢對決 選擇一隊進行戰鬥，雙方翻開3張兵力卡後，戰鬥值 總和大的 為獲勝者。 獲勝者可得到對手2座城牆。 城牆不足，以每座城牆5000元軍費支付。平手則直接擲骰直到分出勝負。(註)使用後的兵力卡歸回公用兵力庫。 兵勢對決 選擇一隊進行戰鬥，雙方翻開3張兵力卡後，戰鬥值 總和大的 為獲勝者。 獲勝者可得到對手2座城牆。 城牆不足，以每座城牆5000元軍費支付。平手則直接擲骰直到分出勝負。(註)使用後的兵力卡歸回公用兵力庫。 謀攻對決 選擇一隊進行戰鬥，雙方暗蓋1張兵力卡後，各丟一次骰子。 計算戰力總和：兵力卡戰鬥值×骰子點數 總和大者獲勝，勝者得3座城牆。 平手則直接擲骰直到分出勝負。(註)使用後的兵力卡歸回公用兵力庫。 謀攻對決 選擇一隊進行戰鬥，雙方暗蓋1張兵力卡後，各丟一次骰子。 計算戰力總和：兵力卡戰鬥值×骰子點數 總和小者獲勝，勝者得3座城牆。 平手則直接擲骰直到分出勝負。(註)使用後的兵力卡歸回公用兵力庫。  攻城卡 6. 骰子 2 個
--	---

1. 遊戲方式：

- (1) 教師講解遊戲規則，並試玩一回合（骰子四次為一回合）。
- (2) 二人組軍隊，領 10000 元為起始軍費。
- (3) 每個軍隊丟骰子，再依據點數前進格子，執行抵達格子發生的指令。
- (4) 四組軍隊依序由紮營地（起點）出發，依據所擲點數前進至格子。
- (5) 若於紮營地出發擲一點，到達「援軍招喚」，便能抽取援軍卡一張，援軍卡執行內容如下：獲得軍費 2000 元、所有玩家獲得兵力卡 1 張、獲得兵力卡 2 張或前進或後退 1、3、5 格，並執行抵達的格子事件。
- (6) 若於紮營地出發擲二點，到達「軍費補給」，擲一顆骰子，並獲得骰子點數×400 的軍費。
- (7) 若於紮營地出發擲三點，到達「決鬥場」，抽取攻城卡，攻城卡有二，第一為謀攻對決：選擇一隊進行戰鬥，雙方暗蓋一張兵力卡後，各丟一次骰子，然後計算戰力總和：兵力卡戰鬥值×骰子點數，總和大者獲勝，勝者得 3 座城牆，平手則直接擲骰直到分出勝負。第二為兵勢對決，選擇一隊進行戰鬥，雙方翻開 3 張兵力卡後，根據攻城卡上的指示比大或小，獲勝者可得到對手 2 座城牆，平手則直接擲骰直到分出勝負。
- (8) 若於紮營地出發擲四點，到達「援軍招喚」，便能抽取援軍卡一張，援軍卡執行內容如下：獲得軍費 2000 元、所有玩家獲得兵力卡 1 張、獲得兵力卡 2 張或前進或後退 1、3、5 格，並執行抵達的格子事件。
- (9) 若於紮營地出發擲五點，到達「募兵」，支付軍費，從兵力庫抽兵力卡：付 800 元抽一、付 2000 元抽三。

(10) 若於紮營地出發擲六點，到達「攻乘略地」，九九乘法表對決：到達軍隊，派出一玩家，並指定任一軍隊，抽取一玩家，進行九九乘法對決。獲勝者可得到對手 2 座城牆，或者軍費 6000 元。

(11) 遊戲進行如上述，直至其中一軍隊達到 20 座城牆，即結束遊戲。

2. 自製桌遊-聯邦圍城遊戲介紹與融入數學概念：

遊戲方式	將八位學童分為四組，分別代表四種不同顏色的軍隊。四組軍隊依序擲骰，依據點數前進，並執行抵達格子發生的事件。玩家達到 20 座城牆，即結束遊戲。	
格子	六種格子內容介紹 (A-F)	融入數學概念
A 募兵	支付軍費，從兵力庫抽兵力卡 付 800 元抽一張、付 2000 元抽三張	
B 軍費補給	擲一顆骰子，並獲得骰子點數 $\times 400$ 的軍費	單元 4：乘法
C 援軍召喚	抽取軍機卡機會一次	
D 決鬥場	抽攻城卡，並執行卡片內容	
E 紮營地	經過或停留時，獲得兵力卡 2 張及軍費 3000 元	
F 攻乘掠地	九九乘法表對決：到達軍隊，派出一玩家，並指定任一軍隊，抽取一玩家，進行九九乘法對決。獲勝者可得到對手 2 座城牆，或者軍費 6000 元。	單元 4：乘法
遊戲卡	三種遊戲卡內容介紹	融入數學概念
一、軍費	100 元、500 元、1000 元、1500 元、2000 元	單元 2：10000 以內的數 單元 3：10000 以內的加減
二、兵力卡	戰鬥值：300、500、1000	單元 2：10000 以內的數

三、援軍卡	1. 獲得軍費 2000 元 2. 所有玩家獲得兵力卡 1 張 3. 獲得兵力卡 2 張 4. 前進或後退 1、3、5 格，並執行抵達的格子事件	單元 1：數線
四、攻城卡 (決鬥場)	一、謀攻對決： 選一隊進行戰鬥，雙方暗蓋一張兵力卡後，各丟一次骰子，然後計算戰力總和：兵力卡戰鬥值×骰子點數。總和大者獲勝，勝者得 3 座城牆。平手則直接擲骰直到分出勝負。 (註) 使用後的兵力卡歸回公用兵力庫。	單元 2：10000 以內的數 單元 4：乘法
	二、兵勢對決： 選擇一隊進行戰鬥，雙方翻開 3 張兵力卡後，根據攻城卡上的指示比大或小，獲勝者可得到對手 2 座城牆。平手則直接擲骰直到分出勝負。 (註) 使用後的兵力卡歸回公用兵力庫。	單元 1：數線 單元 3：10000 以內的加減

在上述遊戲的設計或編修過程中，除了要達到各單元的學習目標，也希望能同時兼顧遊戲實施的理念及特性，因此將此數學遊戲教學活動中，單一格子事件與學習目標相對照，並依饒見維(1996)指出的遊戲融入教學必須注意的四項要點加以整理如下表 1。

表 1

桌遊教學活動設計與學習目標對照表

格子事件	搭配單元	學習目標	遊戲過程	遊戲特性 (饒見維, 1996)			
				挑戰性	競賽性	機遇性	教育性
募兵	第二單元：10000 以內的數、第三單元：10000 以內的加減	C-R-01 能察覺生活中與數學相關的情境。	透過金錢的花費，增強學習者 10000 以內的數字概念與加減。			√	√

表 1 (續)

軍費 補給	第四單元：乘 法	3-n-01 能認識 10000 以內的數及「千位」的位名，並進行位值單位換算。 3-n-02 能熟練加減直式計算（四位數以內，和 < 10000，含多重退位）。	擲一顆骰子，並獲得骰子點數 ×400 的軍費。	√	√		
援軍 召喚	第一單元：數 線	3-n-09 能由數線，標記整數值與一位小數，並在數線上做大小比較、加、減的操作。	前進或後退 1、3、5 格，並執行抵達的格子事件。	√	√		
決鬥場 （謀攻 對決）	第二單元：10000 以內的數、第四單元：乘法	3-n-01 能認識 10000 以內的數及「千位」的位名，並進行位值單位換算。 3-n-08 能在具體情境中，解決兩步驟問題（連乘，不含併式）。	選擇一隊進行戰鬥，雙方暗蓋一張兵力卡後，各丟一次骰子，然後計算戰力總和：兵力卡戰鬥值 × 骰子點數。	√	√	√	√
決鬥場 （兵勢 對決）	第一單元：數線、第三單元：10000 以內的加減	3-n-09 認識數線，標記整數值與一位小數，並在數線上做大小比較、加、減的操作。	選擇一隊進行戰鬥，雙方翻開 3 張兵力卡後，根據攻城卡上的指示比大或小。	√	√	√	√
攻乘 掠地	第四單元：乘法	3-n-04 能熟練一位數乘以一位數的直式計算。	九九乘法表對決：抽取一玩家，進行九九乘法對決。	√	√		√

「√」代表該遊戲符合饒見維（1996）提出良好的數學遊戲須涵蓋挑戰性、競賽性、合作性、機遇性和趣味性、教育性等四個要點。

四、資料蒐集及分析

本研究共使用包含自製桌遊、數學學習興趣量表[前]、數學學習興趣量表[後]、數學學業成效測驗卷[前]、數學學業成效測驗卷[後]、學童訪談記錄[前]、學童訪談記錄[後]、和教學省思記錄等八項研究工具，研究者透過觀察及七項資料的蒐集，針對數學遊戲教學活動之進行結果，提出研究結果及建議（如表 2、表 3）。

表 2

研究問題與研究資料工具對照表

待答問題 \ 資料蒐集/研究工具	數學學習	單元能力	學童訪談	教學省思
	自製桌遊 [桌]	興趣量表 [表]	測驗卷 [卷]	紀錄 [訪] 記錄 [省]
一 桌遊融入國小三年級數學教材中可行之教學歷程為何？	√			√
二 桌遊融入國小三年級數學課程後，學童有何學習興趣轉變？		√	√	√
三 桌遊融入國小三年級數學課程後，學童有何學業成績轉變？			√	√

表 3

研究工具的編碼依下表規則

編碼	編碼代表的資料
T	指教學者，即研究者
S	指學童
S01~S08	01~08 代表學童座號
1061101 省 T	代表 106 年 11 月 1 日進行第一次教學活動後，教學省思紀錄
1061108 省 T	代表 106 年 11 月 8 日進行第一次教學活動後，教學省思紀錄
1061018 訪 S01~S08 TS	代表 106 年 10 月 18 日進行教學活動前，學童 01~08 之訪談紀錄
1061108 訪 S01~S08 TS	代表 106 年 11 月 8 日進行二次教學活動後，學童 01~08 之訪談紀錄

肆、研究結果與討論

一、編製桌遊過程與教學歷程

本研究所執行之教學歷程，分成三個階段：第一階段為教學前的資料蒐集，採一對一訪談即將接受教學實驗之 8 位國小三年級的學童的學習狀況。

第二階段為設計教學活動後進行試教，研究者透過階段一之訪談資料，再配合翰林版三年級上學期的課程內容，設計符合教學目標的數學桌遊活動，共四個單元、一套桌遊包含 6 種不同的格子事件，每一格子事件涵蓋了單元呈現的數學概念。第三階段主要為檢討階段一、階段二及修正，以達到完整的教學修正，使得教學方式能夠穩定有效、確實能提升學童之學習效率。

在國小三年級上學期的數學課程中，主要分為數、量與計算，並且區分為整數與分數兩大部分。數與計算為國小三年級主要教授的課程，為中年級的數學學習基礎，因此本研究選定數線、10000 以內的數、10000 以內的加減和乘法作為研究範圍，主要係因為前四單元涵蓋了基本的數與計算概念，且學習系統較一致。

研究者經過多次改良與測試，記錄改良過程如下表 4、表 5。

表 4

桌遊遊戲盤格子事件改良紀錄表

格子	試版	改良之原因	最終版
A 募兵	支付軍費，從兵力庫抽兵力卡，付 800 元抽一、付 1300 元抽二	決鬥過程需大量使用兵力卡，若兵力卡難取得，遊戲勝負難定	支付軍費，從兵力庫抽兵力卡，付 800 元抽一、付 2000 元抽三
B 軍費補給	擲一顆骰子，並獲得骰子點數×400 的軍費	無改變	擲一顆骰子，並獲得骰子點數×400 的軍費
C 援軍召喚	抽取軍機卡機會一次	無改變	抽取軍機卡機會一次
D 決鬥場	抽攻城卡，並執行卡片內容	無改變	抽攻城卡，並執行卡片內容
E 紮營地	經過或停留時，獲得軍費 3000 元	考量在決鬥過程中，需使用大量的兵力卡，若在遊戲過程中，單從募兵格子獲得兵力卡，速度太慢，使得遊戲難以推進	經過或停留時，獲得兵力卡 2 張及軍費 3000 元

表 4 (續)

F 攻乘掠地	九九乘法表對決：到達軍隊，派出一玩家，並指定任一軍隊，抽取一玩家，進行九九乘法對決。獲勝者可得到對手 2 座城牆	在遊戲開始時，大多玩家尚未獲得城牆，故將規則修改，若對手尚未擁有城牆，能夠以軍費 6000 元當作懲罰	九九乘法表對決：到達軍隊，派出一玩家，並指定任一軍隊，抽取一玩家，進行九九乘法對決。獲勝者可得到對手 2 座城牆，或者軍費 6000 元
--------	--	---	--

表 5

桌遊遊戲卡改良紀錄表

遊戲卡	試版	改良之原因	最終版
一、軍費	50 元、100 元、500 元、1000 元、1500 元、2000 元	遊戲的進行過程中，50 元較少用到，故將 50 元刪除	100 元、500 元、1000 元、1500 元、2000 元
二、兵力卡	戰鬥值：500、1000	兵力卡對決時，若戰鬥值相似，判斷輸贏的方式就變成骰子大小，即運氣成分，為考量公平，故將戰鬥值種類增加	戰鬥值：300、500、1000
三、援軍卡	獲得軍費 2000 元、所有玩家獲得兵力卡 1 張、前進或後退 1、3、5 格，並執行抵達的格子事件	決鬥過程需大量使用兵力卡，若兵力卡難取得，遊戲勝負難定，故增加抽取兵力卡之機會	獲得軍費 2000 元、所有玩家獲得兵力卡 1 張、獲得兵力卡 2 張、前進或後退 1、3、5 格，並執行抵達的格子事件
四、攻城卡 (決鬥場)	謀攻對決：選擇一隊進行戰鬥，雙方暗蓋一張兵力卡後，各丟一次骰子，然後計算戰力總和：兵力卡戰鬥值×骰子點數。總和大者獲勝，勝者得 3 座城牆。平手則直接擲骰直到分出勝負	無改變	謀攻對決：選擇一隊進行戰鬥，雙方暗蓋一張兵力卡後，各丟一次骰子，然後計算戰力總和：兵力卡戰鬥值×骰子點數。總和大者獲勝，勝者得 3 座城牆。平手則直接擲骰直到分出勝負

研究者自行設計搭配翰林版國小三年級數學之桌遊—聯邦圍城，將第一單元至第四單元，數線、10000 以內的數、10000 以內的加減、乘法等概念融入多個格子事件當中，以下將不同的格子事件逐一說明設計概念與實驗教學後的結果：

(一)援軍招喚

到達此格子事件，能夠抽取援軍卡一張，援軍卡包含獲得軍費 2000 元、所有玩家獲得兵力卡 1 張、獲得兵力卡 2 張、前進或後退 1、3、5 格，並執行抵達的格子事件。

「軍費 2000 元、所有玩家獲得兵力卡 1 張、獲得兵力卡 2 張」相對來說屬於比較被動的行為，單方面獲得，而本次格子事件當中的「前進或後退 1、3、5 格，並執行抵達的格子事件」屬於有數學概念上的思考，抽到此張援軍卡的小隊，能夠選擇前進或後面，並能夠選擇 1、3、5 格，此項概念為第一單元的數線概念，前進與後退為數線加減法的教學內容，數線的加減法對於小朋友來說稍微抽象，尤其數線減法的概念，時常有學童不理解，因此透過此模式，對學童來說確實較為好理解。

在實際操作時，有些隊伍選擇前進、後退時，仍會沒有考慮數線上「0 的概念」，也就是本身原本所在的格子，前進後退時少算格子，但經過幾次操作後，便再無出現此問題，大部分學童夠能及時操作。

(二)軍費補給

到達此格子事件，擲一顆骰子，並獲得骰子點數 $\times 400$ 的軍費，雖然在桌遊過程教師扮演的是裁判的角色（如同大富翁裡的銀行），但是發放軍費與兵力卡皆按照參與者要求的，因此擲骰子後，該小組需要自行將骰子上的點數乘上四百，要求研究者發放軍費。此設計理念為配合第四單元的乘法概念，讓學童對於乘法的計算能更加靈活運用，並且生活化。在遊戲過程，一開始學童容易在相乘時少了個位與十位的兩個零，但是大部分的學童能夠立刻反應過來，得到的軍費太少，而立刻改口為正確的數字，透過較為生活化的方式，讓學童感受數字的大小，而理解乘法概念的精髓，使學童對於數感的掌握能夠更精準。

(三)決鬥場

到達此格子事件，抽攻城卡，並執行卡片內容，攻城卡內容共有二種，以下說明：

1. 謀攻對決

選擇一隊進行戰鬥，雙方暗蓋一張兵力卡後，各丟一次骰子，然後計算戰力總和：

兵力卡戰鬥值 $\times$ 骰子點數，總和大者獲勝，勝者得 3 座城牆，平手則直接擲骰直到分出勝負。此設計之概念包含第二單元 10000 以內的數與第四單元的乘法，每張兵力卡都有戰鬥值（共有三種 300、500、1000），抽到的隊伍將兵力卡的戰鬥值乘上擲的骰子點數，相互比較大小，先運用乘法的概念，將兩個數字相乘，與軍費補給所呈現的概念相似但難度又更高，相乘後所得到的數值再比較大小，融入了 10000 以內的數之概念。相較之下，謀攻對決對於學童來說，計算需要時間，困難度也提高許多，但是學童對於乘法的精熟度能更快速提升。

2. 兵勢對決

選擇一隊進行戰鬥，雙方翻開 3 張兵力卡後，根據攻城卡上的指示比大或小，獲勝者可得到對手 2 座城牆，平手則直接擲骰直到分出勝負。此設計包含了第一單元數線、第三單元 10000 以內的加減，雙方先後出三張兵力卡，並且朝下蓋住，之後同時掀開，並將三張兵力卡之戰鬥值（共有三種 300、500、1000）累加後比較大小，將戰鬥值相加的設計融入了第三單元 10000 以內的加減，因為遊戲進行當中，不方便使用紙筆，因此迫使學童們更加快速運用加減法的原理。而比較大小的部分則是融合了數線的概念，礙於遊戲進行當中，不方便使用紙筆，因此當腦海出現一條無形的數線，能夠快速的將兩個數字定位於數線中，便能快速的將兩個數字大小比較出來，讓數線的概念更加生活化。

(四)募兵

到達此格子事件，支付軍費便能從兵力庫抽兵力卡，支付 800 元抽一張、支付 2000 元抽三張，將生活中付費找錢的概念融入桌遊，因考量加強學童數感，故加入支付的設計在桌遊當中。

(五)攻乘掠地

到達此格子事件，執行九九乘法表對決：到達軍隊，派出一選手，並指定任一軍隊，抽取一玩家，進行九九乘法對決，獲勝者可得到對手 2 座城牆，或者軍費 6000 元，以下為格子事件－攻乘掠地中，所需挑戰之九九乘法對決示範：

選手一&選手二：九九乘法表啊

選手一：三五

選手二：十五

選手一&選手二：九九乘法表啊

選手二：六七

選手一：四十二

也就是說，雙方輪流出題，在節拍內須完成作答，回答錯誤者則為敗者。

攻乘掠地在此款桌遊中，扮演決定勝負的關鍵格子，九九乘法對於三年級的學童為初學但必備的能力，因此運用九九乘法的比賽，增加桌遊的趣味性，並以此提高學童的背誦速度，因此獲勝者能夠得到相對高的得分。

在實際操作的過程，此格子事件果然為大多數學童所認定的魔王關卡，因九九乘法對決，除了精準性，更加了節奏的反應，需要快速的將答案回答出，因此每到此關卡，便是刺激的時刻。一開始許多學童在挑戰時，多半在第二輪便決定勝負，但隨著多次的練習，學童的對決能夠持續至五、六輪以上才能決定勝負，代表著隨著桌遊的進行，學童能夠提升自我的能力，並且積極挑戰較為困難的部分。

二、學童數學學習興趣提升之轉變

研究者透過訪談與黃月純、楊德清（2011）所編製的數學學習興趣量表對參與實驗之孩童進行調查。

以下分為興趣訪談與數學學習興趣量表兩部分說明：

(一)興趣訪談

研究者在桌遊融入教學前，先對8位研究對象進行態度訪談，完成桌遊融入教學後，再對參與實驗之8位進行訪談，以此瞭解學童在接受桌遊融入教學後，學習興趣是否提升。經由前後的訪談，顯示大部分的學童喜歡這樣的教學方式，並且透過此教學方式，對於數學科更加有興趣，甚至期待下一次的學習。而不同程度之學童，所呈現之態度皆為正向，以下節錄研究對象樣本中，學習成就較高、中等、較低的學童各一名，進行約5-10分鐘不等的訪談，以此瞭解實驗前後學童之學習興趣之轉變：

1. 學習成就較高的學童

實驗前的訪談：

T：你喜歡數學嗎？

S01：不喜歡。

T：為什麼不喜歡？

S01：很難，看不懂。

T：上數學課好玩嗎？

S01：不好玩，有時候會想睡覺。

T：你希望數學課可以多一點嗎？

S01：不希望，上太多，課程會記不起來。

T：上數學課時，老師如果問問題，你會自己舉手回答嗎？

S01：很少。

T：為什麼很少？

S01：怕被同學笑。

T：你會害怕數學考試嗎？

S01：會。

T：為什麼會害怕？

S01：怕考不好。

實驗後的訪談：

T：你喜歡上數學課嗎？

S01：比以前喜歡。

T：為什麼比以前還喜歡上數學課？

S01：可以玩桌遊，分組比賽很刺激。

T：你喜歡這樣的上課方式嗎？

S01：喜歡。

T：你認為這個遊戲對你有沒有幫助？

S01：有，增加計算能力。

T：從哪邊看出來？

S01：寫作業比較不會計算錯。

T：你這次考試進步了，你覺得是為什麼？

S01：覺得數學變有趣了。

2. 學習成就中等的學童

實驗前的訪談：

T：你喜歡數學嗎？

S07：不喜歡。

T：為什麼不喜歡？

S07：很難，每次都錯。

T：上數學課好玩嗎？

S07：有時候好玩，有時候不好玩。

T：為什麼？

S07：如果可以動手做，就比較好玩。

T：你希望數學課可以多一點嗎？

S07：不希望。

T：上數學課時，老師如果問問題，你會自己舉手回答嗎？

S07：不一定，會的舉，不會的就不舉。

T：你會害怕數學考試嗎？

S07：會。

T：為什麼會害怕？

S07：怕被媽媽罵。

實驗後的訪談：

T：你喜歡上數學課嗎？

S07：喜歡。

T：為什麼比以前還喜歡上數學課？

S07：可以玩遊戲。

T：你喜歡這樣的上課方式嗎？

S07：喜歡，希望以後都這樣上。

T：你這次考試進步了，你覺得是為什麼？

S07：我覺得玩數學桌遊，讓我變聰明。

3. 學習成就較低的學童

實驗前的訪談：

T：你喜歡數學嗎？

S05：還好。

T：還好是什麼意思？

S05：不太喜歡。

T：你覺得你的數學好嗎？

S05：不好。

T：為什麼覺得不好？

S05：作業不會寫。

T：上數學課時，老師如果問問題，你會自己舉手回答嗎？

S05：很少。

T：為什麼很少？

S05：怕回答錯了。

T：你會害怕數學考試嗎？

S05：會。

T：為什麼會害怕？

S05：每次都考不好。

實驗後的訪談：

T：你喜歡上數學課嗎？

S05：喜歡。

T：為什麼比以前還喜歡上數學課？

S05：可以玩。

T：除了好玩以外，你覺得你有學到東西嗎？

S05：為了得到城牆，九九乘法變得比較熟了。

T：你喜歡這樣的上課方式嗎？

S05：很喜歡，希望以後都是這樣上課。

T：你這次考試有進步嗎？

S05：有。

T：你覺得進步的原因是？

S05：喜歡數學。

綜合上述之訪談，可以發現，大多數的學童在實驗前排斥數學課程，無論是成績好的學童或是學習成就較為低落之學童，皆對於數學課程感到枯燥乏味，甚至害怕；但透過桌遊融入教學後，學童開始期待數學課程，並且盼望下次數學課的到來，並對未來還有哪些有趣的課程感到興奮。研究者透過訪談可得知，大部分的學童在桌遊融入教學後，對於數學課程抱持感興趣的態度。

(二)數學學習興趣量表之分析

本研究採用黃月純、楊德清（2011）所編製的數學學習興趣量表，從情意、認知、期望及行動四個向度進行評量，並根據每一項目的統計結果，分別進行此四個向度的敘述分析：

1. 情意向度

在情意向度中，包含對於學習內容、學習環境和學習方式的感受。在學習內容的感受部分，進行實驗後，全班喜歡算數學的比例增加（從 25%增加為 50%），不太喜歡算數學的比例減少（從 50%減少至 25%），討厭算數學的比例不改變皆為 25%；在學習環境的氛圍感受部分，進行實驗後，全班上數學課時，常常很快樂的比例增加（從 37.5%增加至 75%），有時候很快樂的比例減少（從 50%減少至 25%），而常常不快樂的學童，則從 12.5%下降至 0%，明顯對於數學學習環境的感受有所提升；在對於學習方式的感受部分，進行實驗後，全班覺得上數學課很好玩的比例增加（從 50%增加為 75%），覺得上數學課有時候很好玩的比例則是下降（從 50%降至 25%）。

2. 認知向度

在認知向度中，包含了個人知識的提升與正向態度的改變。在個人知識的部分，大多數的學童認為數學會讓我更聰明的比例增加（從 37.5 增加至 75%），覺得數學可能會讓我變得更聰明的比例則減少（從 46%減少為 29%）；在抱持正向態度的部分，實驗後，大部分的同學認為數學是很重要的，所以必須努力學會的比例增加（從 50%轉變為 75%），認為數學不太重要，所以學會多少就算多少的比例減少（從 50%減少至 25%）。

3. 期望向度

在期望向度中，包含對於個人的抱負與需求的期望。在對於個人抱負的期望中，實驗後，全班認為如果未來成為一名教師，一定要教數學的比例不改變，仍舊維持 25%，認為可能會教數學的比例則增加（從 37.5%增加至 50%），認為不可能會教數學的比例

減少（從 37.5%減少至 25%）；在對於個人需求的期望部分，實驗後，大部分的同學認為數學課可以多一點的比例增加（從 25%增加至 37.5%），希望數學課能夠少一點的學童，比例則減少（從 50%降低至 37.5%），希望不要有數學課的比例減少（從 25%減少至 0%）。

4. 行動向度

在行動向度中，包含持久注意、樂於參與和努力學習。在持久注意的部分，實驗後，大部分學童認為上數學課時，都很專心的比例沒有改變（皆為 50%），有時候會想其他的事情比例也不變（皆為 50%）；在樂於參與的部分，實驗後，老師如果問問題，常常會自己舉手回答的比例增加（從 0%增加至 12.5%），有時候會自己舉手回答的比例增加（從 62.5%增加至 87.5%），認為自己很少會舉手回答的學童比例則減少（從 37.5%降低至 0%）；在努力學習部分，在實驗後，每當寫數學學習作或數學考卷時，都很認真寫的比例提高（從 62.5%提高至 87.5%），有時候會很認真寫的比例則降第（從 25%下降至 0%），而在寫數學學習作或數學考卷時，都隨便寫的學童比例則保持不變（皆為 12.5%）。

研究者依據學生的選擇給予分數，第一個選項得三分，選擇第二個選項得二分，選擇第三個選項則得一分，並依據情意、認知、期望與行動四大向度分析學童的學習興趣轉變，如下表 6。

表 6

四大向度及學習轉變表

		個數	平均數	標準差	<i>t</i>	自由度	顯著性 (雙尾)
情意	前測	8	6.7500	1.83225	-3.055	7	.018
	後測	8	7.7500	1.75255			
認知	前測	8	4.8750	.99103	-1.930	7	.095
	後測	8	5.5000	.92582			
期望	前測	8	3.8750	1.55265	-2.646	7	.033
	後測	8	4.3750	1.18773			
行動	前測	8	6.8750	1.55265	-1.323	7	.227
	後測	8	7.3750	1.18773			

表 6 (續)

總分	前測	8	22.3750	5.57898	-3.594	7	.009
	後測	8	25.0000	4.69042			

綜合以上所述，學童在桌遊融入教學之後，數學學習興趣有顯著提升。

三、桌遊融入教學後學童數學學業成績之提升

研究者透過自行編製數學學習成效測驗卷，對於受實驗之學童進行前、後測，根據所蒐集的資料顯示，學童在接受「數線桌遊融入教學活動」後，對於其提高數學學習成就，具有顯著的效果， t 值為 -5.000 ($p = .005 < .05$)，在自由度為 7 時已達到 .002 的顯著水準；學童在接受「10000 以內的數桌遊融入教學活動」後，對於其提高數學學習成就，具有顯著的效果， t 值為 -3.813 ($p = .007 < .05$)，在自由度為 7 時已達到 .024 的顯著水準；學童在接受「10000 以內的加減桌遊融入教學活動」後，對於其提高數學學習成就，具有顯著的效果， t 值為 -2.646 ($p = .033 < .05$)，在自由度為 7 時已達到 .054 的顯著水準；學童在接受「乘法桌遊融入教學活動」後，對於其提高數學學習成就，具有顯著的效果 t 值為 -3.550 ($p = .009 < .05$)，在自由度為 7 時已達到 .275 的顯著水準。根據以上結果顯示，四個單元在桌遊融入教學後，後測成績明顯高於前測的成績，且都達到顯著標準，顯示研究者在桌遊融入教學後，對學童的數學學習成效提升是有明顯幫助的。

伍、研究結論及建議

研究者透過遊戲對於國小生的吸引力，將近年狂熱的桌上型遊戲融入國小三年級數學領域的數與計算四個單元的教學活動中，以達到提升國小生的學習興趣及學業成績。本研究的結論為三方面，如下：

一、研究結論為三方面

(一)進行「自製桌遊融入國小三年級數學計算課程」的設計與可行性

研究者為了改善教學現場所面臨的問題，更了解學生喜歡玩大富翁及已熟悉規則，之後，設計了桌遊融入國小三年級數學計算過程中，並透過多次的測試與修改，進行了多次的桌遊融入數學課程中，並加上研究者自我的教學反省，以達到穩定的教學策略，

在教學實踐後歸納出實務上可行的教學歷程：設計桌遊→複習單元概念→講解桌遊規則→學習對象試玩→進行桌遊融入教學→結束遊戲，並頒發獎勵。在實驗過程，所面臨的問題與解決策略如下：

1. 先備知識

學業成績低落的學生，先備知識不足，易難融入教學活動，例如在格子事件－攻乘掠地的部分，需兩隊人馬各派一人透過比賽背誦九九乘法表一決勝負，若學童對於九九乘法並不熟練，則容易造成對於桌遊的參與感降低，因此加強孩童的先備知識是有必要性的。

2. 時間掌握

以桌遊融入教學活動，相對於一般的講授方式教學來得消耗時間，因此若在有限的時間內，同時掌握學習與有趣兩個因素達到平衡，是非常有挑戰的。若能把握下課時間，讓學童自動自發的先行熟練，讓在教學現場進行時，學童能夠迅速進入課程，省下在課堂上熟練桌遊的時間，而能在課堂上專注的進行教學概念的活動。

3. 避免增加壓力

在桌遊進行過程，難免加入競賽的部分，以增加同儕競爭的壓力，但若壓力過大，容易讓一些害羞內向或者學業成績較低落的孩童不想加入桌遊的競賽，因此競賽的壓力應拿捏妥當，修正某些遊戲規則後，教師在桌遊融入數學領域教學時，應多注意以下教學方式：

(1) 善用讚美

為鼓勵學生，將積極參與的行為放大，而當學生面臨學習困境時，以淡化削弱的方式處理，以增強學生的參與自信心。

(2) 強弱分組

對於學習進度較落後的學生，應控制好桌遊進行的速度，並且多運用強弱分組的方式，將學業成績較好的學童與學業成績較低落的學童搭配同組，以達到同儕互相幫助、帶動學習參與的力量。

(二)「自製桌遊融入國小三年級數學計算課程」對學童數學學習興趣的轉變

大多數的孩童在接受桌遊融入國小數學計算課程後，對於數學學習興趣大幅提升，

並且對於學習內容的愉悅感受明顯增加，並且願意主動學習數學、甚至開始期待上數學課。透過量表結果分析，無論在情意、認知、行動向度都有顯著的提升。

(三)「自製桌遊融入國小三年級數學計算課程」對學童數學學業成績的影響

研究者透過自編數學學習成效測驗卷，所得之前測與後測資料進行分析，根據蒐集之資料得知，桌遊融入數學計算課程中，對於學童的學業成績有明顯的提升效果，透過分組競爭、合作學習等方式，提供學童練習和熟練的機會，並增加數感的熟悉度，在四個單元：數線、10000 以內的數、10000 以內的加減和乘法所呈現之樣本 t 檢定，明顯可看出，在桌遊融入數學領域教學後，明顯能夠幫助提升學童之學業成績。

二、建議

以上為三個結論，針對以上的結論，研究者提出二方面建議。

(一)未來研究方面

1. 延伸至其他年級與單元

桌遊融入教學要具備延續性，能夠與多單元整合。研究者為改良過去遊戲融入教學時，大多採用單一單元單一遊戲的方式，故本實驗融入四個單元於一個桌遊中，加強學童統合整理的能力，故桌遊設計上，應加入多單元於其中，教學效果與成效才會明顯提升，對於學童的學習更有幫助，因此桌遊融入數學領域課程適合推廣至其他單元、其他年級。本桌遊為多個格子事件組合而成，每個格子事件融入二至三個單元之概念，因此若能將更多的單元融入其中，必能增加學童之學業成績，故教學者應能持續將遊戲融入教學，推廣至不同年級。

2. 擴大多個學習主題

國小數學領域包含五個主題：「數與量」、「幾何」、「代數」、「統計與機率」和「連結」。本研究融入之四個單元為主題之一數與量，若能多個主題同時融入一個桌遊，對於教學效果必能提升。因此哪一階段更加適合融入桌遊？或者哪個主題更適合進行桌遊入數學教學？這些都值得未來研究者更加進一步的探討與研究。

(二)執行桌遊教學方面

1. 桌遊融入教學的時機選擇

桌遊融入數學領域課程時間應拿捏恰當，時間延長、桌遊種類多樣化，才能夠有效提升學童的數學學習興趣。研究者在進行桌遊融入教學後，有多位學生非常期待下一單元是否有其他桌遊融入教學，因此若能將桌遊安排在不同單元課程進行，並且隨時融入，使得融入頻率提高，而延續學生對於數學課程的期待與興趣。

2. 桌遊設計的發想

桌遊融入教學之設計，大多數的研究者採用自行開發新遊戲，但是遊戲的有趣程度時常無法引起學童之共鳴，因此若能採用現有之遊戲或桌遊進行改編，不僅更能引起學童之興趣，且遊戲規則完整，需要調整的遊戲玩法衝突便減少，因此未來若要將遊戲融入教學，宜將現有之遊戲改編設計。

3. 參與人數的增加

桌遊的設計，若進行分組競賽，除了遊戲進行時，要考量強弱分組問題、學習成效低落之學童信心問題，還需要考量若參與學童增加時，遊戲操作的模式。本研究為八位學童進行教學，因此桌上型遊戲之大小規格，不在此受限範圍，但是若參與人數增加時，宜使用多個遊戲盤進行分組，也就是分成兩場以上的桌遊同時進行，或者搭配電子白板，將遊戲盤投射至大屏幕中，以方便多人參與。

參考文獻

- 江美娟（2013）。**遊戲融入國小四年級分數與小數教學活動成效之研究**（未出版之碩士論文）。國立臺中教育大學，臺中市。
- 吳承翰（2009）。**合作學習教學法應用於國中學生科技概念學習之成效分析**（未出版碩士論文）。高雄師範大學，高雄市。
- 周士傑、梁淑坤（2007）。遊戲融入小學六年級數與計算教學的設計。**台灣數學教師（電子）期刊**，11，12-32。doi: 10.6610/ETJMT.20070901.02
- 張新仁（2003）。**學習與教學新趨勢**。臺北市：心理出版社。
- 陳嘉皇（2010）。國小四年級學童對乘法算則理解之研究。**教育科學研究期刊**，55（2），207-231。
- 梁淑坤、張嘉玲、王全興（2009）。遊戲融入國小三年級乘除法教學之研究。中華民國課程與教學學會，**課程實驗與教學改革**（頁 67-102）。臺北市：五南圖書公司。

- 黃政傑、吳俊憲（2006）。**合作學習：發展與實踐**。臺北市：五南圖書公司。
- 黃月純、楊德清（2011）。國小低年級弱勢學童數學學習興趣與信心之研究。**嘉大教育研究學刊**，**26**，113-145。doi: 10.6474/NCUJER.201103.0113
- 趙翊君、梁淑坤（2017）。**團體遊戲之研發及融入五年級數學複習對學生學習之改變**。第九屆科技與數學教育國際學術研討會暨數學教學工作坊，國立臺中教育大學。
- 饒見維（1996）。**國小數學遊戲教學法**。臺北市：五南圖書公司。
- 饒見維（1996）。**教師專業發展－理論與實務**。臺北市：五南圖書公司。
- Ainley, J & Luntley, M. (2005). What teachers know: The knowledge base of classroom practice. In M. Bosch(Ed.), *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1410-1419).
- Kagan, J. (2000). *The seductive ideas*. Cambridge, MA: Harvard University.
- Slavin, R. E.（1985）.Cooperative learning：Applying contact theory in desegregated Schools. *Journal of Social Issues*,43-62. doi: 10.1111/j.1540-4560.1985.tb01128.x

蔡育知（2018）。

數學素養導向教學：七年級以密碼為主題之代數課程與教學設計。

臺灣數學教師，39（2），50-65

doi: 10.6610/TJMT.201810_39(2).0003

數學素養導向教學：七年級以密碼為主題之代數

課程與教學設計

蔡育知

十二年國教之新課綱，預計將於明年（108 學年）正式實施，而素養導向教學在國教的提倡下，如何進行有效的素養導向課程設計，成為轉銜階段教師迫切的需求。國中七年級的代數課程中，一元一次方程式的課程為學生由具體的算數計算，轉換至抽象代數思維的概念層次轉銜單元，而此重要的課程要如何進行數學素養導向的教學，為當今教學現場教師們希望能多探討的。本教學與課程於是針對上述教學單元，搭配密碼為主題，以素養導向的方式設計教學模組，內容至少涵蓋四個子單元，相關主題亦可進行跨領域規劃。數學素養導向課程與教學設計之案例，實施後有效引起學生學習興趣，於是將設計的過程、想法、反思與結果與諸先進分享，彼此切磋成長。

關鍵詞：方程式；代數；密碼；教學設計；數學素養

壹、緒論

國家基礎教育為能培育與國際先進國家齊驅的優秀人才，十二年國教參照國際學生能力評量計畫（Program for International Student Assessment [PISA]），強調素養教學，而數學素養在臺灣本土經驗下，李國偉、黃文璋、楊德清、劉柏宏（2013）於教育部提升國民素養實施方案中，定義數學素養為：「個人的數學能力與態度，使其在學習、生活、社會、與職業生涯的淨脈絡中面臨問題時，能辨識問題與數學的關聯，從而根據數學知識、運用數學技能、並藉由適當工具與資訊，去描述、模擬、解釋與預測各種現象，發揮數學思維方式的特長，做出理性反思與判斷，並在解決問題的歷程中，能有效地與他人溝通觀點。」，而此與過往偏向數學知識導向的教學而言，更強調實際情境脈絡下面臨問題時，辨識與數學的關聯，透過數學思維或工具，做出有效判斷，並能與他人溝通。故教師面對十二年國教，實際教學場域所產生的困境，其實面臨的並非課本出版或數學內容的變動，而是要如何在課程中，使學生能從實際情境經驗中獲取數學思維並運用數學工具，且還能進一步的與他人溝通。而在此情形下，教師相對需增強的能力，為增強妥善運用自身環境或情境，自主設計課程，而使學生能有效地從課程中獲得相關數學能力。

一、課程設計的動機與背景

基於以上現場教師對素養課程設計的需求，本論文以素養導向的觀點出發，運用情境教學設計數學主題課程，並運用於實務的課堂，作為十二年國教施行時，進行課程設計的參考及討論案例，透過教師群體間學理與實務上的彼此切磋，得有效增長教師課程設計能力，積極面對未來素養導向的教學。由於筆者於完全中學任教時含七年級班級，課程編排以主題式教學進行，相關課程往往需自行設計課程以提高學生對學習的專注與興趣。在當前素養課程設計的需求下，於是節選過往進行過的相關課程設計與先進分享切磋。

而選取七年級代數課程有其原因，起因於九年一貫數學課程綱要於七年級數學能力的培養，認定七年級代數方面的能力須完成二元一次聯立方程式，以及二元一次聯立方程組於平面圖形的教學，然數算方面的內容，亦於七年級開始負整數、分數的運算的教授，而這樣的安排下，未知數、列式、一元一次方程式、解一元一次方程式等二元一次

聯立方程式的先備知識，就尤需安排在七年級上學期末段短短的一個月時間內完成，如此方得於七年級下學期，順利銜接進行二元一次聯立方程組的教學。然就數學學習心理的角度，從算數計算的具體操作思維型態，轉換到更抽象的代數型，學習思維有層次的差距躍升，不僅與數學知識有關，亦與大腦在這階段是否發展成熟有關。七年級一元一次方程式的課程，開始運用未知數 x 的代數型，為中學階段算術思維過渡至代數思維之關鍵課程，學生於課程適應銜接的情況、運算的能力以及學習興趣等，都可能間接影響學生接下在代數方面的運算學習。然七年級學生剛入國中班級未滿半年，對於閱讀理解課本的學習狀況尚待熟悉，大腦整體而言尚未如八年級、九年級般的發展成熟。於是面對七年級須開始熟悉抽象概念的學生，教師通常須透過一些和八年級、九年級¹教學較不同的方式，以具體至抽象的模式，進行一元一次方程式的教學，以順利協助學生進行思維轉換理解層次的提昇。

於是，如何設計一個素養導向的課程，內容坐落在教導未知數概念，結束於一元一次方程式的求解，時間規劃在一個月的時間內之數學主題課程，運用於七年級上學期的班級，便成了當時在進行教學的構想。而此代數主題的課程設計實施後，以質性行動探問理解學生上過課程後的學習感受，得到此次以情境素養編排的課程設計，對一般七年級班級學生而言，對學習興趣具整體提升效益。

二、課程設計目的

在以上背景與動機下，筆者開啟了一系列的數學課程設計，而相關的課程設計除希望達素養導向的教學，以主題式進行教學外，尚須包含建立七年級學生代數能力之分年細目 7-a-01 至 7-a-05 的能力（如表 1）。

表 1

七年級代數能力之分年細目

年級	培養能力
七年級	7-a-01 能熟練符號的意義，及其代數運算。
七年級	7-a-02 能用符號算式記錄生活情境中的數學問題。

¹數學領域根據學生的學習方式與思考型態，將九年國民教育區分為四個階段：階段一為一至三年級，階段二為四、五年級，階段三為六、七年級，階段四為八、九年級。

表 1 (續)

七年級	7-a-03 能理解一元一次方程式及其解的意義，並能由具體情境中列出一元一次方程式。
七年級	7-a-04 能以等量公理解一元一次方程式，並做驗算。
七年級	7-a-05 能利用移項法則來解一元一次方程式，並做驗算。

此外，由於此主題下學生初次開始進行抽象數學語言，如何使抽象得具體的建立讓學生清楚，且讓學生在學習的過程，持續維持數學學習興趣以利未來的學習，就相當重要。整理上述，列出此次七年級課程設計目標如下：

- (一) 完成以素養為導向的課程設計；。
- (二) 進行階段數學主題式教學系列課程設計；
- (三) 所設計之課程內容至少需包含七年級代數之分年細目所述能力；
- (四) 內容須有效輔助學生學習從具體運思至抽象概念，加深學習印象；
- (五) 教學過程中須具備持續加強提升學生數學學習興趣的各項設計。

表 1 關於七年級代數分年細目 7-a-01 至 7-a-05 之能力內容，涉及未知數概念的建立，以及方程式的學習。未知數代表一個可感到似乎存在卻未知的數，對於喜歡科幻想像的七年級、八年級學生，看到「未知的事物」很容易與「秘密」產生聯想，且方程式的學習主要在方程概念的建立與解決過程，類似的意義亦恰好對應到密碼學中加密與解密的過程。

課程施行時，為電影《模仿遊戲 (The Imitation Game)》上映約已年餘時，部分學生對當中的內容有概略印象，且密碼相關的概念若運用於國中數學課程，恰可配合綜合課程童軍的旗語教學；生活科技課程中的程式語言實際上機實作；輔導科則可進行生命密碼課程設計；彈性課程亦可安排講解《模仿遊戲》電影講艾倫圖靈傳奇一生等，故亦相當適合作為跨科授課使用。於是當時在環境、學科適配性以及學生興趣考量下，選以密碼主題進行七年級的代數素養教學授課。

貳、文獻探討

由於教師進行課程設計，所採用的方法與模式與諸多相關，大抵以教育環境因素影響，學科專業以及學生學習時的狀況為最，而以上這三方面的考量，其中在學生學習方

面，由於我國的數學能力指標與分年細目原則上為諸多數學教育專家，根據學生學習的理論與實務所建立，當初規劃時更已完整的幫全國教師，考量學生進行數學學習時的心理與行為，有效區分階層的教學，以保障全國的數學教學是為完整，在理論與實務的強有力的背景下，對於一般學生，我們可安心的尊重專業見解，直接採用現行的數學分年細目，即可初步顧慮到一般學生在學科學習的知識接受情形，其餘對於學生面向需注意的，則以學生個別背景下的多元情形，而這方面多為現場教學的師生互動。故在學生學習面相方面，筆者採用九年一貫課程綱要中的分年細目顧慮學生的學習。

故以下則分別對學生學習外的兩方面重要因素，教育環境因素以及學科專業面進行探討，亦即針對面臨十二年國教，素養導向數學課程設計，以及七年級算術思維轉換至代數思維發展面向。惟此處由於前段落已略介紹過算術思維與代數思維，故本段改增加密碼歷史，作為情境教學之補強。

一、素養導向的課程設計

未來十二年國教將以核心素養的培養為導向，而素養導向課程與設計，林永豐（2017）提出四點基本原則：

- （一）連結實際的情境脈絡，讓學習產生意義；
- （二）強調學生參與和主動學習，得以運用與強化相關能力；
- （三）兼顧學習的內容與歷程，以彰顯素養包含知識、技能、情意的統整能力；
- （四）針對不同核心素養項目應有不同設計點。

當中強調了情境脈絡，而使學習產生意義，強調參與與主動學習，重視歷程等，而不同核心素養，設計要點確有不同而需分科探討。數學科方面，單維彰（2017）就透過訪談教學現場教師與分析所執行的教學模組後，提出識別數學素養導向教學模組的六項原則：

- （一）透過現實情境、寓言故事或數學史引入教材，營造數學學習需求；
- （二）以任務鋪陳數學學習脈絡，引導學生進行探索與發展概念；
- （三）讓學生運用相關數學知識與能力解決問題，提出合理的觀點與他人溝通；
- （四）教材安排從具體到抽象，提供學生有感的學習機會；
- （五）教材設計具備多重表徵；
- （六）學習任務具備形成性評量的功能，以評估與促進數學學習。

當中亦對情境的引入以及鋪陳學習脈絡，引導探索的部分特別加強，並有形成性的

評估，此外則強調具體至抽象的有感學習，故教材的設計除具體外，建議選取可建立抽象表徵意涵之教具，而課堂中不僅須安排學生運用數學知識解決問題的機會，更須發展出運用數學進行對話的能力。

整理上述關於整體素養以及數學素養的課程，我們得到素養導向的數學課程設計，整體設計大抵是以彼此相關之教學模組組成一體的貫串，在素養導向下強調學習脈絡下的意義學習，當中尤須注重學生主動的形成過程，適當採用形成性評量，而課堂知識建構的鋪陳，宜從具體至抽象，教材設計具具體及抽象的多重表徵，從中培養以數學知識解決問題，進一步運用數學對話溝通的能力。

二、密碼的歷史

密碼最早的誕生可追溯自《舊約聖經》，據內容記載巴別塔（Tower of Babel）的插曲，敘述當時說同一語言的人們自大洪水後，為傳揚自我名聲免得被分散全地，決定建立一座城和通天高塔，而神知道後便賜與這些人們語言不同的密碼，使人們不論在口音或言語上，彼此不能溝通，不能明白彼此的意思，且把這些想構築高塔的人們分散世界各地，至今密碼仍留由神封存。其次則追溯到西元前 19 世紀的埃及，當時所用的密碼用於巫師或秘密，故有神祕的面紗，此外西元前 16 世紀的希臘，代表邁錫銘（Mycenaean）文明智慧成就的，亦有約瑟（Joseph）夢境密碼等。

而現在密碼被高度重視則因戰爭，密碼在戰爭中扮演重要解讀的關鍵。西元前 58 年凱薩（Caesar）遠征高盧（Gallicum），當時四面楚歌的西賽羅（Cicero）寄出一封運用凱薩密碼的激勵信，而這種密碼運用字母挪移固定間隔完成，凱薩密碼因此被視為當代密碼最早的奇緣。而密碼的工具使用，可追溯至西元前 5 世紀的斯巴達（Sparta）所運用的密碼棒工具，是目前被公認發現最古老的軍事密碼器；而當今運用數字解密的開端，則源自西元前 2 世紀的波麗比奧斯（Polybius）密碼，其運用棋盤格方式將文字轉換成數字。

時間使密碼的使用漸漸精深，至二次大戰時期，加密工具已從密碼盤發展到恩尼格瑪（Enigma）機，當中的密鑰程序即加密時遵循的法則，且密鑰可不斷變化。而當時解密的主要功臣為主修數學的雷耶夫斯基（Rejewski）、羅佐基（Różycki）和佐加爾斯基（Zygalski），他們在 1930 年代破譯了恩尼格瑪機及其結構，然而當時對這樣的結果並未好好運用。而隨著恩尼格瑪的日新月異，數學家圖靈（Turing）亦參與了解密的工作，然他以所設計的計算機破解，亦影響了後世電腦的發展與資訊化的生活。而不僅於戰爭，

至今的密碼依舊運用數學工具扮演生活上相當角色，以加密、解密的攻防捍衛著無以數計的資料。

參、主題課程設計

七年級代數之分年細目中，一元一次方程式之數學課程至少包含符號、運算、一元一次方程式、以等量公理與移項法則解一元一次方程式等數學概念。而上述概念須以階段性建構完成，故此主題系列依序至少包含未知數、式子、方程式，而方程式包含方程介紹與解方程，故分別運用生活中的未知概念、晶片、密碼的加密與解密²，公秤等量作為情境，進行素養導向課程設計，流程如圖 1 所示。

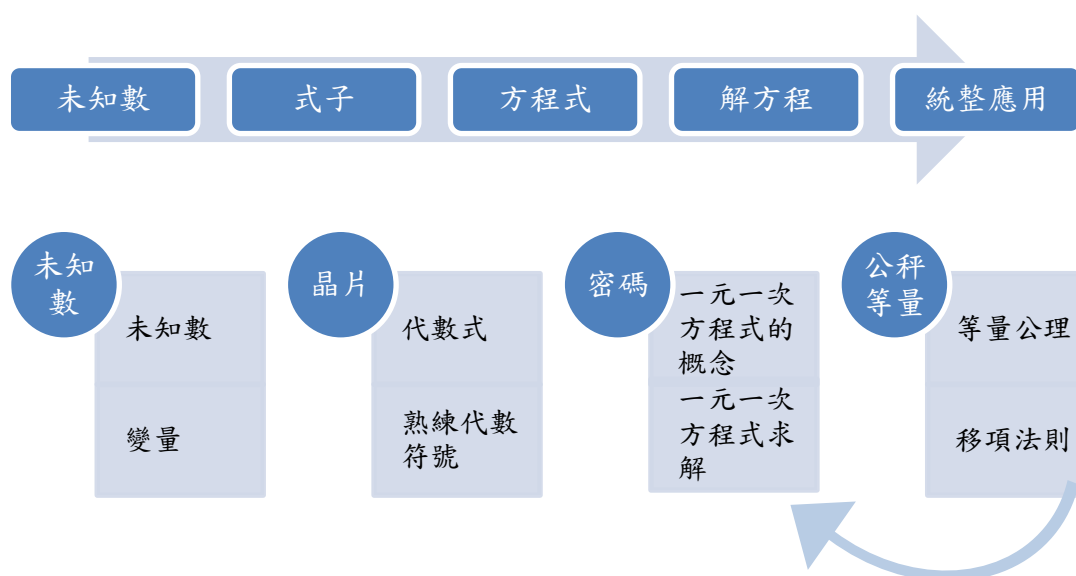


圖 1 「代數密碼」主題課程流程圖

而以上完整的主題課程流程，由四個子單元教學模組組成，完整從未知數至統整應用的過程，則為完整單元模組，以下概述四個子單元教學模組：

一、未知數單元

(一)課程目的

未知數的課程目標，主要能以實際的情境，讓學生切實感受到現實世界除實際運算

²本程設計中的「解密」意指解開密語，而有別於解開密鑰。

外，運用符號 x 等來代表未知某數有其必要，此外亦必要使學生得感受到，若我們變動選取，則 x 可能分別呈現不同的值。

(二)使用教具

抽籤桶、亂數表 ppt 或海報、學習單、筆電及網路。

(三)教學歷程

從當下的環境尋找引起動機因子，例如若當時學生們很在乎公平性，於是透過這樣的情境，引導學生思考一個班級有這麼多人，每人條件一樣，要運用公平的方式選一個目前還不知道是誰的同學，有什麼方法？在學生邊答教師就一邊將學生所說的寫在黑板上（而除了幾個例外答案，這時學生往往會脫口而出「抽籤」），教師整理學生所說後，接下來的提問便著重在建立未知數概念 x 表未知數，教師可於黑板中央大大寫個 x （習慣的表示法）加強學生對符號的印象後，進一步引導學生多方感受並看到生活中非常多未確定的事情，且即使不知道該物下我們有必要敘述的情境，此時必要運用代號（例如 x ）表示此不知道後才得更進一步完整敘述，透過對照使學生明白未知數的表示法有其必要。

後續運用學生們所回應抽籤，於黑板上以表列的方式寫 x ，透過不同的學生抽籤後寫下數值，讓學生看到未知數代表的 x 可能不一樣，如此便已達成初步。然班級若有學生有興趣更進一步瞭解關於此單元的更多方法，於課程末段的些許時間（約 10 至 15 分鐘），可依學生學習的狀況提起亂數，介紹數學上另外一種公平的選取方式，而亂數表的號碼抽選，可延伸至運用電腦亂數選號等，不僅加強學生 x 可能是不同數字的概念，更能增加數學於現實世界的強大功用感受，進而延伸探索。整理出教學活動連結的意義對照如下表 2。

表 2

未知數單元活動連結意義對照表

引導動機	人之於公義平等的看重			
分年細目	7-a-01			
運用方法	運用抽籤及大量跳動的數字，讓學生看到未知的代表性			
現實具體	抽籤	實際抽籤	亂數表	電腦亂數
數學概念	為可公平選取的方法	看到所抽出的號碼 x 會變動	有更多筆資料時可用的抽選方式	近代科技發展貢獻，數學奠基建立

(四)數學例題（僅概念）

小魚導師班上有 20 位學生，班級中有一個屬於班上專屬的籤筒，分別寫著 1 至 20 的數字，並對應到班上座號 1 至 20 的學生。而小明是班上的班長，每天都要從籤筒中抽幸運號，抽中的幸運天使當天便至少要完成一件給班上幸運的好事並在隔天分享心得給大家，現在若 x 代表小明當天抽籤所抽出數字，昨天小明從籤筒抽出幸運數字 5，座號多少的同學是昨天的幸運天使？昨天的 x 代表何數字？若今天小明再次抽籤，結果抽出數字 12，那座號多少的同學會是今天的幸運天使？再問今天的 x 為何數字？以這樣的規則，依所觀察到的 x ，它代表的數字是否為每天都不變的數字？還是可能有不同？

(五)形成評量

包含課堂區分主動與被動應答的狀況、未知數 x 概念建立的學習單書寫、（亂數表課後作業）、課中或課後的歷程概要書寫回饋。

二、式子單元

(一)課程目的

式子的單元，以具體物引起學生們創造的想法與樂趣，用以介紹式子的正確書寫，以及式子如何計算。本單元透過晶片替代簡略的函數概念（此未提到函數名詞），做為銜接媒介開啟式子的操作，運用晶片之於現代科技的魅力，其輸入不同值，得到不同的輸出狀況且可操作機器的實際功能，學生可很輕易地體會並感受到式子的強大功用與重要性。

(二)使用教具

各色名片盒、可安插名片的盒形教具、隨堂測驗（熟練式子化簡使用）、課本習作等（課堂勾題書寫或規定回家作業範圍等）。

(三)教學歷程

從上次課程之未知數引入，透過情境問題的提問與應答，先建構出 x 可進行運算的概念後（可參考本單元數學例題說明）後，運用數線構圖介紹未知數運算，次序從簡單的數字 b 、 x 、 $x + b$ 、 ax 、 $ax + b$ 、至更多計算符號的一次式計算等，完整介紹正確書寫方式一遍給學生（在這之前記得搭配抽籤提問），並將一元一次式的書寫方式保留上述寫法在黑板上。而後拿出附有可安插名片的盒形教具，以不提出函數（本教學活動以盒

形教具呈現，可看到函數機器形式）名詞，卻運用函數內涵的方式介紹式子（本教學活動中以名片呈現，代表晶片），教師版的簡要說明如下：晶片往往是驅動機器的重要元件，可透過安插不同晶片而使這個機器產生不同的功用設定。

然如此的呈現，教師如何教代數式呢？先拿出一張名片卡，請一位學生從剛剛學到的一元一次式概念，任意於名片上寫一個一元一次式做為例子向全班說明如何進行，學生於名片上寫式子表進行晶片內容的設計，而後將名片（晶片）安裝在盒形教具（機器）上，而後告訴學生當輸入不同的 x 值，透過機器其實就會計算出不同的結果，輸出內容除與輸入的值相關外，更與晶片如何設計內容息息相關，此時運用學生寫的式子實際計算兩次數值給全班看。確定全班理解後，發給全班每人不同色名片數張，請學生設計晶片內的一元一次式設定（書寫過程中，教師須一邊指導查看學生們的書寫是否正確，亦可一邊引導學生進行特定的書寫，且教師須注意選取或留意一些，剛剛書寫過程中看到式子較長而計算具有挑戰性的名片）。而後全數收回，抽出 1 張學生所設計的晶片放入機器中後，再抽 2 名學生，抽到的學生則以自己的座號為要輸入這個機器的數字，分別於黑板的左右兩邊進行機器內部的運算，而全班其他人則負責幫忙檢查，重複上述二次後，學生於計算式子的值多已熟悉。

而後將班級中特異長又難計算的兩張名片抽出請兩位同學進行如上計算，因較長的一元一次式計算很複雜，有許多學生不論計算錯誤或檢驗過程都感到疲累不耐煩，進而引導出在進行晶片設計（在自己的卡片寫式子）時，可簡化式子而使計算更精簡且不易計算失誤，使學生理解式子化簡的重要性，進而想知道如何進行化簡。而後由教師統整切入完整介紹式子的化簡，然此部分涉及式子計算，務須於課堂中搭配隨堂練習進行，並規定計算及操作型態的回家作業，範圍著重於式子的化簡與運算。而式子單元的教學活動對照，則如下表 3。

表 3

式子單元活動連結意義對照表

引導動機	人類創造的潛能與興趣			
分年細目	7-a-01、7-a-02			
運用方法	運用晶片潛藏的函數概念，引導介紹式子及其值的功用			
現實具體	晶片設計	晶片放入機器	輸入號碼運算	複雜的設計
數學概念	一元一次式的構造與書寫	形成函數機	代入式子求值的計算	式子化簡有其便利性

(四)數學例題（僅概念）

（承接上單元數學例題）若小魚老師設定小明抽出的幸運號碼加 5 為當天進入小魚老師討論區答題後可領取金幣的密碼，現在 x 已代表某日小明所抽出幸運號碼，請問可用什麼式子代表某日進入小魚老師討論區答題後可領取金幣的密碼？若後天小明抽出 6，請問後天班上學生進入小魚老師討論區答題後，需輸入密碼多少才可領取金幣？

(五)形成評量

包含課堂區分主動被動應答的狀況、上台表現、隨堂練習、回家作業、課中或課後的歷程概要書寫回饋。

三、方程式單元

(一)課程目的

（一元一次）方程式的單元，除介紹方程式，並運用密碼概念，營造開啟學生進行寫方程與解方程的動機與想法。

(二)使用教具

式子單元學生所寫上式子的名片、可安插名片的盒形教具、從訊息的有效傳遞至訊息有加密解密設計的故事介紹 ppt。

(三)教學歷程

此次課程以一個全新單元的感受開啟，介紹訊息傳遞中，不讓第三方閱讀到訊息而設計的加密與解密，並提到文字可進行數字的轉換，介紹加密過程，例如教師可與學生約定運用「該數加 3」的方式傳遞訊號後，由學生實際計算過程，亦即若發報者想要傳遞的訊號 $x = 3$ ，由約定的加密型式 $x + 3$ 傳遞，故收訊者收到訊號為 6。過程運用 $x + 3 = 6$ 的過程。

在學生已理解介紹後，便將上單元盒形教具的機器作為加密的機器使用，例如請三名學生上台，分別代表發報者、加密者與收訊者，可先約定發報者給出範圍限制在 1 至 9 的未知數 a ，而加密者在收到 a 數字後，須透過加密機晶片上的式子進行秘密運算，並將計算出結果公開給收訊者，而教師注意須將剛剛收訊者由加密處接收的過程以方程式（此處教師仍須強調等號）列下寫在黑板上。在觀察到學生透過此活動已熟悉如何進行加密後，便開始對擔任收訊者的學生進行提問，所收到的訊息是什麼？要如何從所收

到的訊息讀取到原本發報者的原始訊息？學生提出各類想法並回應整理後，先提示大家在還不知道快速解決的方法前，都可嘗試以可能的數字 1 至 9 代入式子看是否滿足方程式而求得解，須注意此時每次講解方程式，仍需加強講解方程式中等號的重要，並將完整的代入作法仔細講解並呈現於黑板。

在大家都學會了此方法後，再次抽選兩位學生，分別擔任發報者與加密者，加密者至一旁進行秘密運算後將訊息發出給全班，而後請所有接收到訊息的學生運用剛剛所學的方式，完整解出原始答案，並請每位學生均於練習本上計算，而後可運用分組競賽的取優勝增加競賽答題速度與趣味性。本課程課中需注意給予正向作為解出答案的學生正增強，並於課後發下此單元的回家課後練習（內容包含如何列方程式的形成自學單，以及代入解方程的題目）。而此單元活動與數學知識的對照如表 4。

表 4

方程式單元活動連結意義對照表

引導動機	人具本能探究與好奇能力，進而具解開未知或秘境的動機			
分年細目	7-a-02、7-a-03			
運用方法	運用密碼的加密解密，營造學生寫方程式與解方程式的動機			
現實具體	取數字 1 至 9	加密過程	解密	課後練習
數學概念	有限數字（便利代入求解）	列一元一次方程式	有限數字代入式檢驗是否解	方程式與代入解方程總複習

(四)數學例題（僅概念）

（承接上單元數學例題）進到小魚老師討論區後，小花突然忘了今天小明所抽的幸運數字 x ，但金幣已幾乎在眼前實在很想領金幣，就缺了輸入密碼而已，於是隨便找班上同學阿寶問密碼，阿寶告訴小花密碼是 18。請問如果你是小花，你可不可以不要透過再問同學一次，而知道今天小明所抽的幸運數字？請試著以 x 列方程式，並找出解 x 的規則。

(五)形成評量

包含主動被動應答的狀況、上台表現、分組合作情形、課堂運算、回家課後練習。

四、解方程式單元

(一)課程目的

以認識並熟練等量公理為主，進而至移項法則，提供除代入求解外，其他更便利求解一元一次方程式的方法。

(二)使用教具

自製等臂吊秤（含砝碼與自選未知重量的可分割物品）、自製特殊形狀的磁鐵（形狀包含蘋果數個、錢幣及 x 等）、課本。

(三)教學歷程

回顧一元一次方程式的意義（可表示代數方程式解的意義），並請學生察覺當中與式子的不同點，並看到當中等號的部分，進而引導學生關注等號的性質或規則。而後拿出吊秤，以平日秤斤秤兩的對等至介紹等號，後請學生實際觀察吊秤兩邊平衡時，其中固定某邊放未知物，另一邊放砝碼，而後分別考慮未知物的 $+$ $-$ $\times$ $\div$ 四則運算，並以對答的方式，引導學生思考另一邊的秤碼要怎麼處理，吊秤才會平衡？將多位學生們的應答寫於黑板後，從中整理出等量公理的文字敘述，而後帶領全班閱讀課本關於等量公理範圍敘述，進行閱讀理解文本的練習。

下一步則反向操縱，即當吊秤的一方非僅未知重量的物品，且兩方平衡時，要如何知道未知物多重？並把同樣的概念，運用兩堆價值相等的畫法畫在黑板一側，黑板另一側則寫方程式，三個表徵同時運作，而在操作第三次後，將表徵直接剩黑板上的二種表徵，使其專注於不同的方程式，如何以分堆等量的方式求解，持續至多數學生已看出簡單有規律的等量操作規則（教師亦可提供個別學生於桌上操作之教具，讓每人實際動手操作，個別發現）。最後將實際操作的結果，回到運用方程式書寫在黑板，並進行方程式一般規律的統整，課堂並備有隨堂練習，並請學生熟練運用等量公理解方程。當學生們都寫好後，仍需引導回想如何判斷這個數字是不是解，並提醒學生們將求得的解帶入檢驗，看解答是否正確。

至於移項法則的介紹，則在上述活動後將黑板分三區，將兩堆以等號連結之畫法畫在黑板一側，至於黑板中間與黑板另一側，則分別是以等量公理解方程，以及移項法則解方程。然這次則特別著重於等量公理解方程，對應到的移項法則運算的講解，同樣操作完整的理解後，將結果統整於黑板。此練習同樣須備隨堂練習，並熟練移項法則解方

程，最後須提醒學生們將所求出的解帶入檢驗解。此單元活動與數學知識的對照如表 5。

表 5

解方程式單元活動連結意義對照表

引導動機	一般人們對於相等的處理原則，具多數共識					
分年細目	7-a-04、7-a-05					
運用方法	以對照建立具體物與方程式的抽象連結，協助釐清代數之結構性					
現實具體	吊秤	吊秤平衡時兩端的操作	於黑板上以分堆等量方式介紹	黑板上呈現分堆等量與方程式的對照	等量公理與移項法則於方程式上操作的對照	課後練習
數學概念	現實世界相等之表徵	等量公理介紹	等號在平面上，以不同表徵的理解	能從具體操作到抽象方程運算	能感受到移項法則的對等與便利	熟練等量公理與移項法則

(四)數學例題（僅概念）

（承接上單元數學例題）以每天小明抽出的幸運號碼加 3 作為領取金幣密碼的設定，使用了一個多月後，小魚老師覺得密碼這樣設太簡單，於是改成每天選不同式子公布在討論區，當天計算出的值就是當天領取金幣的密碼。而在小魚老師改了方式後，某日是安安忘了當天小明抽的幸運號，而他也與小花一樣，問了班上同學阿叁密碼是多少？阿叁告訴安安密碼為 21，輸入密碼 21 後安安順利領取金幣成功，只看到小魚老師公布在討論區的式子為 $2x + 1$ 。請問如果你是安安，你可不可以不要透過再問同學一次，而知道當日小明所抽的幸運數字為何？試著以 x 列出方程式，並運用等量公理或移項法則求解。

(五)形成評量

包含主動被動應答的狀況、課堂運算、回家課後練習。

五、特別補充

在學生學會等量公理與移項法則後，課程須回到方程式單元中的解密碼的活動，以一元一次式設計兩方對戰時的密碼情境，接收訊息後所進行一元一次方程式的求解，藉

以觀察學生在解開解的熟悉度是否需加強、延伸或加深等。另亦可自行設計與整個主題相關的題組，進行網路上的題目競答，或實體對戰下的大地遊戲、密室逃脫遊戲（關卡著重密碼加密解密設計）等，如此整個模組方達完整，時間估計在一個月的設計課程中密集達成。

肆、實施與反思

本素養導向的主題課程設計完成後，於七年級上學期一般班級課堂實施，成果可看到在現實表徵與活動的介入下，學生的學習專注度確有提升。而密碼主題可成功的背後，代表的是人們對未知的好奇心與探求，往往是知識成長的因素，且這樣的好奇是可使學生自發想注意想學習。而透過素養導向的課程，學生可從較具體的物明白抽象數學建立於平常生活上的意義，而能廣泛的從生活中查看各類與數學相關的發現，而搭配小組班級活動更能促進學生間彼此分享。

上述數學素養相關的課程設計實施，提升了整體的學習興趣，學生學習因有具體物引起動機而更具焦課程，此外亦可發現部分學生能自我察覺到，在完成解決實際問題的過程必須運用這樣的數學工具才得解決，而現實的問題更造就必要進一步深入學習數學工具與相關規則，加上課程活動設計亦帶動班級活絡氣氛，學生感覺數學居然也蠻好玩的就開始邊想邊玩，進一步更向老師詢問一些自己在腦中所想不同面向小問題，甚至更開始發表意見學了這些後還可以如何發展等，也因此全班一起學習數學的凝聚力更強，且有動力進一步交互詢問不懂之處而精進學習。然課程設計仍有不足處，例如學生在面對方程式時，可發現其對於非課程講述到的其他情境，亦即非以蘋果、晶片、密碼的情境或表徵，仍會有思緒暫留而反應較慢的現象，故看到學生在運算上仍會停留實體物，而看出此課程設計，在完整抽象思考的建立與熟稔方面，尚有加強空間，尤其需再經過純粹代數運算等更嚴謹抽象的練習一陣後，方能漸漸跳脫一開始以情境刺激學習的狀態，進而真正步入以代數思維進行結構思考，將所具的抽象概念運用到生活。而這樣的欠缺讓我們亦不禁反思，類似抽象的練習其實是過去傳統教學下，學生若完整理解後可具備之能力，故不論傳統教學模式或現今提倡的素養教學，筆者認為兩方均具備對數學真實本質傳承的重要，而持傳統教學與現實教學相輔為用的看法，以使學生能從獲得最大學習效益，方不致偏廢。

而此課程實施後發現，素養導向的教學的確能使學生較有感的引發較高的學習興趣，

而運用主題式素養導向自編教材於課堂，除學生們的上課回饋，教師於教學的行動中，亦會發現有許多延伸或深入知識，每次的再深入再學習後，可於上課帶給學生更多而加深教師專業。而透過教師行動後的反思、探究、學習、熟練與再行動的重複過程，相信每個單元的教學與課程開發，在諸多教師們的用心下，必朝向至善至美，而有益於學子們的良好學習。

參考文獻

- 李國偉、黃文璋、楊德清、劉柏宏（2013）。教育部提升國民素養實施方案—數學素養研究計畫結案報告。台北市：教育部。
- 林永豐（2017）。核心素養的課程教學轉化與設計。教育研究月刊，275期，頁4-17。
- 單維彰（2017）。「知、行、識」～探究數學素養導向教學模組設計與發展。（單維彰與鄭章華，編）十二年國教數學素養導向課程設計與教學案例。新北市：國家教育研究院。頁1-32。

《臺灣數學教師》稿約

2013.09.27 編審委員會會議通過
2014.09.04 編審委員會會議修訂通過
2015.05.24 編輯委員會會議修訂通過

2016.05.15 編輯委員會會議修訂通過
2018.05.12 編輯委員會會議修訂通過

壹、《臺灣數學教師》（原名為《台灣數學教師(電子)期刊》）（Taiwan Journal of Mathematics Teachers）（以下簡稱本刊）是國立臺灣師範大學數學系及台灣數學教育學會共同發行之期刊，內容以出版數學教育領域相關議題的原創性論文為宗旨。本刊徵求符合宗旨之教學實務文稿，內容包含探討數學教學策略、學生迷思概念之教學引導、數學教育課程、教材與教法等實務經驗分享、研究問題評析、數學教育之構想、書評、論文批判、數學教學與應用性研究、數學教育研究趨勢介紹、專題演講講稿、數學學習評量、電子媒材設計、數學教師專業發展及其他數學教育相關議題等內容。本期刊徵稿分為以下兩類：

- 一、實徵研究，字數以8000字為原則。
- 二、實務分享，字數以3000~8000字為原則。

貳、本刊每年發行兩期，分別於四月、十月出刊，並採電子方式發行。全年徵稿，隨收隨審。

參、本刊所刊之文稿須為原創性的教學實務文章，即未曾投遞或以全論文形式刊登於其他期刊、研討會彙編或書籍。若文稿在送審後自行撤稿，或出現一稿多投、修正稿回覆逾期、侵犯著作權等違反學術倫理等情況，將依下列規則處理：

- 一、來稿一經送審，不得撤稿。因特殊理由而提出撤稿申請者，案送主編決定；非特殊理由而自行撤稿者，一年內將不再接受該作者的投稿。
- 二、若文稿被發現一稿多投、侵犯著作權或違反學術倫理等情況，除文稿隨即被拒絕刊登外，一切責任由作者自負，且本刊於三年內不接受該作者來稿，並視情節嚴重程度求償。
- 三、作者應於發出文稿修正通知的二週內回傳修正稿及修正回覆說明書，逾期視同撤稿。若有特殊情況請先與本刊聯絡。

肆、未經本刊同意，已獲本刊接受之文章不得再於他處發表。投遞本刊之文稿須經編審委員會送請專家學者審查通過後予以刊登，被刊登文章之著作財產權歸國立臺灣師範大學數學系及台灣數學教育學會共同擁有，文責由作者自負。

伍、文稿請以中文撰寫（包含摘要、文章全文、圖表、附註、參考文獻、附錄等）。文稿的呈現請使用單行間距之12級字新細明體或Times New Roman字體，以橫書方式於A4規格紙張上，文稿上下左右各留2.5公分空白，並以Microsoft Word 98以上之繁

體中文文書軟體處理。

陸、文稿格式請參考《臺灣數學教師》期刊論文撰寫體例的說明或已發行之文稿，若有需要引用英文文獻以及數學符號、公式等請參考APA第六版出版手冊。交遞稿件時需注意下列事項：

一、提交投稿基本資料表

(一) 文稿基本資料。

(二) 通訊作者之姓名、服務單位、職稱、通訊地址、聯絡電話和電子郵件地址。

一位以上作者時，非通訊作者只需填寫姓名、服務單位和職稱。

(三) 任職機構及單位：請寫正式名稱，分別就每位作者寫明所屬系所或單位。

(四) 頁首短題（running head）：以不超過15個字為原則。

(五) 作者註（author note）：說明與本篇研究相關的資訊。

二、提交已簽署的《臺灣數學教師》著作財產權讓與同意書。

三、文稿除正文外，還需包含中文摘要，摘要請獨立一頁呈現，並置於正文之前。

摘要頁內容包括論文題目（粗體20級字、置中）、摘要（不分段，限500字以內）、與關鍵詞（以五個為上限，並依筆畫順序由少到多排列）。

四、若為修正稿，遞交修正的文稿上請以色字標示修改處，並需提交「修正回覆說明書」，依審查意見逐項說明修改內容或提出答辯。作者應於發出文稿修正通知的二週內回傳修正稿及修正回覆說明書，若有特殊情況請先與本刊聯絡。

柒、文稿以電子郵件方式投遞，包括作者基本資料表、著作財產權讓與同意書與全文共三份資料。作者應負論文排版完成後的校對之責，編輯委員僅負責格式上之校對。

捌、投稿電子郵箱：tjmtedit@gmail.com

《臺灣數學教師》投稿基本資料表

篇名		(中文)	
		(英文)	
總字數		稿件全文 (含中英文摘要、正文、參考文獻、附錄等) 共_____字。	
關鍵詞 (最多五個)		(中文)	
		(英文)	
頁首短題 (running head)		(請以不超過15個中文字或40個英文字元為原則。)	
通訊作者資料	姓名	(中文) (英文)	
	職稱		
	服務單位 (或就讀校系)	(中文)	
		(英文)	
	E-mail		
	通訊地址		
電話	辦公室：() 分機 行動電話：		
如為共同著作，請詳填以下共同著作人欄位，非共同著作則不需填寫。(以下欄位不敷填寫時請自行增加)			
共同著作人	姓名	服務單位 (或就讀校系)	職稱
第一作者 (□通訊作者)	(中文)	(中文)	
	(英文)	(英文)	
第二作者 (□通訊作者)	(中文)	(中文)	
	(英文)	(英文)	
第三作者 (□通訊作者)	(中文)	(中文)	
	(英文)	(英文)	
作者註 (可複選)	☐ 本篇論文為碩、博士論文改寫，指導教授為_____。 ☐ 本篇論文曾於_____發表。 ☐ 本篇論文獲科技部補助，計劃編號：_____。		
1.茲保證本論文符合研究倫理。 2.茲保證所填基本資料正確，文稿未曾以任何方式出版或發行，且無一稿多投、違反學術倫理，或違反著作權相關法令等事情。 3.茲瞭解並同意貴刊著作權授權規範，並保證有權依此規範進行相關授權。 4.茲保證文稿已經所有作者同意投稿至《臺灣數學教師》。			
填表人：_____		填表日期：____年____月____日	

《臺灣數學教師》著作財產權讓與同意書

茲同意投稿至國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會共同發行的《臺灣數學教師》之一文，名稱為：

立書人聲明及保證本著作為從未出版之原創性著作，所引用之文字、圖表及照片均符合著作權法及相關學術倫理規範，如果本著作之內容有使用他人以具有著作權之資料，皆已獲得著作權所有者之（書面）同意，並於本著作中註明其來源出處。著作人並擔保本著作未含有毀謗或不法之內容，且絕未侵害他人之智慧財產權，並同意無償授權國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會於本著作通過審查後，以論文集、期刊、網路電子資料庫等各種不同方法形式，不限地域、時間、次數及內容利用本著作，並得進行格式之變更，且得將本著作透過各種公開傳輸方式供公眾檢索、瀏覽、下載、傳輸及列印等各項服務。國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會並得再授權他人行使上述發行之權利。惟著作人保有下列之權利：

- 1.本著作相關之商標權及專利權。
- 2.本著作之全部或部份著作人教學用之重製權。
- 3.出版後，本著作之全部或部份用於著作人之書中或論文集中之使用權。
- 4.本著作用於著作人受僱機關內部分送之重製權或推銷用之使用權。
- 5.本著作及其所含資料之公開口述權。

著作人同意上述任何情形下之重製品應註明著作財產權所屬，以及引自《臺灣數學教師》。

如果本著作為二人以上之共同著作，下列簽署之著作人已通知其他共同著作人本同意書之條款，並經各共同著作人全體同意，且獲得授權代為簽署本同意書。如果本著作係著作人於受僱期間為雇用機構所作，而著作權為讓機構所有，則該機構亦同意上述條款，並在下面簽署。

本著作之著作財產權係屬（請勾選一項）

- ☐ 著作人所有
☐ 著作人之僱用機構所有

立同意書人（著作人或僱用機構代表人）簽章：_____

著作人姓名或僱用機構名稱：_____

（正楷書寫）

中華民國 年 月 日

Publisher	Department of Mathematics, National Taiwan Normal University Taiwan Association for Mathematics Education
-----------	--

Editorial Board

Chief Editor	Yuan-Horng Lin (Department of Mathematics Education, National Taichung University of Education)
Vice Chief Editor	Yuan-Shun Lee (Department of Mathematics, University of Taipei) Pi-Jen Lin (Graduate Institute of Mathematics and Science Education, National Tsing Hua University)
Editorial Panel	Su-Wei Lin (Department of Education , National University of Tainan) Wei-Min Hsu (Department of Education, National Pingtung University) Erh-Tsung Chin (Graduate Institute of Science Education, National Changhua University of Education) Shu-Yi Chang (Department of Mathematics Education and Information Education, National Taipei University of Education) Huan-Chuan Chang (Sinde Elementary School, Toufen, Miaoli) Chia-Huang Chen (Department of Mathematics Education, National Taichung University of Education) Kai-Lin Yang (Department of Mathematics, National Taiwan Normal University) Jian-Cheng Liou (Ping-jhen Junior High School, Taoyuan City) Shiang-Tung Liu (Graduate school of Math and Science Education , National Chiayi University) Chang-Hua Chen (National Academy for Educational Research) Jing Chung (Department of Mathematics Education and Information Education, National Taipei University of Education)

Address	No.88 Sec. 4, Ting-Chou Rd., Taipei City, Taiwan, R.O.C. Department of Mathematics, National Taiwan Normal University <i>" Taiwan Journal of Mathematics Teachers"</i>
TEL	886-2-7734-6576
FAX	886-2-2933-2342
E-mail	tjmtedit@gmail.com
Website	http://tame.tw/news/news.php?class=204

1 個案資優生對平均數問題解題表現之研究

/ 莊純芬、劉祥通、林威宇、方盈云

A Study of a Gifted Student's Problem Solving Performance on Mathematical Averaging Problems

/ Chun-Fen Chuang、Shiang-Tung Liu、Wei-Yu Lin、Ying-Yun Fang

23 桌遊融入國小三年級數與計算課程之設計與反思

/ 王筱妮、梁淑坤

A Research on the Development and Integration of Board Game into 3rd Grade Number and Operation Instruction

/ Hsiao-Ni Wang、Shuk-Kwan S. Leung

50 數學素養導向教學：七年級以密碼為主題之代數課程與教學設計

/ 蔡育知

A Mathematical Literacy-Based Curriculum：Curriculum Designs of Algebra Courses with Basic Cryptography for Grade 7 Students

/ Yu-Jr Tsai

