莊純芬、劉祥通、林威宇、方盈云（2018）。
個案資優生對平均數問題解題表現之研究。
**臺灣數學教師，39**（2），1-22
doi: 10.6610/TJMT.201810_39(2).0001

# 個案資優生對平均數問題解題表現之研究

莊純芬[1]　劉祥通[2]　林威宇[2]　方盈云[2]
[1]雲林縣油車國小
[2]國立嘉義大學數理教育研究所

主要目的在探討一位六年級資優生，對於平均數問題之解題表現。本研究為個案研究，工作單以平均數問題為主軸，設計基礎題和進階題各五個題目，限於篇幅本文僅呈現三題，本研究運用結構式工作單晤談法蒐集資料，並以 Polya 解題步驟來分析資料。研究結果如下述：「瞭解問題」：個案具有敏銳的洞察力看到問題的脈絡與核心。「擬定計畫」：個案在看透問題脈絡的關鍵後，能夠擬定完備的解題計畫，有效的整合題目給予的條件以縮短解題路徑，並獲得正確答案。「驗算與回顧」：個案在解決問題後有反思的表現或提出其他策略，以回顧答案的合理性。

**關鍵詞**：平均數；資優生；解題表現

通訊作者：劉祥通，e-mail：shiangtungliu@gmail.com
收稿：2018 年 3 月 5 日；接受刊登：2018 年 06 月 01 日。

# 壹、 研究背景

美國數學教師協會（National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000）所發表之學校數學原則與標準（Principles and Standards for School Mathematics）中，強調數學之五大能力的第一項為數學即問題解決（Mathematics as Problem Solving）。我國自九年一貫以來，數學學習領域課程的目標之一也是在強調能力的養成，培養學生「發展形成問題與解決數學問題的能力」（中華民國教育部，2000）。學生解題時，如何思考問題、整合資源，找到通往解題的路徑，甚而在解題的過程中自我省思而獲得新的洞見，方是數學解題之價值所在。

數學學習的主要目的在於培養學生解決日常生活問題，而平均數是日常生活中經常被運用到的數學知識之一。對很多學生來說，處理平均數只是一種計算的行為，而非一個概念；關於平均數的知識從頭到尾只是一個無創造性的計算公式（Pollatsek, Lima & Well, 1981），但平均數的應用範圍很廣泛，並非可以用公式解決所有與平均數相關的問題。

研究者認為資優生天生賦與的特質，讓資優生具有厚實的數學知識架構，面對問題時，應該可以快速的找到問題與概念之間所連接的橋梁而順利解題。Steiner（2006）對於資優生的解題策略認為，當面對較新奇或非例行性的問題情境時，資優生較一般生能選擇正確的解題策略,在解題策略的運用上,資優生會使用其原先所具備的概念為基礎，進行有效率的策略思考與分析，建構自己的解題計劃。本研究的目的旨在於資優生較勇於嘗試以舊知識或經驗，來解決所面對的問題，經由分析資優個案的解題表現，找出其解題策略，可以瞭解資優生如何運用各種數學知識去解決問題，也可以使學校教師瞭解資優生的解題思維。

本研究對象選擇一位智能優異的國小學生小郡（化名）。由於個案在上、下山的速率問題裡，藉由對問題的理解與思考後使用舊經驗與知識連結，而得到有創意的解題策略；小郡過去不曾參與坊間數學相關之補習，因此研究者藉由此個案的特質來探討資優生在平均數的解題表現。而根據前述之研究目的，本研究所欲探討的問題為：根據個案資優生在結構式工作單上平均數非例行性問題的解題表現，依據 Polya（1957）解題步驟中所提出「瞭解問題」、「擬定計畫」和「驗算與回顧」三個面向為分析架構，分析個案資優生的解題表現為何。

# 貳、 文獻探討

為探究個案資優生對平均數問題之解題表現，文獻分成數學問題解決、數學解題歷程與因素、資優生的數學解題和平均數等四項，作為研究者研究時的理論與依據。

## 一、數學問題解決

問題解決可以被視為有兩個組成要素：首先是探索，探索問題中所有可能存在的關係，並採用歸納策略以幫助發現；其次是確認，利用演繹法證明一般化的綜合歸納，而對這些相關性予以檢驗確認（Morris, 1983）。「問題解決（簡稱解題）」是一個複雜的結構，涉及高層次思維技能，不只是在知識面上回答問題，且存在於許多不同的學科和專業領域裡，有許多不同的意義（Liu, 1993）。

Mayer 和 Hegarity（1996）認為數學問題的型態有二：「例行性問題」（routine problem）與「非例行性問題」（non-routine problem）。「例行性問題」是指問題解決者知道如何解決這個問題也知道何種解法最適切；「非例行性問題」是指問題者有了問題卻不能立刻知道如何解決。1977 年美國數學督導協會（National Council of Supervisors of Mathematics [NCSM]），制定了一個全國數學教師行動綱領報告，其中提出「解題」是非常重要的，尤其是在解非例行性的問題。

Polya（1957）在其所著的「怎樣解題」（How to solve it）一書中，討論了問題解決的四個階段：（一）理解問題（understanding the problem）；（二）擬定計劃（devising a plan）；（三）執行計劃（carrying out the plan）；（四）回顧解答（1ooking back）。在第一階段裡，解題者必需瞭解題意，並識別已知數與未知數，以及題意中所能運用的條件；在第二階段裡，解題者根據題意，從自我舊經驗中搜尋相關性的問題，而後設計可能成功的計畫；在第三階段，解題者將計畫付諸實行，並核對步驟的正確性與否；最後，解題者根據題意的條件，對答案再做一次的驗算與確認（Leblanc, Proudfit, & Putt, 1980）。研究者舉例說明如後：一輛校車最多能載 45 人，今有 100 位同學要參加旅行， 請問需要幾輛校車來載？此問題分成四個階段來解析，理解問題：校車最多能載 45 人，是不能超載的，多出來的人數 10，就要多一輛車來載；擬訂計畫：中低年級學生可能用畫圖來表徵連減法策略、也可能直接用除法運算（包含除）求商數；執行計畫：得到商 2，餘數 10，正確是 3 輛車，有些學生回答 2 輛車，也有些回答 2 輛車，剩下位 10 同學，回顧解答：除了驗算外，反思答案的合理性更重要，回顧是否回答了問題？否則答非所問，不就是

沒有回顧答案的合理性？

根據 Freudenthal（1991）的觀點，數學活動是一個解決問題的活動，從真實的情境中去找出問題、組織問題。美國數學教師協會（NCTM, 2000）課程標準指出解題的重要，並強調所有學生能夠透過解題建立新的數學知識、解決情境中所產生之問題、發展多樣策略以解決問題與監督和反思解題過程。因此，透過數學解題任務的過程，解題活動不僅僅是學習數學的目標，也是學習數學的方法，更是學習數學的必要條件。因此，為深入瞭解數學解題的意涵，本節分為兩部分，第一部份探討數學解題歷程，第二部份探討非例行性數學解題。

兒童在入學前就會利用手指或具體物來協助計算，這是兒童生活經驗中的非正式算術，但在入學後，接觸的是正式的運算過程及公式，對學童而言，較難理解與應用。當兒童在面對問題時，會很自然的在腦海中浮現解決的方法，這些方法通常是兒童感覺最容易理解的方式，但這些簡單的、自然的心理過程，卻常常隱藏於兒童的心理層面，形成另外一種解題能力（Lamon, 2002）。因此兒童常會自創過程（Ginsburg, 1989 ; Groen & Resnick, 1977），也就是結合正式與非正式的數學經驗與知識，發明一些方法來解決問題，而這些自行發明的解題策略，通常具有原創性（因為學生尚未經歷解這些問題的課程），也常被教師拿來當作引導教學時的參考（Cai, 2005）。

綜合上述學者觀點，學生透過解決非例行性問題，應用先前學習的概念、知識或原理來擬定適當的解題策略，從而培養出帶著走的基本能力。

## 二、數學解題歷程與影響的因素

Mayer（1992）從認知心理學的觀點來看數學解題的過程，將其區分成：問題轉譯（problem translation）、問題整合（problem integration）、解題計畫及監控（solution planning and monitoring）、解題執行（solution execution）四階段。Mayer（1992）也強調解文字題時，問題轉譯需要有語言（linguistic）知識與語意（semantic）知識，問題整合需要有基模（schematic）知識，解題計畫及監控需要有策略（strategies）知識，解題執行則需有程序性（procedural）知識。

Schoenfeld（1985）強調數學解題需要考慮四個變因：資源（resources）、捷思（heuristics）、監控（control）及信念系統（belief system）。

**(一)資源**

是指解題者所擁有的數學知識能有效地解決問題，包括了數學事實、程序及技巧等訊息。

**(二)捷思**

是指捷思策略而言，許多的解題研究都非常重視受試者在解題歷程所使用的捷思策略（即一般的解題技巧和策略）；例如：圖示、與所利用的相關問題與所重新形成的問題等。

**(三)監控**

是指著重解題者在解題時，如何決定計畫、如何選擇目標和次目標，以及如何評估解題結果等方面，包括計畫、監控、決策的評估與有意識的後設認知行為。Schoenfeld（1985）認為控制的因素與心理學上的後設認知能力有相當大的關連性。

**(四)信念系統**

是指解題者對於數學的觀點，其決定性的因素，包含關於自己、關於環境、關於題材與關於數學等決定個體的解題行為。

說明例：某水果商以每斤 40 元的價格買進水果 50 斤，依過去的經驗，有些水果因損壞而賣不出去，而賣出去的比率是 80%，水果如果想賺 20%，每斤應該賣多少元？研究者說明如下：

**資源**：$40 \times 50 = 2000$　（計算出成本為 2000 元）

$50 \times 80\% = 40$　（計算出可賣出水果的斤數）

$40 \times 50 \times 120\% = 2400$　（計算賺 20%的總金額）

**捷思**：$40 \times 50 \times 120\% = \square \times 40$　=>　$\square = 60$（元）

（透過賺 20%的總金額，回推一斤單價）

**監控**：$60 \times 40 = 2400 = 2000 \times 120\%$

（檢驗本金的 120%是否等於售價×賣出的重量數）

**信念**：某些學生認為，題目中敘述水果有 20%沒有賣完，卻要賺 20%，必定不可能，所以相信無解。可見，有此信念，影響了他們解題的表現與動機。從另一觀點，學

生的解題資源不足，也會影響了他們的解題信念。東西沒有賣完，只要售價夠高，還是有可能賺取利潤，有了這樣的解題先備知識，比較不會有錯誤的信念。

因此研究者認為：解題者在解非例行性問題時，思考問題、整合資源以找到通往解題的路徑，甚至藉由解題過程中自我省思並獲得新的洞見，這樣才能稱為有意義的學習。

## 三、資優生的數學解題特質與策略

Borkowski 與 Peck（1986）指出，大多數成功的資優生通常能夠了解自己的認知歷程，且能把握適當的時機，運用最適當的策略解決問題。因此，在解題策略的應用上，資優生會使用原先所具備的概念為基礎，建構自己的解題計畫（Steiner, 2006）。

Davis 與 Rimm（2004）統整出許多資優生的特質，與解題較有關的特質如下：

（一）優異的分析能力與卓越的推理、解題能力。

（二）使用抽象、複雜與具邏輯性的高層次思考能力與有效率的解題策略。

（三）具有洞察力、看見問題的架構、歸納規律並推廣到其他問題。

（四）自我反思、較佳的自覺與後設認知能力。

（五）具有創意與想像力，探究為何（why）以及如何（how）。

Polya（1957）認為成功的解題主要來自於擬定一個可行的策略，策略可能是逐漸地形成，也可能是在不成功的嘗試及一段時間的醞釀之後，瞬間突然產生的靈感（inspiration）。所謂的解題策略是指在數學解題的歷程中，對一個特殊的非例行性問題，擬定一個適當的解題計畫（黃敏晃，1987）。

Steiner（2006）對於資優生的解題策略指出，當其面對較新奇的非例行性問題時，資優生通常比一般生更能選擇正確的解題策略，在解題策略的運用上，資優生會運用其原先所具備的數學知識，進行有效率的策略思考與分析，建構出自己的解題計畫。例如 Grouws（2011）的「約翰買了一些蘋果。如果，每顆價錢為 0.3 美元，他會剩下 3 美元；若每顆 0.4 美元則會不夠 1 美元。請問，約翰買了多少顆蘋果？」中，一般解法應是 0.3 美元和 0.4 美元為 0.1 美元之價差是影響約翰剩下 3 美元和不夠 1 美元，所以 $0.3x+3=0.4x-1$，經過移項成 $0.1x=4$，故 $4\div 0.1=40$；而也有個學生的解法為 $\frac{4}{0.1}=\mathbf{40}$，此種解法即說明總價差＝單價差×個數。

## 四、平均數

本研究所指的平均數係指算數平均數，為深入瞭解平均數，分為平均數的意義與平均數的學習表現。

### (一)平均數的意義

Russell 與 Mokros（1990）將平均數分類為五種不同的概念：平均數視為眾數（average as mode），平均數視為演算法（average as algorithm），平均數視為合理性的（average as reasonable），平均數視為中點（average as midpoint）及平均數視為平衡點（average as point of balance）。

而 Russell 與 Mokros（1990）進一步指出：「眾數思維」（modal-thinking）的學生，沒有注意到資料數據的一個整體性，只關注個別的數據值；將平均數視為演算法的學生無法連接計算程序和資料中的原始數據；而將平均數視為合理性的學生傾向於認為平均數是一個近似值而不是可以計算的；甚至將平均數視為中點或是平衡點的學生太強化了平均數的概念。

### (二)平均數的實證研究

關於平均數的實證研究，Mevarech（1983）發現有一些大學生在求 n 個數的平均數時，他們把 n 個數加起來再除以個數（n），沒有考慮這 n 個樣本大小是否一樣，計算其平均數時需經加權（引自劉秋木，1996；Watson & Moritz, 2000）。例如：「電梯裡有 4 位女生和 6 位男生；女生平均體重為 120 磅，男生平均體重為 180 磅，問：電梯裡的這十個人的平均體重為多少？」此題利用加權平均數的概念，先以男生的平均體重 × 人數 = 男生總體重，以女生的平均體重×人數=女生總體重，相加之後除以總人數。

上述大學生有不理想的表現，再看看以下高二學生的表現：在問題「Edith 的五次考試平均為 80 分，他的下一次必須考幾分，才能將平均提高到 81 分？（National Assessment of Educational Progtess，簡稱 NAEP，第四次測驗）」Brown 與 Silver（1989）發現，高二學生答對率為 24%，解此題要利用平均數與總分的關係來解題，六次總分減五次的總分，就是第六次的分數，而有 31%的高二學生選擇 85 分這個答案，只考慮前面五次考試都需增加 1 分，而忽略第六次的成績也會影響最後的平均。

以下二題是國內國中學生的表現：張少同（2005）以二道問題來分析，問題一「……，有一天四人比較誰的班級考得好，對話如下：大明說：『我們班的總分是 2050 分，你們

班總分 1764 分，我們班考得比較好。』小美接著說：『我們班平均 84 分，你們班平均 82 分，我們班考比較好。』，大華又說：『我們班的最高分比你們班高，我們考得比較好。』，大昌最後說：『你們班不及格的人多，所以我們班比較好。』請問誰說的最正確？A.大明 B.小美 C.大華 D.大昌 E.四人都不正確」，雖然選項中的總和（大明）、最大值（大華）及極端值（大昌）皆是明確的評斷指標，但是仍不及平均數（小美）可以解釋為「代表性」分數（Pollatsek, A., Lima, S. & Well, A. D., 1981）的有效指標，僅有 3 成 5 左右的學生能選出正確答案 B，顯示出大多數的國中學生並未能正確理解平均數其具有代表的意涵的概念。

問題二：「大雄、靜香、小夫和胖虎一起玩彈珠，小夫數了彈珠共 10 顆，然後說：『我們平均有 2.5 顆彈珠』靜香接著說：『平分的話不可能有 2.5 顆，頂多平均每個人 2 顆彈珠。』最後胖虎說：『大雄最笨了，分他 1 顆就好，所以平均每人 3 顆。』請問誰說的最正確？A.小夫 B.靜香 C.胖虎 D.都不正確。」正確答案為 A，答對比例卻只有 11.09%，答案 B 選項卻高達 62.85%，顯示大多數國中生認為實質上只能分到 2 顆，所以平均可得到 2 顆，犯了「平均數必為整數」的迷思概念。

再看看 NAEP 測驗七年級學生的結果，「Louise 買了一些軟糖。香草口味的軟糖 1 磅 90 角，買了 2 磅；巧克力口味的軟糖 1 磅 1.6 美元，買了 3 磅。試問平均下來 1 磅軟糖花費多少元？（NAEP，第四次測驗）」其實題目需要以加權平均值的方式才能計算出正確答案，答對率僅有 12%；竟然有 25%的七年級學生選擇「重量」的數據直接相加除以 2，得到「花費」2.5 美元的值。

研究者認為，根據上述的實證研究對象為大學、中學，有些學生雖能正確計算出平均數，卻未必能理解平均數實際的意涵，也未必體會平均數、總數、個數之間的關係。

## 參、研究方法

本章旨在說明本研究所採取的研究方法，以下分成研究方法、研究參與者，結構式工作單以及資料蒐集與分析，茲分別敘述如下：

### 一、研究方法

本研究為個案研究（case study），旨在探討個案資優生在平均數問題的解題表現，藉由分析資優生的解題歷程，瞭解資優生的學習潛能。同時為求能夠獲得更完整的研究

資料，因此本研究採用結構式工作單為基礎的訪談（structured, task-based interview）（Goldin, 2000）來蒐集資料，藉以幫助研究者能夠根據個案在工作單上的解題表現加以訪談，以達更深入的探討資優生在平均數問題的解題表現。

以結構式工作單為基礎的訪談，研究者要先依據主題設計相關的問題並編寫成結構化的工作單，然後將此工作單提供給個案進行解題，作為研究者進一步訪談的線索，以深入訪談的方式蒐集資料，探求研究問題以回應研究目的。

## 二、研究參與者

### (一)研究對象

本研究對象小郡（化名），是通過個別智力測驗評量結果在平均數正二個標準差或百分等級九十七以上的國小一般智能優異的學生，目前學籍在雲林縣普通班六年級。

研究者以問題「某人上山速率是200公尺/分，下山速率是250公尺/分，請問這趟爬山的平均速率？」為預試題目。

研究者認為個案小郡瞭解速率的公式「距離＝速率×時間」，也察覺到上山距離和下山距離是一樣的，於是利用未知數x，列出方程式解題，然而個案小郡無法解此方程式，因此小郡重新思考另一種解題方向，改採數值假設法，即由上山的時間為 $x \times 1\frac{1}{4}$ 和下山的時間為 x，將之虛擬數值化為5分鐘（$x \times 1\frac{1}{4}$）和4分鐘（x），得到虛擬距離為1000公尺（200×5＝250×4＝1000）；再利用虛擬總距離（1000公尺×2）÷虛擬總時間（4分鐘+5分鐘）＝平均速率而成功解題。

研究者認為個案在解題策略的思考上，藉由自己對問題的理解，經由思考並與數學知識、舊經驗做連結，而形成解題計畫，並嘗試執行。其思考方式不失合理性與正確性，且表現出喜歡推理與思考，對數學難題具有高度的挑戰興趣及積極的學習態度。而且，小郡沒有參與坊間與數學相關之補習活動。因此研究者想藉由此個案的特質，探討資優生在平均數問題中的解題表現。

### (二)研究者

研究者在數學教育研究所進修期間，因指導教授研究之專業背景以及閱讀學長姊之相關研究，發現資優生具有喜歡嘗試與挑戰的精神，以及具有積極的態度以面對新的概念和問題，因此資優生常會自己創造解題策略。所以，依據研究目的與文獻探討以及指導教授之建議，設計有關平均數問題之結構式工作單，讓個案資優生從事解題，以探究

資優生內在所隱藏的潛力。

本研究為質性研究，而質性研究的過程中充滿了不確定性和可變性，必須依靠研究者本身作為研究工具才能順應這種多變的研究情境（Lincoln & Guba, 1985）。因此，在整個研究過程中，研究者除了是結構式工作單的設計者外，也扮演了蒐集學生的解題資料以及深入訪談、分析的角色。研究者在文獻探討中（Goodchild, 1988；Russell & Mokros, 1990）發現學生對於「平均數」的定義多不甚瞭解，多只是用制式的公式來進行此類問題的運算、解題。所以，個案在工作單上所呈現的所有解題表現是研究者的研究焦點。因此，個案資優生在解工作單之前，研究者會告知個案盡量詳細寫出解題過程，可以利用算式、圖畫或是文字說明等等不同的表徵方式呈現。在個案解題結束後，研究者會根據個案在工作單上的解題紀錄，初步假設其解題運用的策略和想法，進而擬定訪談架構，再進行深入的訪談，期望透過訪談能適當地引導個案將更深層的想法，或是工作單解法表達不夠清楚的地方，能夠完整地敘述出來。最後，研究者多次的檢視及修正所有蒐集的資料，期能分析與呈現出個案最完整的解題表現。

## 三、工作單

### (一)設計理念

本研究旨在瞭解資優生在平均數問題的解題表現，將研究的焦點聚焦在經由直觀而呈現自發性的解題表現上。因此，在這個背景支撐之下，依據研究目的、文獻、康軒版（教科書）的教材內容和課外參考書，將工作單的題目類型分成兩類：平均數應用問題基礎題和平均數應用問題進階題，各五題。

### (二)設計內容

研究者根據上述之設計理念，設計了平均數問題的結構式工作單。礙於篇幅，僅呈現討論的題號 3、6、8 題：

題號 3：班上男女生共有 50 個人，這次考試成績男生平均 80 分，女生平均 90 分，全班平均 86 分，請問班上男女生各有多少人？（平均數應用問題基礎題）

題號 6：氣象台有五個地區的平均雨量值為 138 公厘，已知台北、新竹、台中三個地區的平均雨量為 148 公厘，且台中、台南、高雄的平均雨量為 127 公厘，請問台中地區的降雨量是多少？（平均數應用問題進階題）

題號 8：甲班有幾位同學組隊參加 400 公尺接力賽，如果曉明再快 7 秒，整隊的平均秒

數是 48 秒；如果曉明慢 9 秒，整隊的平均秒數是 50 秒。請問小明與幾位同學一起參加接力賽？（平均數應用問題進階題）。

## 四、資料蒐集與分析

**(一)資料的蒐集**

本研究的主要資料來源為解題紀錄與訪談紀錄兩種。解題紀錄係指研究者先就個案於結構式工作單上的所有解題記錄，分析其數學解題想法和解題策略；訪談紀錄係指研究者在觀察個案的解題歷程與初始記錄後，擬晤談內容，再對個案進行晤談，並進行持續追問所運算的源由，以確認個案的解題是否如研究者所分析的思考策略。

**(二)資料的分析**

Polya（1957）提出問題解決分成四個階段：瞭解問題、擬定計劃、執行計劃、以及回顧。因為執行計畫屬於程序性知識，對於小郡來說，是最簡易的程序，因此採用 Polya（1957）解題步驟中的三個步驟所提之瞭解問題、擬定計畫和回顧三個面向做為分析之架構而進行分析、探討資優生在平均數問題中的解題表現。

為了增進研究的效度，檢驗解答與表徵法是否一致（交叉比對）；而為了增進研究的信度，則追問：「怎麼證明你的答案是對的？」，並請他提出證據（持續比對）。

# 肆、 研究結果與討論

限於篇幅本章只呈現三個原案，分別為原案三（基礎題）、原案六與八（進階題）之解題分析。

## 一、原案三

問題 3：班上男女生共有 50 個人，這次考試成績男生平均 80 分，女生平均 90 分，全班平均 86 分，請問班上男女生各有多少人？

**(一)個案之解題記錄**

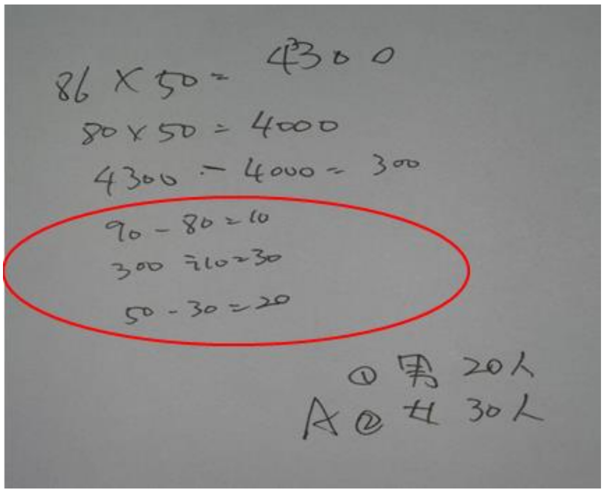


**圖 1　小郡面對問題 3 之解題記錄**

**(二)分析個案解題表現**

對於題目中的各種已知條件之間的關係，他是非常清楚的；所以在解題時，個案對於所寫下的每個算式的涵義都是非常明瞭的。

**1. 了解問題之面向分析**

個案小郡讀題之後，研究者提問「你可以告訴老師題目的意思嗎？」，他回答「就是用平均數去求出班上男生有幾個，女生有幾個。」，研究者認為，小郡能清楚描述題目，也抓住破題的關鍵點。

**2. 擬定計畫之面向分析**

研究者請小郡說明解題的過程，他回答「男生平均 80 分，女生平均 90 分，就是只要一個男生換成一個女生全班的總分就會增加 10 分」我先算出全班總分是 4300 分，然後再假設全班人都是男生的話，那總分是 4000 分，比全班的總分少了 300 分，因此要有 30 位女生（300÷10）來補這 300 分。」小郡利用「全班平均」求出總分後，擬定「全班均為男生」的計畫，算出新總分與原總分比較，求得新總分比原總分少 300 分，再以「補分」作為解題策略，求得女生人數。

**3. 驗算與回顧之面向分析**

研究者提問「怎麼證明自己的答案是對的？」，小郡回答「男生 20 人乘以 80 分在加上女生 30 人乘以 90，看看有沒有等於 4300」，他將答案（男生 20 人，女生 30 人）帶回題目中，驗算答案的合理性。

**※持續考驗**

研究者接著問「如果將全班假想成全是女生，該怎麼做？」請個案小郡再次解題（如圖 2），他回答「先算全班的總分是 4300，那全班都是女生的總分就是 4500 分，多出全班總分 200 分，表示要將 20 位女生換成男生。」

研究者以「替換主詞」改變策略的方式，個案小郡仍能順利解題。表示他對於題目中的各種已知條件之間的關係是非常瞭解的，對於自己在解題時所寫下每個算式的涵義也是非常清楚。

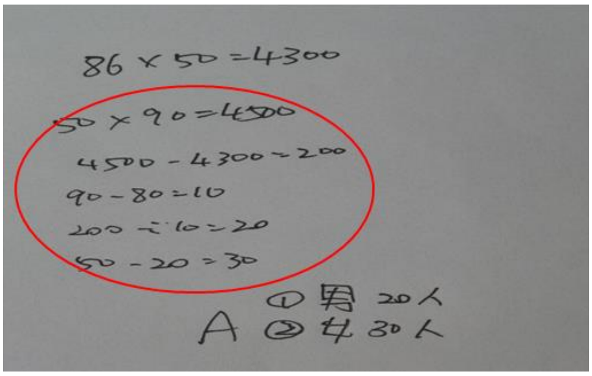


**圖 2　小郡面對限制「替換主詞」問題再次解答**

## 二、原案六

問題 6：氣象台有五個地區的平均雨量值為 138 公厘，已知台北、新竹、台中三個地區的平均雨量為 148 公厘，且台中、台南、高雄的平均雨量為 127 公厘，請問台中地區的降雨量是多少？

**(一)個案之解題記錄**

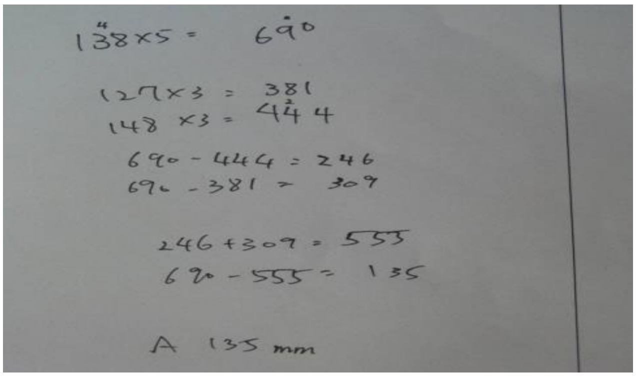


**圖 3　小郡面對問題 6 之解題記錄**

**(二)分析個案解題表現**

運用集合運算中的「交集」、「聯集」整合來解出台中的雨量，在驗證答案時，雖然也是運用集合運算中的「交集」、「聯集」，但是利用的是不同的條件。

**1. 了解問題之面向分析**

研究者請個案小郡描述題目意思，他回答「已經知道五個地區的平均雨量值為 138 公厘」，要根據台北、新竹、台中三個地區的平均雨量為 148 公厘；台中、台南、高雄的平均雨量為 127 公厘，這兩組三地區的平均雨量值來求出台中的雨量」。

**2. 擬定計畫之面向分析**

小郡在了解題意之後，並找出題目關鍵，利用集合運算中的「交集」與「聯集」概念，擬訂解題計畫進行解題。研究者請小郡解釋運算過程，他說「全部的總雨量－台北、新竹、台中的總雨量＝台南、高雄的總雨量；全部的總雨量－台南、高雄、台中的總雨量＝台北、新竹的總雨量，最後全部的總雨量－（台南、高雄的總雨量＋台北、新竹地區的總雨量）就解出台中的雨量了。研究者用以下圖形表徵他的想法（如圖 4）。」。

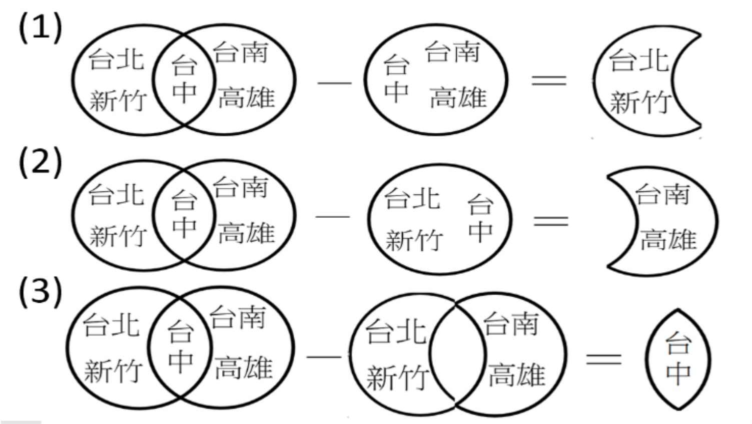


**圖 4　小郡的解題策略**

**3. 驗算與回顧之面向分析**

研究者接著問「怎麼證明你的答案是對的？」個案小郡回答「…台北、新竹、台中三個地區加台中、台南、高雄三個地區，變成六個地區，多出來的一個地區就是台中算了兩次，所以再把台中的 135 減掉…」由上可知，他在驗證答案時，雖然也是集合運算中的「交集」、「聯集」，；不過，研究者認為小郡能夠利用不同策略來驗證　，可見小郡具有敏銳的洞察力來發現題意的關鍵與歸納、推廣其解題過程，也展現了卓越的分析、

思考能力，更表現出小郡具備了豐厚的數學概念。研究者將小郡的二種驗算策略，以圖形表徵之（圖五）。

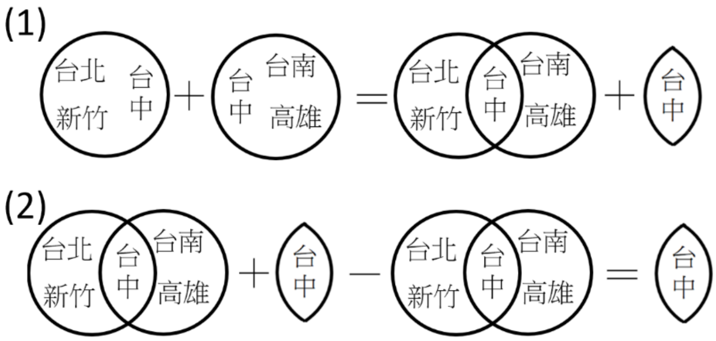


**圖 5　小郡驗算的策略**

## 三、原案八

問題 8：甲班有幾位同學組隊參加 400 公尺接力賽，如果曉明再快 7 秒，整隊的平均秒數是 48 秒；如果曉明慢 9 秒，整隊的平均秒數是 50 秒。請問曉明與幾位同學一起參加接力賽？

### (一)個案之解題記錄

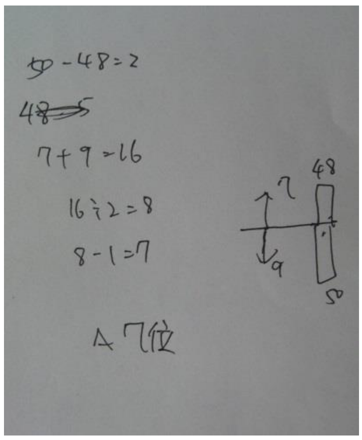


**圖 6　小郡面對問題 8 之解題記錄**

### (二)分析個案解題表現

洞察個人的秒數會影響到整隊的總秒數，因而也影響到整隊的平均秒數。

**1. 了解問題之面向分析**

研究者提問「你可以說一下題目的意思嗎？」，小郡讀題後回答「曉明再快 7 秒，整隊的平均秒數是 48 秒；如果曉明慢 9 秒，整隊的平均秒數是 50 秒，就是曉明個人差距 16 秒」。研究者發現他瞭解個人的「快 7 秒和慢 9 秒」就是「個人差距 16 秒」的意涵，因而研究者認為他已有初始的正負數概念。

**2. 擬定計畫之面向分析**

研究者繼續追問「可以再說明一下你的做法嗎？」，小郡回答「因為曉明個人的快 7 秒和慢 9 秒，影響全隊平均秒數從 48 秒變為 50 秒，所以曉明個人差距 16 秒，造成全隊的平均秒數是 2 秒之差，所以全隊會有 16 除以 2 等於 8 人…」，研究者認為個案小郡還能從個人時間的差距影響至全隊的平均秒數，這也可以發現個案的平均數概念是完備的。

**3. 驗算與回顧之面向分析**

研究者提問「怎麼證明你的答案是對的？」，小郡回答「因為題目說如果曉明再快 7 秒，…，整隊的秒數是 384 秒；如果曉明慢 9 秒，…，整隊的秒數是 400 秒；相差…。16 就是「小明的快 7 秒和慢 9 秒共差距 16 秒」，與原先的假設相同，再結合平均秒數的差距是 2 秒，與答案 8 人也相符。研究者認為，他求得的答案（8 人）依題意列出算式，並進行判斷是否符合題目之條件，並能明瞭和解釋每一步驟的概念和細節，正充分展現了監控反思數學的解題過程。

# 伍、 結論與建議

本章的內容分為兩節：第一節為針對第四章的分析提出研究的結論，第二節為建議。

## 一、結論

在本研究中，研究者認為：個案具有敏銳的洞察力看到問題的脈絡與核心；在看透問題脈絡的關鍵後，能夠擬定完備的解題計畫，有效的整合題目給予的條件以縮短解題路徑。在解決問題後經常有反思的表現或提出其他策略，以回顧答案的合理性。

以下將分為瞭解問題、擬定計畫以及回顧三個面向，分述如下：

**(一)從瞭解問題的面向討論**

個案具有敏銳的洞察力看到問題的脈絡與核心能瞭解題意，方有機會成功的解題。個案小郡在平均數之基礎題和平均數之進階題兩大類型共十個原案裡，均能成功的解題，首要關鍵在於小郡讀題之後，均能完全的瞭解題目的意涵，展現出敏銳的洞察力看到問題的脈絡與核心。

研究者認為每一個學習者都有著不同的學習歷程和經驗，以及不同的先備知識，這些先備知識與經驗的差異，使得學習者在面對遷移情境時會有不同的詮釋，因而影響了學習遷移（transfer of learning）和類化（generalization）的表現情形。而資優生天生賦與的特質，讓資優生具有厚實的數學知識架構，面對問題時，可以快速的找到問題與問題之間所連接的橋梁而順利解題。

在原案三中，個案小郡解「平均與總分問題」時，連結到過去解雞兔同籠問題的經驗，因而把此「平均與總分問題」題目，看成是相關的問題。雞兔同籠問題與上述平均與總分問題，情境上雖然不同，但因結構相同，此兩題稱為同構試題（isomorphic problem）（Reed, 1987）。

**(二)從擬定計畫的面向討論**

擬定完備的解題計畫，有效的整合題目給予的條件以縮短解題路徑。資優生優越的直觀性，為自己在解某些題目時發揮了甚為重要的角色，降低了問題的複雜性，縮短了解題的路徑（江奇婉、劉祥通，2011）。Wilder（1984）也強調，沒有直覺就沒有創造力，而直覺是根基於先備知識發展而來的。John-Steiner（1997）也指出直觀性就好像是資優生在尚未真正解答前就已經找到了策略一樣。在本研究中，研究者也認為，資優生在解決問題時，不僅表現出優異的解題策略，在看透問題脈絡的關鍵後，能夠擬定完備的解題計畫，有效的整合題目給予的條件以縮短解題路徑。

例如在原案八中，一般的解法是：設 x 人參加接力比賽，所以 $50x-9=48x+7$，經過移項成 $2x=16$，故 $16\div2=8$。而小郡察覺「全隊總秒數相差 16 秒」影響到「全隊平均秒數 2 秒之差」，洞察到「總秒數差÷平均秒數差＝全隊人數」的關係來擬定解題計畫，也就是 $16\div2=8$。無獨有偶，小郡的此種解法，與 Grouws（2011）所介紹的方法有異曲同工之妙。

**(三)從驗算與回顧的面相討論**

經常有反思的表現或提出其他策略，以回顧答案的合理性。學生的解題過程，後設

認知（meta-cognition）佔有重要的地位（Hartman, 1998; Lucangeli & Cornoldi, 1997），回顧解題過程與評估答案，即屬於後設認知。在 Schoenfeld（1985）的相關研究中，認為控制因素居於解題較關鍵的地位。因此學生是否有好的控制答案合理性的能力，為解題成功的重要因素。而監控反思數學的解題過程亦是 NCTM（2000）所強調的數學解題的教學目標之一。

在本研究中，個案小郡均有進行檢驗答案的合理性與否，而且在檢驗的過程中，每個數字、每個運算式所表達的含意都非常的清楚。例如，在原案六，小郡運用聯集與交集的方法，近似於聯立方程式中的加減消去法來驗證答案，並且利用不同條件來驗證，充分證明了個案小郡明瞭問題結構與解題策略。

## 二、建議

研究者藉由個案資優生的解題表現，提出如下的建議：

### (一)表揚學生創造自發性的方法，以幫助其他學生理解

在本研究中，研究個案皆能成功的解題。在預試題目－求平均速率中，小郡虛擬總距離（2000 公尺）為 2S，得到上坡與下坡時間分別為 4 分鐘與 5 分鐘，利用總距離（2000 公尺）÷總時間（4 分鐘+5 分鐘）＝平均速率。以上方法，可謂數值假設法，也是他的自發性解法，這種方法，不需先學習調和平均數的公式，就能成功解題，老師可以透過表揚他，間接使其他同學知道此方法可成功解題並嘗試理解。

### (二)解釋學生的自發性，並引導學生激發出更多的自發性解題

在本研究中，研究者發現資優生能順利解題是因能察覺問題中所隱含的關鍵點，原案八，小郡察覺到「快 7 秒和慢 9 秒」就是「個人差距 16 秒」，和影響整隊平均秒數差距的意涵，也洞察到「總秒數差÷平均秒數差＝全隊人數」。但是這個渾然天成的公式，其他同儕未必能理解；如果老師能將小郡的上述式子轉換成「平均秒數差×全隊人數=總秒數差」，也許能夠得到更多同學的共鳴。同時，教師可再給予資優生具有挑戰性的非例行性問題，以問題導向的教學方式引導資優生從題目中發掘題意背後所隱藏的線索，讓資優生在未經教導以代數解題的模式進行解題活動，或許可以激發資優生更多令人讚嘆的自發性解題策略。

# 參考文獻


江奇婉、劉祥通（2011）。以追趕問題為例探討資優個案的解題表現。**資優教育季刊，116**，18-24。

張少同（2005）。**青少年數學概念學習與教學之研究–子計畫三：青少年統計概念學習與教學之研究**（1/3）。行政院國家科學委員會專題研究計畫期中進度報告（報告編號：NSC 93-2521-S-003-014-）。臺北市：國科會。

張少同（2006）。**青少年數學概念學習與教學之研究–子計畫三：青少年統計概念學習與教學之研究**（2/3）。行政院國家科學委員會專題研究計畫期中進度報告（報告編號：NSC 94-2521-S-003-009-）。臺北市：國科會。教育部（2000）。**國民中小學九年一貫課程暫行綱要**。教育部。

黃敏晃（1987）。如何解數學題？－數學解題策略簡介。**科學月刊**，*18*，515-522。

劉秋木（1996）。**國小數學科教學研究**。臺北市:五南圖書出版公司。

Borkowski, J. G., & Peck, V. A. (1986). Causes and consequences of metamemory in gifted children. In R. J. Sternberg & J. Davidson (Eds.), *Conceptions of giftedness* (pp.182-200). Boston, MA: Cambridge.

Brown, C. A., & Silver E. A. (1989). Data Organization and Interpretation. In M. M. Lindquist (Ed). *Results from the Fourth Mathematics Assessment of the National Assessment of Educational Progtess* (pp.28-34). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Cai, J. (2005). What research tells us about teaching mathematics through problem solving. In F. K. Lester, & R. I. Carles (Eds.), *Teaching mathematics through problem solving* (pp. 241-253). Reston, VA: NCTM.

Davis, G. A., & Rimm, S. B. (2004). *Education of the gifted and talented*. Boston, MA: Pearson Education Press.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education.* China Lectures. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Ginsburg, H. P. (1989). *Children's arithmetic: How they learn it and how you teach it(2nd Ed.).* Austin, TX: Pro-Ed.

Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, tasked-based interviews, in mathematics education research., In A. E. Kelly, & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp.217-545). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Goodchild, S. (1988). School Pupils' Understanding of Average. *Teaching Statistics, 10,* 77-81. doi: 10.1111/j.1467-9639.1988.tb00017.x

Groen, G. & Resnick, L. B. (1977). Can preschool children invent addition algorithms？*Journal of Educational Psychology, 69*, 645-652. doi: 10.1037//0022-0663.69.6.645

Grouws, D. A. (2011). Advancing Mathematics Curriculum Research: Design Considerations and Recent Findings and Implications. *Paper presented at Conference on investigating the relationships between mathematicscurriculum implementation and the performance of students' mathematicallearning, National Pingtung University of Education*, 2-13.

Hartman, H. J. (1998). Metacognition in teaching and learning: An introduction. *Instructional Science, 26*, 1-3.

John-Steiner, V. (1997). *Notebooks of the Mind,*Oxford, Oxford University Press.

Lamon, S. J. (2002). Part–whole comparisons with unitizing. In B. Litweller & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratio, and proportions* (pp.162-175). Reston, VA: NCTM.

Leblanc, J. F., Proudfit, L., & Putt, L. J. (1980). Teaching problem solving in the elementary school. In S. Krulik, & E. R. Reys (Eds.), *Problem solving in school mathematics:1980 yearbook* (pp. 104-116). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lincoln, Y. S., & Guba, E. G.(1985). *Naturalistic inquiry.* Beverly Hill, CA:Sage.

Liu, S. T. (1993). *Effects of teaching calculator use and problem solving strategies on mathematics performance and attitude of fifth grade Taiwanese male and female students.* A Dissertation of the Doctor of Education Degree of University of Memphis, USA.

Lucangeli, D., & Cornoldi, C. (1997). Mathematics and metacognition: What is the nature of the relationship? *Mathematical Cognition, 3*(2), 121-139. doi: 10.1080/135467997387443

Mayer, R. E. & Hegarty, M. (1996). *The process of understanding mathematical problems.* In

R. J. Sternberg & T. Ben-Zeev (Eds.), The nature of mathematical thinking. NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Mayer, R. E. (1992). *Thinking, problem solving, cognition*, (2nd ed. ). NY: Freeman.

Mevarech, Z. (1983). A deep structure model of students' statistical misconceptions. *Educational Studies in Mathematics*, *14*, 415-429. doi: 10.1007/BF00368237

Morris, J. (1983). *How to develop problem solving using a calculator.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathmetics. (ERIC Document Reproduction Service No.ED 202 698)

National Council of Supervisors of Mathematics. (1977). Position paper on basic mathematical skills. *Arithmetic Teacher, 25,* 19-22.

National Council of Teachers of Mathematics.(2000). *Principles and standards for school mathematics.*Reston,VA: NCTM.

Pollatsek, A., Lima. S. & Well A. D. (1981). Concept or computation: Students' understanding of the mean. *Educational Studies in Mathematics, 12,* 191-204. doi: 10.1007/BF00305621

Polya, G. (1957). *How to solve it* (2nd ed.). Garden City, NY: Doubleday and Co., Inc.

Reed, S. K. (1987). A structure –mapping model for world problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 13,* 124-139. doi: 10.1037/0278-7393.13.1.124

Russell, S. J., & Mokros, J. R. (1990). What's typical? Children's and teachers' ideas about average. In D. Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of the 3rd International Conference on Teaching Statistics. Vol.* 1. *School and General Issues* (pp. 307-313). Voorburg: International Statistical Institute.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press. doi: 10.1016/B978-0-12-628870-4.50008-6

Steiner, H. H. (2006). A microgenetic analysis of strategic variability in gifted and average-ability children, *Gifted Child Quarterly, 50*(1), 62-74. doi: 10.1177/001698620605000107

Watson, J. M., & Moritz, J. B. (2000). The longitudinal development of understanding of average. *Mathematical Thinking and Learning, 2*(1&2), 11–50. doi: 10.1207/S15327833MTL0202_2

Wilder, R. L. (1984). The role of intuition, In Campbell, D. M. and Higgins, J.C. (Eds), *Mathematics: People, Problem, Results*, *Vol.* 2 (pp. 37-45)., Belmont, CA, Wadsworth International.