鄭雅惠、劉祥通（2019）。
小一生在超齡問題上的解題表現：個案研究。
臺灣數學教師，40（1），1-31
doi: 10.6610/TJMT.201904_40(1).0001

小一生在超齡問題上的解題表現：個案研究

鄭雅惠　劉祥通
國立嘉義大學數理教育研究所

本研究旨在探討個案學生的數學解題表現，作為往後適性教學或差異化教學之依據。以立意取樣方式，邀請某國小一年級一對異卵雙胞胎姊妹參與研究，作為本研究之研究參與者；為了充分了解二位個案的先備數學知識，給予個別的進度與處方，研究者將透過個案在任務單上的解答、畫圖，以及手指的運作，加上晤談中的回答進行分析。因研究者在教學中發現，個案的數學能力比同齡學生成熟，因此採用加減法以及乘除法概念域中較難題型作為主要測試的依據；並設計數與計算領域中非例行性的任務單，以考驗個案學生的解題能力。結果顯示，兩位個案學生位值集聚的概念成熟，合成分解的概念清晰，對於任務單中的超齡問題，她們大部分採用具體物，表徵解題想法，而在部分整體基模的發展，妹妹比姊姊周全。二位個案在幫助閱讀題目的情況下，解決問題的表現相當好，且後設認知及監控的能力在整個解題過程中展露無遺。最後研究者總結二位個案的解題表現，並觀察她們遭遇到的困境，在研究者的最小介入後，他們能聚焦於題意，進而解題成功，並有好的學習遷移。

關鍵詞：超齡問題、解題表現、數概念、閱讀理解、優等生

通訊作者：劉祥通，e-mail：shiangtungliu@gmail.com
收稿：2018 年 1 月 31 日；接受刊登：2018 年 09 月 10 日。

壹、 緒論

一、研究動機與背景

相信家長們一定聽過這一句話:「不要讓孩子輸在起跑點」，很多家長對孩子的未來感到焦慮，深怕耽誤孩子的學習，因此「提早學習」成為一股無法抵擋的社會洪流；但如何定義起跑點呢？周淑惠（1995）在兒童數學新論中強調，兒童絕不是一個等待填充的空白接受器；大家應該都同意，每個孩子的起跑點都不同，那麼孩子的起跑點到底在哪裡？又該往哪邊跑呢？研究者認為要讓孩子先跑，必須先了解孩子的起跑點，在「近側發展區（zone of proximal development，簡稱 ZPD）」的範疇內作努力，才不至於揠苗助長。Vygotsky（1962）認為教學創造學習歷程，進而帶動發展歷程，在學習歷程中，不斷引發 ZPD，藉由搭鷹架來幫助學生學習，引導學生朝向更高層次的功能發展，這樣的觀點在教育上確實有其正面意義。

先了解孩子的能力發展以後，再來培養孩子的數學概念！研究者認為提早學習並不是盲目的填鴨，必須注意到兒童的發展層次，了解孩子的先備知識，結合生活經驗，創造有意義的學習，這才是我們要走的方向。許多研究證實，學齡前幼兒推理與解決數學問題的能力超乎一般人所認定，周淑惠（1995）強調，在 Carpenter（1985）與 Fuson（1992）的研究發現：孩童在幼兒園階段就能解加、減法甚至乘、除法的情境問題；甯自強（1998）在研究個案涂景翰的數概念中，求解「3 × 3 =？」，涂景瀚當時正處於幼兒園階段，而乘法求積數的問題是二、三年級的學習目標，涂景翰以手指表徵的方法解題成功，在此足以證明適當的引導下學童也能求解超齡的問題，這種超齡的表現，正是本研究期望在個案身上看到的。

研究參與者是社區裡的一對異卵雙胞胎姊妹，剛升上國小一年級，正處於數量概念形成的重要階段，但她們卻已經能在購物時快速地利用心算（100 元以內）準確地計算出老闆應該找她多少錢，並且看得懂加、減、乘、除符號的意思，讓人感到十分驚訝；她們的家長表示她們平常喜歡觀看巧虎、七田真等這一類的幼兒教學影片，或許是在潛移默化中獲得了一些數學能力，此外，並沒有特別的教導二姊妹。小一上學期，兩位來到我的家教班，她們表示學校上的數學課太簡單，沒有任何挑戰性而覺得上課太無聊。因此研究者認為她們的數學能力比同齡學生有超前的現象，於是激起了研究者探究她們數學能力的興趣以及挑戰她們更高階數學概念的動力。

二、研究目的

本研究主要目的在於看待個案學生面對不熟悉的超齡問題時的解題表現，藉以了解個案學生的數學能力，作為適性教學的依據，並提供數學教育的參考。若以個案目前所處的數學發展層次作為參考點，研究者欲探討的是她們在更高階的數學概念，例如，二階進退位加減法、基礎乘除法等等。

本研究除了計算題型以外，特別挑選蔣治邦、鍾思嘉（1991）在加減法概念研究中所發現的最難題型－「合併型部分量未知」和「比較型比較量未知」；以及 Vergnaud（1983）在乘法概念域中最難的題型－「多重比例型」等三種文字題型，提供情境模式進行測試，主要挑戰個案解題的能力；藉由她們自發性的解題策略，看待她們的數學表徵以及在晤談中的回答，進而分析判斷她們在數學概念上的發展情形，是否達到概念理解與意義學習的程度。

本研究觀察她們在面對這些不熟悉的超齡問題時所能展現的數學能力，也特別關注二位面對超齡問題，所表現的相同與差異，以及遭逢困境時在研究者的最小介入後所呈現的解題表現，是否達到遷移與類化的現象。根據上述的研究目的，提出下列待答問題：（一）探究個案在計算題型，二階進退位加減法、基礎乘除法上的解題表現為何；（二）探究個案在文字題型，「合併型部分量未知」、「比較型比較量未知」、「多重比例型」上的解題表現為何。

貳、 文獻探討

文獻探討分為二個部分，數學概念及數學解題，茲分述如下：

一、數學概念

數學概念學習的本質特徵就是形成「概念域」和「概念系」，概念域的涵義是指某個概念的一些等價定義，在個體腦中形成的知識網絡（喻平、馬再鳴，2002）。

Vergnaud（1983）主張：「數學概念的意義是從多種情境中提取出來的。但是要分析每一種情境又不能只用一種概念，要用到好幾種概念；所以概念域有大量的情境，對情境的分析和處理則需要好幾種交織在一起的概念」。

學前兒童使用手指表徵看不見的東西，也有些大聲計數（Starkey & Gelman, 1982）；在沒有實物可供操作，要兒童用想像來數數，就比較困難（周淑惠，1995）。研究也發

現學前兒童能解決加法、減法，甚至乘法與除法的情境問題（Carpenter, Carey, & Kouba, 1990）；也有研究發現他她們能解類似分配性的除法問題（Davis & Pepper, 1992）。研究者認為以上研究都證實學前兒童能用非正式的方法，處理超過她們年齡的問題。以下將數概念再細分成加減法概念及乘除法概念說明之。

(一)加減法概念

加減法概念一向被視為數學概念的基礎（蔣治邦、鍾思嘉，1991）。在相關的研究上發現，Fuson 以存在真實世界（real word）的加減法情境作為分析的焦點，最常被國內外學者所採用（Fuson, 1992，引自黃美盼、林原宏、易正明，2007，頁 32）。分析如下：

1. 改變（change）

以 $A \pm B = C$ 為基模，再依未知數位置不同進行細分。例如（起始量未知）：小明有一些糖，然後他給小華 5 顆，現在小明有 3 顆糖，問小明原來有幾顆糖？

2. 合併（combine）

探討一個集合 A 和它的子集合 B、C 之間的關係。例如（部分量未知）：小明和小華共有 8 顆糖，小明有 3 顆糖，請問小華有幾顆糖？

3. 比較（compare）

探討二個互斥集合 A 和 B 之間的關係。例如（參考量未知）：小明有 8 顆糖，小明比小華多 5 顆糖，問小華有幾顆糖？

4. 等化（equalize）

欲使兩集合最終量達到相等，當 $A > B$，而 A 為未知量，稱為添加型（equalize add to）。反之，B 為未知量，稱為取走型（equalize take away）。舉例（添加型）：小明有 3 顆糖，他再買 5 顆糖後，就會和小華有一樣多，問小華有幾顆糖？

蔣治邦、鍾思嘉（1991）在一到三年級學童的加減法概念研究中發現，合併型部分量未知（如下舉例 1） 及比較型比較量未知（如下舉例 2、3）對中低年級學童而言是比較困難的題型。

(1) 小明和小華共有 8 顆糖，小明有 3 顆糖，問小華有幾顆糖？

(2) 小明有 3 顆糖，小華比小明多 5 顆糖，問小華有幾顆糖？

(3) 小明有 8 顆糖，小華比小明少 5 顆糖，問小華有幾顆糖？

(二)乘除法概念

根據 Fischbein、Deri、Nello 與 Marino 對乘法概念的研究，認為等量累加模式的乘法最符合人們最初、最自然的心理發展模式，也就是認為乘法的概念是由加法延伸而來，加減法概念是乘除法概念的前置概念（Fischbein, Deri, Nello, & Marino, 1985，引自陳小玲，2006，頁 11）。甯自強（1993）在乘除運思的啟蒙中也強調，如果數概念的產生是為了解決「單位化」、「量」的問題，加減法運思則源自解決「量」的分解、合成與比較的問題，那麼乘除法運思可能歸因於解決「單位數」與「單位量」間的變換問題。

就乘除法結構的概念域而言，每種運算方法均對應著特有的情境模式，而 Vergnaud（1983）將這些情境模式分為：

1. 量數同構型（isomorphism of measures）

探討二個量數空間的直接比例關係，例如：每人有 6 顆巧克力球，7 人共有幾顆巧克力球？

2. 叉積型（product of measures）

叉積是兩集合的積集合，由二個量數空間的叉積合成，而產生第三個量數（measures）空間。例如：張叔叔有一塊長方形的稻田，長為 20 公尺、寬為 4 公尺，請問這塊稻田面積是多少？

3. 多重比例型（multiple proportion）

探討三個量數的兌換關係。例如：家裡有 5 個人，每人每天喝 2 公升的水，請問全家 4 天總共喝了多少公升的水？

Vergnaud（1983）也主張，此三種模式的難度是循序漸進，其中以多重比例型屬於最難的題型，我們查閱其他相關的研究文獻也發現，多重比例運用三個量數空間兌換的關係，學生較不容易理解（鐘世帆，2005；林碧珍，1991）。

二、數學解題

以下將以解決問題、數學解題及解題表現，作分段說明。

(一)解決問題

何謂解決問題？美國數學督學學會(National Council of Supervisors of Mathematics，簡稱[NCSM]）的立場文獻（position paper）主張，解題是一種歷程，是利用先備知識來解決不熟悉的新問題的過程（Carl, 1989）。Barba（1990）強調解題是一種多面向的構念（a multifaceted construct），它與個人的思考模式、學習方法有關。而黃茂在、陳文典（2004）概括性的界定：「問題解決」是「人們運用既有的知識、技能、經驗，藉由各種思維及行動來處理問題，使情況能達到預期的狀態，此種心智活動的歷程」。

(二)數學解題

遠在五零年代，Polya（1957）就已提出數學解題的基本模型，1. 了解題意（Understanding the problem）、2. 擬訂解題計畫（Devising a plan）、3. 執行解題計畫（Carrying out the plan）、4. 回顧（looking back）。他認為解題首先要察覺到問題情境，了解情境中所給予的已知條件及所求，其次擬定解題策略，找到已知與所求之間的關係，進行解題，最後所驗證的答案是否合理，或在真實世界中（real world）是否存在。

而到八零年代，Schroeder 與 Lester（1989）又特別提到數學世界中解題的基模：在真實世界中呈現問題情境，將問題透過轉化列式的過程讓問題數學化，經過解題與運算得到初步的結果，最後回顧反思並驗證答案在真實生活中的合理性；其過程中最重要的是學童轉化（數學化）的能力及逆向的擬題表現，這個部分為數學解題的關鍵，最能判斷出學童理解的情形。

接著 Cambell 與 Bamberger（1990）主張，數學解題是一種組合，用來溝通數學想法；數學解題是一種情境，用來調查相互關係；數學解題更是一種觸媒，用來連接數學概念與技巧。我們從以上學者觀點發現其對數學解題之釋義有異曲同工之妙，均闡明數學解題源自於解決真實情境所面臨的問題，並指出解決問題絕不是教學的主要目的，而是透過解題過程啟發新的概念或技巧，並培養學生數學理解的能力。他們都認為解題成功的關鍵主要來自於「擬定一個可行的策略」，數學解題不等於數學解答，思考的過程要比答案的獲得更重要，數學的學習應該強調概念的理解，而不只是重複式的模仿（楊德清，2006）。

關於數學解題策略，林清山和張景媛（1993）的解釋為「面對數學問題時的想法與作法」；Kilpatrick（黃敏晃譯，1988）認為是「在解題的歷程中，對一個特殊問題擬定一個適當的計畫」；而 Lamon 主張「當兒童在面對問題時，腦中會自然且直覺的浮現解

決策略」（引自劉哲源、劉祥通，2008）。然從其他解題相關研究中發現，解題策略是可以透過教導的，當學生懂得越多策略他的解題能力也會越高，而沒有一種最佳策略可以適合所有不同類型的問題，兒童的認知發展程度與解題表現有密切關係（湯梅英、李琪明、何縕琪、段曉林，2000）。

Mayer 與 Hegarty（1996）認為數學問題的型態有二：「例行性問題（routine problem）」與「非例行性問題（non-routine problem）」。「例行性問題」是指問題解決者已經知道解決這個問題的方法；「非例行性問題」是指解題者有了問題，卻不能立刻知道如何解決。National Council of Teachers of Mathematics（簡稱 NCTM）於 2000 年再次提出「解題」是非常重要的課題，尤其是解非例行性的問題（NCTM, 2000）。因此，研究者認為「超齡問題」對年幼的解題者而言，就是她們沒有遇過，也沒有解過的一種非例行性問題。

(三)解題表現

Cai 指出兒童自創的解題過程，將植基於他們深層的直覺與自然思考的模式（Cai, 2005，引自王志銘、劉祥通，2007，頁 9）；入學後再結合正式數學的知識，發明更多方法來解決問題；兒童利用舊經驗的解題方法，是最自然的解題表現（甯自強，1993），若以甯自強（1998）所研究的個案涂景翰的數概念來說明幼兒的解題表現，他的成功類型最主要都是利用「表徵」（representation）的方式進行解題，例如：在求積數的問題上，涂景翰在解「3 × 3 ＝？」時，先兩手同時比出 2 個 3，合成 6；再比出 1 個 3，合成 9；順利解答成功。研究者認為，他雖然是以手指表徵的方法，再呈現「3」的量，但是他確實能表徵出「倍數」的觀念，也就是他能夠展現出 2 個 3，又 1 個 3，所以他已有以 3 為單位的倍數概念。

學生在還未學習過正式運算法則之前，運用自己的先備經驗，自創的解題策略，我們稱之為自發性解題策略。有關自發性的解題表現，Carpenter、Fennema、Franke、 Levi 與 Empson（1999）曾針對加減法提出增量（Incrementing）、以十和一組成（Combining Tens and Ones）及補償 （Compensating）等三種型式。增量型有慢慢累加的概念；以十和一組成型是十位數與個位數分別相加後再合成的方法；而補償型則是將一數分解成能補足另一數達到滿十的狀態後再合成的方法。

另外針對乘除法 Carpenter 等人（1999）則提出（具體物）直接模擬（direct modeling strategies）、計數與加法（counting and adding strategies）及提用已知的事實（derived facts）等三種策略。直接建模就是將生活情境轉成數學情境的過程，利用具體物或半具體物當

橋梁，進行數學解題；計數與加法包含了跳數的形式與連加的形式，學校常以背誦九九乘法表來幫助跳數的運用；而提用已知的事實則是孩童運用容易記憶的已知事實，比如 2 和 5 的倍數，結合計數或加法等策略，去衍生其他未知的事實。

研究者認為採用具體物直接模擬策略是初學乘除法問題時最常見的自發性解題策略，也是學童最自然的解題表現。孩童由直接建模開始到能提用已知的事實來解題，乘法概念發展僅有順序快慢之分，其解題策略發展並無固定的時間點，由涂景翰解乘法題目的案例來看，幼兒園階段的涂景翰在適當的引導下能解二年級乘法問題。同理，研究者也關切學童在經過適當的引導，低年級是不是也能解中年級的數學問題呢？

兒童使用自發性解題策略還可以幫助其數字感覺和估計能力的發展；自發性策略要求兒童考慮數字的大小，並以不同的方式分解數字，孩子通常一開始先添加較大的數字，再慢慢添加達到滿足為止，因此估計策略是自發性策略的自然延伸；經常使用自發性策略的兒童，能在不同的情境下反覆運用基本概念，加深其對基本概念的理解，此外，傾聽學童描述他們發明的算法，也提供教師了解孩子的洞察能力及發展的潛力。

(四)優等生或資優生的解題策略

廣義而言，資優生泛指兼具思考、創造力、推理與特殊才能的兒童（黃瑞煥、洪碧霞，1983）。許多研究均記載，資優生的自發性解題策略較一般生容易成功（李佩樺、劉祥通，2008；劉哲源、劉祥通，2008；蔡子雲、劉祥通，2007），而這些成功策略可能是慢慢形成的，也可能是在不斷嘗試失敗中突然產生的靈感（Polya, 1957）；研究者認為，探討自發性解題策略應包含正確思考與錯誤迷思，如此，不但可以幫助老師了解學生學習上的理解層次，更能清楚探究學生內在真實的解題歷程。

研究者認為資優生所展現的自發性解題策略，能透露出資優生特有的直覺與看透問題脈絡的能力。例如，Carpenter 等人（1999）針對特殊數字組合曾舉出這樣的例子，小獅子重 98 磅，牠再增加 56 磅時，會變成多重？算式為 98 + 56 =？學生的解題歷程為：假使我要讓 98 變成 100，我需要從 56 中拿 2 過來，所以就變成 100 加 54，學生利用補償（填補）的方法，以 98 + 2 + 56 － 2 得到 154。因此，研究者認為自發性策略是直接植基在概念的理解上，孩子們談論的是八和二組合成一個十，而不是背誦在同一列中退二進十的記憶性算則；自發性策略的運用，更能使學生避掉一些嚴重的計算錯誤，例如 104 － 55 =？，學生可以繞過二次退位的困難，理解 100 － 50 － 5 + 4 的解題模式。

參、 研究方法

本研究採用個案研究法進行資料蒐集與分析，並以立意取樣的方式，選取臺南市某國小一年級二位學童參與研究。研究中將蒐集個案在處理非例行性問題時的解題表現，蒐集其動態錄影、錄音、圖片、任務單等為原始資料，經過分析、評估、整理、歸納與比較，觀察個案學生解題的能力，檢驗其「數學概念」發展的狀況，進而探討個案在「數學解題能力」上可能發展的潛力。

因此本研究方法將以個案研究、研究工具、研究參與者、研究流程及資料來源與分析等五小段作如下詳細之說明。

一、個案研究

個案研究是質性研究的一種，是在自然情境下採用多種資料搜集方法，對某種現象進行整體性探究，透過與研究對象互動對其行為和意義建構獲得解釋性理解的一種活動（陳向明，2002）。本研究透過蒐集個案的解題表現，進行個案數概念的整體性探究，包括個案的加減概念與乘除概念的應用問題，也包括個案在解題失敗時，研究者給予最小提示後，對她們調適能力的探討。

質性研究本身並不是一個客觀現象的描述，它最常面臨實證主義者對其信效度的質疑，所以質性研究者開始發展出異於量化研究的信效度指標；本研究則是以三角校正及多重試驗的策略來確保研究結果的可靠性。

二、研究參與者

本研究邀請台南市某國小一年級一對異卵雙胞胎姊妹參與研究，兩姊妹在研究中分別化名為個案 S（妹妹）和個案 L（姊姊）；兩位個案今年 7 足歲，來自同樣的家庭，有相同的學習環境與學習背景，均曾就讀公立幼兒園 3 年，學校沒有特別針對數學科目做任何額外的補強或教導。但是在學校她們對於數學學習表現出高度的意願，一年級上學期數學學業成績均表現優異，數學能力相當。

曾反映過學校數學課程過於簡單，沒有挑戰性；經研究者在教學中的觀察也發現，個案不但會解加減法情境問題，甚至可能已經具備乘除法的雛型概念。所以本研究將挑戰她們解非例行性的問題，而在正試與預試的任務單中所挑選的題型對她們而言均屬於非例行性的問題。本研究有此預期的準備，二位個案可能有大同小異的解題表現，因此，

本文作者特別著墨在她們表現共同之處，以及差異的地方。

三、研究工具

本研究最主要研究工具為：研究者本身及任務單。

(一)研究者

因為研究者擔任任務單的設計者、訪談者及實作評量的評鑑者，她要建構與詮釋她所觀察與訪談到的資料，所以個案研究的研究者可以說是最主要的研究工具。

研究者是某大學織品系畢業，雖與數學專業相距甚遠，但是因緣際會，20年的校外數學課輔經驗，讓研究者與數學教學結了不解之緣。為了幫助中小學生能獲得數學學習的信心與好成績，研究者如是主張：認識學習者的先備數學知識與學習能力，給予個別的進度與處方，是比較有效的教學方法。

基於：如果研究者沒有介入，不足以了解個案潛在的解題能力（Cobb & Steffe, 1983）。本研究因考慮小一學童認識的國字與詞彙不多會影響其閱讀理解的表現，老師將從旁協助閱讀，幫助其理解題意。雖然介入會影響研究的結果，但是研究結果也註明是從旁協助的成果。而在個案表達無法理解時，為了不使個案產生挫折感而對數學失去信心，研究者秉持「研究者即教學者（researcher as teacher）（Cobb & Steffe, 1983）」的理由，以及Goldin的最小介入教學（Goldin, 2000，引自劉祥通、康淑娟，2012，頁26-27），從教學者的角度去分析並了解學生的解題表現。當個案預期性行為沒有發生時，研究者給予最小化的建議，可以指引她們另一個思考的方向，引導她們籌畫解決的策略（劉祥通、康淑娟，2012）。例如，在預試中113－28，個案L強烈表達13無法減去28，此時研究者作最小提示的介入，**提醒她「妳還有一百」，才讓她脫離困境，利用拆解法繼續完成挑戰，在此我們不可否認，有時候小提示卻是整個問題轉圜的大關鍵**。

(二)任務單

雖然個案才剛開始接受正式數學課程的洗禮，處於「數與量」概念形成的起點，但因二位研究參與者的數學能力有超齡的現象，故本研究中跳過一位數的加減問題，從二位數開始，針對加減乘除相關的「數概念」領域，進行考驗與探究。

本研究任務單分成預試與正試兩種，為了檢驗解題時所需要的計算能力，在預試時先以計算題型測驗個案四則運算的基本能力；接著在正試中以非例行性的計算題型與文字題型測試個案的解題策略。如此以計算題模式作預試是有其必要性的，因為基本的計

算能力是正試時解決數學文字題的先備知識。

1. 預試任務單（如附錄）

預試任務單中以暖身題考驗個案的先備知識，以基礎題考驗學生的程序性知識、概念性知識以及解決問題的能力。依據暖身題、基礎題以及加、減、乘、除作為雙向細目，共設計 8 道題目。主要考驗個案在二位數加減法（例如 25 + 37、35 － 17），及一位數乘除法（例如 5 × 4、6 ÷ 2）的計算能力，個案並未學習過標準演算法則，解題策略完全出自個案本身自發性的想法。在預試的解題過程中可以檢視出個案在位值分配、乘法累加及除法等分的概念上是否達到成熟的階段，而在數字合成與分解的操作上又是否達到熟練的程度。**預試結果**發現，個案在二位數不需進位與退位的加減法都能輕鬆作答，位值概念趨於成熟，而進退位時則需要以作圖表徵來加以輔助；在乘法計算中能理解 2 × 3 代表 2 有 3 個，再利用基數連加的方法求解。雖然個案未學過加減法及乘法的直式運算，也不懂位值語言，但能說出 25 是 2 個 10，5 個 1；未背誦過九九乘法表，但已能理解乘法是累加倍數的概念。

2. 正試任務單（如附錄）

挑戰個案非例行性的計算題與文字題，計算題包括二階進退位加減法、乘法以及有餘數的除法，而文字題則採用蔣治邦、鍾思嘉（1991）在一到三年級學童的加減法概念研究中，所發現對低年級學童而言相對困難的題型－「合併型部分量未知」和「比較型比較量未知」兩種，以及 Vergnaud（1983）在乘除法概念域中最困難的題型－「多重比例型」為主要測試題型。

本研究旨在探討個案學生解題的能力，並非探討學習成就，故文字題部分僅以上述三種題型作為命題依據，設計適合一年級生活經驗的三道文字題，考驗個案對文字題意理解，並關心她們如何解題？研究者以個案在最難題型中的解題表現，探究其數概念的發展的程度。例如，個案在「合併型部分量未知」表現熟練，則研究者合理推論她們在較簡單的「合併型整體量未知」可能已經理解；但若呈現無法理解的情形，研究者將會在晤談中加入較簡單的「合併型整體量未知」以及交換未知數的位置等方式，來回交叉問答，藉此探究個案能理解到甚麼樣的程度。

四、研究流程

本研究在 105 學年度寒假期間，利用某週三下午進行一次 30 分鐘的計算題預試，

會後馬上進行每人各 10 分鐘的晤談。隔週三下午，二人再同時進行一次正試測驗，大約 50 分鐘，施測過程若對國字或詞彙不理解者，個案可以馬上發問。研究者也告知她們解題的方法沒有任何限制。

在正試後接續的週三下午，兩人分別再進行大約一小時的晤談，針對概念錯誤或解題失敗的部分，進行深入的訪談。若有停滯不前或表達放棄時，研究者將以最小提示介入教學作為引導；在教學後為了觀察個案是否獲得學習保留或遷移的現象，隔週將再針對介入教學的題型，以類似題（如附錄）考驗學習是否遷移，也為了配合二位個案與家長的時間，研究者在三個月後，針對介入教學的題型，設計更難的類似題型（如附錄）進行再次試驗。

五、資料來源與分析

本研究以任務單上的解題表現及晤談中的回答作為最主要的資料來源，本段茲以資料蒐集、資料分析來加以清楚闡明。

(一)資料蒐集

本研究主要利用任務單上的解題紀錄、圖畫表徵、晤談錄影等來蒐集相關資料，以佐證說明個案在數概念的理解狀況，期待個案透過自發性的解題表現，將個人的解題想法完整呈現。研究者將蒐集到的資料加以整理、分析、歸納並綜合彙整，以佐證說明個案在數概念的理解狀況。例如，預試中挑戰她們「25 + 37 =？」，個案運用手指表徵以及畫錢幣的圖案，甚至可能以操作古式積木等方法進行表徵幫助解題，在訪談中她們又能清楚的表達解題的歷程為：「20 + 30 = 50，然後再將 5 扣掉 3 讓 7 變成 10，最後得到 62」。如上述中的資料（任務單的圖案、彎曲手指的動作與受訪談的回應）即為本研究主要的資料來源。

(二)資料分析

本研究將蒐集到的相關資料進行分析，研究結果的歸類沒有特定的依據，主要靠個案在任務單的解答、圖形、與接受訪談的回應，資料分析的三角校正，以確保效度，以重複情節（多次試驗）來確保研究的信度。

1. 信度方面

本研究欲探究個案的數學能力，故研究者以重複情節來檢驗資料的一致性與可靠性。

例如，在個案因讀不懂題意而解題失敗時，研究者可以以更改比較量與參考量的順序，更換未知數的位置等，作反覆多次的提問與測試，得到個案在此題型上各個面向的認知訊息，最後收集並彙整相關資料進行分析，判斷個案對此題型的理解程度。另外在研究者有介入教學的題型中，日後請她們再作類似題型來檢驗是否達到學習的遷移，也能增加其信度。

2. 效度方面

研究者長期現場觀察，蒐集相關資訊（如：任務單、表徵的圖畫、手指表現的照片以及訪談中的錄音和錄影等），對研究情境作更深度的描述。再根據資料的來源，採取交互檢核（cross-checked）以證實這些資料的正確性。例如，預試中挑戰「5 × 4　=？」時，她比出 5 根手指頭，一一點數 4 回。在晤談中她清楚表達 5 × 4 就是 5 有 4 個，然後全部加起來。請她畫圖表徵時，她畫了 5 個圈，再畫 5 個圈，總共畫了 4 次。如此多方資料的檢核與分析（三角校正）使資料更具有說服力，**研究者因此可以宣稱該生已有乘法性思維（multiplicative thinking）（Clark, & Kamii, 1996），此乃資料來源的三角校正**。另外，有些資料的詮釋，尤其是詮釋個案所使用的解題策略，也徵詢共同研究者的看法，作人員的三角校正來增加其效度。

最後說明紀錄訪談原案時的編碼順序，以四碼阿拉伯數字為主，前二碼為原案序號，如：01 為原案一；後兩碼為訪談序號，如：0102 為原案一訪談中的第二句答話；最後加上一個英文字母為個案的代號，如：0102S 即為個案 S 在原案一的訪談紀錄中第二句答話。以此類推，完整呈現訪談重要訊息。

肆、 研究結果與討論

本研究結果與討論將以計算題型、文字題型兩類來加以分段陳述。礙於篇幅的關係，本文僅能呈現原案的重要部分。

一、計算題型的解題表現

計算題型主要測試個案在二階進位加法、退位減法、乘法及有餘數的除法等四種題型的解題表現。兩位個案在二階進位加法上的表現成熟，但在二階退位減法、乘法及除法就必須輔以畫圖或具體物的表徵方式，來幫助她們將抽象的數字符號具體化。

(一)運用以十和一組成的策略解進位加法

題目為：59 + 68 =？，因為個案在位值概念、合成分解的概念發展成熟，所以對於二階進位的加法就顯得駕輕就熟。兩位的解題表現雖然不同，但均與 Carpenter 等人（1999）提出的以十和一組成（Combining Tens and Ones）的策略有異曲同工之妙，如以下原案一、二。

原案一：以十和一組成型

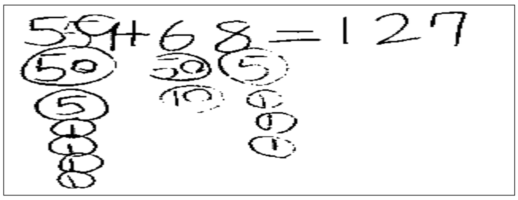

圖 4-1　原案一　個案 S 進位加法的手稿

個案 S 的訪談紀錄

0104S：（手指著原稿）就 50 加 50 等於 100，再加 10 等於 110，5 塊加 5 塊是 10 塊，所以 110，120，121，122，123，124，125，126，127（點數錢幣 ①）。

0105T：你一定要畫圖才會算嗎？

0106S：不一定啊。

0108S：就 50 跟 60 先加起來，變成 110，然後再加 9 再加 8，先把 110 念出來，就 119，然後 120、121、122、123、124、125、126、127、所以總共 127（點折 8 根手指）。

0109T：一個一個數好像不是很厲害。

0110S：那我也可以用 50 加 60 等於 110，再把 9 的 5 跟 8 的 5 合起來，9 的 4 跟 8 的 3 合起來，就等於 17，所以 110 加 17 就 127。

0111T：嗯，這樣好像有比較厲害喔，還有

原案二：以十和一組成型

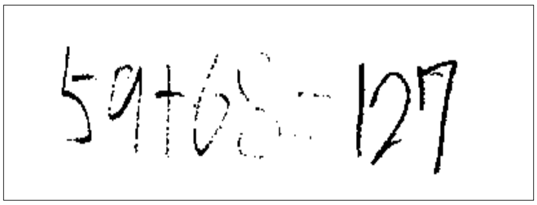

圖 4-2　原案二　個案 L 進位加法的手稿

個案 L 的訪談紀錄

0203T：你怎麼算出 127 的？

0204L：50 加 60 等於 110，9 加 8 是 17，然後 110 加 17 是 127。

0205T：你會其他的算法嗎？

0206L：甚麼算法？我知道十塊錢要跟十塊錢合起來，一塊錢要跟一塊錢合起來。

0207T：其他算法，就是不要用現在的方法，例如用補的阿，或是其他的，都可以，妳想想看。

0208L：用補的，就是把 68 給 59 一塊的那種對不對，讓 59 變成 60，然後 68 變 67，然後 60 加 60 就 120，最後再把 7 算起來，就是 127。

0209T：你怎麼知道的？

0210S：媽媽有教我們撿紅點找好朋友（撲

嗎？

0112S：有，110 加 17 等於 127 就好了啊。

克牌)，就是 1 的好朋友是 9，2 的好朋友是 8，3 的好朋友是 7…..這種，所以我就知道了。

<分析>

從她們的表現中發現，兩位個案能分辨十位數與個位數的不同，又能了解滿十進一的概念；因此在加法中，將一階進位類化到二階進位的學習遷移是成功的。

個案 S 剛開始在任務單上使用畫錢幣的方法解題成功，在訪談中（0108S，0110S）可知，她以自發性的解題策略，先處理十位數，後處理個位數，也說明她的位值概念已發展完備。

而個案 L 是以心算的方式呈現，在心中點數後直接寫上 127，她在任務單上並沒有明顯的計算過程，但訪談中她表明是以「以十和一組成」的策略在心中進行解題的。

(二)提示後能利用數字拆解的方法處理二階退位減法

題目為：113－28 =？，測試時兩位個案均表達 13 減 28 是不夠的，經過研究者的提示，「你還有 100 阿」，才開始以畫錢幣的方式透過數字拆解的方法解題，如下原案三、四。

原案三、四：畫圖表徵策略

個案聯結日常購物錢幣兌換的經驗，運用畫錢幣表徵的方法，處理二階退位減法的問題。

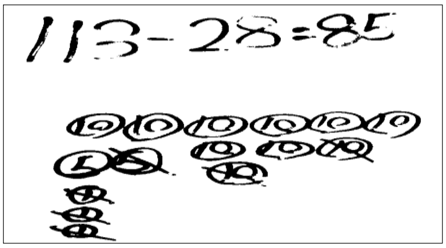

圖 4-3　原案三　個案 S 退位減法的手稿

個案 S 的訪談紀錄

0303T：你怎麼算的說說看？

0304S：就 100 可以換成 10 個 ⑩，一個 ⑩ 可以換成 2 個 ⑤，然後

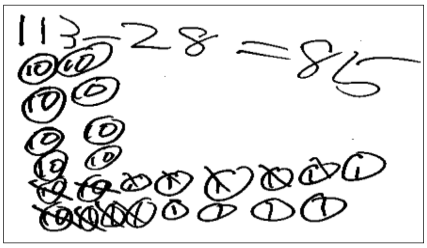

圖 4-4　原案四　個案 L 退位減法的手稿

個案 L 的訪談紀錄

0405T：你是怎麼算的？

0406L：就 10 個 ⑩ 是 100，再 13，一個 ⑩ 換成 10 個 ①，這樣劃掉 28

劃掉 28，就是 85。

就剩下 85。

<分析>

因為兩位個案從未接觸過二階退位的題目，並未具備二階段退位減法的基模，所以她們顯得坐立不安。經過研究者提醒她們還有一百，才讓她們聯想起生活中兌換錢幣的經驗；以畫圖表徵的方式進行數字拆解，也就是把 100 換成 10 個 ⑩ 以及把 ⑩ 換成 10 個 ① 的方法進行位值轉換；最後讓十位數與個位數都能達到足夠的數目，以便進行扣除的動作。

(三)運用累加策略解決乘法的倍增問題

題目為：9 × 8 = ？，個案 L 使用手指表徵，經一一點數後獲得答案，但個案 S 已跳脫點數的階段，直接運用加法策略進行解題，如以下原案五、六。

原案五：樹狀累加策略

個案 S 在紙上寫出 8 個 9，利用兩兩相加的方法得到答案 72。

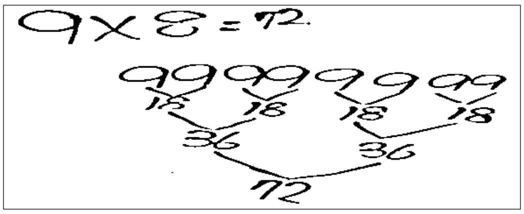

圖 4-5　原案五 個案 S 乘法題型的手稿

個案 S 的訪談紀錄

0504S：就是 9 有 8 個，兩個 9 是 18，然後 18、18 就 36，36、36 就 72。

0507T：那妳怎麼會想到要這樣兩個兩個加起來呢？

0508S：比較快阿。

原案六：手指表徵（從頭數）策略

個案 L 比出 9 根手指頭，來回點數手指 8 趟，最後在任務單上寫著 81。

圖 4-6　原案六 個案 L 手指表徵策略

個案 L 的訪談紀錄

0601T：你知道 9 × 8 是甚麼意思嗎？

0602L：知道阿，就是 9 有 8 個。

0605T：你可以再重算一次嗎？

0606L：嗯，1、2、3、…….72。

<分析>

兩位個案均未背誦過九九乘法表，研究者無法期望她們以倍數跳數的模式出現，但在過程中發現她們已具備倍數的基數累加概念（0504S，0602L），因為她們能明確的表達出 9 × 8 是代表 8 個 9 的連加。另外，個案 S 在任務單上利用「樹狀累加策略」，快速達到連加的目的，證明她已跳脫一一點數的階段，這個策略與 Carpenter 等人（1999）所提出的「計數與加法策略」完全相同。

(四)採用具體物直接模擬的方法，以解決有餘數的除法問題

題目為：43 ÷ 5 = ？，兩位個案均以直接建模策略解題，她們運用教具古氏積木 43 顆，一一分配到桌面的 5 個角落，發現不能平分時，開始產生焦躁不安的神情，表現出舉棋難定的樣子。研究者適時的提醒她們，「剩下的要還給老師喔！」，她們才又安心的把剩下的積木分配完成，將剩下的 3 個積木拿給老師。但在任務單上的表現是空白的，如下原案七、八。

原案七、八：具體物直接模擬策略

個案 S 將古氏積木一一分配到桌面的 5 個角落，最後剩下 3 個。而個案 L 是先畫出 5 個大圈後，再以不定量的方式分配積木，最後達到 5 個圈圈內等量的狀態。

圖 4-7 原案七 個案 S 等分除法 - 用具體物直接模擬策略

個案 S 的訪談紀錄

0702S：43 ÷ 5 就是 43 分給 5 個人。

0704S：（看著桌面）就是一個人拿 8 個，3 個給老師。

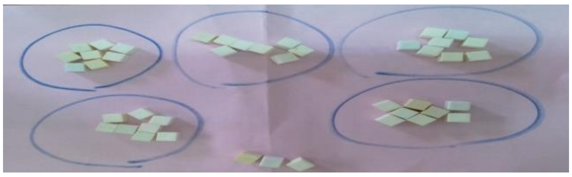

圖 4-8 原案八 個案 L 等分除法 - 用具體物直接模擬策略

個案 L 的訪談紀錄

0805T：妳怎麼知道這個（指向 ÷） 是除？

0806L：哆啦 A 夢有說過啊。

0808L：就是分給人，43 ÷ 5 就是 43 個分給 5 個人。

0810L：（看著桌面）就是一個人拿到 8 個，剩下 3 個。

<分析>

具體建模策略乃人類接觸乘除法時，最早使用的策略，兩位個案均能熟練的運用此策略並達到解題的目的，故研究者認為兩位個案應該已具備除法的分配基模。另外，個案 L 以不定量的方式（既不是逐一分配，也不是先估計量的多寡）進行分配工作，最後卻又達到 5 個圈圈內都等量，展現她相當成熟的監控能力。

二、文字題型的解題表現

文字題型以「合併型部分量未知」、「比較型比較量未知」、「多重比例型」等三種題型進行測試。

(一)再添加策略的運用 — 合併型部分量未知

題目為：小亮今天很幸運抽中 39 元禮卷，他到金玉堂想買 85 元的妖怪手錶，那麼他應該再付多少現金呢？

兩位個案均從再添加的方向進行思考，領悟「部分 － 全體」的概念，分別找出解題的策略，如以下原案九、十。

原案九：運用部分全體基模

個案 S 先以再添加的模式思考「部分－整體」的關係，最後運用數學模式進行解題。

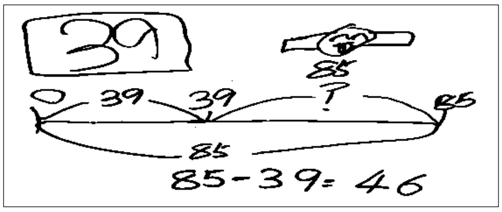

圖 4-9　原案九　個案 S 合併型的題意表徵

個案 S 的訪談紀錄

0902S：他就只抽中 39，然後 39 不夠付 85，所以我就用 85－39，她還要付 46 元。因為他只有 39，要一直加到 85 才能付錢。

原案十：利用「往上添加」的策略

個案 L 一直思索著 39 要再加入多少才能到達 85 呢？

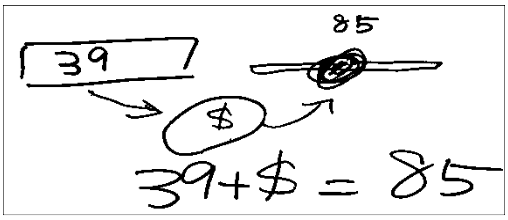

圖 4-10　原案十　個案 L 合併型的題意表徵

個案 L 的訪談紀錄

1002L：就 39 + 1 = 40， 加 40 等於 80，然後再 5，所以是 46。

1003T：那算式要怎麼寫？

1004L：就是 1 + 40 + 5 = 46

0903T：妳的意思是 39 要加多少才能到達 85 的意思嗎？

0904S：嗯，因為 39 還不夠，全部要 85 才夠付錢。

0907T：好，那妳畫的這個圖是甚麼意思？

0908S：就是 39 的禮卷，要加不知道的錢才能買 85 元的妖怪手錶。

0911T：好，那妳 46 是怎麼算出來的。

0912S：（她以右手代表十位，左手代表個位） 就 85 減 30 是50再 5 ，這個減 9  就剩 1（ 指向代表十位的右手小指），這樣就 40 再 5 再 1 就 46 （右小指彎一半代表 1）。

<分析>

兩位個案在「合併型部分量未知」的解題策略上，均採用往上添加的策略而得到解題成功。個案 S 在（0902S）的回答中表達了她是以添加策略為基模進行解題，了解數學模式 A +（B）= C 的題型能以（B）= C － A 的模式來找到答案。在（0904S）的回答中更發現，個案 S 已明白「部分 － 整體」的概念。

接著個案 S 展示其利用手指表徵的解題過程，過程中充分展現出其後設監控的能力，研究者研判個案 S 已具備二位數退位減法的概念，且其二位數退位減法的基模建構與加減法的直式計算模式已相當接近。

另外從個案 L 的題意表徵圖（圖 4-10）中也發現，她憑藉著合成分解策略（先滿 40，再滿 80，又加 5），也展現後設認知能力，因此解題成功，即使是 L 過去沒有學過的超齡問題，她仍然能以自發性的再添加策略進行解題，而她所採用的再添加策略，正好與 Carpenter 等人（1999）在加減法自發性解題策略的研究中，所提出的增量型（Incrementing）是完全一樣的。

(二)閱讀理解能力影響解題表現 — 比較型比較量未知

題目為：姐姐拍球拍了 122 下，妹妹比姐姐少拍了 39 下，妹妹拍了幾下？答案的

正確並不代表真正理解，讀不懂題意、誤用關鍵字，是兩位個案解題失敗最主要的原因，如下原案十一、十二。

原案十一：置個案於衝突情境（認知失衡）的策略

將個案 S 置於衝突情境，她能意識到答案的矛盾，進而自己理出規則找到方法。

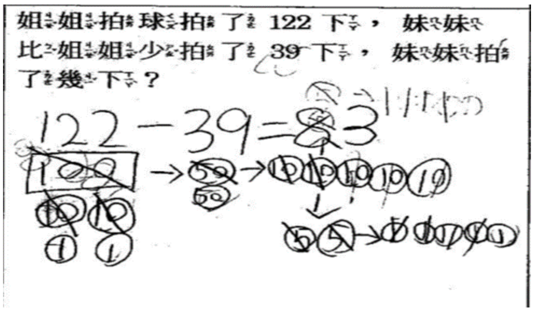

圖 4-11-1　原案十一　個案 S 比較題型的手稿

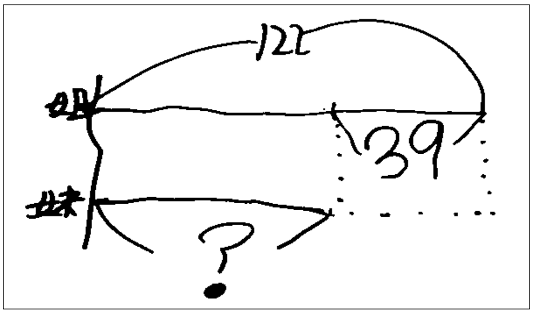

圖 4-11-2　個案 S 比較題型的題意表徵

個案 S 的訪談紀錄

1102S：老師有教過〝比〞就是用減的。

1103T：那你幫我算算這一題，「**姐姐拍球拍了 122 下，妹妹比姐姐〝多〞拍了 39 下，妹妹拍了幾下？**」

1106S：就是 122 + 39 = 161。

1107T：為甚麼？你剛剛不是說〝比〞就要用減的。

1108S：就是它有〝多〞，就是用〝加〞的，有〝少〞就是用〝減〞的。

1109T：好，那我問你「**姐姐拍球拍了 122 下，姐姐比妹妹〝少〞拍了 39 下，妹妹拍了幾下？**」

………（停了 10 秒）

1110S：122－39 = 83，妹妹 83 下。

1111T：喔，所以姐姐的 122 比妹妹的 83 少 39，是這樣嗎？

………（停了 5 秒）

1112S：應該是 161，　用加的

1113T：為甚麼？它題目中有一個〝少〞又有一個〝比〞耶。

1114S：**但是，…因為…她比妹妹少 39 下啊…，她有拍 122 下，妹妹也有拍 122**

下，妹妹還有（多）拍 39 下。所以妹妹要 122 + 39。

1113T：好，那妳可以畫圖來告訴我嗎？我覺得聽不太懂，像這樣（示範）比較大的就畫長一點，比較小的就畫短一點。

1114S：嗯（畫圖中）（如圖 4-11-2）

原案十二：介入教學 — 提問「誰多？誰少？」

個案 L 看到少就是減，看到多就是加，她不明白錯在哪裡，請求協助，研究者一樣將她置於衝突情境，但她卻是越來越混亂；研究者決定介入教學，最後以一句「誰大？誰小？」將她拉回題意，終於獲得成功解題。

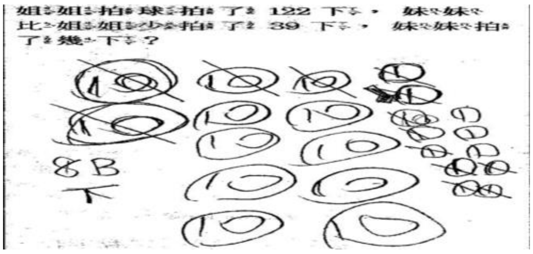

圖 4-12-1　原案十二　個案 L 比較題型的手稿

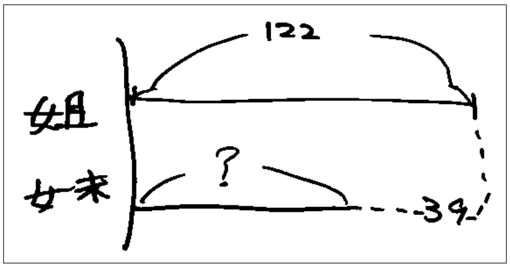

圖 4-12-2　個案 L 比較題型的題意表徵

個案 L 的訪談紀錄

1217T：你要先釐清題目，「**姐姐比妹妹少拍了 39 下**」是「**誰多？誰少？**」。

1218L：姐姐比較少….. 妹妹比較多吧。

1221T：現在題目告訴你姊姊拍 122 下，那妹妹拍幾下。妹妹比較…（引導她回憶）…

1222L：多。

1223T：嗯，然後呢？ 請你告訴我，妹妹怎麼算？

1224L：妹妹比較多，所以是 122 + 39。

1225T：嗯，你再看看原來的題目「**姐姐拍球拍了 122 下，妹妹比姐姐少拍了 39 下，妹妹拍了幾下？**」哪裡不一樣（引導她找到規律），「**誰多？誰少？**」。

1226L：妹妹少，姊姊多。

1229T：你能畫圖（如圖 4-12-2）告訴我，題目中誰大誰小的關係嗎？就是比較多的人畫比較長，比較少的人畫比較短。像這樣（示範）。

<分析>

相關文獻均證實，閱讀理解與解題表現有顯著相關（王淑嬌，2006；林麗華，2006；陳世杰，2005；李俊彥，2004）。兩位個案在任務單上雖然解題成功，但晤談中卻發現她們並不理解比較題型的題意；她們誤用關鍵字，甚至以為「比較題型」全部都是用減法解題，這就是因為閱讀理解能力不足而導致解題失敗的典型例子。

經過研究者的引導，置她們於衝突情境，給予機會重新思考；個案 S 有辦法釐清題意找到規律，但個案 L 卻覺得更加混亂，於是在晤談中再以最小提示「誰多？誰少？」介入教學，讓她能聚焦於題意而非關鍵字。

為了解她們是否因為提示後，能聚焦於題意的理解，隔週再做了四題比較題型的類似題目（如附錄），以測試個案是否能經由傾聽問題，以掌握題意，而決定採用何種運算策略解題。三個月後，研究者針對介入教學的題型，設計更難的類似題型（如附錄）以考驗學習成效的遷移情形。

較難的比較的類似題型（如附錄），其類似題型的解題表現如下（原案十五、十六、十七、十八）。

原案十五、十六：畫圖表徵題意

題目 1：小夫有 232 元，胖虎比小夫多 37 元，大雄又比胖虎少 53 元，請問胖虎和大雄各有幾元？

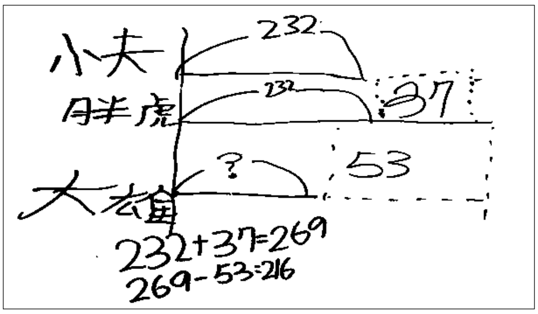

圖 4-15 原案十五　個案 S 比較型相似題（1）的手稿

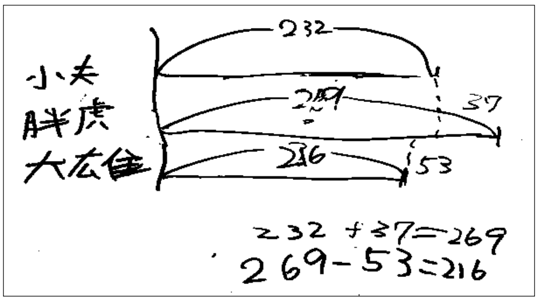

圖 4-16 原案十六　個案 L 比較型相似題（1）的手稿

原案十七、十八：畫圖表徵題意

題目 1：中川比麗子高 18 公分，麗子又比兩津高 23 公分，請問中川和兩津誰比較高，高幾公分？

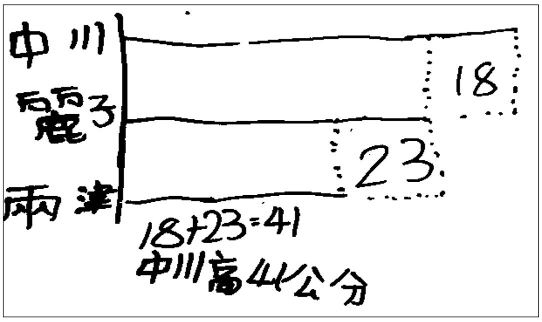

圖 4-17 原案十七 個案 S 比較型相似題（2）的手稿

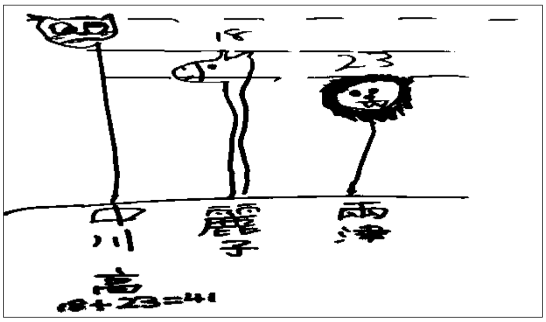

圖 4-18 原案十八 個案 L 比較型相似題（2）的手稿

從以上四個原案的解題表現發現，她們已獲得學習遷移的效果，在原案十五（如圖 4-15）個案 S 在胖虎的數線上寫了 232 和 37，明顯的表達出胖虎比小夫多 37 的意涵。而類似題第 2 題，她們把題意畫出來之後，幾乎就可以馬上回答出答案了。此次類似題的測試，她們展示了對題意的理解與數學化的歷程，以此證明介入教學達到了效果，她們已具備比較題型的基模。

(三)採用具體物模擬策略解題成功 — 多重比例型

題目為：一個大圓圈可換 3 個中圓圈，2 個中圓圈可換 3 個小圓圈，請問 8 個大圓圈可換幾個小圓圈？

個案均處於乘法概念建構的前端，以具體物實際建構抽象的倍數概念，能幫助個案往後心像的建立，如下原案十三、十四。

原案十三、十四：直接建模表徵題意，使用一一點數的策略，非倍數跳數

兩位個案均採用半抽象的圖形表徵題意，運用一一點數的策略解題成功，表示她們已具備倍數與等量分配的基本概念。但因未背誦過九九乘法表，所以無法以跳數的形式出現，又因未學習過乘除法則，所以更無法以數學模式進行作答。

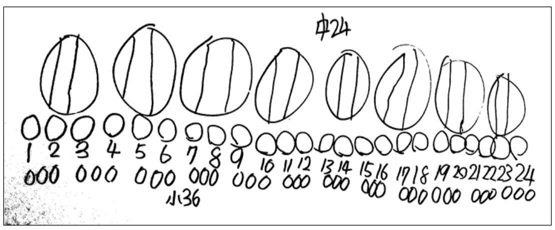

圖 4-13 原案十三 個案 S 多重比例題型的手稿

個案 S 的訪談紀錄

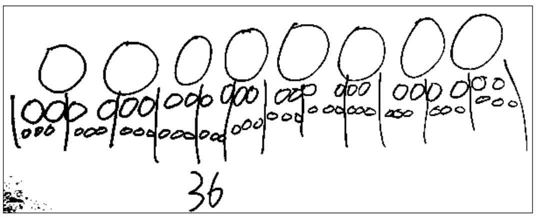

圖 4-14 原案十四 個案 L 多重比例題型的手稿

個案 L 的訪談紀錄

1304S：就是 8 個大圓嘛，換 3 個中圓，我把大圓切 3 塊，就是有 24 個中圓。然後再 2 個中圓換 3 個小圓，我就在 2 個中圓下面畫 3 個小圓，這樣數一數小圓就是 36 個阿。

1404L：我先畫 8 個大圈圈換成 3 個中圈圈，然後 2 個中圈圈、2 個中圈圈、2 個中圈圈、……再換 3 個小圈圈，就是這樣啊。

1405T：那妳怎麼知道是 36。

1406L：就是 1、2、3、……(開始點數小圓圈)就是 36 阿。

<分析>

「多重比例」在三個量數空間的兌換關係中，提供了倍數與分配的乘除法概念，兩位個案的解題策略類似 Carpenter 等人（1999）的用具體物模擬，以表徵題意與心中的想法，兩位個案則是以半具體物（畫圈的方式）表徵想法。在以上的操作過程中，充分表現出她們比同齡學生成熟的後設監控能力；因為她們還未真正學過乘除法的運算規則，也未背過九九乘法表，所以沒有使用正式的數學語言來加以說明，也沒有列出乘法與除法的數學算式，更沒有期待她們以倍數跳數的方法計數。

她們以最原始的方法來解題，而且解題成功，這代表她們即使沒有學過正式算數的乘除法則，乘除法的概念仍然早就存在於她們最基本的記憶當中，也就是乘除法的基本概念在她們的日常經驗中，已經成形，而非正規教育所賦予的。這也直接證實了周淑惠（1995）所言「兒童絕不是一個等待填充的空白接受器」；而如何引出她們日常中的舊經驗，來理解約定俗成的數學記號，進一步建構屬於她們自己的數學概念，是教師們要共同努力的目標。

伍、 結論與建議

本研究旨在探究二位小一個案學童求解數與量單元中非例行性問題的解題表現，首先根據研究過程，彙整兩位個案學生在數與量單元非例行性問題的解題表現資料，分析研究結果，提出研究結論；再依據研究結論，提出低年級在數與量單元教學上或研究上的相關建議。

一、結論

(一) 探究個案在計算題型，二階進退位加減法、基礎乘除法上的解題表現為何

兩位個案學生的數量概念已超過同齡學生的表現，她們位值集聚的概念成熟，合成分解的概念清晰，後設認知及監控的能力也在解題過程中充分展露無遺。在計算能力方面，二階進位加法表現成熟且靈活，二階退位減法、乘法及除法就必須輔以具體表徵來幫助她們建構心像。例如，個案 S（原案九）運用手指「表徵（re-presentation）」的方式解二階退位減法的題目，可見，二位數的概念成熟。

(二) 探究個案在文字題型，「合併型部分量未知」、「比較型比較量未知」、「多重比例型」上的解題表現為何

在文字題意的理解方面，兩位在「合併型部分量未知」已有基模，均以再添加的策略進行思考，**個案 S 更能以（B）= C － A 的模式進行解題，在「整體量與部分量」的概念上比個案 L 表現成熟**。

而「比較型比較量未知」的題型，兩位雖然都解題成功，但其實她們並不是真的理解，在訪談中發現，她們利用關鍵字判斷加減法則，遇到「比」和「少」就要用減的，「多」就要用加的，這樣的誤解，讓她們無法聚焦於題意。於是研究者運用「認知失衡」（原案十一：妹妹的訪談）的教學策略，讓她自己發現關鍵字的運用，並非放諸四海皆準的法則。

個案 L（姐姐）看到少就是減，看到多就是加，她不明白錯在哪裡，請求協助，研究者也一樣將她置於衝突情境，但她仍處於五里霧中；研究者最後以一句「誰大？誰小？」幫助她釐清題意（原案十二:姊姊的訪談），讓她們認真去判斷題意中差數與被減數、減數之間的關係，釐清她們的迷思，並幫助她們建立基模，經過三個月後再以三者比較題型（原案十五～十八）進行檢驗，發現其概念已建立。

最後以乘法「多重比例型」加以考驗，二位都能以畫圖表徵的方式解題（原案十三、十四），方法類似 Carpenter 等人（1999）直接建模策略，建構三個量數間的兌換關係，分層羅列，最後再一一點數，圖中表現出她們已具備乘法的倍數概念，以及兩兩一組的除法分配基模，甚至能應用到三個量數空間的連結。

經過研究者長期與個案深入互動的研究中發現，個案之所以有超齡的表現，除了她們在日常生活中的體驗比一般同齡學生多元以外，她們表現出來的後設監控能力也較一般同齡學生來得穩定；她們日常中能自己購物、自己計算價錢、自己分配點心。研究者更在她們分配的過程中，看到她們已有分數的基本概念。例如，在分配 5 個餅乾時，兩

位個案會告訴我，一個人得二個再一半的餅乾。因此，研究者認為兒童除了先天的條件外，日常生活的體驗也是兒童知識建構的養分；家長們不要一直認為孩子還沒長大，日常瑣事為他們萬事作足，其實是間接抹煞孩子學習的機會，阻斷她們建構知識的來源。

二、建議

根據本研究結論，研究者反思整個研究過程，給予相關研究者或教學者作以下三點建議：

(一) 有鑒於個案學生於比較題型中習慣使用關鍵字解題，意味著一次的成功不代表真正的理解，研究者建議做訪談時要變換題目中所設立的未知數，及比較量與參考量的次序關係，並作持續考驗加以驗證，才能掌握窺探學生的真實能力（原案十一）。

(二) 比較題型利用關鍵字的迷思，如何破解，及如何作最小提示的提問呢？研究者以精簡一句「誰大？誰小？」，能讓學生焦點拉回題意，關注於比較句中的參考量與比較量的關係，此種最小介入的提問發揮了效用，數學教育工作者可以參考與試用（原案十二）。但是不同的問題，有不同的提問內容，教學者可能要擁有數學內容知識，以及數學教學知識，也建議教學者多多參考教學手冊，豐富上述知識以發揮適當的提問內容。

(三) 一般學生都誤以為比較題型就是用減的，所以建議教師在出比較題型時，能同時出現加法與減法的比較題型，置學生於衝突情境當中，讓學生獲得反思的機會，進而發展閱讀以及數學解題的能力（原案十一）。

誌謝

本研究蒙科技部計畫（104-2511-S-415-003-MY3）經費補助，特致謝忱。也深深感謝審查委員的見解與建議，使得本文更加完善。

參考文獻

王志銘、劉祥通（2007）。一位資優生自發性解題表現之探究~以分數除法之當量除為例。**資優教育季刊，104**，8-19。

王淑嬌（2006）。**國小四年級學童閱讀理解能力與數學解題歷程之相關研究**（未出版之碩士論文），國立臺北教育大學數學教育研究所，臺北市。

李佩樺、劉祥通（2008）。分析國小資優生解連比問題之自發性策略。**資優教育季刊，**

106，8-17。

李俊彥（2004）。**不同題目表徵型式的面積問題對國三學生解題表現之探討**（未出版之碩士論文），國立高雄師範大學數學系，高雄市。

周淑惠（1995）。**幼兒數學新論-教材教法**。臺北市：心理出版社。

林清山、張景媛（1993）。國中生後設認知、動機信念與數學學習之關係暨代數應用題教學策略效果之評估。**國立臺灣師範大學教育心理與輔導學系教育心理學報**，26，53-74。

林碧珍（1991）。國小兒童對於乘除法應用問題之認知結構。**國立新竹師範學院學報，5**，211-288。

林麗華（2006）。**國小不同數學成就學生對數學文字題的閱讀理解能力之探討**（未出版之碩士論文），國立臺南大學特殊教育學系，臺南市。

陳小玲（2006）。**以經驗、察覺、歸納概念建立教學為導向之國小二年級學生乘法概念學習歷程及成效之探究**（未出版之碩士論文），臺南大學應用數學研究所，臺南市。

陳世杰（2005）。**國小學童閱讀理解策略與數學文字題閱讀理解、數學文字題解題表現之相關研究**（未出版之碩士論文），國立高雄師範大學教育研究所，高雄市。

陳向明（2002）。**社會科學質的研究**。臺北市：五南出版社。

黃茂在、陳文典（2004）。「問題解決」的能力。**科學教育月刊，273**，21-41。

黃美盼、林原宏、易正明（2007）。徑路搜尋方法之加減法文字題知識結構分析。**測驗統計年刊，15**，29-57。doi: 10.6773/JRMS.200706.0029

黃瑞煥、洪碧霞（1983）。**資賦優異兒童與創造能力的教學**。省立新竹師專特殊教育中心印行。

喻平、馬再鳴（2002）。論數學概念學習。**數學傳播，26**（2），89-96

甯自強（1993）。單位量的變換（一）~正整數乘除法運思的啟蒙~。**教師之友，34**（1），27-34。

甯自強（1998）。涂景翰的數概念。**科學教育學刊，6**(3)，255-269。

湯梅英、李琪明、何縕琪、段曉林（2000）。**國家教育研究院**。檢自 http://terms.naer.edu.tw/detail/1312529/?index=7

楊德清（2006）。從兒童迷思概念談數常識之教學經驗分享。**台灣數學教師電子期刊，7**，

3-10。doi:10.6610/ETJMT.20060901.02

蔡子雲、劉祥通（2007）。資優生在想什麼？— 速率篇。**資優教育研究，7**（1），29-47。doi:10.7089/JGE.200706.0029

蔣治邦、鍾思嘉（1991）。低年級學童加減概念的發展。**教育與心理研究，14**，35-68。

劉祥通、康淑娟（2012）。小美在數線上關於分數基準化問題的解題表現。**科學教育學刊，20**（1），23-39。doi:10.6173/CJSE.2012.2001.02

劉哲源、劉祥通（2008）。國一資優生對因倍數問題的解題分析。**資優教育研究，8**（1），47-66。doi:10.7089/JGE.200806.0047

鐘世帆（2005）。**國小學童整數乘除概念知識結構與認知型式相關之探討-以六年級為例**（未出版之碩士論文），國立臺中師範學院數學教育研究所，臺中市。

J. Kilpatrick 著。黃敏晃譯（1988）。數學解題的教學，近 25 年來的回顧。**數學傳播**，12(4)，26-43。（原著出版於 1985 年）

Barba, R. H. (1990). Problem solving pointers. *Science Teacher, 57*(7), 32-35.

Cai, J. (2005) . What research tells us about teaching mathematics through problem solving. In F. K. Lester, & R. I. Carles (Eds), *Teaching mathematics through problem solving* (pp. 241-253). Reston, VA: NCTM.

Cambell, P. F., & Bamberger, H. J. (1990). The vision of problem solving in the standards. *Arithmetic Teacher*, *38*(9), 14-17.

Carl, I. M. (1989). Essential mathematics for the twenty-first century: The position of the National Council of Supervisors of Mathematics. *Arithmetic Teacher*, *82*(5), 388-391.

Carpenter, T. P. (1985). Learning to add and subtract: An exercise in problem solving. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 17- 40). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Carpenter, T. P., Carey, D., & Kouba, V. (1990). A problem-solving approach to the operations. In J.N. Payne (Ed.), *Mathematics for the young child.* Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., & Empson, S. B. (1999). *Children's mathematics cognitively guided instruction*. NH: Heinemann.

Clark, F. B., & Kamii, C. (1996). Identification of multiplicative thinking in children in grades 1-5. *Journal for Research in Mathematics Education, 27,* 41-51. doi: 10.2307/749196

Cobb, P., & Steffe, L. P. (1983). The constructivism researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education, 14*(2), 83-94. doi:10.2307/748576

Davis, G., & Pepper, K. (1992). Mathematical problem solving by pre-school children. *Education Studies in Mathematics, 23*(4), 397-415. doi:10.1007/BF00302442

Fischbein, E., M., Deri, M. S., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, 3-17. doi:10.2307/748969

Fuson, K. C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 243-275). New York, NY, England: Macmillan.

Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 517-545). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. doi:10.4324/9781410602725

Mayer, R. E. & Hegarty, M. (1996). *The process of understanding mathematical problems.* In R. J. Sternberg & T. Ben-Zeev (Eds.), *The nature of mathematical thinking.* NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Polya, G. (1957). *How to solve it: A new aspect of mathematical method.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Schroeder, T.L., & Lester, F. K. (1989). Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving . In P.R. Trafton [Ed], *New Directions for Elementary School Mathematics* (pp.31-42), 1989 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Starkey, P. & Gelman, R. (1982). The development of addition and subtraction abilities prior to formal schooling in arithmetic. In T.P. Carpenter, J.M. Moser, & T.A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: a cognitive perspective.* Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.). *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). New York: Academic Press.

Vygotsky, L. S. (1962). *Thought and language.* Cambridge, MA: MIT Press.

附錄

預 試 任 務 單

1.) 17+13	2.) 25+37	3.) 20−12	4.) 35−17
5.) 2×3	6.) 5×4	7.) 6÷2	8.) 12÷3

正 試 任 務 單

1.) 59 + 68	2.) 113－28	3.) 9 × 8	4.) 43 ÷ 5
(一) 小亮今天很幸運抽中 39 元禮卷，他到金玉堂想買 85 元的妖怪手錶，那麼他應該再付多少現金呢？			
(二) 姐姐拍球拍了 122 下，妹妹比姐姐少拍了 39 下，妹妹拍了幾下？			
(三) 一個大圓圈可換 3 個中圓圈，2 個中圓圈可換 3 個小圓圈，請問 8 個大圓圈可換幾個小圓圈？			

比較題型類似題目

1.)小明有 230 元，小花比小明少 30 元，小花有幾元？	2.)小明有 230 元，小明比小花少 30 元，小花有幾元？
3.)小明有 230 元，小花比小明多 30 元，小花有幾元？	4.)小明有 230 元，小明比小花多 30 元，小花有幾元？

三者比較的類似題目

1.)小夫有 232 元，胖虎比小夫多 37 元，大雄又比胖虎少 53 元，請問胖虎和大雄各有幾元？
2.)中川比麗子高 18 公分，麗子又比兩津高 23 公分，請問中川和兩津誰比較高，高幾公分？