

ISSN 2312-7716  
DOI 10.6610/TJMT

第 40 卷第 1 期  
二〇一九年四月  
VOL. 40 NO. 1  
April 2019

# 臺灣數學教師

Taiwan Journal of Mathematics Teachers



國立臺灣師範大學數學系  
Department of Mathematics,  
National Taiwan Normal University



台灣數學教育學會  
Taiwan Association  
for Mathematics Education

發行單位 | 國立臺灣師範大學數學系  
台灣數學教育學會

編輯委員會

主編	林原宏	國立臺中教育大學數學教育學系
副主編	林碧珍	國立清華大學數理教育研究所
	李源順	臺北市立大學數學系
編輯委員	林素微	國立臺南大學教育學系
(依姓氏筆劃排序)	徐偉民	國立屏東大學教育學系
	秦爾聰	國立彰化師範大學科學教育研究所
	張淑怡	國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系
	張煥泉	苗栗縣頭份鎮信德國民小學
	陳嘉皇	國立臺中教育大學數學教育學系
	楊凱琳	國立臺灣師範大學數學系
	劉建成	桃園市平鎮區平鎮國民中學
	劉祥通	國立嘉義大學數理教育研究所
	鄭章華	國家教育研究院
	鍾靜	國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系
國際編輯委員	林承瑤	美國南伊利諾大學課程與教學學系

地址	臺北市汀州路四段 88 號國立臺灣師範大學數學系 《臺灣數學教師》
電話	886-2-7734-6576
傳真	886-2-2933-2342
電子郵件	tjmtedit@gmail.com
網址	<a href="http://tame.tw/news/news.php?class=204">http://tame.tw/news/news.php?class=204</a>

附 啟

1. 本期刊自 2014 年 35 卷起每年出版二期。
2. 本期刊原名《台灣數學教師(電子)期刊》，自 2014 年 35 卷第 2 期起改名為《臺灣數學教師》。
3. 本期刊電子郵件由自 2015 年 36 卷第 1 期起改為 tjmtedit@gmail.com。

版權所有，轉載刊登本刊文章需先獲得本刊同意，翻印必究

## 主編的話

---

在 2019 年的上半年，本期刊論文出版已邁入第 40 卷第 1 期。本期刊由國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會共同發行，收錄有關數學教學、學習與評量等實務論文。自本年度起，本期刊的投審稿作業以 iPress 華藝學術投稿平台來進行。歡迎在數學教育的實務有創見，輔以學理支持和實踐發現的研究投稿本期刊，期能落實數學教育的創新與實踐，俾供數學教師參考。近年來本期刊的論文，受到數學教師和研究者重視並參考，誠摯邀請大家一起來耕耘這塊數學教育研究與實務的連結與傳承。

本期論文共有三篇，第一篇是鄭雅惠、劉祥通所撰寫的〈小一生在超齡問題上的解題表現：個案研究例〉，這篇論文探討一對雙胞胎姊妹，雖然是一年級學童，能以具體物和表徵解題等想法解決超齡問題，且其後設認知與監控表現佳，這篇論文可供數學資優教育研究參考。第二篇是吳宛柔、楊凱琳所發表的〈奠基進教室活動設計與成效評估：縮放繪〉，此篇論文是以八年級學生為對象，以 ARCS 架構來設計「縮放繪」的奠基進教室活動，研究發現可深化學生數學概念並提升學習興趣，這篇論文深具數學奠基進教室的實證參考價值。第三篇是侯雪卿所撰寫的〈以奠基進教室為取向的數學素養教學設計與實施：以國小柱體和錐體為例〉，作者以國小柱體與錐體的奠基進教室活動案例，在五個子活動中，可發現學生在幾何學習興趣、態度和認知等方面，歷經了有感的學習。同樣地，這篇論文也具體提供數學奠基進教室實施案例。

本期刊能順利出版完成，首先要感謝所有審查委員用心地撥冗審查論文，讓論文更臻完善。同時也非常感謝兩位副主編和編輯委員會委員的奉獻付出，以及編輯助理的辛勞。最後，尚祈各位先進繼續給予本期刊建議和指導，您的支持與鼓勵能讓本期刊不斷精進。

《臺灣數學教師》主編

林原宏 謹誌



# 臺灣數學教師

第 40 卷 第 1 期

2005 年 3 月創刊

2019 年 4 月出刊

---

## 目錄

- 小一生在超齡問題上的解題表現：個案研究例 1  
／鄭雅惠、劉祥通
- 奠基進教室活動設計與成效評估：縮放繪 32  
／吳宛柔、楊凱琳
- 以奠基進教室為取向的數學素養教學設計與實施：以國小柱體  
和錐體為例 50  
／侯雪卿

# Taiwan Journal of Mathematics Teachers

Vol. 40 No. 1

First Issue: March 2005

Current Issue: April 2019

---

## CONTENTS

- A Case Study of First Graders for Their Mathematical Problem Solving Performance on the Overage Problems 1  
/Ya-Hui Cheng、Shiang-Tung Liu
- Design and Assessment of Mathematical Grounding In-Class Activities : Resizing Drawing 32  
/Wan-Rou Wu、Kai-Lin Yang
- Design and Implementation of MGA-In-Class to the Development of Mathematical Literacy : The Case of Cylinder and Cone in Elementary School 50  
/Hsueh-Ching Hou

鄭雅惠、劉祥通（2019）。  
小一生在超齡問題上的解題表現：個案研究。  
臺灣數學教師，40（1），1-31  
doi: 10.6610/TJMT.201904\_40(1).0001

## 小一生在超齡問題上的解題表現：個案研究

鄭雅惠 劉祥通

國立嘉義大學數理教育研究所

本研究旨在探討個案學生的數學解題表現，作為往後適性教學或差異化教學之依據。以立意取樣方式，邀請某國小一年級一對異卵雙胞胎姊妹參與研究，作為本研究之研究參與者；為了充分了解二位個案的先備數學知識，給予個別的進度與處方，研究者將透過個案在任務單上的解答、畫圖，以及手指的運作，加上晤談中的回答進行分析。因研究者在教學中發現，個案的數學能力比同齡學生成熟，因此採用加減法以及乘除法概念域中較難題型作為主要測試的依據；並設計數與計算領域中非例行性的任務單，以考驗個案學生的解題能力。結果顯示，兩位個案學生位值集聚的概念成熟，合成分解的概念清晰，對於任務單中的超齡問題，她們大部分採用具體物，表徵解題想法，而在部分整體基模的發展，妹妹比姊姊周全。二位個案在幫助閱讀題目的情況下，解決問題的表現相當好，且後設認知及監控的能力在整個解題過程中展露無遺。最後研究者總結二位個案的解題表現，並觀察她們遭遇到的困境，在研究者的最小介入後，他們能聚焦於題意，進而解題成功，並有好的學習遷移。

**關鍵詞：**超齡問題、解題表現、數概念、閱讀理解、優等生

## 壹、緒論

### 一、研究動機與背景

相信家長們一定聽過這一句話：「不要讓孩子輸在起跑點」，很多家長對孩子的未來感到焦慮，深怕耽誤孩子的學習，因此「提早學習」成為一股無法抵擋的社會洪流；但如何定義起跑點呢？周淑惠（1995）在兒童數學新論中強調，兒童絕不是一個等待填充的空白接受器；大家應該都同意，每個孩子的起跑點都不同，那麼孩子的起跑點到底在哪裡？又該往哪邊跑呢？研究者認為要讓孩子先跑，必須先了解孩子的起跑點，在「近側發展區（zone of proximal development，簡稱 ZPD）」的範疇內作努力，才不至於揠苗助長。Vygotsky（1962）認為教學創造學習歷程，進而帶動發展歷程，在學習歷程中，不斷引發 ZPD，藉由搭鷹架來幫助學生學習，引導學生朝向更高層次的功能發展，這樣的觀點在教育上確實有其正面意義。

先了解孩子的能力發展以後，再來培養孩子的數學概念！研究者認為提早學習並不是盲目的填鴨，必須注意到兒童的發展層次，了解孩子的先備知識，結合生活經驗，創造有意義的學習，這才是我們要走的方向。許多研究證實，學齡前幼兒推理與解決數學問題的能力超乎一般人所認定，周淑惠（1995）強調，在 Carpenter（1985）與 Fuson（1992）的研究發現：孩童在幼兒園階段就能解加、減法甚至乘、除法的情境問題；甯自強（1998）在研究個案涂景翰的數概念中，求解「 $3 \times 3 = ?$ 」，涂景瀚當時正處於幼兒園階段，而乘法求積數的問題是二、三年級的學習目標，涂景翰以手指表徵的方法解題成功，在此足以證明適當的引導下學童也能求解超齡的問題，這種超齡的表現，正是本研究期望在個案身上看到的。

研究參與者是社區裡的一對異卵雙胞胎姊妹，剛升上國小一年級，正處於數量概念形成的重要階段，但她們卻已經能在購物時快速地利用心算（100 元以內）準確地計算出老闆應該找她多少錢，並且看得懂加、減、乘、除符號的意思，讓人感到十分驚訝；她們的家長表示她們平常喜歡觀看巧虎、七田真等這一類的幼兒教學影片，或許是在潛移默化中獲得了一些數學能力，此外，並沒有特別的教導二姊妹。小一上學期，兩位來到我的家教班，她們表示學校上的數學課太簡單，沒有任何挑戰性而覺得上課太無聊。因此研究者認為她們的數學能力比同齡學生有超前的現象，於是激起了研究者探究她們數學能力的興趣以及挑戰她們更高階數學概念的動力。



## 二、研究目的

本研究主要目的在於看待個案學生面對不熟悉的超齡問題時的解題表現，藉以了解個案學生的數學能力，作為適性教學的依據，並提供數學教育的參考。若以個案目前所處的數學發展層次作為參考點，研究者欲探討的是她們在更高階的數學概念，例如，二階進退位加減法、基礎乘除法等等。

本研究除了計算題型以外，特別挑選蔣治邦、鍾思嘉（1991）在加減法概念研究中所發現的最難題型－「合併型部分量未知」和「比較型比較量未知」；以及 Vergnaud（1983）在乘法概念域中最難的題型－「多重比例型」等三種文字題型，提供情境模式進行測試，主要挑戰個案解題的能力；藉由她們自發性的解題策略，看待她們的數學表徵以及在晤談中的回答，進而分析判斷她們在數學概念上的發展情形，是否達到概念理解與意義學習的程度。

本研究觀察她們在面對這些不熟悉的超齡問題時所能展現的數學能力，也特別關注二位面對超齡問題，所表現的相同與差異，以及遭逢困境時在研究者的最小介入後所呈現的解題表現，是否達到遷移與類化的現象。根據上述的研究目的，提出下列待答問題：（一）探究個案在計算題型，二階進退位加減法、基礎乘除法上的解題表現為何；（二）探究個案在文字題型，「合併型部分量未知」、「比較型比較量未知」、「多重比例型」上的解題表現為何。

## 貳、文獻探討

文獻探討分為二個部分，數學概念及數學解題，茲分述如下：

### 一、數學概念

數學概念學習的本質特徵就是形成「概念域」和「概念系」，概念域的涵義是指某個概念的一些等價定義，在個體腦中形成的知識網絡（喻平、馬再鳴，2002）。

Vergnaud（1983）主張：「數學概念的意義是從多種情境中提取出來的。但是要分析每一種情境又不能只用一種概念，要用到好幾種概念；所以概念域有大量的情境，對情境的分析和處理則需要好幾種交織在一起的概念」。

學前兒童使用手指表徵看不見的東西，也有些大聲計數（Starkey & Gelman, 1982）；在沒有實物可供操作，要兒童用想像來數數，就比較困難（周淑惠，1995）。研究也發

現學前兒童能解決加法、減法，甚至乘法與除法的情境問題（Carpenter, Carey, & Kouba, 1990）；也有研究發現他她們能解類似分配性的除法問題（Davis & Pepper, 1992）。研究者認為以上研究都證實學前兒童能用非正式的方法，處理超過她們年齡的問題。以下將數概念再細分成加減法概念及乘除法概念說明之。

### (一)加減法概念

加減法概念一向被視為數學概念的基礎（蔣治邦、鍾思嘉，1991）。在相關的研究上發現，Fuson 以存在真實世界（real word）的加減法情境作為分析的焦點，最常被國內外學者所採用（Fuson, 1992，引自黃美盼、林原宏、易正明，2007，頁 32）。分析如下：

#### 1. 改變（change）

以  $A \pm B = C$  為基模，再依未知數位置不同進行細分。例如（起始量未知）：小明有一些糖，然後他給小華 5 顆，現在小明有 3 顆糖，問小明原來有幾顆糖？

#### 2. 合併（combine）

探討一個集合 A 和它的子集合 B、C 之間的關係。例如（部分量未知）：小明和小華共有 8 顆糖，小明有 3 顆糖，請問小華有幾顆糖？

#### 3. 比較（compare）

探討二個互斥集合 A 和 B 之間的關係。例如（參考量未知）：小明有 8 顆糖，小明比小華多 5 顆糖，問小華有幾顆糖？

#### 4. 等化（equalize）

欲使兩集合最終量達到相等，當  $A > B$ ，而 A 為未知量，稱為添加型（equalize add to）。反之，B 為未知量，稱為取走型（equalize take away）。舉例（添加型）：小明有 3 顆糖，他再買 5 顆糖後，就會和小華有一樣多，問小華有幾顆糖？

蔣治邦、鍾思嘉（1991）在一到三年級學童的加減法概念研究中發現，合併型部分量未知（如下舉例 1）及比較型比較量未知（如下舉例 2、3）對中低年級學童而言是比較困難的題型。

(1) 小明和小華共有 8 顆糖，小明有 3 顆糖，問小華有幾顆糖？

(2) 小明有 3 顆糖，小華比小明多 5 顆糖，問小華有幾顆糖？

(3) 小明有 8 顆糖，小華比小明少 5 顆糖，問小華有幾顆糖？

## (二)乘除法概念

根據 Fischbein、Deri、Nello 與 Marino 對乘法概念的研究，認為等量累加模式的乘法最符合人們最初、最自然的心理發展模式，也就是認為乘法的概念是由加法延伸而來，加減法概念是乘除法概念的前置概念（Fischbein, Deri, Nello, & Marino, 1985，引自陳小玲，2006，頁 11）。甯自強（1993）在乘除運思的啟蒙中也強調，如果數概念的產生是為了解決「單位化」、「量」的問題，加減法運思則源自解決「量」的分解、合成與比較的問題，那麼乘除法運思可能歸因於解決「單位數」與「單位量」間的變換問題。

就乘除法結構的概念域而言，每種運算方法均對應著特有的情境模式，而 Vergnaud（1983）將這些情境模式分為：

### 1. 量數同構型（isomorphism of measures）

探討二個量數空間的直接比例關係，例如：每人有 6 顆巧克力球，7 人共有幾顆巧克力球？

### 2. 叉積型（product of measures）

叉積是兩集合的積集合，由二個量數空間的叉積合成，而產生第三個量數(measures)空間。例如：張叔叔有一塊長方形的稻田，長為 20 公尺、寬為 4 公尺，請問這塊稻田面積是多少？

### 3. 多重比例型（multiple proportion）

探討三個量數的兌換關係。例如：家裡有 5 個人，每人每天喝 2 公升的水，請問全家 4 天總共喝了多少公升的水？

Vergnaud（1983）也主張，此三種模式的難度是循序漸進，其中以多重比例型屬於最難的題型，我們查閱其他相關的研究文獻也發現，多重比例運用三個量數空間兌換的關係，學生較不容易理解（鐘世帆，2005；林碧珍，1991）。

## 二、數學解題

以下將以解決問題、數學解題及解題表現，作分段說明。

### (一)解決問題

何謂解決問題？美國數學督學學會(National Council of Supervisors of Mathematics，簡稱[NCSM])的立場文獻(position paper)主張，解題是一種歷程，是利用先備知識來解決不熟悉的新問題的過程(Carl, 1989)。Barba(1990)強調解題是一種多面向的構念(a multifaceted construct)，它與個人的思考模式、學習方法有關。而黃茂在、陳文典(2004)概括性的界定：「問題解決」是「人們運用既有的知識、技能、經驗，藉由各種思維及行動來處理問題，使情況能達到預期的狀態，此種心智活動的歷程」。

### (二)數學解題

遠在五零年代，Polya(1957)就已提出數學解題的基本模型，1. 了解題意(Understanding the problem)、2. 擬訂解題計畫(Devising a plan)、3. 執行解題計畫(Carrying out the plan)、4. 回顧(looking back)。他認為解題首先要察覺到問題情境，了解情境中所給予的已知條件及所求，其次擬定解題策略，找到已知與所求之間的關係，進行解題，最後所驗證的答案是否合理，或在真實世界中(real world)是否存在。

而到八零年代，Schroeder 與 Lester(1989)又特別提到數學世界中解題的基模：在真實世界中呈現問題情境，將問題透過轉化列式的過程讓問題數學化，經過解題與運算得到初步的結果，最後回顧反思並驗證答案在真實生活中的合理性；其過程中最重要的是學童轉化(數學化)的能力及逆向的擬題表現，這個部分為數學解題的關鍵，最能判斷出學童理解的情形。

接著 Cambell 與 Bamberger(1990)主張，數學解題是一種組合，用來溝通數學想法；數學解題是一種情境，用來調查相互關係；數學解題更是一種觸媒，用來連接數學概念與技巧。我們從以上學者觀點發現其對數學解題之釋義有異曲同工之妙，均闡明數學解題源自於解決真實情境所面臨的問題，並指出解決問題絕不是教學的主要目的，而是透過解題過程啟發新的概念或技巧，並培養學生數學理解的能力。他們都認為解題成功的關鍵主要來自於「擬定一個可行的策略」，數學解題不等於數學解答，思考的過程要比答案的獲得更重要，數學的學習應該強調概念的理解，而不只是重複式的模仿(楊德清，2006)。

關於數學解題策略，林清山和張景媛(1993)的解釋為「面對數學問題時的想法與作法」；Kilpatrick(黃敏晃譯，1988)認為是「在解題的歷程中，對一個特殊問題擬定一個適當的計畫」；而 Lamon 主張「當兒童在面對問題時，腦中會自然且直覺的浮現解

決策策略」(引自劉哲源、劉祥通, 2008)。然從其他解題相關研究中發現, 解題策略是可以透過教導的, 當學生懂得越多策略他的解題能力也會越高, 而沒有一種最佳策略可以適合所有不同類型的問題, 兒童的認知發展程度與解題表現有密切關係(湯梅英、李琪明、何縉琪、段曉林, 2000)。

Mayer 與 Hegarty(1996)認為數學問題的型態有二:「例行性問題(routine problem)」與「非例行性問題(non-routine problem)」。「例行性問題」是指問題解決者已經知道解決這個問題的方法;「非例行性問題」是指解題者有了問題, 卻不能立刻知道如何解決。National Council of Teachers of Mathematics(簡稱 NCTM)於 2000 年再次提出「解題」是非常重要的課題, 尤其是解非例行性的問題(NCTM, 2000)。因此, 研究者認為「超齡問題」對年幼的解題者而言, 就是她們沒有遇過, 也沒有解過的一種非例行性問題。

### (三)解題表現

Cai 指出兒童自創的解題過程, 將植基於他們深層的直覺與自然思考的模式(Cai, 2005, 引自王志銘、劉祥通, 2007, 頁 9); 入學後再結合正式數學的知識, 發明更多方法來解決問題; 兒童利用舊經驗的解題方法, 是最自然的解題表現(甯自強, 1993), 若以甯自強(1998)所研究的個案涂景翰的數概念來說明幼兒的解題表現, 他的成功類型最主要都是利用「表徵」(representation)的方式進行解題, 例如: 在求積數的問題上, 涂景翰在解「 $3 \times 3 = ?$ 」時, 先兩手同時比出 2 個 3, 合成 6; 再比出 1 個 3, 合成 9; 順利解答成功。研究者認為, 他雖然是以手指表徵的方法, 再呈現「3」的量, 但是他確實能表徵出「倍數」的觀念, 也就是他能夠展現出 2 個 3, 又 1 個 3, 所以他已有以 3 為單位的倍數概念。

學生在還未學習過正式運算法則之前, 運用自己的先備經驗, 自創的解題策略, 我們稱之為自發性解題策略。有關自發性的解題表現, Carpenter、Fennema、Franke、Levi 與 Empson(1999)曾針對加減法提出增量(Incrementing)、以十和一組成(Combining Tens and Ones)及補償(Compensating)等三種型式。增量型有慢慢累加的概念; 以十和一組成型是十位數與個位數分別相加後再合成的方法; 而補償型則是將一數分解成能補足另一數達到滿十的狀態後再合成的方法。

另外針對乘除法 Carpenter 等人(1999)則提出(具體物)直接模擬(direct modeling strategies)、計數與加法(counting and adding strategies)及提用已知的事實(derived facts)等三種策略。直接建模就是將生活情境轉成數學情境的過程, 利用具體物或半具體物當

橋梁，進行數學解題；計數與加法包含了跳數的形式與連加的形式，學校常以背誦九九乘法表來幫助跳數的運用；而提用已知的事實則是孩童運用容易記憶的已知事實，比如 2 和 5 的倍數，結合計數或加法等策略，去衍生其他未知的事實。

研究者認為採用具體物直接模擬策略是初學乘除法問題時最常見的自發性解題策略，也是學童最自然的解題表現。孩童由直接建模開始到能提用已知的事實來解題，乘法概念發展僅有順序快慢之分，其解題策略發展並無固定的時間點，由涂景翰解乘法題目的案例來看，幼兒園階段的涂景翰在適當的引導下能解二年級乘法問題。同理，研究者也關切學童在經過適當的引導，低年級是不是也能解中年級的數學問題呢？

兒童使用自發性解題策略還可以幫助其數字感覺和估計能力的發展；自發性策略要求兒童考慮數字的大小，並以不同的方式分解數字，孩子通常一開始先添加較大的數字，再慢慢添加達到滿足為止，因此估計策略是自發性策略的自然延伸；經常使用自發性策略的兒童，能在不同的情境下反覆運用基本概念，加深其對基本概念的理解，此外，傾聽學童描述他們發明的算法，也提供教師了解孩子的洞察能力及發展的潛力。

#### (四)優等生或資優生的解題策略

廣義而言，資優生泛指兼具思考、創造力、推理與特殊才能的兒童（黃瑞煥、洪碧霞，1983）。許多研究均記載，資優生的自發性解題策略較一般生容易成功（李佩樺、劉祥通，2008；劉哲源、劉祥通，2008；蔡子雲、劉祥通，2007），而這些成功策略可能是慢慢形成的，也可能是在不斷嘗試失敗中突然產生的靈感（Polya, 1957）；研究者認為，探討自發性解題策略應包含正確思考與錯誤迷思，如此，不但可以幫助老師了解學生學習上的理解層次，更能清楚探究學生內在真實的解題歷程。

研究者認為資優生所展現的自發性解題策略，能透露出資優生特有的直覺與看透問題脈絡的能力。例如，Carpenter 等人（1999）針對特殊數字組合曾舉出這樣的例子，小獅子重 98 磅，牠再增加 56 磅時，會變成多重？算式為  $98 + 56 = ?$  學生的解題歷程為：假使我要讓 98 變成 100，我需要從 56 中拿 2 過來，所以就變成 100 加 54，學生利用補償（填補）的方法，以  $98 + 2 + 56 - 2$  得到 154。因此，研究者認為自發性策略是直接植基在概念的理解上，孩子們談論的是八和二組合成一個十，而不是背誦在同一列中退二進十的記憶性算則；自發性策略的運用，更能使學生避掉一些嚴重的計算錯誤，例如  $104 - 55 = ?$ ，學生可以繞過二次退位的困難，理解  $100 - 50 - 5 + 4$  的解題模式。

## 參、研究方法

本研究採用個案研究法進行資料蒐集與分析，並以立意取樣的方式，選取臺南市某國小一年級二位學童參與研究。研究中將蒐集個案在處理非例行性問題時的解題表現，蒐集其動態錄影、錄音、圖片、任務單等為原始資料，經過分析、評估、整理、歸納與比較，觀察個案學生解題的能力，檢驗其「數學概念」發展的狀況，進而探討個案在「數學解題能力」上可能發展的潛力。

因此本研究方法將以個案研究、研究工具、研究參與者、研究流程及資料來源與分析等五小段作如下詳細之說明。

### 一、個案研究

個案研究是質性研究的一種，是在自然情境下採用多種資料搜集方法，對某種現象進行整體性探究，透過與研究對象互動對其行為和意義建構獲得解釋性理解的一種活動（陳向明，2002）。本研究透過蒐集個案的解題表現，進行個案數概念的整體性探究，包括個案的加減概念與乘除概念的應用問題，也包括個案在解題失敗時，研究者給予最小提示後，對她們調適能力的探討。

質性研究本身並不是一個客觀現象的描述，它最常面臨實證主義者對其信效度的質疑，所以質性研究者開始發展出異於量化研究的信效度指標；本研究則是以三角校正及多重試驗的策略來確保研究結果的可靠性。

### 二、研究參與者

本研究邀請台南市某國小一年級一對異卵雙胞胎姊妹參與研究，兩姊妹在研究中分別化為個案 S（妹妹）和個案 L（姊姊）；兩位個案今年 7 足歲，來自同樣的家庭，有相同的學習環境與學習背景，均曾就讀公立幼兒園 3 年，學校沒有特別針對數學科目做任何額外的補強或教導。但是在學校她們對於數學學習表現出高度的意願，一年級上學期數學學業成績均表現優異，數學能力相當。

曾反映過學校數學課程過於簡單，沒有挑戰性；經研究者在教學中的觀察也發現，個案不但會解加減法情境問題，甚至可能已經具備乘除法的雛型概念。所以本研究將挑戰她們解非例行性的問題，而在正試與預試的任務單中所挑選的題型對她們而言均屬於非例行性的問題。本研究有此預期的準備，二位個案可能有大同小異的解題表現，因此，

本文作者特別著墨在她們表現共同之處，以及差異的地方。

### 三、研究工具

本研究最主要研究工具為：研究者本身及任務單。

#### (一)研究者

因為研究者擔任任務單的設計者、訪談者及實作評量的評鑑者，她要建構與詮釋她所觀察與訪談到的資料，所以個案研究的研究者可以說是最主要的研究工具。

研究者是某大學織品系畢業，雖與數學專業相距甚遠，但是因緣際會，20年的校外數學課輔經驗，讓研究者與數學教學結了不解之緣。為了幫助中小學生能獲得數學學習的信心與好成績，研究者如是主張：認識學習者的先備數學知識與學習能力，給予個別的進度與處方，是比較有效的教學方法。

基於：如果研究者沒有介入，不足以了解個案潛在的解題能力(Cobb & Steffe, 1983)。本研究因考慮小一學童認識的國字與詞彙不多會影響其閱讀理解的表現，老師將從旁協助閱讀，幫助其理解題意。雖然介入會影響研究的結果，但是研究結果也註明是從旁協助的成果。而在個案表達無法理解時，為了不使個案產生挫折感而對數學失去信心，研究者秉持「研究者即教學者 (researcher as teacher) (Cobb & Steffe, 1983)」的理由，以及Goldin的最小介入教學 (Goldin, 2000, 引自劉祥通、康淑娟, 2012, 頁26-27)，從教學者的角度去分析並了解學生的解題表現。當個案預期性行為沒有發生時，研究者給予最小化的建議，可以指引她們另一個思考的方向，引導她們籌畫解決的策略 (劉祥通、康淑娟, 2012)。例如，在預試中113-28，個案L強烈表達13無法減去28，此時研究者作最小提示的介入，提醒她「妳還有一百」，才讓她脫離困境，利用拆解法繼續完成挑戰，在此我們不可否認，有時候小提示卻是整個問題轉圓的大關鍵。

#### (二)任務單

雖然個案才剛開始接受正式數學課程的洗禮，處於「數與量」概念形成的起點，但因二位研究參與者的數學能力有超齡的現象，故本研究中跳過一位數的加減問題，從二位數開始，針對加減乘除相關的「數概念」領域，進行考驗與探究。

本研究任務單分成預試與正試兩種，為了檢驗解題時所需要的計算能力，在預試時先以計算題型測驗個案四則運算的基本能力；接著在正試中以非例行性的計算題型與文字題型測試個案的解題策略。如此以計算題模式作預試是有其必要性的，因為基本的計



算能力是正試時解決數學文字題的先備知識。

### 1. 預試任務單（如附錄）

預試任務單中以暖身題考驗個案的先備知識，以基礎題考驗學生的程序性知識、概念性知識以及解決問題的能力。依據暖身題、基礎題以及加、減、乘、除作為雙向細目，共設計 8 道題目。主要考驗個案在二位數加減法（例如  $25 + 37$ 、 $35 - 17$ ），及一位數乘除法（例如  $5 \times 4$ 、 $6 \div 2$ ）的計算能力，個案並未學習過標準演算法則，解題策略完全出自個案本身自發性的想法。在預試的解題過程中可以檢視出個案在位值分配、乘法累加及除法等分的概念上是否達到成熟的階段，而在數字合成與分解的操作上又是否達到熟練的程度。預試結果發現，個案在二位數不需進位與退位的加減法都能輕鬆作答，位值概念趨於成熟，而進退位時則需要以作圖表徵來加以輔助；在乘法計算中能理解  $2 \times 3$  代表 2 有 3 個，再利用基數連加的方法求解。雖然個案未學過加減法及乘法的直式運算，也不懂位值語言，但能說出 25 是 2 個 10，5 個 1；未背誦過九九乘法表，但已能理解乘法是累加倍數的概念。

### 2. 正試任務單（如附錄）

挑戰個案非例行性的計算題與文字題，計算題包括二階進退位加減法、乘法以及有餘數的除法，而文字題則採用蔣治邦、鍾思嘉（1991）在一到三年級學童的加減法概念研究中，所發現對低年級學童而言相對困難的題型－「合併型部分量未知」和「比較型比較量未知」兩種，以及 Vergnaud（1983）在乘除法概念域中最困難的題型－「多重比例型」為主要測試題型。

本研究旨在探討個案學生解題的能力，並非探討學習成就，故文字題部分僅以上述三種題型作為命題依據，設計適合一年級生活經驗的三道文字題，考驗個案對文字題意理解，並關心她們如何解題？研究者以個案在最難題型中的解題表現，探究其數概念的發展的程度。例如，個案在「合併型部分量未知」表現熟練，則研究者合理推論她們在較簡單的「合併型整體量未知」可能已經理解；但若呈現無法理解的情形，研究者將會在晤談中加入較簡單的「合併型整體量未知」以及交換未知數的位置等方式，來回交叉問答，藉此探究個案能理解到甚麼樣的程度。

## 四、研究流程

本研究在 105 學年度寒假期間，利用某週三下午進行一次 30 分鐘的計算題預試，

會後馬上進行每人各 10 分鐘的晤談。隔週三下午，二人再同時進行一次正試測驗，大約 50 分鐘，施測過程若對國字或詞彙不理解者，個案可以馬上發問。研究者也告知她們解題的方法沒有任何限制。

在正試後接續的週三下午，兩人分別再進行大約一小時的晤談，針對概念錯誤或解題失敗的部分，進行深入的訪談。若有停滯不前或表達放棄時，研究者將以最小提示介入教學作為引導；在教學後為了觀察個案是否獲得學習保留或遷移的現象，隔週將再針對介入教學的題型，以類似題（如附錄）考驗學習是否遷移，也為了配合二位個案與家長的時間，研究者在三個月後，針對介入教學的題型，設計更難的類似題型（如附錄）進行再次試驗。

## 五、資料來源與分析

本研究以任務單上的解題表現及晤談中的回答作為最主要的資料來源，本段茲以資料蒐集、資料分析來加以清楚闡明。

### (一)資料蒐集

本研究主要利用任務單上的解題紀錄、圖畫表徵、晤談錄影等來蒐集相關資料，以佐證說明個案在數概念的理解狀況，期待個案透過自發性的解題表現，將個人的解題想法完整呈現。研究者將蒐集到的資料加以整理、分析、歸納並綜合彙整，以佐證說明個案在數概念的理解狀況。例如，預試中挑戰她們「 $25 + 37 = ?$ 」，個案運用手指表徵以及畫錢幣的圖案，甚至可能以操作古式積木等方法進行表徵幫助解題，在訪談中她們又能清楚的表達解題的歷程為：「 $20 + 30 = 50$ ，然後再將 5 扣掉 3 讓 7 變成 10，最後得到 62」。如上述中的資料（任務單的圖案、彎曲手指的動作與受訪談的回應）即為本研究主要的資料來源。

### (二)資料分析

本研究將蒐集到的相關資料進行分析，研究結果的歸類沒有特定的依據，主要靠個案在任務單的解答、圖形、與接受訪談的回應，資料分析的三角校正，以確保效度，以重複情節（多次試驗）來確保研究的信度。

#### 1. 信度方面

本研究欲探究個案的數學能力，故研究者以重複情節來檢驗資料的一致性與可靠性。

例如，在個案因讀不懂題意而解題失敗時，研究者可以以更改比較量與參考量的順序，更換未知數的位置等，作反覆多次的提問與測試，得到個案在此題型上各個面向的認知訊息，最後收集並彙整相關資料進行分析，判斷個案對此題型的理解程度。另外在研究者有介入教學的題型中，日後請她們再作類似題型來檢驗是否達到學習的遷移，也能增加其信度。

## 2. 效度方面

研究者長期現場觀察，蒐集相關資訊（如：任務單、表徵的圖畫、手指表現的照片以及訪談中的錄音和錄影等），對研究情境作更深度的描述。再根據資料的來源，採取交互檢核（cross-checked）以證實這些資料的正確性。例如，預試中挑戰「 $5 \times 4 = ?$ 」時，她比出 5 根手指頭，一一點數 4 回。在晤談中她清楚表達  $5 \times 4$  就是 5 有 4 個，然後全部加起來。請她畫圖表徵時，她畫了 5 個圈，再畫 5 個圈，總共畫了 4 次。如此多方資料的檢核與分析（三角校正）使資料更具有說服力，研究者因此可以宣稱該生已有乘法性思維（multiplicative thinking）（Clark, & Kamii, 1996），此乃資料來源的三角校正。另外，有些資料的詮釋，尤其是詮釋個案所使用的解題策略，也徵詢共同研究者的看法，作人員的三角校正來增加其效度。

最後說明紀錄訪談原案時的編碼順序，以四碼阿拉伯數字為主，前二碼為原案序號，如：01 為原案一；後兩碼為訪談序號，如：0102 為原案一訪談中的第二句答話；最後加上一個英文字母為個案的代號，如：0102S 即為個案 S 在原案一的訪談紀錄中第二句答話。以此類推，完整呈現訪談重要訊息。

## 肆、研究結果與討論

本研究結果與討論將以計算題型、文字題型兩類來加以分段陳述。礙於篇幅的關係，本文僅能呈現原案的重要部分。

### 一、計算題型的解題表現

計算題型主要測試個案在二階進位加法、退位減法、乘法及有餘數的除法等四種題型的解題表現。兩位個案在二階進位加法上的表現成熟，但在二階退位減法、乘法及除法就必須輔以畫圖或具體物的表徵方式，來幫助她們將抽象的數字符號具體化。

## (一)運用以十和一組成的策略解進位加法

題目為： $59 + 68 = ?$ ，因為個案在位值概念、合成分解的概念發展成熟，所以對於二階進位的加法就顯得駕輕就熟。兩位的解題表現雖然不同，但均與 Carpenter 等人（1999）提出的以十和一組成（Combining Tens and Ones）的策略有異曲同工之妙，如下原案一、二。

## 原案一：以十和一組成型

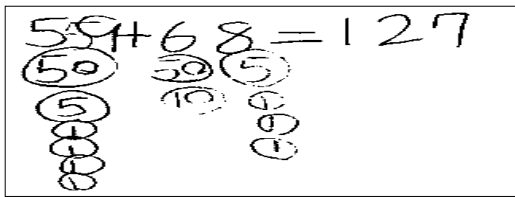


圖 4-1 原案一 個案 S 進位加法的手稿

## 個案 S 的訪談紀錄

0104S：（手指著原稿）就 50 加 50 等於 100，再加 10 等於 110，5 塊加 5 塊是 10 塊，所以 110，120，121，122，123，124，125，126，127（點數錢幣 ①）。

0105T：你一定要畫圖才會算嗎？

0106S：不一定啊。

0108S：就 50 跟 60 先加起來，變成 110，然後再加 9 再加 8，先把 110 念出來，就 119，然後 120、121、122、123、124、125、126、127、所以總共 127（點折 8 根手指）。

0109T：一個一個數好像不是很厲害。

0110S：那我也可以用 50 加 60 等於 110，再把 9 的 5 跟 8 的 5 合起來，9 的 4 跟 8 的 3 合起來，就等於 17，所以 110 加 17 就 127。

0111T：嗯，這樣好像有比較厲害喔，還有

## 原案二：以十和一組成型

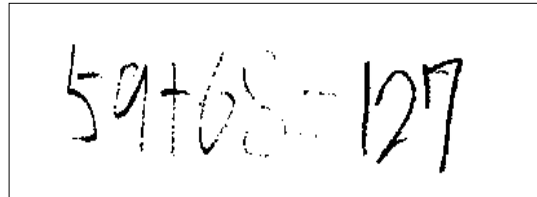


圖 4-2 原案二 個案 L 進位加法的手稿

## 個案 L 的訪談紀錄

0203T：你怎麼算出 127 的？

0204L：50 加 60 等於 110，9 加 8 是 17，然後 110 加 17 是 127。

0205T：你會其他的算法嗎？

0206L：甚麼算法？我知道十塊錢要跟十塊錢合起來，一塊錢要跟一塊錢合起來。

0207T：其他算法，就是不要用現在的方法，例如用補的阿，或是其他的，都可以，妳想想看。

0208L：用補的，就是把 68 給 59 一塊的那種對不對，讓 59 變成 60，然後 68 變 67，然後 60 加 60 就 120，最後再把 7 算起來，就是 127。

0209T：你怎麼知道的？

0210S：媽媽有教我們撿紅點找好朋友（撲

嗎？

0112S：有，110 加 17 等於 127 就好了啊。

克牌)，就是 1 的好朋友是 9，2 的好朋友是 8，3 的好朋友是 7..... 這種，所以我就知道了。

### <分析>

從她們的表現中發現，兩位個案能分辨十位數與個位數的不同，又能了解滿十進一的概念；因此在加法中，將一階進位類化到二階進位的學習遷移是成功的。

個案 S 剛開始在任務單上使用畫錢幣的方法解題成功，在訪談中（0108S，0110S）可知，她以自發性的解題策略，先處理十位數，後處理個位數，也說明她的位值概念已發展完備。

而個案 L 是以心算的方式呈現，在心中點數後直接寫上 127，她在任務單上並沒有明顯的計算過程，但訪談中她表明是以「以十和一組成」的策略在心中進行解題的。

### (二)提示後能利用數字拆解的方法處理二階退位減法

題目為： $113 - 28 = ?$ ，測試時兩位個案均表達 13 減 28 是不夠的，經過研究者的提示，「你還有 100 阿」，才開始以畫錢幣的方式透過數字拆解的方法解題，如下原案三、四。

原案三、四：畫圖表徵策略

個案聯結日常購物錢幣兌換的經驗，運用畫錢幣表徵的方法，處理二階退位減法的問題。

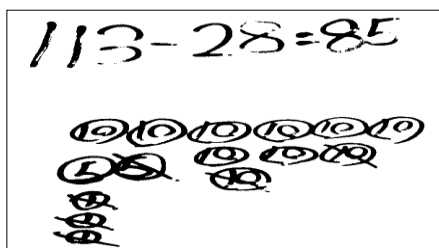


圖 4-3 原案三 個案 S 退位減法的手稿

#### 個案 S 的訪談紀錄

0303T：你怎麼算的說說看？

0304S：就 100 可以換成 10 個 ⑩，一個 ⑩ 可以換成 2 個 ⑤，然後

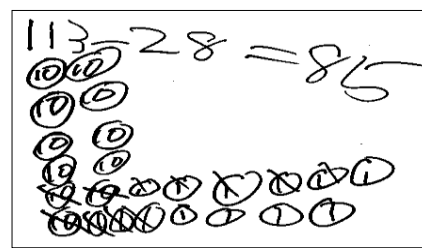


圖 4-4 原案四 個案 L 退位減法的手稿

#### 個案 L 的訪談紀錄

0405T：你是怎麼算的？

0406L：就 10 個 ⑩ 是 100，再 13，一個 ⑩ 換成 10 個 ①，這樣劃掉 28

劃掉 28，就是 85。

就剩下 85。

<分析>

因為兩位個案從未接觸過二階退位的題目，並未具備二階段退位減法的基模，所以她們顯得坐立不安。經過研究者提醒她們還有一百，才讓她們聯想起生活中兌換錢幣的經驗；以畫圖表徵的方式進行數字拆解，也就是把 100 換成 10 個 ⑩ 以及把 ⑩ 換成 10 個 ① 的方法進行位值轉換；最後讓十位數與個位數都能達到足夠的數目，以便進行扣除的動作。

(三)運用累加策略解決乘法的倍增問題

題目為： $9 \times 8 = ?$ ，個案 L 使用手指表徵，經一點數後獲得答案，但個案 S 已跳脫點數的階段，直接運用加法策略進行解題，如以下原案五、六。

原案五：樹狀累加策略

個案 S 在紙上寫出 8 個 9，利用兩兩相加的方法得到答案 72。

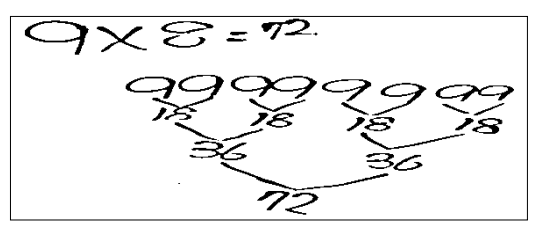


圖 4-5 原案五 個案 S 乘法題型的手稿

個案 S 的訪談紀錄

0504S：就是 9 有 8 個，兩個 9 是 18，然後 18、18 就 36，36、36 就 72。

0507T：那妳怎麼會想到要這樣兩個兩個加起來呢？

0508S：比較快阿。

原案六：手指表徵（從頭數）策略

個案 L 比出 9 根手指頭，來回點數手指 8 趟，最後在任務單上寫著 81。



圖 4-6 原案六 個案 L 手指表徵策略

個案 L 的訪談紀錄

0601T：你知道  $9 \times 8$  是甚麼意思嗎？

0602L：知道阿，就是 9 有 8 個。

0605T：你可以再重算一次嗎？

0606L：嗯，1、2、3、.....72。

<分析>

兩位個案均未背誦過九九乘法表，研究者無法期望她們以倍數跳數的模式出現，但在過程中發現她們已具備倍數的基數累加概念（0504S，0602L），因為她們能明確的表達出  $9 \times 8$  是代表 8 個 9 的連加。另外，個案 S 在任務單上利用「樹狀累加策略」，快速達到連加的目的，證明她已跳脫一點數的階段，這個策略與 Carpenter 等人(1999)所提出的「計數與加法策略」完全相同。

#### (四)採用具體物直接模擬的方法，以解決有餘數的除法問題

題目為： $43 \div 5 = ?$ ，兩位個案均以直接建模策略解題，她們運用教具古氏積木 43 顆，一一分配到桌面的 5 個角落，發現不能平分時，開始產生焦躁不安的神情，表現出舉棋難定的樣子。研究者適時的提醒她們，「剩下的要還給老師喔！」，她們才又安心的把剩下的積木分配完成，將剩下的 3 個積木拿給老師。但在任務單上的表現是空白的，如下原案七、八。

原案七、八：具體物直接模擬策略

個案 S 將古氏積木一一分配到桌面的 5 個角落，最後剩下 3 個。而個案 L 是先畫出 5 個大圈後，再以不定量的方式分配積木，最後達到 5 個圈圈內等量的狀態。



圖 4-7 原案七 個案 S 等分除法 - 用具體物直接模擬策略

##### 個案 S 的訪談紀錄

0702S：43  $\div$  5 就是 43 分給 5 個人。

0704S：(看著桌面) 就是一個人拿 8 個，3 個給老師。



圖 4-8 原案八 個案 L 等分除法 - 用具體物直接模擬策略

##### 個案 L 的訪談紀錄

0805T：妳怎麼知道這個(指向  $\div$ ) 是除？

0806L：哆啦 A 夢有說過啊。

0808L：就是分給人，43  $\div$  5 就是 43 個分給 5 個人。

0810L：(看著桌面) 就是一個人拿到 8 個，剩下 3 個。

## &lt;分析&gt;

具體建模策略乃人類接觸乘除法時，最早使用的策略，兩位個案均能熟練的運用此策略並達到解題的目的，故研究者認為兩位個案應該已具備除法的分配基模。另外，個案 L 以不定量的方式（既不是逐一分配，也不是先估計量的多寡）進行分配工作，最後卻又達到 5 個圈圈內都等量，展現她相當成熟的監控能力。

## 二、文字題型的解題表現

文字題型以「合併型部分量未知」、「比較型比較量未知」、「多重比例型」等三種題型進行測試。

## (一)再添加策略的運用 — 合併型部分量未知

題目為：小亮今天很幸運抽中 39 元禮卷，他到金玉堂想買 85 元的妖怪手錶，那麼他應該再付多少現金呢？

兩位個案均從再添加的方向進行思考，領悟「部分 — 全體」的概念，分別找出解題的策略，如以下原案九、十。

## 原案九：運用部分全體基模

個案 S 先以再添加的模式思考「部分 — 整體」的關係，最後運用數學模式進行解題。

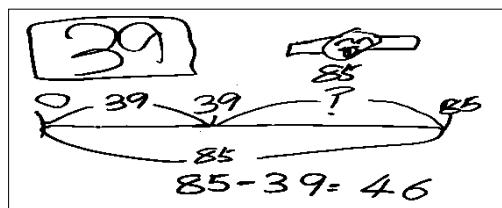


圖 4-9 原案九 個案 S 合併型的題意表徵

## 個案 S 的訪談紀錄

0902S：他就只抽中 39，然後 39 不夠付 85，所以我就用  $85 - 39$ ，她還要付 46 元。因為他只有 39，要一直加到 85 才能付錢。

## 原案十：利用「往上添加」的策略

個案 L 一直思索著 39 要再加入多少才能到達 85 呢？

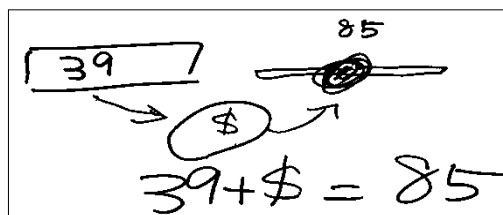


圖 4-10 原案十 個案 L 合併型的題意表徵

## 個案 L 的訪談紀錄

1002L：就  $39 + 1 = 40$ ，加 40 等於 80，然後再 5，所以是 46。  
1003T：那算式要怎麼寫？  
1004L：就是  $1 + 40 + 5 = 46$



0903T：妳的意思是 39 要加多少才能到達 85 的意思嗎？


0904S：嗯，因為 39 還不夠，全部要 85 才夠付錢。



0907T：好，那妳畫的這個圖是甚麼意思？

0908S：就是 39 的禮卷，要加不知道的錢才能買 85 元的妖怪手錶。

0911T：好，那妳 46 是怎麼算出來的。


0912S：(她以右手代表十位，左手代表個位)

 就 85 減 30 是 50 再 5

，這個減 9  就

剩 1 (指向代表十位的右手小

指)，這樣就 40 再 5 再 1 就 46

 (右小指彎一半代表 1)。

### <分析>

兩位個案在「合併型部分量未知」的解題策略上，均採用往上添加的策略而得到解題成功。個案 S 在 (0902S) 的回答中表達了她是以添加策略為基模進行解題，了解數學模式  $A + (B) = C$  的題型能以  $(B) = C - A$  的模式來找到答案。在 (0904S) 的回答中更發現，個案 S 已明白「部分 - 整體」的概念。

接著個案 S 展示其利用手指表徵的解題過程，過程中充分展現出其後設監控的能力，研究者研判個案 S 已具備二位數退位減法的概念，且其二位數退位減法的基模建構與加減法的直式計算模式已相當接近。

另外從個案 L 的題意表徵圖 (圖 4-10) 中也發現，她憑藉著合成分解策略 (先滿 40，再滿 80，又加 5)，也展現後設認知能力，因此解題成功，即使是 L 過去沒有學過的超齡問題，她仍然能以自發性的再添加策略進行解題，而她所採用的再添加策略，正好與 Carpenter 等人 (1999) 在加減法自發性解題策略的研究中，所提出的增量型 (Incrementing) 是完全一樣的。

### (二)閱讀理解能力影響解題表現 — 比較型比較量未知

題目為：姐姐拍球拍了 122 下，妹妹比姐姐少拍了 39 下，妹妹拍了幾下？答案的

正確並不代表真正理解，讀不懂題意、誤用關鍵字，是兩位個案解題失敗最主要的原因，如下原案十一、十二。

原案十一：置個案於衝突情境（認知失衡）的策略

將個案 S 置於衝突情境，她能意識到答案的矛盾，進而自己理出規則找到方法。

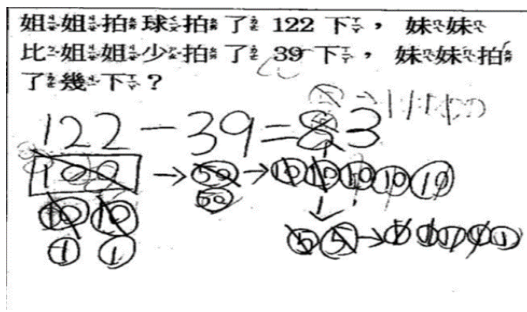


圖 4-11-1 原案十一 個案 S 比較題型的手稿

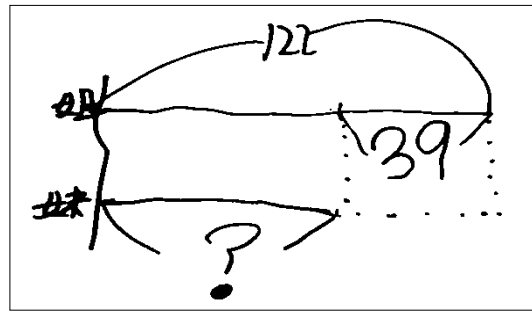


圖 4-11-2 個案 S 比較題型的題意表徵

### 個案 S 的訪談紀錄

1102S：老師有教過“比”就是用減的。

1103T：那你幫我算算這一題，「姐姐拍球拍了 122 下，妹妹比姐姐“多”拍了 39 下，妹妹拍了幾下？」

1106S：就是  $122 + 39 = 161$ 。

1107T：為甚麼？你剛剛不是說“比”就要用減的。

1108S：就是它有“多”，就是用“加”的，有“少”就是用“減”的。

1109T：好，那我問你「姐姐拍球拍了 122 下，姐姐比妹妹“少”拍了 39 下，妹妹拍了幾下？」

.....（停了 10 秒）

1110S： $122 - 39 = 83$ ，妹妹 83 下。

1111T：喔，所以姐姐的 122 比妹妹的 83 少 39，是這樣嗎？

.....（停了 5 秒）

1112S：應該是 161，用加的

1113T：為甚麼？它題目有一個“少”又有一個“比”耶。

1114S：但是，...因為...她比妹妹少 39 下啊...，她有拍 122 下，妹妹也有拍 122

下，妹妹還有(多)拍 39 下。所以妹妹要  $122 + 39$ 。

1113T：好，那妳可以畫圖來告訴我嗎？我覺得聽不太懂，像這樣(示範)比較大的就畫長一點，比較小的就畫短一點。

1114S：嗯(畫圖中)(如圖 4-11-2)

原案十二：介入教學 — 提問「誰多？誰少？」

個案 L 看到少就是減，看到多就是加，她不明白錯在哪裡，請求協助，研究者一樣將她置於衝突情境，但她卻是越來越混亂；研究者決定介入教學，最後以一句「誰大？誰小？」將她拉回題意，終於獲得成功解題。

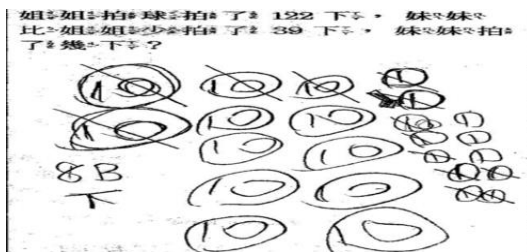


圖 4-12-1 原案十二 個案 L 比較題型的手稿

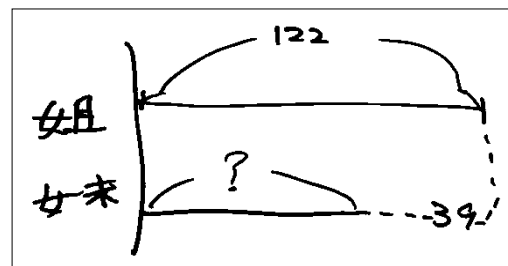


圖 4-12-2 個案 L 比較題型的題意表徵

### 個案 L 的訪談紀錄

1217T：你要先釐清題目，「姐姐比妹妹少拍了 39 下」是「誰多？誰少？」。

1218L：姐姐比較少…… 妹妹比較多吧。

1221T：現在題目告訴你姊姊拍 122 下，那妹妹拍幾下。妹妹比較... (引導她回憶) ...

1222L：多。

1223T：嗯，然後呢？ 請你告訴我，妹妹怎麼算？

1224L：妹妹比較多，所以是  $122 + 39$ 。

1225T：嗯，你再看看原來的題目「姐姐拍球拍了 122 下，妹妹比姐姐少拍了 39 下，妹妹拍了幾下？」哪裡不一樣(引導她找到規律)，「誰多？誰少？」。

1226L：妹妹少，姊姊多。

1229T：你能畫圖(如圖 4-12-2)告訴我，題目中誰大誰小的關係嗎？就是比較多的人畫比較長，比較少的人畫比較短。像這樣(示範)。

## &lt;分析&gt;

相關文獻均證實，閱讀理解與解題表現有顯著相關(王淑嬌，2006；林麗華，2006；陳世杰，2005；李俊彥，2004)。兩位個案在任務單上雖然解題成功，但晤談中卻發現她們並不理解比較題型的題意；她們誤用關鍵字，甚至以為「比較题型」全部都是用減法解題，這就是因為閱讀理解能力不足而導致解題失敗的典型例子。

經過研究者的引導，置她們於衝突情境，給予機會重新思考；個案 S 有辦法釐清題意找到規律，但個案 L 卻覺得更加混亂，於是在晤談中再以最小提示「誰多？誰少？」介入教學，讓她能聚焦於題意而非關鍵字。

為了解她們是否因為提示後，能聚焦於題意的理解，隔週再做了四題比較題型的類似題目(如附錄)，以測試個案是否能經由傾聽問題，以掌握題意，而決定採用何種運算策略解題。三個月後，研究者針對介入教學的題型，設計更難的類似題型(如附錄)以考驗學習成效的遷移情形。

較難的比較的類似題型(如附錄)，其類似題型的解題表現如下(原案十五、十六、十七、十八)。

原案十五、十六：畫圖表徵題意

題目 1：小夫有 232 元，胖虎比小夫多 37 元，大雄又比胖虎少 53 元，請問胖虎和大雄各有幾元？

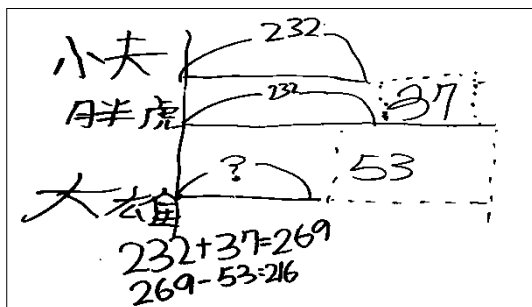


圖 4-15 原案十五 個案 S 比較型相似題 (1) 的手稿

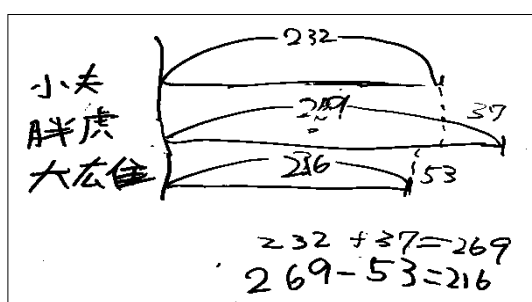


圖 4-16 原案十六 個案 L 比較型相似題 (1) 的手稿

原案十七、十八：畫圖表徵題意

題目 1：中川比麗子高 18 公分，麗子又比兩津高 23 公分，請問中川和兩津誰比較高，高幾公分？

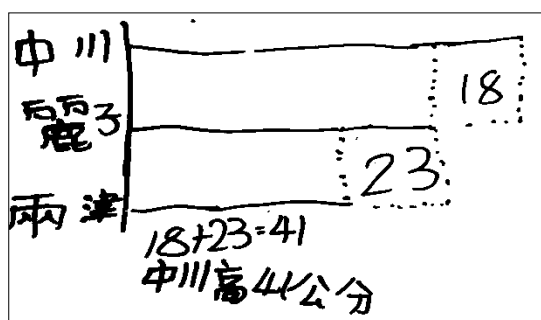


圖 4-17 原案十七 個案 S 比較型相似題 (2) 的手稿

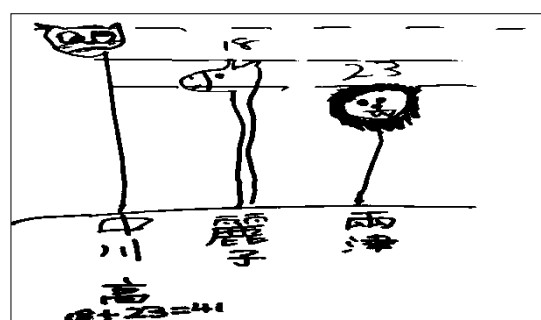


圖 4-18 原案十八 個案 L 比較型相似題 (2) 的手稿

從以上四個原案的解題表現發現，她們已獲得學習遷移的效果，在原案十五（如圖 4-15）個案 S 在胖虎的數線上寫了 232 和 37，明顯的表達出胖虎比小夫多 37 的意涵。而類似題第 2 題，她們把題意畫出來之後，幾乎就可以馬上回答出答案了。此次類似題的測試，她們展示了對題意的理解與數學化的歷程，以此證明介入教學達到了效果，她們已具備比較題型的基模。

### (三)採用具體物模擬策略解題成功 — 多重比例型

題目為：一個大圓圈可換 3 個中圓圈，2 個中圓圈可換 3 個小圓圈，請問 8 個大圓圈可換幾個小圓圈？

個案均處於乘法概念建構的前端，以具體物實際建構抽象的倍數概念，能幫助個案往後心像的建立，如下原案十三、十四。

原案十三、十四：直接建模表徵題意，使用一一點數的策略，非倍數跳數

兩位個案均採用半抽象的圖形表徵題意，運用一一點數的策略解題成功，表示她們已具備倍數與等量分配的基本概念。但因未背誦過九九乘法表，所以無法以跳數的形式出現，又因未學習過乘除法則，所以更無法以數學模式進行作答。

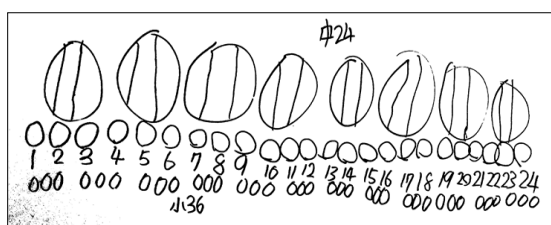


圖 4-13 原案十三 個案 S 多重比例題型的手稿

個案 S 的訪談紀錄

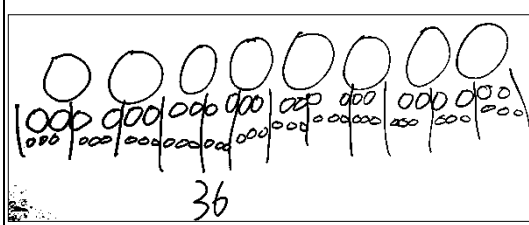


圖 4-14 原案十四 個案 L 多重比例題型的手稿

個案 L 的訪談紀錄

1304S：就是 8 個大圓嘛，換 3 個中圓，我把大圓切 3 塊，就是有 24 個中圓。然後再 2 個中圓換 3 個小圓，我就在 2 個中圓下面畫 3 個小圓，這樣數一數小圓就是 36 個阿。

1404L：我先畫 8 個大圈圈換成 3 個中圈圈，然後 2 個中圈圈、2 個中圈圈、2 個中圈圈、.....再換 3 個小圈圈，就是這樣啊。

1405T：那妳怎麼知道是 36。

1406L：就是 1、2、3、.....（開始點數小圓圈）就是 36 阿。

### <分析>

「多重比例」在三個量數空間的兌換關係中，提供了倍數與分配的乘除法概念，兩位個案的解題策略類似 Carpenter 等人（1999）的用具體物模擬，以表徵題意與心中的想法，兩位個案則是以半具體物（畫圈的方式）表徵想法。在以上的操作過程中，充分表現出她們比同齡學生成熟的後設監控能力；因為她們還未真正學過乘除法的運算規則，也未背過九九乘法表，所以沒有使用正式的數學語言來加以說明，也沒有列出乘法與除法的數學算式，更沒有期待她們以倍數跳數的方法計數。

她們以最原始的方法來解題，而且解題成功，這代表她們即使沒有學過正式算數的乘除法則，乘除法的概念仍然早就存在於她們最基本的記憶當中，也就是乘除法的基本概念在她們的日常經驗中，已經成形，而非正規教育所賦予的。這也直接證實了周淑惠（1995）所言「兒童絕不是一個等待填充的空白接受器」；而如何引出她們日常中的舊經驗，來理解約定俗成的數學記號，進一步建構屬於她們自己的數學概念，是教師們要共同努力的目標。

## 伍、結論與建議

本研究旨在探究二位小一個案學童求解數與量單元中非例行性問題的解題表現，首先根據研究過程，彙整兩位個案學生在數與量單元非例行性問題的解題表現資料，分析研究結果，提出研究結論；再依據研究結論，提出低年級在數與量單元教學上或研究上的相關建議。

### 一、結論

### (一) 探究個案在計算題型，二階進退位加減法、基礎乘法上的解題表現為何

兩位個案學生的數量概念已超過同齡學生的表現，她們位值集聚的概念成熟，合成分解的概念清晰，後設認知及監控的能力也在解題過程中充分展露無遺。在計算能力方面，二階進位加法表現成熟且靈活，二階退位減法、乘法及除法就必須輔以具體表徵來幫助她們建構心像。例如，個案 S（原案九）運用手指「表徵（re-presentation）」的方式解二階退位減法的題目，可見，二位數的概念成熟。

### (二) 探究個案在文字題型，「合併型部分量未知」、「比較型比較量未知」、「多重比例型」上的解題表現為何

在文字題意的理解方面，兩位在「合併型部分量未知」已有基模，均以再添加的策略進行思考，個案 S 更能以  $(B) = C - A$  的模式進行解題，在「整體量與部分量」的概念上比個案 L 表現成熟。

而「比較型比較量未知」的題型，兩位雖然都解題成功，但其實她們並不是真的理解，在訪談中發現，她們利用關鍵字判斷加減法則，遇到「比」和「少」就要用減的，「多」就要用加的，這樣的誤解，讓她們無法聚焦於題意。於是研究者運用「認知失衡」（原案十一：妹妹的訪談）的教學策略，讓她自己發現關鍵字的運用，並非放諸四海皆準的法則。

個案 L（姐姐）看到少就是減，看到多就是加，她不明白錯在哪裡，請求協助，研究者也一樣將她置於衝突情境，但她仍處於五里霧中；研究者最後以一句「誰大？誰小？」幫助她釐清題意（原案十二：姊姊的訪談），讓她們認真去判斷題意中差數與被減數、減數之間的關係，釐清她們的迷思，並幫助她們建立基模，經過三個月後再以三者比較題型（原案十五～十八）進行檢驗，發現其概念已建立。

最後以乘法「多重比例型」加以考驗，二位都能以畫圖表徵的方式解題（原案十三、十四），方法類似 Carpenter 等人（1999）直接建模策略，建構三個量數間的兌換關係，分層羅列，最後再一一點數，圖中表現出她們已具備乘法的倍數概念，以及兩兩一組的除法分配基模，甚至能應用到三個量數空間的連結。

經過研究者長期與個案深入互動的研究中發現，個案之所以有超齡的表現，除了她們在日常生活中的體驗比一般同齡學生多元以外，她們表現出來的後設監控能力也較一般同齡學生來得穩定；她們日常中能自己購物、自己計算價錢、自己分配點心。研究者更在她們分配的過程中，看到她們已有分數的基本概念。例如，在分配 5 個餅乾時，兩

位個案會告訴我，一個人得二個再一半的餅乾。因此，研究者認為兒童除了先天的條件外，日常生活的體驗也是兒童知識建構的養分；家長們不要一直認為孩子還沒長大，日常瑣事為他們萬事作足，其實是間接抹煞孩子學習的機會，阻斷她們建構知識的來源。

## 二、建議

根據本研究結論，研究者反思整個研究過程，給予相關研究者或教學者作以下三點建議：

(一) 有鑒於個案學生於比較題型中習慣使用關鍵字解題，意味著一次的成功不代表真正的理解，研究者建議做訪談時要變換題目中所設立的未知數，及比較量與參考量的次序關係，並作持續考驗加以驗證，才能掌握窺探學生的真實能力（原案十一）。

(二) 比較題型利用關鍵字的迷思，如何破解，及如何作最小提示的提問呢？研究者以精簡一句「誰大？誰小？」，能讓學生焦點拉回題意，關注於比較句中的參考量與比較量的關係，此種最小介入的提問發揮了效用，數學教育工作者可以參考與試用（原案十二）。但是不同的問題，有不同的提問內容，教學者可能要擁有數學內容知識，以及數學教學知識，也建議教學者多多參考教學手冊，豐富上述知識以發揮適當的提問內容。

(三) 一般學生都誤以為比較題型就是用減的，所以建議教師在出比較題型時，能同時出現加法與減法的比較題型，置學生於衝突情境當中，讓學生獲得反思的機會，進而發展閱讀以及數學解題的能力（原案十一）。

## 誌謝

本研究蒙科技部計畫（104-2511-S-415-003-MY3）經費補助，特致謝忱。也深深感謝審查委員的見解與建議，使得本文更加完善。

## 參考文獻

王志銘、劉祥通（2007）。一位資優生自發性解題表現之探究~以分數除法之當量除為例。

資優教育季刊，104，8-19。

王淑嬌（2006）。國小四年級學童閱讀理解能力與數學解題歷程之相關研究（未出版之碩士論文），國立臺北教育大學數學教育研究所，臺北市。

李佩樺、劉祥通（2008）。分析國小資優生解連比問題之自發性策略。資優教育季刊，



106, 8-17。

- 李俊彥 (2004)。不同題目表徵型式的面積問題對國三學生解題表現之探討 (未出版之碩士論文)，國立高雄師範大學數學系，高雄市。
- 周淑惠 (1995)。幼兒數學新論-教材教法。臺北市：心理出版社。
- 林清山、張景媛 (1993)。國中生後設認知、動機信念與數學學習之關係暨代數應用題教學策略效果之評估。國立臺灣師範大學教育心理與輔導學系教育心理學報，26，53-74。
- 林碧珍 (1991)。國小兒童對於乘除法應用問題之認知結構。國立新竹師範學院學報，5，211-288。
- 林麗華 (2006)。國小不同數學成就學生對數學文字題的閱讀理解能力之探討 (未出版之碩士論文)，國立臺南大學特殊教育學系，臺南市。
- 陳小玲 (2006)。以經驗、察覺、歸納概念建立教學為導向之國小二年級學生乘法概念學習歷程及成效之探究 (未出版之碩士論文)，臺南大學應用數學研究所，臺南市。
- 陳世杰 (2005)。國小學童閱讀理解策略與數學文字題閱讀理解、數學文字題解題表現之相關研究 (未出版之碩士論文)，國立高雄師範大學教育研究所，高雄市。
- 陳向明 (2002)。社會科學質的研究。臺北市：五南出版社。
- 黃茂在、陳文典 (2004)。「問題解決」的能力。科學教育月刊，273，21-41。
- 黃美盼、林原宏、易正明 (2007)。徑路搜尋方法之加減法文字題知識結構分析。測驗統計年刊，15，29-57。doi: 10.6773/JRMS.200706.0029
- 黃瑞煥、洪碧霞 (1983)。資賦優異兒童與創造能力的教學。省立新竹師專特殊教育中心印行。
- 喻平、馬再鳴 (2002)。論數學概念學習。數學傳播，26 (2)，89-96
- 甯自強 (1993)。單位量的變換 (一)~正整數乘除法運思的啟蒙~。教師之友，34 (1)，27-34。
- 甯自強 (1998)。涂景翰的數概念。科學教育學刊，6(3)，255-269。
- 湯梅英、李琪明、何縉琪、段曉林 (2000)。國家教育研究院。檢自 <http://terms.naer.edu.tw/detail/1312529/?index=7>
- 楊德清 (2006)。從兒童迷思概念談數常識之教學經驗分享。台灣數學教師電子期刊，7，

3-10。doi:10.6610/ETJMT.20060901.02

蔡子雲、劉祥通 (2007)。資優生在想什麼？— 速率篇。《資優教育研究》，7 (1)，29-47。  
doi:10.7089/JGE.200706.0029

蔣治邦、鍾思嘉 (1991)。低年級學童加減概念的發展。《教育與心理研究》，14，35-68。

劉祥通、康淑娟 (2012)。小美在數線上關於分數基準化問題的解題表現。《科學教育學刊》，20 (1)，23-39。doi:10.6173/CJSE.2012.2001.02

劉哲源、劉祥通 (2008)。國一資優生對因倍數問題的解題分析。《資優教育研究》，8 (1)，47-66。doi:10.7089/JGE.200806.0047

鐘世帆 (2005)。國小學童整數乘除概念知識結構與認知型式相關之探討-以六年級為例 (未出版之碩士論文)，國立臺中師範學院數學教育研究所，臺中市。

J. Kilpatrick 著。黃敏晃譯 (1988)。數學解題的教學，近 25 年來的回顧。《數學傳播》，12(4)，26-43。(原著出版於 1985 年)

Barba, R. H. (1990). Problem solving pointers. *Science Teacher*, 57(7), 32-35.

Cai, J. (2005). What research tells us about teaching mathematics through problem solving. In F. K. Lester, & R. I. Carles (Eds), *Teaching mathematics through problem solving* (pp. 241-253). Reston, VA: NCTM.

Cambell, P. F., & Bamberger, H. J. (1990). The vision of problem solving in the standards. *Arithmetic Teacher*, 38(9), 14-17.

Carl, I. M. (1989). Essential mathematics for the twenty-first century: The position of the National Council of Supervisors of Mathematics. *Arithmetic Teacher*, 82(5), 388-391.

Carpenter, T. P. (1985). Learning to add and subtract: An exercise in problem solving. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 17- 40). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Carpenter, T. P., Carey, D., & Kouba, V. (1990). A problem-solving approach to the operations. In J.N. Payne (Ed.), *Mathematics for the young child*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., & Empson, S. B. (1999). *Children's mathematics cognitively guided instruction*. NH: Heinemann.

- Clark, F. B., & Kamii, C. (1996). Identification of multiplicative thinking in children in grades 1-5. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 41-51. doi: 10.2307/749196
- Cobb, P., & Steffe, L. P. (1983). The constructivism researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14(2), 83-94. doi:10.2307/748576
- Davis, G., & Pepper, K. (1992). Mathematical problem solving by pre-school children. *Education Studies in Mathematics*, 23(4), 397-415. doi:10.1007/BF00302442
- Fischbein, E., M., Deri, M. S., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, 3-17. doi:10.2307/748969
- Fuson, K. C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 243-275). New York, NY, England: Macmillan.
- Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 517-545). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. doi:10.4324/9781410602725
- Mayer, R. E. & Hegarty, M. (1996). *The process of understanding mathematical problems*. In R. J. Sternberg & T. Ben-Zeev (Eds.), *The nature of mathematical thinking*. NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
- Polya, G. (1957). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Schroeder, T.L., & Lester, F. K. (1989). Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving . In P.R. Trafton [Ed], *New Directions for Elementary School Mathematics* (pp.31-42), 1989 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
- Starkey, P. & Gelman, R. (1982). The development of addition and subtraction abilities prior

to formal schooling in arithmetic. In T.P. Carpenter, J.M. Moser, & T.A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: a cognitive perspective*. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.). *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). New York: Academic Press.

Vygotsky, L. S. (1962). *Thought and language*. Cambridge, MA: MIT Press.

## 附錄

## 預試任務單

1.) $17+13$	2.) $25+37$	3.) $20-12$	4.) $35-17$
5.) $2\times 3$	6.) $5\times 4$	7.) $6\div 2$	8.) $12\div 3$

## 正試任務單

1.) $59 + 68$	2.) $113 - 28$	3.) $9 \times 8$	4.) $43 \div 5$
(一) 小亮今天很幸運抽中 39 元禮卷，他到金玉堂想買 85 元的妖怪手錶，那麼他應該再付多少現金呢？			
(二) 姐姐拍球拍了 122 下，妹妹比姐姐少拍了 39 下，妹妹拍了幾下？			
(三) 一個大圓圈可換 3 個中圓圈，2 個中圓圈可換 3 個小圓圈，請問 8 個大圓圈可換幾個小圓圈？			

## 比較題型類似題目

1.) 小明有 230 元，小花比小明少 30 元，小花有幾元？	2.) 小明有 230 元，小明比小花少 30 元，小花有幾元？
3.) 小明有 230 元，小花比小明多 30 元，小花有幾元？	4.) 小明有 230 元，小明比小花多 30 元，小花有幾元？

## 三者比較的類似題目

1.) 小夫有 232 元，胖虎比小夫多 37 元，大雄又比胖虎少 53 元，請問胖虎和大雄各有幾元？
2.) 中川比麗子高 18 公分，麗子又比兩津高 23 公分，請問中川和兩津誰比較高，高幾公分？

吳宛柔、楊凱琳 (2019)。  
奠基進教室活動設計與成效評估：縮放繪。  
臺灣數學教師, 40 (1), 32-49  
doi: 10.6610/TJMT.201904\_40(1).0002

## 奠基進教室活動設計與成效評估：縮放繪

吳宛柔<sup>1</sup> 楊凱琳<sup>2</sup>

<sup>1</sup>臺北市立東湖國中

<sup>2</sup>國立臺灣師範大學數學系

本研究對象為 24 名八年級學生，學生透過「縮放繪」的活動發展相似形的觀念。為瞭解學生在活動中的學習歷程，資料蒐集包括前測、後測的測驗卷、情意問卷量表、一節課的教學錄影與課後的質性訪談資料。研究結果顯示，此活動有助於深化學生對相似形基本概念與性質的理解，並提升其學習興趣。透過學生表現的分析，也進一步提出如何改善此活動以達到更好的成效。

**關鍵詞：**ARCS、相似形、奠基活動

## 壹、前言

國際學生能力評量計畫(Programme for International Student Assessment, 簡稱 PISA) 以素養為號召, 定義數學素養為個人在各種情境下形成、應用和詮釋數學的能力, 這包括數學推理和使用數學概念、程序、事實和工具來描述、解釋與預測現象(OECD, 2010)。十二年國民基本教育以「自主」、「互動」、「共好」為課程的核心理念, 國家教育研究院擬定十二年國教核心素養的架構與內涵, 提出三面九項的核心素養, 做為學生所應具備的基本且共同的素養(國家教育研究院, 2014)。然而在 PISA 測驗中, 臺灣高低分組學生成績落差大(中華民國科技部, 2015), 為提升學生學習數學的動機, 亦發展學生的數學想法, 數學奠基活動由林福來教授提出的「就是要學好數學」計畫核心產出(Lin, 2015)。數學奠基活動透過寒暑假或周末舉辦以數學奠基活動為主的「好好玩數學營」以提昇學生的數學學習準備度, 且十二年國教素養導向的課程亦如火如荼發展中, 林福來教授延續此理念, 提出應讓奠基活動進教室以發揮更大的影響。

我們知道學生在學習相似形概念會受到語意的影響, 常遺漏利用定義來檢驗圖形(陳創義, 2003)。陳建亨和楊凱琳(2014)亦指出, 學生在解相似形問題則容易有用直觀做判斷、誤用已知條件、拼湊數字等錯誤。故本研究透過奠基進教室的活動「縮放繪」, 希望學生在課堂上學習相似形時, 先奠定學生相似形的觀念。

雖然國小已學過放大縮小圖, 但國小是利用數格子繪製, 學生在學習此觀念時, 圖形間的比例關係是學習重點。與國小不同, 國中學習相似形是以幾何變換的想法出發, 兩圖形間存在一個相似變換, 即透過平移、旋轉、鏡射後, 仍保有原圖形的形狀, 故推得多邊形相似的性質: 若兩多邊形相似, 則對應角相等且對應邊成比例。我們用變換的想法作為此活動的基礎與奠基原理。以「縮放中心可以是任意點」、「縮放中心與縮放圖所有對應點成一直線」、「放大縮小圖任意對應長度成比例」, 作為「縮放繪」活動的奠基, 以 ARCS(Keller, 1987)的架構來設計兼顧學生認知與情意的「縮放繪」活動, 且設計符合此活動的測驗卷及情意問卷, 評估檢驗此活動的成效。

本研究探討的研究問題為:「縮放繪」活動後, 學生對相似形的概念理解有何改變? 學生在情意面向有何改變?

## 貳、文獻探討

培養學生的數學素養, 需先引起學生的學習動機。動機與學生的學習成績相關, 被

認為是學生學習的主要因素之一 (Paas et al., 2005)。Keller (1987) 將心理學動機理論與教學設計整合，提出 ARCS 動機模式，定義有效提升學生學習動機的四個要素與其對應的教學策略 Keller (2010)：

## 一、引起注意 (Attention)

學習的第一步即要能引起學生的興趣和維持學生的專注力，要如何讓學生的專注力持續在課堂上是教師的挑戰。Keller (2010) 指出教師可從以下的教學策略著手。

### (一) 感官的吸引 (Perceptual arousal)

利用不同音調、不同色彩或與平常不同的畫面刺激學生的感官進而引起學生的注意，成功吸引學生注意後，教師可利用下面兩個教學策略維持學生的專注力。

### (二) 問題的探究 (Inquiry arousal)

善用不同的詢問技巧，提出適合學生思考的問題，激發學生的好奇心，使得學生進入解決問題的情境中，保持求知的興趣。

### (三) 多變的方法 (Variability)

除了上述的兩個策略，教師亦可變化教學方式，讓學生更容易投入學習。例如：使用不同的教學媒體、進行小組活動。

## 二、切身相關 (Relevance)

此要素能滿足學生個人的需求與目標，使他產生積極的學習態度，有以下三種教學策略能增強學生的學習動機。

### (一) 目標導向 (Goal orientation)

提供與學生相關性的目標，是該要素重要的關鍵。教師可於上課時告知學生該堂課的教學目標、教學大綱或該課程與學生自身的相關性等。

### (二) 動機配合學習者特性 (Motive matching)

不同學習者有不同的特質，因此教師須提供不同的教學策略以增強提高學生的學習動機。

### (三) 連結熟悉事務 (Familiarity)



與學生熟悉的事物或相關的經驗作結合，能提高學生對課程的熟悉度，產生親切感。

### 三、建立信心 (Confidence)

可運用以下三種策略協助學生創造正向的成功與期望，使學生相信成功取決於自我，保持學生的學習信心。

#### (一)學習必備的條件 (Learning requirements)

告知學生若要成功完成該堂課需完成哪些條件。例如：該堂課的學習目標、要求或評量規準等。

#### (二)提供成功的機會 (Success opportunities)

學生明白成功的必備條件後，教師亦須給予難易適中的學習機會，幫助學生獲得成功的經驗，增強自信心。

#### (三)提供自我掌握的機會 (Personal Responsibility)

教師可利用適合學生程度的問題，引導學生成功是來自本身的努力。

### 四、獲得滿足 (Satisfaction)

滿足感的獲得促使學生能繼續保有學習動機，以下策略能激發學生的滿足感。

#### (一)Natural consequences (自然的結果)

教師於課堂中提供學生學以致用的機會。

#### (二)Positive consequences (正向的結果)

課堂進行時，給予學生正面的內、外在回饋與增強。

#### (三)Equity (維持公正)

維持一致性的評量標準，吻合學習結果與課程的初始目標。

ARCS 模型廣泛應用於不同教育環境在不同學科領域中 (Li & Keller, 2018)，如社會學 (Astleitner & Lintner, 2004)、經濟學 (Moller and Russell, 1994)、STEM (Aşıksoy and Özdamli, 2016) 等。教學對象包括 k-12 的學生 (Feng & Tuan, 2005; Karakis, Karamete &

Okçu, 2016)、大學生(Chen, 2014; Zhang, 2017)、技職學校的學生(Liao & Wang, 2008)等。

Liao & Wang (2008) 將 ARCS 應用於技職課程的教學設計，教師使用各種視覺影像或媒體吸引學生注意 (Attention)，激發學生的興趣與好奇心，運用教材連結學生的先備知識、興趣與未來期望 (Relevance)，利用活動滿足每位學生的需求和目標，且設計學生可接受的挑戰難度促進其信心 (Confidence)，為保持學生學習過程的積極性，教師即時回饋解決學生問題，減少學生學習困惑，使學生對自己的表現感到滿意 (Satisfaction)。亦有研究指出使用 ARCS 設計的文本比沒有使用 ARCS 的文本更能影響學生的學習 (Astleitner & Lintner, 2004)。雖然 ARCS 較少使用於數學教學設計上，但 ARCS 與奠基活動皆能兼顧學生的情意與認知，讓學生在操作過程中帶入數學思考，故本研究使用 ARCS 來設計奠基進教室活動是可行且合適。

## 參、研究方法

本研究為單組前-後測的實驗研究法 (Campbell & Stanley, 1963)，在進行教學活動前後，以問卷檢測研究對象在活動後，相似形認知改變的情形；並以情意問卷與訪談，探討此活動對研究對象學習的影響。蒐集的資料包含前、後測、情意問卷量表、一堂課的教學錄影與課後的質性訪談資料。

### 一、學校情境與研究對象

該活動以融入九年級課程作為設計目標，比例推理為學生的先備知識。此研究採便利取樣，以某城市某校一個班八年級 24 名學生進行教學與施測。施測學校地處縣市交界處，學生程度分佈為雙峰現象。

### 二、活動設計

(一)奠基目標：本奠基活動目標分為認知面向與情意面向

#### 1. 認知面向的奠基目標

學生在學習此單元前，已學過簡單的幾何圖形、長度與角度，並能使用工具測量長度與角度，且已學過比例推理。我們根據此先備知識發展本研究的奠基目標：「放大縮小圖任意對應長度成比例」；且利用相似形變換幾何的特性，奠定學生「縮放中心與縮

放圖所有對應點成一直線」這個觀念；我們亦以學生的生活經驗，將「縮放中心可以是任意點」融入活動設計中。奠基目標設計如下：

### (1) 縮放中心可以是任意點

透過教師示範滑手機得到縮放圖，詢問學生在滑手機的過程中，若要得到放大縮小圖，應將手指放在哪個位置，藉此引入縮放圖可由任一定點縮放。

### (2) 放大縮小圖任意對應長度成比例

學生用尺量測原圖與縮放後截圖之間的關係，教師於學生量測後帶入縮放倍率公式，讓學生理解放大縮小圖的各對應部分成比例，且釐清學生對縮放倍率用詞的迷思概念。

### (3) 縮放中心與縮放圖任意對應點成一直線

原打算輔以每位學生一台平板電腦，自行做放大、縮小圖，考量平板電腦在教學現場尚不算普遍，且班級經營不易，經與專家學者討論後，把活動內容修改成「邊邊角角拉一拉」，將此活動以電腦呈現。教師於活動時詢問學生拉動哪些方向可做出放大縮小圖，亦把迷思概念「拉動 45 度角方向可得放大縮小圖」放入學習單中，待由學生討論後，請一位學生上台用電腦拉動圖片，引導其他學生觀察不動點和對應點的關係，奠定學生不動點和其縮放圖對應點成一直線的觀念。

## 2. 情意面向的奠基目標

在情意面向，我們以「發展學生主動思考的策略與態度」為設計理念。

本活動結合學生的經驗與生活情境，利用課堂中的問答，促使學生在解答的過程中發展出主動思考的策略。例如，在「邊邊角角拉一拉」的活動中，教師透過詢問學生：「對角線與 45 度角線差別在哪？」並拉動電腦的圖片讓學生觀察縮放中心與縮放圖對應點的關係，引導學生思考為什麼拉動 45 度角無法得到縮放圖。接著，教師亦詢問學生為什麼拉動某些方向能得到縮放圖，而有些方向卻不行，讓學生與同儕討論後反思修正想法，培養學習的正向態度。

## (二) ARCS 設計教學活動

「奠基」是一種兼具數學認知與動機的學習活動，引導學生自動性的發現數學想法。ARCS (Keller, 1987) 模式整合心理學動機理論的研究結果與教學設計，幫助教師進行課程設計，故我們以此架構來設計本活動。

### 1. 引起注意 (Attention)

該活動設計以擬真的故事情境「消失的金牌」，利用吸引學生目光的貓咪卡片引起學生興趣（感官的吸引 **Perceptual arousal**），於活動過程中提出具有適度挑戰性的問題：「為什麼警察伯伯能夠知道金牌的大小？」（問題的探究 **Inquiry arousal**）使學生產生好奇進而融入課堂學習，並適時使用電腦教學讓學生對活動保有興趣（多變的方法 **Variability**）。

### 2. 切身相關 (Relevance)

活動一開始我們讓學生明白該堂課的任務：「確認找到的金牌即為消失的金牌」（目標導向 **Goal orientation**），我們亦以學生每天滑手機的切身經驗（連結熟悉事務 **Familiarity**），使學生感受放大縮小與自己生活息息相關，進一步要求學生量測原圖與縮放後截圖長度的關係，連結學生國小的舊經驗，使學生對學習內容不陌生，並給予不同的任務，提供符合學生的學習機會（動機配合學習者特性 **Motive matching**），例如：量測計算縮放倍率，與同儕討論拉動哪條線能得到放大縮小圖。

### 3. 建立信心 (Confidence)

活動中的不同任務明確指出須完成哪些事情（學習必備的條件 **Learning requirements**），例如量測兩圖形間的關係是利用國小的先備知識—數格子繪製放大縮小圖，學生只要願意量測兩圖形的邊長，便能回答該問題（提供自我掌握的機會 **Personal Responsibility**），此活動能建立學生的學習信心（提供成功的機會 **Success opportunities**），讓學生有機會成功達到目標。

### 4. 獲得滿足 (Satisfaction)

在「邊邊角角拉一拉」活動，學生思考學習單上的各種方向拉動，教師針對迷思概念「拉動 45 度角方向可得放大縮小圖」實際操作電腦，讓學生與同儕間討論，並自行修正想法，找出正確答案，獲得成就與滿足（正向的結果 **Positive consequences**）。我們亦利用學習單請學生繪製金牌的縮小圖，記錄學生的探索成果與推理的過程，吻合該堂課的學習目標（維持公正 **Equity**）。活動最後，我們引導學生思考該堂課一開始的問題：「為什麼警察伯伯能夠知道金牌的大小？」，使學生獲得學以致用的機會（自然的結果 **Natural consequences**）。

## 三、資料收集

### (一)量表工具

本研究使用的量表工具為「縮放繪活動測驗卷」與「縮放繪活動情意問卷」量表兩部分。

「縮放繪活動測驗卷」我們將測驗目的分為：圖形的直觀判斷（3 題）、兩相似形對應角相等，對應邊成比例（2 題）、縮放中心可以是任意點（2 題）、縮放中心與縮放圖所有對應點成一直線（2 題）。有 4 題因題目中的專有名詞「縮放中心」是活動前學生尚未學過，故只出現在後測題目中（表 1）。

「奠基進教室活動情意問卷」量表共計 20 題，採六點計分，探索性因素分析呈現四個因子：「學習興趣」5 題、「活動投入」4 題、「對活動的評估」4 題與「對自我的自信評估」6 題來探討（楊凱琳，2017）。其中「學習興趣」是指對該活動的學習感受，以及活動後對數學的看法；「活動投入」指的是活動後對未來上課投入情形；「對活動的評估」是對該活動的想法；「對自我的自信評估」則是活動後對自我的評估。本研究採用同樣的問項架構，只把活動名稱改為縮放繪；以本研究參與者計算各因子問項的内部一致性 Cronbach's  $\alpha$  係數，分別是 .85、.78、.81、.91。

表 1

「縮放繪活動測驗卷」題目分布表

測驗目的	測驗內容	前測	後測
圖形的直觀判斷	圖形旋轉、翻轉後是否相似	✓	✓
	封閉曲線的放大縮小圖	✓	✓
	非封閉曲線的放大縮小圖	✓	✓
兩相似形邊長成比例	利用格子點找相似形	✓	✓
	利用相似形性質判斷圖形	✓	✓
縮放中心可以是任意的點	判斷圖形的縮放中心		✓
	利用縮放倍率畫相似圖		✓
縮放中心與縮放圖對應點成一直線	不同圖形縮放中心與圖形對應點的關係		✓
	同一圖形縮放中心與圖形對應點的關係		✓

## (二)質性資料

為評估奠基進教室對學生的影響，本研究以半結構式問題隨機訪談六名學生，分別是學生對活動內容的感受、活動中的參與和思考、遇到的困難之處與原因，以及活動後總結性的評價（表 2）。

表 2

半結構式訪談表

訪談問題	目的
● 今天上課的感覺如何？	創造適合學生分享的情境
● 你覺得剛剛的活動中，哪一個讓你的印象最深刻？ 2-1 為什麼你覺得這個活動讓你印象深刻呢？ 2-2 你還記得這個活動在做什麼嗎？ 2-3 你在這個活動有沒有學到什麼呢？試著說說看你學到的這個是什麼？	引導學生說出對活動內容的感受
● 你剛剛有沒有動手參與活動呢？ 3-1 那你動手做了什麼？ 3-2 動手的時候，你在想些什麼？ 3-3 還有沒有（什麼其他動手動腦的時候？）	注重學生在活動中的參與和思考
● 在活動過程中有沒有遇到什麼困難？	引導學生描述活動中遇到的困難之處與原因
● 你會不會推薦學弟妹上這堂課？原因是？	讓學生進行總結性的評估

## 肆、研究結果與討論

此次的「縮放繪活動測驗卷」與「縮放繪活動情意問卷」量表在排除缺考與回答不全的無效試卷後，收回有效問卷共 21 份。我們在每題利用部分的方式計算了「縮放繪活動測驗卷」的答對率（表 3），以及「縮放繪活動情意問卷」量表各向度的平均得分（表 4）。

### 一、認知改變

本小節將由表 3「縮放繪活動測驗卷」統計檢定量表，回答研究問題：奠基活動後，學生相似形的概念理解有何改變？

表 3

「縮放繪活動測驗卷」統計檢定量表

測驗目的	測驗內容	前測 答對率 (%)	後測 答對率 (%)
圖形的直觀判斷	圖形旋轉後是否相似	90.48	95.24
	圖形翻轉後是否相似	42.86	28.57
	封閉曲線的放大縮小圖	91.27	94.44
	非封閉曲線的放大縮小圖	52.38	47.62
兩相似形邊長成比例	利用格子點找相似形	85.71	90.48
	利用相似形性質判斷圖形	85.71	100.00
縮放中心可以是任意的點	縮放中心在圖形內		76.19
	縮放中心在圖形外		14.29
	縮放中心在圖形邊上		33.33
	縮放中心在圖形頂點上		57.14
	利用縮放倍率畫相似圖		33.33
縮放中心與圖形所有對應點成一直線	不同圖形縮放中心與圖形對應點的關係		67.86
縮放中心與圖形所有對應點成一直線	同一圖形縮放中心與圖形對應點的關係		61.90

### (一)圖形直觀看法改變

在「圖形旋轉、翻轉後是否相似」的測驗內容中，我們分成「圖形旋轉」與「圖形翻轉」計算學生答對率，在「圖形旋轉是否相似」，後測答對率高於前測。但「圖形翻轉是否相似」，活動前，原有 42.86% 的學生能正確選出大小相同左右相反的字母，是原字母的相似圖。活動後，剩 28.57% 的學生答對，即有 71.43% 的學生未正確辨認經過鏡射或左右相反的字母是相似形。原因可能是我們的活動主要先聚焦於平移、旋轉的圖形，尚未讓學生有機會思考鏡射後的圖形。

而「非封閉曲線的放大縮小圖」的測驗內容中，原本 52.38% 的學生認為所有圖形皆可放大縮小，活動後，剩 47.62% 的學生答對，代表 52.38% 的學生認為只有封閉曲線的圖形才有放大縮小圖，猜測是因為活動中的圖形皆為封閉曲線，故導致學生有此誤解。

「封閉曲線的放大縮小圖」的測驗內容中，有 91.27% 的學生原本只用圖形直觀判斷放大縮小圖，活動後，學生會使用直尺量測，確認兩圖形的對應邊長度是否成比例，答對率提高到 94.44%。

## (二)兩相似形邊長成比例

在這個測驗目的中，「利用格子點找相似形」與「利用相似形性質判斷圖形」後測答對率皆高於前測，其中「利用相似形性質判斷圖形」，後測答對率為 100%，前測學生答對率為 85.71%，表示 14.29% 的學生認為邊長不同但角度相同的菱形，並不是相似形，活動後，學生學到兩圖形邊長成比例且角度相同，則兩圖形相似，數學知識產生改變。

## (三)縮放中心可以是任意的點

在「判斷圖形的縮放中心」的測驗內容中，詢問學生哪些點可當成圖形的縮放中心。只有 14.29% 的學生選擇縮放中心可以是圖形外的點，33.33% 的學生選擇縮放中心在圖形邊上的點，但縮放中心在圖形頂點上與圖形內，則分別有 57.14% 與 76.19% 的學生答對，表示部分學生因滑手機時只能滑螢幕內部，沒辦法滑到手機外或手機邊上，故認為縮放中心不可以在圖形外與圖形邊上。

在「利用縮放倍率畫相似圖」，我們給定圖形上一點，請學生以該點為縮放中心，畫出縮放倍率為  $\frac{1}{2}$  的圖，僅 33.33% 的學生能正確使用縮放中心畫出縮小圖，但若不以給定的縮放中心，而是以對應邊成比例，對應角相等，則有 76.19% 的學生能正確畫出縮小圖，代表學生在作圖時，會利用國小已學過的方格紙作圖，因此，需有更明確的活動來奠定「縮放中心可以是任意的點」，亦須將繪圖融入活動設計中。

## (四)縮放中心與縮放圖任意對應點成一直線

活動前學生並沒有「縮放中心與圖形所有對應點成一直線」的觀念，活動後，在「不同圖形縮放中心與圖形對應點的關係」有 67.86% 的學生答對，在這 67.88% 的學生中，有 28.57% 的學生能將此觀念遠遷移到五邊形的放大縮小圖，即不只一條對應直線。在「同一圖形縮放中心與圖形對應點的關係」則有 61.90% 的學生答對，表示經由電腦操作，判斷拉動哪個方向可得到放大縮小圖的活動，讓學生印象深刻。除了量表資料，從訪談資料亦可得到此結論：

SA：原本以為拉3和8可以等比例，後來老師在台上示範的時候發現不是，因為它們不是對



角線。只拉一邊會變形。

SE：有五條線，哪一條線可以正確放大縮小。沿著哪一條拉不會變胖變瘦。一開始大家都猜測(45度)的這兩條，但其實要畫新的，不然也會變肥。

## 二、情意面向改變

本小節將由表 4「縮放繪活動情意問卷」統計得分表，以及學生的訪談資料來回答研究問題：奠基活動後，學生的情意面向有何改變？

我們以 1~6 分來表示「縮放繪活動情意問卷」中各選項的得分，「完全不同意」得 1 分，「很不同意」得 2 分，以此類推，「完全同意」得 6 分，並將各面向的分數與  $\mu = 3.5$  做檢定看是否有顯著性。

表 4

「縮放繪活動情意問卷」統計得分表

面向	題目內容	題號	各題平均得分	平均得分	顯著性 ( $\mu = 3.5$ )
學習興趣	●我喜歡《縮放繪》裡的數學。	第 1 題	4.39	4.32	.000
	●我覺得《縮放繪》很有趣。	第 5 題	4.48		
	●上過《縮放繪》後，我更喜歡利用教具學習數學。	第 8 題	4.35		
	●在上《縮放繪》時我喜歡動腦想。	第 16 題	4.43		
	●上過《縮放繪》後，我更喜歡數學了。	第 19 題	3.96		
對自我的自信評估	●上過《縮放繪》後，我的理解能力變好了。	第 2 題	4.22	4.04	.017
	●上過《縮放繪》後，我的數學能力增強了。	第 3 題	4.13		
	●上過《縮放繪》後，我更會思考了。	第 4 題	4.35		
	●上過《縮放繪》後，我更會推理了。	第 7 題	3.91		
	●上過《縮放繪》後，我比較能學數學了。	第 18 題	3.65		
	●上《縮放繪》對我了解數學有幫助。	第 20 題	4.00		

表 4 (續)

活動後 對未來 課堂 投入	●上過《縮放繪》後，我在數學課時更主動學習了。	第 6 題	3.70	3.95	.053
	●上過《縮放繪》後，我更常和同學討論數學了。	第 9 題	3.96		
	●上過《縮放繪》後，我更敢在數學課發問了。	第 10 題	3.96		
對該活 動的 評估	●未來我想要繼續參與類似《縮放繪》的活動。	第 17 題	4.17	4.13	.012
	●我希望像《縮放繪》這樣的活動以後可以多一點觀念講解。	第 12 題	4.22		
	●我希望像《縮放繪》這樣的活動以後可以多一點題目練習。	第 13 題	3.65		
	●我希望數學課都可以有像《縮放繪》這樣的活動。	第 14 題	4.39		
	●我覺得《縮放繪》的內容豐富。	第 15 題	4.26		

### (一)量表中各面向的比較

#### 1. 學習興趣

學生在「學習興趣」這向度，平均超過 4 分，顯示學生認為該活動有趣。但第 19 題「上過《縮放繪》後，我更喜歡數學了」只有 3.96 分，說明學生並沒有因為這樣的一堂課，帶來很強烈的對數學喜好的改變。

我們亦從學生的訪談，得知情境融入活動確實帶來學生興趣的提升，引起學生的學習動機 (Attention)。例如：

SB：覺得課程內容很有趣，像是到了新環境一樣，很有新鮮感。

SC：金牌不見的故事讓我印象深刻。因為貓咪很可愛。貓咪真的太可愛了。

#### 2. 對自我的自信評估

在「對自我的自信評估」面向平均得分為 4.04 分，即該活動能促進學生的自信心，提高學生的學習興趣。其中第 4 題「上過《縮放繪》後，我更會思考了。」為 4.35 分，第 7 題「上過《縮放繪》後，我更會推理了。」只有 3.91 分，學生認為該活動可以促進思考，但對自己的推理能力仍沒有信心。第 3 題「上過《縮放繪》後，我的數學能力增

強了。」得到 4.13 分，第 18 題「上過《縮放繪》後，我比較能學數學了。」剩 3.65 分，表示學生雖覺得活動後，自己的數學能力增強，卻仍不認為自己能學好數學。

透過與學生的訪談，可知活動有助建立學生的信心（Confidence）亦能讓學生獲得滿足（Satisfaction）。例如：

SB：覺得自己變得像偵探一樣聰明。

SD：「邊邊角角拉一拉」讓我印象深刻。因為我們（後來）答對了。

### 3. 活動後對未來課堂投入

在「活動後對未來課堂投入」面向平均得分為 3.95 分，雖然學生認為該活動有趣，但未來課堂仍會有許多未知的數學內容，學生對課堂的投入持保留態度。第 6 題「上過《縮放繪》後，我在數學課時更主動學習了。」只有 3.70 分，第 9 題「上過《縮放繪》後，我更常與同學討論數學了。」與第 10 題「上過《縮放繪》後，我更敢在數學課發問了。」兩題得分皆為 3.96 分，顯示仍有部分的學生較無法主動學習參與課程。

然而從學生的訪談中，我們知道若未來的數學課能兼顧情意與認知，學生投入課堂的意願會大幅提高。例如：

SF：我會推薦學弟妹上這堂課，因為很好玩。有些人數學不太好，但上了這堂課可以更聽得懂，因為這個內容比較有情境，可以自己想一下，但沒想到其實這樣的情境就是數學，可能就對數學比較有興趣，不像平常數學課，不懂的地方還是不懂，而放棄了。

### 4. 對活動的評估

在「對該活動的評估」面向平均得分為 4.13 分，學生對該活動大多持有正向的肯定，唯獨第 13 題「我希望像《縮放繪》這樣的活動以後可以多一點題目練習。」得分 3.65，說明學生雖喜歡該活動，但不喜歡做題目。

與學生訪談後，我們得知好的活動設計可以讓學生從做中學，與同儕討論，亦可促進思考，增加學生解題的信心（Confidence）。例如：

SC：像是在做一件很簡單的事情，跟著做就學會了縮放的概念。

SE：大家可以互相討論，有意見不同的時候，可以一起找出答案，同時也可以動腦。

## 伍、結論與建議

本研究以「縮放繪」作為奠基進教室的活動之一，並評估檢驗此活動成效。

### 一、結論

我們依據本研究的奠基目標討論其活動成效，說明如下：

#### (一)縮放中心可以是任意點

原本預期學生可由活動設計，滑手機將圖片放大縮小，學到「縮放中心可以是任意點」，但由於設計過於隱晦，測驗結果看來成效不佳。

#### (二)放大縮小圖的任意對應長度成比例

在「手機縮放圖」活動中，學生需多選幾個部分來量測原圖與縮放後截圖的關係，且教師於學生量測後介紹「縮放倍率」的定義，有助於學生發現放大縮小圖的任意對應長度成比例。

#### (三)縮放中心與縮放圖的任意對應點成一直線例

學生透過動態的影像觀察到拉動「45 度角線」無法得到縮放圖，並於教師拖拉圖片的過程中，發現須拉動「對角線」才能得到縮放圖。教師亦詢問學生該對角線與 45 度角線有何不同，提示學生觀察縮放中心與其所有對應點的關係，奠定學生縮放中心與其所有對應點成一直線的觀念，我們亦從訪談的資料中，得知該活動讓學生印象深刻。

#### (四)發展主動思考的策略與態度

教師於課堂中利用提問促進學生解答的過程中主動思考，且學生透過與同儕間討論反思，培養正向的學習態度。我們從問卷結果知道該活動有助於提升學生的學習興趣與自信。例如，學生在問卷第 3 題：「上過《縮放繪》後，我的數學能力增強了。」與第 4 題：「上過《縮放繪》後，我更會思考了。」分別拿到 4.13 分與 4.35 分。

### 二、建議

基於上述的研究結果與學生的訪談資料，我們對未來的教學建議如下：

#### (一)可加強「縮放中心可以是任意點」的觀念

由於該設計沒有將此觀念明確帶給學生，於後測的作圖中，我們發現大部分學生無

法利用縮放中心作圖，未來活動可增加相似形繪圖。

### (二)需考慮活動中概念發展的限制

因活動設計並沒有討論鏡射後的圖形是否為相似形，以至於學生活動後不敢選鏡射後的圖形，且活動內容的圖形皆為封閉曲線，學生誤以為只有封閉曲線才有放大縮小圖，不是封閉曲線則沒有放大縮小圖，學生被侷限於活動的內容中。建議可於活動後面增加鏡射且非封閉曲線的圖形讓學生觀察。

### (三)活動設計讓學生可以操作動態呈現

活動只有一位學生上台操作電腦，其餘學生則看著電腦螢幕體會「縮放中心與縮放圖所有對應點成一直線」，建議至少每組一台 iPad，由學生自行操作，體會拉動不同方向與圖形放大縮小的關係，由動態過程加深學生印象。

### (四)情境融入教學文字量多時可配合閱讀理解教學

第一次試教縮放繪活動的學生在訪談中有提到，因平常數學課不太會閱讀這麼長的內容，課本上題目皆很簡單明瞭，一開始閱讀「消失的金牌」的敘述時，不清楚題目問題是什麼。第二次試教時，我們搭配辨識再製、解釋連結與反思推理的閱讀理解提問，不僅能協助學生閱讀理解情境，也能引起學生的學習興趣（問學生：警察是男的還是女的呢？有些學生回答：它沒寫。另一些學生笑答：它有寫，警察伯伯。）

本研究為相似形提供有效的教學方式，不過分析學生表現後，發現活動仍有些需改進的地方。未來會將本研究的設計活動加以修改，使其相似形的觀念更加完整，以達到更好的成效。

## 誌謝

特別感謝提供設計意見的專家學者們、協助訪談學生的助理與研究生們，以及感謝審查者提供修改建議，讓本文得以更加完善。本研究亦感謝教育部「就是要學好數學：數學奠基進教室模組開發與推廣」計畫與科技部專題研究計畫的經費補助（MOST 106-2511-S-003-003）。

## 參考文獻

- 中華民國科技部 (2015)。臺灣 PISA 2012 結果報告。檢自<http://www.most.gov.tw/>
- 國家教育研究院 (2014)。十二年國民基本教育課程發展指引。新北市：國家教育研究院。
- 陳建亨、楊凱琳 (2014)。題型對學生解題表現的影響—以相似形內容為例。中華民國第三十屆科學教育年會論文發表，臺北市：國立臺灣師範大學科學教育研究所，12月5-6日。
- 陳創義 (2003)。青少年的數學概念學習研究-子計劃六：青少年的幾何形狀概念發展研究。行政院國家科學委員會專題研究計畫。
- 楊凱琳 (2017)。子計畫一：創新的課前奠基與課中建築活動模組之發展性研究 (計畫編號：MOST 106-2511-S-003-003)。臺北市：國立臺灣師範大學數學系 (所)。
- Astleitner, H., & Lintner, P. (2004). The effects of ARCS-strategies on self-regulated learning with instructional texts. *E-Journal of Instructional Science and Technology*, 7(1).
- Aşıksoy, G., & Özdamlı, F. (2016). Flipped classroom adapted to the ARCS model of motivation and applied to a physics course. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 12(6), 1589–1603.
- Campbell, D. T., & Stanley, J. C. (1963). *Experimental and quasi-experimental designs for research*. Boston: Houghton Mifflin.
- Chen, Y.-T. (2014). A study to explore the effects of self-regulated learning environment for hearing-impaired students. *Journal of Computer Assisted Learning*, 30(2), 97–109. doi: 10.1111/jcal.12023
- Feng, S.-L., & Tuan, H.-L. (2005). Using ARCS model to promote 11th graders' motivation and achievement in learning about acids and bases. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 3(3), 463–484. doi: 10.1007/s10763-004-6828-7
- Karakis, H., Karamete, A., & Okçu, A. (2016). The effects of a computer-assisted teaching material, designed according to the ASSURE instructional design and the ARCS model of motivation, on students' achievement levels in a mathematics lesson and their resulting attitudes. *European Journal of Contemporary Education*, 15(1), 105–113. doi: 10.13187/ejced.2016.15.105
- Keller, J. M. (1987). Development and use of the ARCS model of instructional design.

- Journal of Instructional Development*, 10(3), 2–10. doi: 10.1007/BF02905780
- Keller, J. M. (2010). *Motivational Design for Learning and Performance : the ARCS Model Approach*. New York : Springer. doi: 10.1007/978-1-4419-1250-3
- Lin, F.-L. (2015). *Just do math Project proposal of Ministry of Education Unpublished*.
- Li, k., & Keller, J. M. (2018). Use of the ARCS model in education: A literature review. *Journal of Computer & Education*, 122, 54–62.
- Liao, H.-C., & Wang, Y. (2008). Applying the ARCS motivation model in technological and vocational education. *Contemporary Issues In Education Research*, 1(2), 53– 58.
- Moller, L., & Russell, J. D. (1994). An application of the ARCS model design process and confidence-building strategies. *Performance Improvement Quarterly*, 7(4),54–69.
- OECD (2010). PISA 2012 Mathematics Framework. OECD, Paris. Retrieved from <http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/46961598.pdf>
- Paas, F., Tuovinen, J. E., Merriënboer, J. J. G., & van and Darabi, A. A. (2005). A moti-vational perspective on the relation between mental effort and performance: Optimizing learner involvement in instruction. *Educational Technology Research & Development*, 53(3), 25–34. doi: 10.1007/BF02504795
- Zhang, W. (2017). Design a civil engineering micro-lecture platform based on the ARCS model perspective. *International Journal of Emerging Technologies in Learning (IJET)*, 12(01), 107–118. doi: 10.3991/ijet.v12i01.6487

侯雪卿 (2019)。

以奠基進教室為取向的數學素養教學設計與實施：以國小柱體和錐體為例。

臺灣數學教師, 40 (1), 50-67

doi: 10.6610/TJMT.201904\_40(1).0003

# 以奠基進教室為取向的數學素養教學設計與實施： 以國小柱體和錐體為例

侯雪卿

嘉義縣興中國民小學

十二年國教素養導向的數學教學就是希望將知識、能力與態度就像麻糬一樣揉合在一起，全觀看待學生學習的脈絡。筆者以奠基進教室為取向，選用國小柱體和錐體設計為數學素養教學案例，以五個子活動，鋪成可體現的學習情境：一、觀察 2D 圖片，描述城堡屋頂與城牆；二、積木搭建 3D 實體，描述城堡屋頂與城牆；三、積木的自由分類與特性描述；四、師生共建，柱體與錐體的命名；五、簡單推理，根據立體的一面去推測柱體或錐體。透過教學的實施和結果發現，城堡情境與遊戲激發了學生的學習興趣與正向態度；幾何立體素材的體現，培養學生正確使用工具的學習態度；透過觀察、分類與推理的學習歷程，引動學生主動思考和各項數學能力的涵養，形成有感的學習，促進學生在幾何概念層次的提升和幾何語言發展的精緻性。

**關鍵詞：**柱體和錐體、幾何語言、幾何概念、數學素養教學、數學奠基進教室



## 壹、前言

十二年國教以培養下一代的核心素養做為課程改革的重點，透過三面九項核心素養所建構出的素養導向課程，協助學生在快速變遷之未來社會，解決生活所可能面臨的各種問題，並成為一位終身學習者（教育部，2014），但要如何在課堂進行素養導向教學來回應課程改革的理想呢？這是第一線老師未來實踐課程改革的重要任務與挑戰。

林福來（2012）認為數學素養是面對現實問題，可以把學過的知識和能力用出來，數學素養的加強首先要打破「數學很難」的迷思，數學不該讓我們焦慮，而是天天用得到的知識，每個人應該要先從喜歡數學、對數學有自信，才有可能加深。數學領域新課綱亦指出國民教育的重點在於學習對生涯有用的知識與能力。數學知識雖然本質抽象，卻具有廣大的應用面向與深刻的應用層級。如何在不同年齡、不同能力、不同興趣或領域，皆能獲得足以結合理論與應用的數學素養，是國民數學教育的重要目標（教育部，2018）。可見，素養導向的數學教學就是希望將知識、能力與態度就像麻糬一樣揉合在一起，全觀看待學生學習的脈絡（林福來、林柏寬，2018）。

十二年國教有關立體形體的學習，皆安排在高年級幾何教材的範疇，中低年級以平面幾何教材為主（教育部，2018）。可見，在國小幾何課程中，高年級是學習立體形體的關鍵時期，而柱體與錐體便是高年級立體形體的主要教材之一。此外，柱體與錐體在整個立體形體的學習脈絡亦扮演了二個重要角色：一是讓學生認識更多立體形體，包含了有彎曲面的圓柱與圓錐，這些立體形體的概念若能得到良性的發展，將有助於日後國中階段理解簡單立體形體的三視圖與平面展開圖等新概念的學習；二是作為幾何量的前置概念，學生必須先充分掌握柱體與錐體的基本概念、其構成要素及數量性質，有了完整的概念發展後，才能過渡到其體積與表面積的計算（教育部，2018）。然而，實體的立體形體轉化成二維圖像的過程是困難的，初期學習需要給予具體的操作，藉由感官知覺物體存在的性質和形體樣貌，發展空間視覺化，學生才能將立體形體的實體與課本上的圖形做有意義的連結（李函，2016）。換言之，柱體與錐體的學習必須植基於豐富的具體經驗，從歷程中不斷學習與探索，才能逐漸形成概念。這種重視學習的主體性和歷程性，符應了十二年國教數學領域課程綱要提倡學習表現的具體展現：「從操作中覺察、形成概念，甚至簡單連結各概念的各種活動。」（教育部，2018），這正是筆者選用柱體與錐體為數學素養教學案例的理由。

綜合上述，面對這一波新課綱無可迴避的任務與挑戰，筆者選用國小柱體和錐體做

為數學素養教學案例，闡述如何轉化數學素養的理念於教學設計，希冀提供未來第一線教師進行素養導向教學設計之參考案例。

## 貳、教學設計

### 一、柱體與錐體單元的教學需求

Van Hiele 夫婦將個人的幾何概念發展分成五個層次（層次 1 到 5），這五個層次是有次序性的，也就是必須擁有前一層次的概念，才能有效進行下一層次的教學活動（Crowley 著，譚寧君譯）。就國小階段高年級學童的幾何概念發展，大約在 Van Hiele 幾何發展層次 2 到 3 的過渡期，也就是從認識形體的組成要素之間的關係過渡到局部推理的階段（李源順，2018），學生可以透過觀察、比較形體間的異同，進而辨識出柱體與錐體，並了解其組成要素和要素之間的關係。

筆者分析五年級教科書關於柱體與錐體的教材內容，多半以頂端尖尖像錐子一樣的形體稱為錐體、像柱子一樣的形體稱為柱體，再從這兩類以底面為圓形和多邊形分成：角柱與圓柱、角錐與圓錐，然而，這些分類與命名都是教科書的觀點，筆者認為若以教科書的定義直接告知或要求學生記憶定義，真正的學習並不容易出現。Van Hiele 理論告訴我們，學童的幾何學習經驗才是影響其概念階段發展的重要因素（Van De Walle 著，2001/張英傑、周菊美合譯，2005），因此，筆者認為立體的分類可從學童的自然思維著手，鼓勵觀察、自由分類與討論分享，一來可以豐富幾何視角，有利於形體組成要素的掌握，二來學生也能藉由溝通、表達和辯證的歷程，精緻化幾何語言的描述。

### 二、以數學奠基進教室為取向的數學素養教學設計

數學奠基進教室的教學設計是基於現場教學的需求，將原先使用於課外營隊的模組活動加以轉化用於實際課堂中（國立臺灣師範大學數學教育中心[師大數學教育中心]，2019），包含有三個設計理念、五個設計原則、以及五項策略與工具（師大數學教育中心，2018），分述如下：

#### （一）三個設計理念

1. 第一要義是要激發學生的內在學習動機，以發展正向學習態度樂於學。
2. 學習是學生主動營造數學感的過程。

**3. 教學活動是提供師生、生生共建數學的機會。**

**(二)五個設計原則**

**1. 引動思考**

- (1) 目標：以保障內在動機並主動學習。
- (2) 詮釋：在動手做、玩遊戲、解決任務的時候，要設計激發（引動）學生將具體操作轉換成內在思考的脈絡。

**2. 營造數學感**

- (1) 目標：促進有感地學習，達成了解。
- (2) 詮釋：透過具象化（embodiment）、可體現（realization）、探究（inquiry）活動，以促進學生將知覺性操作轉化成概念性與程序性運思。

**3. 共建數學**

- (1) 目標：促進討論，達成共建數學。
- (2) 詮釋：活動能提供學生發展表達思維的語言與媒介（例如：圖像、表格、字詞等），以達成師生共建數學的目的。

**4. 診斷介入**

- (1) 目標：診斷概念，促進思考。
- (2) 詮釋：活動設計及教學當下要能提供媒介或平台促成學生釐清並推進思維，以達成數學課程的學習目標。

**5. 單元設計滲透**

- (1) 目標：融單元教學於奠基脈絡中。
- (2) 詮釋：奠基活動的精神（原則1、2、3）在整個單元的教學與學習設計各面向都能充分體現。

**(三)五項策略與工具**

動手做、遊戲、有目標的系統性觀察活動、表達與溝通活動、論辯活動。

十二年國教數學領域課程綱要從五個基本理念，呼應《總綱》的理念與願景：數學

是一種語言、一種實用的規律科學、一種人文素養出發、應提供每位學生有感的學習機會，培養學生正確使用工具的素養。並以六個課程目標，達成願景：一、提供學生適性學習的機會，培育學生探索數學的信心與正向態度；二、培養好奇心及觀察規律、演算、抽象、推論、溝通和數學表述等各項能力；三、培養使用工具，運用於數學程序及解決問題的正確態度；四、培養運用數學思考問題、分析問題和解決問題的能力；五、培養日常生活應用與學習其他領域/科目所需的數學知能；六、培養學生欣賞數學以簡馭繁的精神與結構嚴謹完美的特質（教育部，2018）。

林福來（2012）認為數學素養是面對現實問題，可以把學過的知識和能力用出來。數學素養的教學就是將知識、能力與態度就像麻糬一樣揉合在一起，全觀看待學生學習的脈絡（林福來、林柏寬，2018）。

綜合上述，筆者認為數學奠基進教室的教學設計，以學習者為主體，數學概念、方法或原理原則是經由主動探索與他人互動中建構而成的，強調與情境脈絡的連結，以及關照認知、技能、情意的統整，充分體現了數學素養教學內涵，並能符應數學領域課程綱要倡導的五個基本理念和六個課程目標的實踐，可作為數學素養教學設計的一種取向。

因之，筆者以奠基進教室為取向，參照課程綱要領域核心素養和學習重點，以及轉化課綱六個課程目標作為促進數學素養的檢核依據，設計出國小柱體與錐體的數學素養教學，如表 1 所示。

表 1

【柱體和錐體】的教學設計表

活動名稱	柱體和錐體	節數	3 節
	A2：系統思考與解決問題。		
核心素養	數-E-A2		
與領域素養	具備基本的算術操作能力、並能指認基本的形體與相對關係，在日常生活情境中，用數學表述與解決問題。		
學習表現	s-III-3 從操作活動，理解空間中面與面的關係與簡單立體形體的性質。		
學習內容	S-5-7 球、柱體與錐體：以操作活動為主。認識球、(直)圓柱、(直)角柱、(直)角錐、(直)圓錐。認識柱體和錐體之構成要素與展開圖。檢查柱體兩底面平行；檢查柱體側面和底面垂直，錐體側面和底面不垂直。		

表 1 (續)

設計理念	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 布置城堡學習情境，營造學習的需求感。</li> <li>2. 透過自由分類，豐富學童視角，充分掌握幾何組成要素與圖形的關係。</li> <li>3. 加入簡單幾何推理，激發思考。</li> </ol>
數學素養的 預期表現	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 透過觀察、操作、分類與推理等多元的學習歷程，表現對數學學習的興趣、信心與正向態度。</li> <li>2. 在學習活動進行中，表現學習的好奇心及觀察規律、抽象、推論、溝通和數學表述等各項能力。</li> <li>3. 能運用各式幾何立體積木進行學習，展現正確使用工具的學習態度。</li> <li>4. 能從幾何屬性進一步思考問題、分析問題，並能據理而推，解決問題。</li> <li>5. 藉由歐洲城堡的情境，能學習其他領域所需的數學知能，如：歐洲城堡建築的特色與文化。</li> <li>6. 能以不同的屬性將多種立體形體區分成簡單幾類和命名，進而欣賞數學的簡潔與結構嚴謹完美的特質。</li> </ol>
學習歷程	<p>在可體現的學習情境中，透過觀察、分類與推理，認識柱體與錐體。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• 活動（一）觀察 2D 圖片，描述城堡屋頂與城牆</li> <li>• 活動（二）積木搭建 3D 實體，描述城堡屋頂與城牆</li> <li>• 活動（三）立體形體的自由分類與特性描述</li> <li>• 活動（四）師生共建，柱體與錐體的命名</li> <li>• 活動（五）簡單推理，根據立體的一面去推測柱體或錐體</li> </ul>
評量方式	<p>學習單、口頭報告及實作評量。</p>
學生迷思/ 教師診斷介 入	<p>三角柱的分類是學生最易混淆的。將三角柱改變放置的方位，學生會認為三角柱同樣有尖尖的頂點，因而歸類到角錐的那一堆。建議教學者傾聽了學生分類的理由，可從組成要素來比較頂部的頂點數、上下底面數，發現其差異，加以釐清；以及探索組成要素的關係，底面與側面的垂直或不垂直、側面形狀、全等的底面，發現其差異，加以釐清。</p>

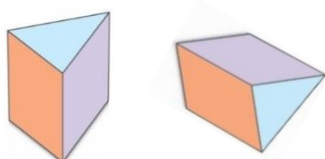


表 1 (續)

教學活動	教學流程說明	時間	教學資源
活動(一) 與城堡 的邂逅	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 教師揭示美女與野獸的圖片、詢問學生是否讀過此童話故事？請同學或由教師簡述其故事大綱。</li> <li>2. 播放 2017 美女與野獸電影版的預告片，請學生觀看並回答問題：「美女與野獸居在哪裡？」。</li> <li>3. 教師說明美女與野獸居住城堡，該城堡在法國香波城堡拍攝。</li> <li>4. 教師說明城堡的由來和介紹網路評比歐洲十大城堡。</li> <li>5. 四人一組，選擇歐洲十大城堡其中一張城堡圖片，先觀察城堡的屋頂和城牆，再介紹其特點。</li> </ol>	20	影片 圖片
活動(二) 蓋我的城堡	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 教師提供一些積木，4 人一組，選擇 20 個積木搭建城堡，搭建後完成工作單 1</li> <li>2. 請小組介紹搭建城堡的名字和特色。</li> </ol>	20	積木 1 組 工作單 1
活動(三) 分類遊戲	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 4 人一組，提供 12 種立體形體，請學生觀察並分成 2-4 堆。將把分類的理由寫在紀錄單，越多越好。</li> <li>2. 每一張紀錄單代表 1 堆，如果分成 3 堆就要完成 3 張紀錄單，紀錄單上寫出分成 1 堆的理由和貼好分堆後的立體形體圖卡。</li> <li>3. 組間競賽遊戲規則說明： <ul style="list-style-type: none"> <li>• 請小組上台發表分類的想法，進行三回合，計分決定勝負。</li> <li>• 每回合開始比賽之前，小組有 5 分鐘的時間可以先討論。</li> <li>• 每一回合都以猜拳決定先後順序，一組</li> </ul> </li> </ol>	40	12 種立體 形體和圖卡  紀錄單 (至少 10 張以上)  彩色筆 膠水

表 1 (續)

	<p>只能發表一次。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>分類說法必須不同於其他組已經提過的分類理由，學生要討論與辯證，老師把分類的依據記錄下來。</li> <li>第一回能合宜提出分類依據，得 1 分。</li> <li>第二回能合宜提出分類依據，得 3 分。</li> <li>第三回能合宜提出分類依據，得 5 分。</li> </ul> <p>4. 全班整理出分類的結果。</p> <p>5. 獎勵獲勝的組別。</p>		
<p>活動(四) 你的名字</p>	<p>1. 老師揭示課本的分法、命名並比較與全班分類結果的差異。</p> <p>2. 揭示課本分成柱體與錐體二類的命名以及理由。</p> <p>3. 揭示課本將柱體再分成角柱和圓柱；錐體再分成圓錐和角錐共四類的命名以及理由。</p> <p>4. 揭示課本以底面形狀為角柱、角錐的命名以及理由。</p>	<p>20</p>	<p>各組活動(三)的紀錄單、12種立體形體</p>
<p>活動(五) 這是誰</p>	<p>老師布題，學生推理</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>有一個面是三角形，請問這個立體形體是錐體或柱體？並說明理由。</li> <li>底面形狀是圓形，請問這個立體形體是錐體或柱體？並說明理由。</li> <li>側面的形狀是長方形，請問這個立體形體是角柱、圓柱、圓錐或角錐？並說明理由。</li> </ul>	<p>20</p>	<p>工作單 2 白板和白板筆</p>

### 參、教學實踐結果與討論

在素養教學下，學生孕育的「數學素養」又會是什麼？筆者以十二年國教課綱六個課程目標作為檢核依據，整理歸納出學童在五個活動符合數學素養的學習表現，如表 2。各活動教學實施結果與討論，分述如下：

**表 2**  
在五個活動符合數學素養的學習表現

教學活動 數學素養的預期表現	活動 (一)	活動 (二)	活動 (三)	活動 (四)	活動 (五)
1. 透過觀察、操作、分類與推理等多元的學習歷程，表現對數學學習的興趣、信心與正向態度。	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>		<input type="radio"/>
2. 在學習活動進行中，表現學習的好奇心及觀察規律、抽象、推論、溝通和數學表述等各項能力。	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
3. 能運用各式幾何立體積木進行學習，展現正確使用工具的學習態度。		<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
4. 能從幾何屬性進一步思考問題、分析問題，並能據理而推，解決問題。			<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
5. 藉由歐洲城堡的情境，能學習其他領域所需的數學知能，如：歐洲城堡建築的特色與文化。	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>			
6. 能以不同的屬性將多種立體形體區分成簡單幾類和命名，進而欣賞數學的簡潔與結構嚴謹完美的特質。			<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	

### 一、活動（一）與城堡的邂逅

表 3 是各組學生描述最喜愛城堡的屋頂與城牆。從表 3 看來，各組學生會用生活的語言，如：城牆蓋得很高、屋頂像斗笠一樣……和先備的幾何知識，如：三角形、半圓... 描述了喜愛城堡的屋頂和城牆的外觀輪廓，此時，我們可以看到孩子在這個活動中，他們尚未具有分析的能力，對幾何概念停留在 Van Hiele 第 1 層次視覺期，以生活的眼光



來賞識城堡建築的特色（Crowley 著，譚寧君譯）。

此外，筆者亦在幾位學生課後心得書寫中，感受到學生學習的興趣與正向學習的態度：「選城堡的活動，我很喜歡，又能分組討論，很有趣！」、「令我印象最深刻就是城堡」、「令我印象最深刻就是介紹城堡，每個城堡都很美，背後有一段故事……」、「很好玩，我希望每天都能上一樣的課。」

綜合上述，筆者認為學生在活動（一）觀察和描述城堡特色的活動，聆聽故事和領略建築之美，小組彼此討論與合作，呈現出學習數學的好奇、興趣與正向態度，學習已達到數學素養第 1、2 和 5 點之預期表現。

表 3

活動（一）三組學生的描述語言表

組別	第一組	第二組	第三組
語言描述	屋頂是尖尖的、斜斜的，城牆蓋得很高，還有瞭望台。	屋頂是尖尖的、三角形，城牆是半圓、橢圓，還有正方形的窗戶。	屋頂像斗笠一樣有各式各樣的屋頂，城牆和其他城堡不一樣，很有特色。

## 二、活動（二）蓋我的城堡

表 4 是各組學生以積木搭建城堡，描述其屋頂與城牆。活動（一）和活動（二）相同點皆是讓學生覺察城堡屋頂與城牆的特徵，並以數學語言來溝通和表述；差異點是情境脈絡的轉換，活動（一）是平面圖片觀察，感官經驗以視覺為主，活動（二）是實體的積木搭建，積木是一個具體可操弄的幾何立體物件，利於學生從幾何屬性進行觀察，此外，搭建城堡的情境增加了動手做和空間視覺的感官體驗。

學生透過搭建城堡，體驗各式各樣積木彼此間有不同的結合方式，頂端尖尖的積木適合搭建成屋頂，具有上下平平的積木適合搭建成城牆，實體 3D 的情境，讓各組學生描述城堡的屋頂與城牆更具體且豐富了。以第一組為例，描述城牆時的語言不同於活動（一）的生活用語，改以幾何形狀描述，如：正方形、長方形和六角形的長柱，而第三組在描述屋頂的語言變化，也相似於第一組的學習軌跡。

雖然，活動（二）學生的幾何思維仍是停留第 1 層次，但幾何語言卻因著平面到實體的情境轉換、立體幾何物件的加入、動手操作和空間視覺的感官經驗，在描述上開始

有所變化。筆者從孩子的表現，領會了 108 年數學領域綱要中，提倡「數學是一種語言」的理念，數學的發展是融入自然語言的生活經驗，透過語言連結幾何思維，學習有感，學生很自然地在學習情境中將所看、所知進行連結與溝通，表述其有意義的思考。

表 4

活動(二)三組學生的描述語言表

組別	第一組	第二組	第三組
語言描述	屋頂是尖尖的、橢圓的，城牆有正方形、長方形和六角形的長柱。	屋頂是尖尖的、圓圓的，牆壁多樣化有圓的和平的。	屋頂是尖尖的、城牆多樣化。

綜合上述，筆者認為學生在活動(二)運用各式幾何立體積木進行搭建城堡的活動，組間彼此交流，相互學習，以數學語言溝通和表述，學習已達到數學素養第 1、2、3 和 5 點之預期表現。

### 三、活動(三)分類遊戲

表 5 是各組將 12 種立體形體(如圖 1)自由分類的結果，共有四種，分別以立體形體的不同屬性：頂部、底部、側面、以及邊角一樣與不一樣，加以分析，其分類的結果呈現遠比教科書的內容更豐富。

第一種分類是以立體形體的頂部區分成尖尖的和平平的，恰為課程手冊 S-5-7 學習內容柱體與錐體兩種。然而學生的分類標準和課綱的定義在觀點上有所差異，學生的分類看到的是立體形體頂部的屬性，形成柱體與錐體分類的概念化，課綱以構成要素的面、頂點、個數和幾何性質來區分，柱體指的是都有上下兩個全等且平行的底面，錐體則是都有一個底面，而上方則有一個頂點(教育部，2018)。

第二種分類是以立體形體的底部區分成圓的和有角的，亦即為圓柱和圓錐、角柱與角錐兩種。雖然教科書的內容沒有出現這種分類結果，但卻有以底部形狀作為分類標準與命名，將柱體與錐體再二分為角柱和圓柱、角錐和圓錐。因此，筆者非常喜悅，學生從另一個視角觀看立體形體，並以平面幾何角的組成要素做為分類標準。

第三種分類是以立體形體的側面區分成圓的、三角形、多邊形，亦即為圓柱和圓錐、角錐、角柱三種。其中，多邊形的描述，筆者有私下追問該組學生，多邊形指的是什麼？學生回答為：周圍的形狀(亦即為側面的意思)為長方形(指著每一個側面)，有很多

個面，這些面連起來就是多邊形，可見，若以形體的單一個側面來看，學生知道是長方形，但立體形體的多個側面已經形成新的空間物件，對學生而言是新的視覺體驗，於是，便連結舊經驗多邊形做為表述的幾何語言。雖然，教科書沒有出現這種分類結果，但後續教材內容安排卻有以側面形狀的差異作為圓柱、圓錐、角錐與角柱之視圖、透視圖與展開圖等二維圖像的學習。

第四種分類是將立體形體分成頂端是尖的、底部是圓的、正多邊形或不是正多邊形，亦即為角錐、圓柱和圓錐、正角柱、直角柱四種。換言之，學生的視角同時停留在頂部與底部，以立體形體的上下特徵作為觀察重點，同時，還加入多邊形的幾何概念，將以底面是否為正多邊形，將角柱再分成兩類，即是數學上的所謂正角柱和直角柱。雖然，教科書的內容沒有出現這種分類結果，課程手冊 S-5-7 學習內容也說明小學的立體形體只處理最端正的形體，在活動或課本中都不需要加上「直」或「正」的名稱，但學生仍以邊的性質作為分析的觀點，是值得肯定的。筆者認為當此種分類結果出現時，應先肯定學生的幾何思維，並傾聽學生的說法，若讀者擔心非課本的分類標準，可以告訴學生未來會有這樣的分類與命名，不在本節課中做討論。

此外，幾位學生課後心得書寫寫到：「可以分組比賽和玩遊戲，和平常數學課很不一樣」、「我很喜歡這堂課，因為可以和朋友一起合作」、「可以實際動手做」。

綜合上述，我們可以看到學生在活動(三)已經進展到 Van Hiele 第 2 層次分析期，具有分析的能力，並非只有直觀描述立體形體的外形，而是以幾何屬性進一步思考、分析，將多種立體形體區分成簡單幾類，進而欣賞數學的簡潔與結構嚴謹完美的特質（Crowley 著，譚寧君譯）。語言的陳述更加精緻，簡化成幾何的用語，例如：三角形、多邊形、正多邊形。筆者認為分類遊戲引發學生高度的學習興趣、分類結果的豐富性、立體形體共同屬性的規律、幾何描述的語言、思考問題與分析能力，學習已達到數學素養第 1、2、3、4 和 6 點之預期表現。

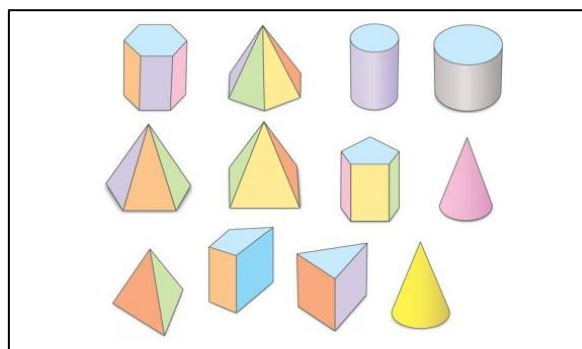


圖 1 12 種立體形體圖

表 5

活動（三）三組學生的描述語言表

分類結果	二類	二類	三類	四類
屬性	頂部	底部	側面	頂部和底部 邊和角
語言描述	尖尖的 平平的	圓的 有角的	圓的 三角形 多邊形	頂端是尖的 底部是圓的 正多邊形 不是正多邊形

#### 四、活動（四）你的名字

圖 2 為筆者依據活動（三）的分類結果進行師生共建的命名歷程。由筆者以學生的分類結果和課本定義做連結，比較異同，協助學生從自身的經驗過渡到數學課本上柱體與錐體的命名。

首先，以頂部分二類，引入課本柱體與錐體的命名，此部分的教學程序以筆者的講述為主體，目的只是在介紹專有名詞，讓學生對於柱體與錐體的命名有所認識。

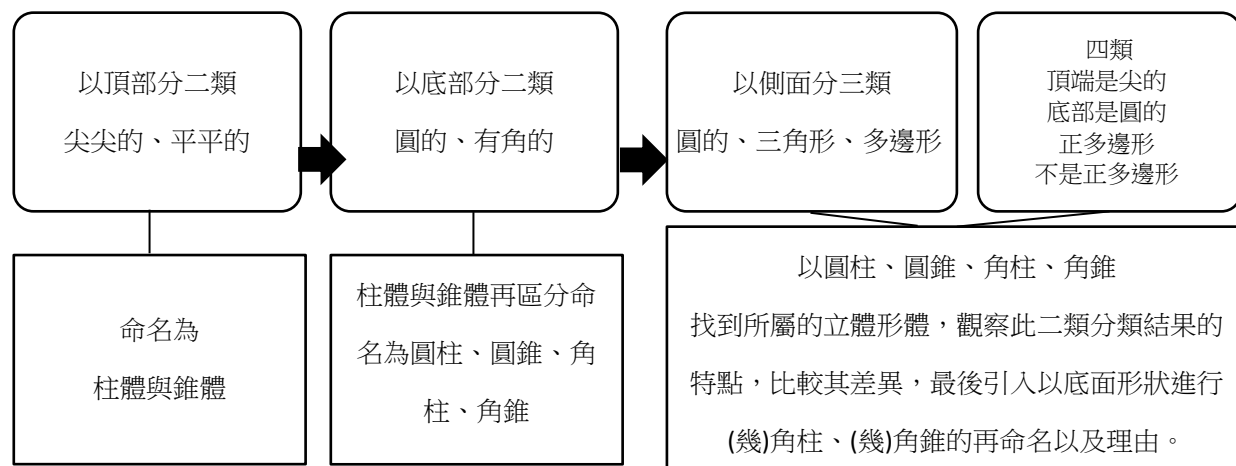


圖 2 活動（四）柱體與錐體的命名歷程

接著，以底部分二類，並以其中一類（例如：有圓的）和關鍵性的提問：「哪些是柱體？哪些錐體？請大家分分看。」「底面是圓的柱體要怎麼稱呼它？底面是圓的錐體要怎麼稱呼它？」將學生的說法和全班分享，與課本的命名：角柱、角錐、圓柱、圓錐做連結，以柱體為例，學生將底面為圓形的柱體稱為圓柱體，底面有角的柱體稱為角柱體，學生的說法等於保留柱體與錐體的原名，再加上底面的幾何性質「圓或角」做為區

隔，筆者認為此種的命名已經把握了欣賞數學的簡潔與結構的特質。最後，再引入第三種分類結果和第四種分類結果，在全班的討論與交流，學生很快能從側面和底面形狀充分掌握各立體形體的組成要素與差異，以及從底面形狀進行(幾)角柱、(幾)角錐的再命名。

綜合上述，活動（四）透過化繁為簡的分類連結教科書的命名，師生以彼此的數學語言溝通、表述，欣賞立體形體的簡潔與結構嚴謹完美的特質，學生已達到數學素養第 2、3、4 和 6 點之預期表現。

### 五、活動（五）這是誰

表 6 呈現 12 位學生在活動（五）三個數學推理問題的答案與人數、以及列舉 3 位學生推理的解題說明。其中，3 位學生的選取依據 107 學年度第一學期數學平均成績，區分前 27% 高成就、中間 46% 中成就、後 27% 低成就三層，分層選出各 1 名，S1 為高成就、S2 為中成就、S3 為低成就。

從問題 1、2、3 的學習結果和答題人數的呈現，可以看出多數學生，他們能夠以立體形體的組成要素之屬性，區辨並進行歸類，作為局部推理的必要條件，據理而推，進而解決問題，已達到教案中第 4 點數學素養之預期表現。其中，S1 高成就學生除了以文字說理，同時還繪製立體形體作為溝通的數學符號，S2 中成就雖然在問題 3 沒有呈現推理的正例，但也能以反例進行說理。S3 低成就學生雖然有覺察到柱體與錐體的屬性，但尚未進展到根據其屬性作為局部推理的條件，加以分析與歸類。




綜合上述，我們可以看到有些學生在活動（五）已經進展到 Van Hiele 第 3 層次非形式歸納（Informal Deduction），他們能夠歸納出立體形體的屬性，也能辨認其分類，所屬族群的分類也能夠了解，因而教科書的命名與定義是有意義的（Crowley 著，譚寧君譯），學習已達到數學素養第 1、2 和 4 點之預期表現。

表 6

活動（五）12 位學生推理答案與人數暨高中低成就學生推理解題的說明表

<b>數學問題</b>	1.有一個面是三角形，請問這個立體形體是錐體或柱體？並說明理由。	2.底面形狀是圓形，請問這個立體形體是錐體或柱體？並說明理由。	3.側面的形狀是長方形，請問這個立體形體是角柱、圓柱、圓錐或角錐？並說明理由。
-------------	----------------------------------	---------------------------------	---

表 6 (續)

	都有可能 10 位	都有可能 10 位	角柱 8 位
答案	錐體	柱體	角柱或圓柱
學生數	2 位	2 位	2 位
			圓柱
			1 位
			作答不清
			1 位
S1	<p>(1)是錐體也是柱體</p> <p>(2)因為三角柱的上底和下底都是三角形，因為三角錐的底面是三角形。</p> 	<p>(1)是錐體也是柱體</p> <p>(2)因為圓錐的底面是圓形，因為圓柱的底面是圓形。</p> 	<p>(1)角柱</p> <p>(2)因為角錐不管是幾角錐，側面都是三角形。因為圓柱圓錐的側面永遠是圓形。</p> 
S2	<p>都有可能。</p> <p>但角柱的只有三角柱，錐體只有角錐才有。</p>	<p>都有。</p> <p>但錐體的圓形面只有一個，但柱體的面有二個。</p>	<p>圓柱的邊沒有角度。</p>
S3	<p>錐體。</p> <p>因為三角形上面是尖的，錐體上面都是尖的，柱體上面是平的。</p>	<p>柱體。</p> <p>因為柱體上面有些圓的。</p>	<p>角柱。</p> <p>因為他的側面是平的，上面也是平的。</p>

## 肆、結論與建議

筆者針對本教學設計與實踐案例進行結論說明，並從數學素養教學、檢核標準、設計策略與實踐方式等方面分別提出建議：

### 一、結論

十二年國教素養導向的數學教學就是希望將知識、能力與態度就像麻糬一樣揉合在一起，全觀看待學生學習的脈絡。筆者以奠基進教室為取向，選用國小柱體和錐體設計為數學素養教學案例，以五個子活動，鋪成可體現的學習情境。透過教學的實施和結果發現，城堡情境與遊戲激發了學生的學習興趣與正向態度；幾何立體素材的體現，培養學生正確使用工具的學習態度；透過觀察、分類與推理的學習歷程，引動學生主動思考和各項數學能力的涵養，形成有感的學習，促進學生在幾何概念層次的提升和幾何語言發展的精緻性。

### 二、建議

#### (一)數學素養教學

筆者以奠基進教室為取向作為數學素養教學設計，但此取向非唯一、全面的教學路徑，鄭章華(2018)認為數學素養導向教學不限於特定的教學方法，應回歸到學習本身，有助於學習者有效建構學科知識和技能，發展對學科正向的態度和動機，為學習者接下來的職涯發展和終身學習做好準備的作為，皆可視為素養導向教學。因此，建議教師必須考量學習者的需求、數學教材內容的難度與特性，彈性的選擇適當的教學取向，落實數學素養的課程與教學設計。

#### (二)數學素養表現的檢核

筆者以十二年國教課綱六個課程目標作為數學素養教學設計與實施的檢核標準。然而，素養的養成往往是漸進的，未必在短短的幾堂課中，便能有顯著差異的養成(林永豐, 2018)。因此，建議教學設計的重點仍於學習主體性，應盡量能提供學生可參與的學習機會，讓學生在歷程中培養能力與情意面向，毋須一味地強調素養表現的檢核。

#### (三)設計策略

筆者以四種策略：動手做、遊戲、有目標的系統性觀察活動、表達與溝通活動進行

數學素養教學設計，以不同形式來促成學生在知識、能力與情意面向的均衡統整。不同策略各有重點與功能，筆者建議在未來欲進行數學素養教學設計的教學者，應就其核心素養與領域核心素養、教學設計的目的，希望達到哪些課程目標，選擇合宜的策略。

#### (四)實踐方式

本教學活動以3節數學課取代原有的教科書內容，進行教學的實踐，協助學生發展新概念為目的。此種方式的益處是不須另外尋求額外的課程節數，也不用擔心教學進度的壓力，乃為目前現場老師較能接納的實踐方式，但非唯一的實施方式。本教學活動亦能用於補救教學或融入校訂課程，以跨領域的方式進行數學探索活動，建議教學者可以視學習者的需求、或針對立體形體的某一概念，彈性選擇實踐方式。

### 參考文獻

- 李 函 (2016)。學習軌道理論融入國小柱體與錐體概念教學實驗之研究 (未出版之碩士論文)。國立臺中教育大學教育學院：臺中市。
- 李源順 (2018)。數學教師專用課本 (第十冊)。出版地：南一書局。
- 林永豐 (2018)。素養導向教學設計的要領。收錄於周淑卿、吳璧純、林永豐、張景媛、陳美如 (編著)，素養導向教學設計參考手冊 (頁01-04)。臺北市：教育部。
- 林福來 (2012)。談數學素養～用數學思考，聰明過生活。查詢日期：108年1月16日，檢自<http://reading.cw.com.tw/Controller?event=READDOC&docid=2000244>。
- 林福來、林柏寬 (2018)。數學素養好難懂？從遊戲中培養的「數學力」。查詢日期：108年1月16日，檢自<https://opinion.cw.com.tw/blog/profile/52/article/7347>。
- 國立臺灣師範大學數學教育中心 (2018)。國立臺灣師範大學數學教育中心2018數學奠基進教室設計師培訓工作坊手冊。出版地：國立臺灣師範大學數學教育中心。
- 國立臺灣師範大學數學教育中心 (2019)。就是要學好數學計畫：數學奠基活動模組開發執行理念，查詢日期：108年1月16日，檢自[http://www.sdime.ntnu.edu.tw/page1/super\\_pages.php?ID=page1&Sn=4](http://www.sdime.ntnu.edu.tw/page1/super_pages.php?ID=page1&Sn=4)。
- 教育部 (2014)。十二年國民基本教育課程綱要總綱。查詢日期：108年1月16日，檢自<https://www.naer.edu.tw/files/15-1000-7944,c639-1.php?Lang=zh-tw>。
- 教育部 (2018)。十二年國民基本教育課程綱要數學領域課程手冊。查詢日期：108年1



月16日，檢自<https://www.naer.edu.tw/ezfiles/0/1000/img/67/191505529.pdf>。

鄭章華（2018）。淺論十二年國教數學素養導向教學。《臺灣教育》，709，83-91。

Crowley, M. L. 著。譚寧君譯（無日期）。**Van Hiele 幾何思考的發展模式**。查詢日期：108年2月10日，檢自[http://www.gtes.ilc.edu.tw/math/Van\\_Hiele\\_\\_幾何思考的發展模式.pdf](http://www.gtes.ilc.edu.tw/math/Van_Hiele__幾何思考的發展模式.pdf)。

John A. Van De Walle 著。張英傑、周菊美合譯（2005）。中小學數學科教材教法 (*Elementary and Middle School Mathematics : Teaching Developmentally*)。臺北市：五南。（原著出版於2001年）。

## 《臺灣數學教師》稿約

2013.09.27 編審委員會會議通過  
2014.09.04 編審委員會會議修訂通過  
2015.05.24 編輯委員會會議修訂通過

2016.05.15 編輯委員會會議修訂通過  
2018.05.12 編輯委員會會議修訂通過

- 壹、《臺灣數學教師》（原名為《台灣數學教師(電子)期刊》）（Taiwan Journal of Mathematics Teachers）（以下簡稱本刊）是國立臺灣師範大學數學系及台灣數學教育學會共同發行之期刊，內容以出版數學教育領域相關議題的原創性論文為宗旨。本刊徵求符合宗旨之教學實務文稿，內容包含探討數學教學策略、學生迷思概念之教學引導、數學教育課程、教材與教法等實務經驗分享、研究問題評析、數學教育之構想、書評、論文批判、數學教學與應用性研究、數學教育研究趨勢介紹、專題演講講稿、數學學習評量、電子媒材設計、數學教師專業發展及其他數學教育相關議題等內容。本期刊徵稿分為以下兩類：
- 一、實徵研究，字數以8000字為原則。
  - 二、實務分享，字數以3000~8000字為原則。
- 貳、本刊每年發行兩期，分別於四月、十月出刊，並採電子方式發行。全年徵稿，隨收隨審。
- 參、本刊所刊之文稿須為原創性的教學實務文章，即未曾投遞或以全論文形式刊登於其他期刊、研討會彙編或書籍。若文稿在送審後自行撤稿，或出現一稿多投、修正稿回覆逾期、侵犯著作權等違反學術倫理等情況，將依下列規則處理：
- 一、來稿一經送審，不得撤稿。因特殊理由而提出撤稿申請者，案送主編決定；非特殊理由而自行撤稿者，一年內將不再接受該作者的投稿。
  - 二、若文稿被發現一稿多投、侵犯著作權或違反學術倫理等情況，除文稿隨即被拒絕刊登外，一切責任由作者自負，且本刊於三年內不接受該作者來稿，並視情節嚴重程度求償。
  - 三、作者應於發出文稿修正通知的二週內回傳修正稿及修正回覆說明書，逾期視同撤稿。若有特殊情況請先與本刊聯絡。
- 肆、未經本刊同意，已獲本刊接受之文章不得再於他處發表。投遞本刊之文稿須經編審委員會送請專家學者審查通過後予以刊登，被刊登文章之著作財產權歸國立臺灣師範大學數學系及台灣數學教育學會共同擁有，文責由作者自負。
- 伍、文稿請以中文撰寫（包含摘要、文章全文、圖表、附註、參考文獻、附錄等）。文稿的呈現請使用單行間距之12級字新細明體或Times New Roman字體，以橫書方式於A4規格紙張上，文稿上下左右各留2.5公分空白，並以Microsoft Word 98以上之繁

體中文文書軟體處理。

陸、文稿格式請參考《臺灣數學教師》期刊論文撰寫體例的說明或已發行之文稿，若有需要引用英文文獻以及數學符號、公式等請參考APA第六版出版手冊。請於投審稿系統投遞稿件，請參閱下列臺灣數學教師投稿流程注意事項：

- 一、請先註冊帳號，已有帳號者可直接登入。
- 二、請先查詢本刊名稱後點選投稿進入投稿流程介面（建立新稿件）。
- 三、按照流程填列文稿基本資料
  - (一) 文稿篇名務請填列中文篇名及英文篇名。
  - (二) 逐頁標題（running head）務請填列，並以不超過15個字為原則。
  - (三) 摘要請不分段，限500字以內。
  - (四) 關鍵字請以五個為上限，並依筆畫順序由少到多排列。
  - (五) 作者資料：通訊作者之姓名、服務單位、職稱、通訊地址、聯絡電話和電子郵件地址。一位以上作者時，非通訊作者只需填寫姓名、服務單位和職稱。
  - (六) 任職機構及單位：請寫正式名稱，分別就每位作者寫明所屬系所或單位。
  - (七) 作者註（author note）：說明與本篇研究相關的資訊。
- 四、提交已簽署的《臺灣數學教師》著作財產權讓與同意書。
- 五、文稿除正文外，還需包含中文摘要，摘要請獨立一頁呈現，並置於正文之前。摘要頁內容包括論文題目（粗體20級字、置中）、摘要（不分段，限500字以內）、與關鍵詞（以五個為上限，並依筆畫順序由少到多排列）。
- 六、若為修正稿，請於「投審稿系統—稿件修正區」，提交修正後的文章，請以色字標示修改處，並於「作者回覆」欄位中填列修正回覆說明，依審查意見逐項說明修改內容或提出答辯。作者應於發出文稿修正通知的二週內上傳修正稿及修正回覆說明，若有特殊情況請先與本刊聯絡。

柒、文稿以投審稿系統投遞，請於系統中填列作者基本資料，並提交著作財產權讓與同意書與全文。作者應負論文排版完成後的校對之責，編輯委員僅負責格式上之校對。

捌、投稿系統：<http://www.ipress.tw/J0161>

## 《臺灣數學教師》著作財產權讓與同意書

茲同意投稿至國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會共同發行的《臺灣數學教師》之一文，名稱為：

---

立書人聲明及保證本著作為從未出版之原創性著作，所引用之文字、圖表及照片均符合著作權法及相關學術倫理規範，如果本著作之內容有使用他人以具有著作權之資料，皆已獲得著作權所有者之（書面）同意，並於本著作中註明其來源出處。著作人並擔保本著作未含有毀謗或不法之內容，且絕未侵害他人之智慧財產權，並同意無償授權國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會於本著作通過審查後，以論文集、期刊、網路電子資料庫等各種不同方法形式，不限地域、時間、次數及內容利用本著作，並得進行格式之變更，且得將本著作透過各種公開傳輸方式供公眾檢索、瀏覽、下載、傳輸及列印等各項服務。國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會並得再授權他人行使上述發行之權利。惟著作人保有下列之權利：

- 1.本著作相關之商標權及專利權。
- 2.本著作之全部或部份著作人教學用之重製權。
- 3.出版後，本著作之全部或部份用於著作人之書中或論文集中之使用權。
- 4.本著作用於著作人受僱機關內部分送之重製權或推銷用之使用權。
- 5.本著作及其所含資料之公開口述權。

著作人同意上述任何情形下之重製品應註明著作財產權所屬，以及引自《臺灣數學教師》。

如果本著作為二人以上之共同著作，下列簽署之著作人已通知其他共同著作人本同意書之條款，並經各共同著作人全體同意，且獲得授權代為簽署本同意書。如果本著作係著作人於受僱期間為雇用機構所作，而著作權為讓機構所有，則該機構亦同意上述條款，並在下面簽署。

本著作之著作財產權係屬（請勾選一項）

- 著作人所有  
 著作人之僱用機構所有

立同意書人（著作人或僱用機構代表人）簽章：\_\_\_\_\_

著作人姓名或僱用機構名稱：\_\_\_\_\_

（正楷書寫）

中華民國 年 月 日

**Publisher** | Department of Mathematics, National Taiwan Normal University  
Taiwan Association for Mathematics Education

**Editorial Board**

**Chief Editor** | Yuan-Horng Lin (Department of Mathematics Education,  
National Taichung University of Education)

**Vice Chief Editor** | Yuan-Shun Lee (Department of Mathematics, University of Taipei)  
Pi-Jen Lin (Graduate Institute of Mathematics and Science Education,  
National Tsing Hua University)

**Editorial Panel** | Su-Wei Lin ( Department of Education ,  
National University of Tainan)  
Wei-Min Hsu (Department of Education,  
National Pingtung University)  
Erh-Tsung Chin (Graduate Institute of Science Education,  
National Changhua University of Education)  
Shu-Yi Chang (Department of Mathematics Education and Information Education,  
National Taipei University of Education)  
Huan-Chuan Chang (Sinde Elementary School, Toufen, Miaoli)  
Chia-Huang Chen (Department of Mathematics Education,  
National Taichung University of Education)  
Kai-Lin Yang (Department of Mathematics, National Taiwan Normal University)  
Jian-Cheng Liou ( Ping-jhen Junior High School, Taoyuan City)  
Shiang-Tung Liu (Graduate school of Math and Science Education ,  
National Chiayi University)  
Chang-Hua Chen (National Academy for Educational Research)  
Jing Chung (Department of Mathematics Education and Information Education,  
National Taipei University of Education)

**International Editorial Panel** | Cheng-Yao Lin (Department of Curriculum and Instruction,  
Southern Illinois University)

---

**Address** | No.88 Sec. 4, Ting-Chou Rd., Taipei City, Taiwan, R.O.C.  
Department of Mathematics, National Taiwan Normal University  
" *Taiwan Journal of Mathematics Teachers*"

**TEL** | 886-2-7734-6576

**FAX** | 886-2-2933-2342

**E-mail** | tjmteedit@gmail.com

**Website** | <http://tame.tw/news/news.php?class=204>

---

1 小一生在超齡問題上的解題表現：個案研究

/ 鄭雅惠、劉祥通

A Case Study of First Graders for Their Mathematical Problem Solving Performance on the Overage Problems

/ Ya-Hui Cheng、Shiang-Tung Liu

32 奠基進教室活動設計與成效評估：縮放繪

/ 吳宛柔、楊凱琳

Design and Assessment of Mathematical Grounding In-Class Activities：Resizing Drawing

/ Wan-Rou Wu、Kai-Lin Yang

50 以奠基進教室為取向的數學素養教學設計與實施：以國小柱體和錐體為例

/ 侯雪卿

Design and Implementation of MGA-In-Class to the Development of Mathematical Literacy：The Case of Cylinder and Cone in Elementary School

/ Hsueh-Ching Hou

