

侯雪卿 (2019)。

以奠基進教室為取向的數學素養教學設計與實施：以國小柱體和錐體為例。

臺灣數學教師, 40 (1), 50-67

doi: 10.6610/TJMT.201904_40(1).0003

以奠基進教室為取向的數學素養教學設計與實施： 以國小柱體和錐體為例

侯雪卿

嘉義縣興中國民小學

十二年國教素養導向的數學教學就是希望將知識、能力與態度就像麻糬一樣揉合在一起，全觀看待學生學習的脈絡。筆者以奠基進教室為取向，選用國小柱體和錐體設計為數學素養教學案例，以五個子活動，鋪成可體現的學習情境：一、觀察 2D 圖片，描述城堡屋頂與城牆；二、積木搭建 3D 實體，描述城堡屋頂與城牆；三、積木的自由分類與特性描述；四、師生共建，柱體與錐體的命名；五、簡單推理，根據立體的一面去推測柱體或錐體。透過教學的實施和結果發現，城堡情境與遊戲激發了學生的學習興趣與正向態度；幾何立體素材的體現，培養學生正確使用工具的學習態度；透過觀察、分類與推理的學習歷程，引動學生主動思考和各項數學能力的涵養，形成有感的學習，促進學生在幾何概念層次的提升和幾何語言發展的精緻性。

關鍵詞：柱體和錐體、幾何語言、幾何概念、數學素養教學、數學奠基進教室

壹、前言

十二年國教以培養下一代的核心素養做為課程改革的重點，透過三面九項核心素養所建構出的素養導向課程，協助學生在快速變遷之未來社會，解決生活所可能面臨的各種問題，並成為一位終身學習者（教育部，2014），但要如何在課堂進行素養導向教學來回應課程改革的理想呢？這是第一線老師未來實踐課程改革的重要任務與挑戰。

林福來（2012）認為數學素養是面對現實問題，可以把學過的知識和能力用出來，數學素養的加強首先要打破「數學很難」的迷思，數學不該讓我們焦慮，而是天天用得到的知識，每個人應該要先從喜歡數學、對數學有自信，才有可能加深。數學領域新課綱亦指出國民教育的重點在於學習對生涯有用的知識與能力。數學知識雖然本質抽象，卻具有廣大的應用面向與深刻的應用層級。如何在不同年齡、不同能力、不同興趣或領域，皆能獲得足以結合理論與應用的數學素養，是國民數學教育的重要目標（教育部，2018）。可見，素養導向的數學教學就是希望將知識、能力與態度就像麻糬一樣揉合在一起，全觀看待學生學習的脈絡（林福來、林柏寬，2018）。

十二年國教有關立體形體的學習，皆安排在高年級幾何教材的範疇，中低年級以平面幾何教材為主（教育部，2018）。可見，在國小幾何課程中，高年級是學習立體形體的關鍵時期，而柱體與錐體便是高年級立體形體的主要教材之一。此外，柱體與錐體在整個立體形體的學習脈絡亦扮演了二個重要角色：一是讓學生認識更多立體形體，包含了有彎曲面的圓柱與圓錐，這些立體形體的概念若能得到良性的發展，將有助於日後國中階段理解簡單立體形體的三視圖與平面展開圖等新概念的學習；二是作為幾何量的前置概念，學生必須先充分掌握柱體與錐體的基本概念、其構成要素及數量性質，有了完整的概念發展後，才能過渡到其體積與表面積的計算（教育部，2018）。然而，實體的立體形體轉化成二維圖像的過程是困難的，初期學習需要給予具體的操作，藉由感官知覺物體存在的性質和形體樣貌，發展空間視覺化，學生才能將立體形體的實體與課本上的圖形做有意義的連結（李函，2016）。換言之，柱體與錐體的學習必須植基於豐富的具體經驗，從歷程中不斷學習與探索，才能逐漸形成概念。這種重視學習的主體性和歷程性，符應了十二年國教數學領域課程綱要提倡學習表現的具體展現：「從操作中覺察、形成概念，甚至簡單連結各概念的各種活動。」（教育部，2018），這正是筆者選用柱體與錐體為數學素養教學案例的理由。

綜合上述，面對這一波新課綱無可迴避的任務與挑戰，筆者選用國小柱體和錐體做

為數學素養教學案例，闡述如何轉化數學素養的理念於教學設計，希冀提供未來第一線教師進行素養導向教學設計之參考案例。

貳、教學設計

一、柱體與錐體單元的教學需求

Van Hiele 夫婦將個人的幾何概念發展分成五個層次（層次 1 到 5），這五個層次是有次序性的，也就是必須擁有前一層次的概念，才能有效進行下一層次的教學活動（Crowley 著，譚寧君譯）。就國小階段高年級學童的幾何概念發展，大約在 Van Hiele 幾何發展層次 2 到 3 的過渡期，也就是從認識形體的組成要素之間的關係過渡到局部推理的階段（李源順，2018），學生可以透過觀察、比較形體間的異同，進而辨識出柱體與錐體，並了解其組成要素和要素之間的關係。

筆者分析五年級教科書關於柱體與錐體的教材內容，多半以頂端尖尖像錐子一樣的形體稱為錐體、像柱子一樣的形體稱為柱體，再從這兩類以底面為圓形和多邊形分成：角柱與圓柱、角錐與圓錐，然而，這些分類與命名都是教科書的觀點，筆者認為若以教科書的定義直接告知或要求學生記憶定義，真正的學習並不容易出現。Van Hiele 理論告訴我們，學童的幾何學習經驗才是影響其概念階段發展的重要因素（Van De Walle 著，2001/張英傑、周菊美合譯，2005），因此，筆者認為立體的分類可從學童的自然思維著手，鼓勵觀察、自由分類與討論分享，一來可以豐富幾何視角，有利於形體組成要素的掌握，二來學生也能藉由溝通、表達和辯證的歷程，精緻化幾何語言的描述。

二、以數學奠基進教室為取向的數學素養教學設計

數學奠基進教室的教學設計是基於現場教學的需求，將原先使用於課外營隊的模組活動加以轉化用於實際課堂中（國立臺灣師範大學數學教育中心[師大數學教育中心]，2019），包含有三個設計理念、五個設計原則、以及五項策略與工具（師大數學教育中心，2018），分述如下：

（一）三個設計理念

1. 第一要義是要激發學生的內在學習動機，以發展正向學習態度樂於學。
2. 學習是學生主動營造數學感的過程。

3. 教學活動是提供師生、生生共建數學的機會。

(二)五個設計原則

1. 引動思考

- (1) 目標：以保障內在動機並主動學習。
- (2) 詮釋：在動手做、玩遊戲、解決任務的時候，要設計激發（引動）學生將具體操作轉換成內在思考的脈絡。

2. 營造數學感

- (1) 目標：促進有感地學習，達成了解。
- (2) 詮釋：透過具象化（embodiment）、可體現（realization）、探究（inquiry）活動，以促進學生將知覺性操作轉化成概念性與程序性運思。

3. 共建數學

- (1) 目標：促進討論，達成共建數學。
- (2) 詮釋：活動能提供學生發展表達思維的語言與媒介（例如：圖像、表格、字詞等），以達成師生共建數學的目的。

4. 診斷介入

- (1) 目標：診斷概念，促進思考。
- (2) 詮釋：活動設計及教學當下要能提供媒介或平台促成學生釐清並推進思維，以達成數學課程的學習目標。

5. 單元設計滲透

- (1) 目標：融單元教學於奠基脈絡中。
- (2) 詮釋：奠基活動的精神（原則1、2、3）在整個單元的教學與學習設計各面向都能充分體現。

(三)五項策略與工具

動手做、遊戲、有目標的系統性觀察活動、表達與溝通活動、論辯活動。

十二年國教數學領域課程綱要從五個基本理念，呼應《總綱》的理念與願景：數學

是一種語言、一種實用的規律科學、一種人文素養出發、應提供每位學生有感的學習機會，培養學生正確使用工具的素養。並以六個課程目標，達成願景：一、提供學生適性學習的機會，培育學生探索數學的信心與正向態度；二、培養好奇心及觀察規律、演算、抽象、推論、溝通和數學表述等各項能力；三、培養使用工具，運用於數學程序及解決問題的正確態度；四、培養運用數學思考問題、分析問題和解決問題的能力；五、培養日常生活應用與學習其他領域/科目所需的數學知能；六、培養學生欣賞數學以簡馭繁的精神與結構嚴謹完美的特質（教育部，2018）。

林福來（2012）認為數學素養是面對現實問題，可以把學過的知識和能力用出來。數學素養的教學就是將知識、能力與態度就像麻糬一樣揉合在一起，全觀看待學生學習的脈絡（林福來、林柏寬，2018）。

綜合上述，筆者認為數學奠基進教室的教學設計，以學習者為主體，數學概念、方法或原理原則是經由主動探索與他人互動中建構而成的，強調與情境脈絡的連結，以及關照認知、技能、情意的統整，充分體現了數學素養教學內涵，並能符應數學領域課程綱要倡導的五個基本理念和六個課程目標的實踐，可作為數學素養教學設計的一種取向。

因之，筆者以奠基進教室為取向，參照課程綱要領域核心素養和學習重點，以及轉化課綱六個課程目標作為促進數學素養的檢核依據，設計出國小柱體與錐體的數學素養教學，如表 1 所示。

表 1

【柱體和錐體】的教學設計表

活動名稱	柱體和錐體	節數	3 節
	A2：系統思考與解決問題。		
核心素養	數-E-A2		
與領域素養	具備基本的算術操作能力、並能指認基本的形體與相對關係，在日常生活情境中，用數學表述與解決問題。		
學習表現	s-III-3 從操作活動，理解空間中面與面的關係與簡單立體形體的性質。		
學習內容	S-5-7 球、柱體與錐體：以操作活動為主。認識球、(直)圓柱、(直)角柱、(直)角錐、(直)圓錐。認識柱體和錐體之構成要素與展開圖。檢查柱體兩底面平行；檢查柱體側面和底面垂直，錐體側面和底面不垂直。		

表 1 (續)

設計理念	<ol style="list-style-type: none"> 1. 布置城堡學習情境，營造學習的需求感。 2. 透過自由分類，豐富學童視角，充分掌握幾何組成要素與圖形的關係。 3. 加入簡單幾何推理，激發思考。
數學素養的 預期表現	<ol style="list-style-type: none"> 1. 透過觀察、操作、分類與推理等多元的學習歷程，表現對數學學習的興趣、信心與正向態度。 2. 在學習活動進行中，表現學習的好奇心及觀察規律、抽象、推論、溝通和數學表述等各項能力。 3. 能運用各式幾何立體積木進行學習，展現正確使用工具的學習態度。 4. 能從幾何屬性進一步思考問題、分析問題，並能據理而推，解決問題。 5. 藉由歐洲城堡的情境，能學習其他領域所需的數學知能，如：歐洲城堡建築的特色與文化。 6. 能以不同的屬性將多種立體形體區分成簡單幾類和命名，進而欣賞數學的簡潔與結構嚴謹完美的特質。
學習歷程	<p>在可體現的學習情境中，透過觀察、分類與推理，認識柱體與錐體。</p> <ul style="list-style-type: none"> • 活動（一）觀察 2D 圖片，描述城堡屋頂與城牆 • 活動（二）積木搭建 3D 實體，描述城堡屋頂與城牆 • 活動（三）立體形體的自由分類與特性描述 • 活動（四）師生共建，柱體與錐體的命名 • 活動（五）簡單推理，根據立體的一面去推測柱體或錐體
評量方式	<p>學習單、口頭報告及實作評量。</p>
學生迷思/ 教師診斷介 入	<p>三角柱的分類是學生最易混淆的。將三角柱改變放置的方位，學生會認為三角柱同樣有尖尖的頂點，因而歸類到角錐的那一堆。建議教學者傾聽了學生分類的理由，可從組成要素來比較頂部的頂點數、上下底面數，發現其差異，加以釐清；以及探索組成要素的關係，底面與側面的垂直或不垂直、側面形狀、全等的底面，發現其差異，加以釐清。</p>

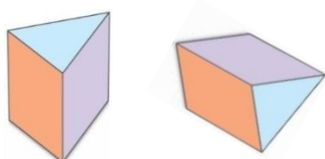


表 1 (續)

教學活動	教學流程說明	時間	教學資源
活動(一) 與城堡 的邂逅	<ol style="list-style-type: none"> 1. 教師揭示美女與野獸的圖片、詢問學生是否讀過此童話故事？請同學或由教師簡述其故事大綱。 2. 播放 2017 美女與野獸電影版的預告片，請學生觀看並回答問題：「美女與野獸居在哪裡？」。 3. 教師說明美女與野獸居住城堡，該城堡在法國香波城堡拍攝。 4. 教師說明城堡的由來和介紹網路評比歐洲十大城堡。 5. 四人一組，選擇歐洲十大城堡其中一張城堡圖片，先觀察城堡的屋頂和城牆，再介紹其特點。 	20	影片 圖片
活動(二) 蓋我的城堡	<ol style="list-style-type: none"> 1. 教師提供一些積木，4 人一組，選擇 20 個積木搭建城堡，搭建後完成工作單 1 2. 請小組介紹搭建城堡的名字和特色。 	20	積木 1 組 工作單 1
活動(三) 分類遊戲	<ol style="list-style-type: none"> 1. 4 人一組，提供 12 種立體形體，請學生觀察並分成 2-4 堆。將把分類的理由寫在紀錄單，越多越好。 2. 每一張紀錄單代表 1 堆，如果分成 3 堆就要完成 3 張紀錄單，紀錄單上寫出分成 1 堆的理由和貼好分堆後的立體形體圖卡。 3. 組間競賽遊戲規則說明： <ul style="list-style-type: none"> • 請小組上台發表分類的想法，進行三回合，計分決定勝負。 • 每回合開始比賽之前，小組有 5 分鐘的時間可以先討論。 • 每一回合都以猜拳決定先後順序，一組 	40	12 種立體 形體和圖卡 紀錄單 (至少 10 張以上) 彩色筆 膠水

表 1 (續)

	<p>只能發表一次。</p> <ul style="list-style-type: none"> 分類說法必須不同於其他組已經提過的分類理由，學生要討論與辯證，老師把分類的依據記錄下來。 第一回能合宜提出分類依據，得 1 分。 第二回能合宜提出分類依據，得 3 分。 第三回能合宜提出分類依據，得 5 分。 <p>4. 全班整理出分類的結果。</p> <p>5. 獎勵獲勝的組別。</p>		
<p>活動(四) 你的名字</p>	<p>1. 老師揭示課本的分法、命名並比較與全班分類結果的差異。</p> <p>2. 揭示課本分成柱體與錐體二類的命名以及理由。</p> <p>3. 揭示課本將柱體再分成角柱和圓柱；錐體再分成圓錐和角錐共四類的命名以及理由。</p> <p>4. 揭示課本以底面形狀為角柱、角錐的命名以及理由。</p>	<p>20</p>	<p>各組活動(三)的紀錄單、12種立體形體</p>
<p>活動(五) 這是誰</p>	<p>老師布題，學生推理</p> <ul style="list-style-type: none"> 有一個面是三角形，請問這個立體形體是錐體或柱體？並說明理由。 底面形狀是圓形，請問這個立體形體是錐體或柱體？並說明理由。 側面的形狀是長方形，請問這個立體形體是角柱、圓柱、圓錐或角錐？並說明理由。 	<p>20</p>	<p>工作單 2 白板和白板筆</p>

參、教學實踐結果與討論

在素養教學下，學生孕育的「數學素養」又會是什麼？筆者以十二年國教課綱六個課程目標作為檢核依據，整理歸納出學童在五個活動符合數學素養的學習表現，如表 2。各活動教學實施結果與討論，分述如下：

表 2
在五個活動符合數學素養的學習表現

教學活動 數學素養的預期表現	活動 (一)	活動 (二)	活動 (三)	活動 (四)	活動 (五)
1. 透過觀察、操作、分類與推理等多元的學習歷程，表現對數學學習的興趣、信心與正向態度。	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>		<input type="radio"/>
2. 在學習活動進行中，表現學習的好奇心及觀察規律、抽象、推論、溝通和數學表述等各項能力。	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
3. 能運用各式幾何立體積木進行學習，展現正確使用工具的學習態度。		<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
4. 能從幾何屬性進一步思考問題、分析問題，並能據理而推，解決問題。			<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
5. 藉由歐洲城堡的情境，能學習其他領域所需的數學知能，如：歐洲城堡建築的特色與文化。	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>			
6. 能以不同的屬性將多種立體形體區分成簡單幾類和命名，進而欣賞數學的簡潔與結構嚴謹完美的特質。			<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	

一、活動（一）與城堡的邂逅

表 3 是各組學生描述最喜愛城堡的屋頂與城牆。從表 3 看來，各組學生會用生活的語言，如：城牆蓋得很高、屋頂像斗笠一樣……和先備的幾何知識，如：三角形、半圓... 描述了喜愛城堡的屋頂和城牆的外觀輪廓，此時，我們可以看到孩子在這個活動中，他們尚未具有分析的能力，對幾何概念停留在 Van Hiele 第 1 層次視覺期，以生活的眼光

來賞識城堡建築的特色（Crowley 著，譚寧君譯）。

此外，筆者亦在幾位學生課後心得書寫中，感受到學生學習的興趣與正向學習的態度：「選城堡的活動，我很喜歡，又能分組討論，很有趣！」、「令我印象最深刻就是城堡」、「令我印象最深刻就是介紹城堡，每個城堡都很美，背後有一段故事……」、「很好玩，我希望每天都能上一樣的課。」

綜合上述，筆者認為學生在活動（一）觀察和描述城堡特色的活動，聆聽故事和領略建築之美，小組彼此討論與合作，呈現出學習數學的好奇、興趣與正向態度，學習已達到數學素養第 1、2 和 5 點之預期表現。

表 3

活動（一）三組學生的描述語言表

組別	第一組	第二組	第三組
語言描述	屋頂是尖尖的、斜斜的，城牆蓋得很高，還有瞭望台。	屋頂是尖尖的、三角形，城牆是半圓、橢圓，還有正方形的窗戶。	屋頂像斗笠一樣有各式各樣的屋頂，城牆和其他城堡不一樣，很有特色。

二、活動（二）蓋我的城堡

表 4 是各組學生以積木搭建城堡，描述其屋頂與城牆。活動（一）和活動（二）相同點皆是讓學生覺察城堡屋頂與城牆的特徵，並以數學語言來溝通和表述；差異點是情境脈絡的轉換，活動（一）是平面圖片觀察，感官經驗以視覺為主，活動（二）是實體的積木搭建，積木是一個具體可操弄的幾何立體物件，利於學生從幾何屬性進行觀察，此外，搭建城堡的情境增加了動手做和空間視覺的感官體驗。

學生透過搭建城堡，體驗各式各樣積木彼此間有不同的結合方式，頂端尖尖的積木適合搭建成屋頂，具有上下平平的積木適合搭建成城牆，實體 3D 的情境，讓各組學生描述城堡的屋頂與城牆更具體且豐富了。以第一組為例，描述城牆時的語言不同於活動（一）的生活用語，改以幾何形狀描述，如：正方形、長方形和六角形的長柱，而第三組在描述屋頂的語言變化，也相似於第一組的學習軌跡。

雖然，活動（二）學生的幾何思維仍是停留第 1 層次，但幾何語言卻因著平面到實體的情境轉換、立體幾何物件的加入、動手操作和空間視覺的感官經驗，在描述上開始

有所變化。筆者從孩子的表現，領會了 108 年數學領域綱要中，提倡「數學是一種語言」的理念，數學的發展是融入自然語言的生活經驗，透過語言連結幾何思維，學習有感，學生很自然地在學習情境中將所看、所知進行連結與溝通，表述其有意義的思考。

表 4

活動（二）三組學生的描述語言表

組別	第一組	第二組	第三組
語言描述	屋頂是尖尖的、橢圓的，城牆有正方形、長方形和六角形的長柱。	屋頂是尖尖的、圓圓的，牆壁多樣化有圓的和平的。	屋頂是尖尖的、城牆多樣化。

綜合上述，筆者認為學生在活動（二）運用各式幾何立體積木進行搭建城堡的活動，組間彼此交流，相互學習，以數學語言溝通和表述，學習已達到數學素養第 1、2、3 和 5 點之預期表現。

三、活動（三）分類遊戲

表 5 是各組將 12 種立體形體（如圖 1）自由分類的結果，共有四種，分別以立體形體的不同屬性：頂部、底部、側面、以及邊角一樣與不一樣，加以分析，其分類的結果呈現遠比教科書的內容更豐富。

第一種分類是以立體形體的頂部區分成尖尖的和平平的，恰為課程手冊 S-5-7 學習內容柱體與錐體兩種。然而學生的分類標準和課綱的定義在觀點上有所差異，學生的分類看到的是立體形體頂部的屬性，形成柱體與錐體分類的概念化，課綱以構成要素的面、頂點、個數和幾何性質來區分，柱體指的是都有上下兩個全等且平行的底面，錐體則是都有一個底面，而上方則有一個頂點（教育部，2018）。

第二種分類是以立體形體的底部區分成圓的和有角的，亦即為圓柱和圓錐、角柱與角錐兩種。雖然教科書的內容沒有出現這種分類結果，但卻有以底部形狀作為分類標準與命名，將柱體與錐體再二分為角柱和圓柱、角錐和圓錐。因此，筆者非常喜悅，學生從另一個視角觀看立體形體，並以平面幾何角的組成要素做為分類標準。

第三種分類是以立體形體的側面區分成圓的、三角形、多邊形，亦即為圓柱和圓錐、角錐、角柱三種。其中，多邊形的描述，筆者有私下追問該組學生，多邊形指的是什麼？學生回答為：周圍的形狀（亦即為側面的意思）為長方形（指著每一個側面），有很多

個面，這些面連起來就是多邊形，可見，若以形體的單一個側面來看，學生知道是長方形，但立體形體的多個側面已經形成新的空間物件，對學生而言是新的視覺體驗，於是，便連結舊經驗多邊形做為表述的幾何語言。雖然，教科書沒有出現這種分類結果，但後續教材內容安排卻有以側面形狀的差異作為圓柱、圓錐、角錐與角柱之視圖、透視圖與展開圖等二維圖像的學習。

第四種分類是將立體形體分成頂端是尖的、底部是圓的、正多邊形或不是正多邊形，亦即為角錐、圓柱和圓錐、正角柱、直角柱四種。換言之，學生的視角同時停留在頂部與底部，以立體形體的上下特徵作為觀察重點，同時，還加入多邊形的幾何概念，將以底面是否為正多邊形，將角柱再分成兩類，即是數學上的所謂正角柱和直角柱。雖然，教科書的內容沒有出現這種分類結果，課程手冊 S-5-7 學習內容也說明小學的立體形體只處理最端正的形體，在活動或課本中都不需要加上「直」或「正」的名稱，但學生仍以邊的性質作為分析的觀點，是值得肯定的。筆者認為當此種分類結果出現時，應先肯定學生的幾何思維，並傾聽學生的說法，若讀者擔心非課本的分類標準，可以告訴學生未來會有這樣的分類與命名，不在本節課中做討論。

此外，幾位學生課後心得書寫寫到：「可以分組比賽和玩遊戲，和平常數學課很不一樣」、「我很喜歡這堂課，因為可以和朋友一起合作」、「可以實際動手做」。

綜合上述，我們可以看到學生在活動(三)已經進展到 Van Hiele 第 2 層次分析期，具有分析的能力，並非只有直觀描述立體形體的外形，而是以幾何屬性進一步思考、分析，將多種立體形體區分成簡單幾類，進而欣賞數學的簡潔與結構嚴謹完美的特質（Crowley 著，譚寧君譯）。語言的陳述更加精緻，簡化成幾何的用語，例如：三角形、多邊形、正多邊形。筆者認為分類遊戲引發學生高度的學習興趣、分類結果的豐富性、立體形體共同屬性的規律、幾何描述的語言、思考問題與分析能力，學習已達到數學素養第 1、2、3、4 和 6 點之預期表現。

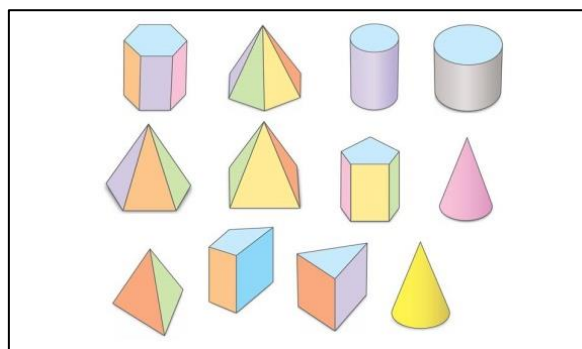


圖 1 12 種立體形體圖

表 5

活動（三）三組學生的描述語言表

分類結果	二類	二類	三類	四類
屬性	頂部	底部	側面	頂部和底部 邊和角
語言描述	尖尖的 平平的	圓的 有角的	圓的 三角形 多邊形	頂端是尖的 底部是圓的 正多邊形 不是正多邊形

四、活動（四）你的名字

圖 2 為筆者依據活動（三）的分類結果進行師生共建的命名歷程。由筆者以學生的分類結果和課本定義做連結，比較異同，協助學生從自身的經驗過渡到數學課本上柱體與錐體的命名。

首先，以頂部分二類，引入課本柱體與錐體的命名，此部分的教學程序以筆者的講述為主體，目的只是在介紹專有名詞，讓學生對於柱體與錐體的命名有所認識。

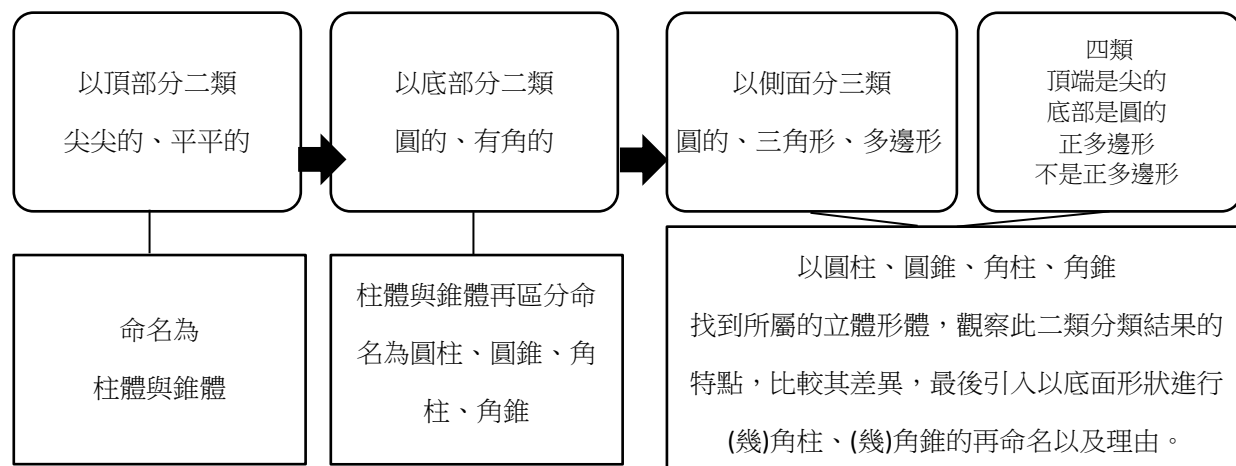


圖 2 活動（四）柱體與錐體的命名歷程

接著，以底部分二類，並以其中一類（例如：有圓的）和關鍵性的提問：「哪些是柱體？哪些錐體？請大家分分看。」「底面是圓的柱體要怎麼稱呼它？底面是圓的錐體要怎麼稱呼它？」將學生的說法和全班分享，與課本的命名：角柱、角錐、圓柱、圓錐做連結，以柱體為例，學生將底面為圓形的柱體稱為圓柱體，底面有角的柱體稱為角柱體，學生的說法等於保留柱體與錐體的原名，再加上底面的幾何性質「圓或角」做為區

隔，筆者認為此種的命名已經把握了欣賞數學的簡潔與結構的特質。最後，再引入第三種分類結果和第四種分類結果，在全班的討論與交流，學生很快能從側面和底面形狀充分掌握各立體形體的組成要素與差異，以及從底面形狀進行(幾)角柱、(幾)角錐的再命名。

綜合上述，活動（四）透過化繁為簡的分類連結教科書的命名，師生以彼此的數學語言溝通、表述，欣賞立體形體的簡潔與結構嚴謹完美的特質，學生已達到數學素養第 2、3、4 和 6 點之預期表現。

五、活動（五）這是誰

表 6 呈現 12 位學生在活動（五）三個數學推理問題的答案與人數、以及列舉 3 位學生推理的解題說明。其中，3 位學生的選取依據 107 學年度第一學期數學平均成績，區分前 27% 高成就、中間 46% 中成就、後 27% 低成就三層，分層選出各 1 名，S1 為高成就、S2 為中成就、S3 為低成就。

從問題 1、2、3 的學習結果和答題人數的呈現，可以看出多數學生，他們能夠以立體形體的組成要素之屬性，區辨並進行歸類，作為局部推理的必要條件，據理而推，進而解決問題，已達到教案中第 4 點數學素養之預期表現。其中，S1 高成就學生除了以文字說理，同時還繪製立體形體作為溝通的數學符號，S2 中成就雖然在問題 3 沒有呈現推理的正例，但也能以反例進行說理。S3 低成就學生雖然有覺察到柱體與錐體的屬性，但尚未進展到根據其屬性作為局部推理的條件，加以分析與歸類。




綜合上述，我們可以看到有些學生在活動（五）已經進展到 Van Hiele 第 3 層次非形式歸納（Informal Deduction），他們能夠歸納出立體形體的屬性，也能辨認其分類，所屬族群的分類也能夠了解，因而教科書的命名與定義是有意義的（Crowley 著，譚寧君譯），學習已達到數學素養第 1、2 和 4 點之預期表現。

表 6

活動（五）12 位學生推理答案與人數暨高中低成就學生推理解題的說明表

數學問題	1.有一個面是三角形，請問這個立體形體是錐體或柱體？並說明理由。	2.底面形狀是圓形，請問這個立體形體是錐體或柱體？並說明理由。	3.側面的形狀是長方形，請問這個立體形體是角柱、圓柱、圓錐或角錐？並說明理由。
------	----------------------------------	---------------------------------	-----------------------------------------

表 6 (續)

	都有可能 10 位	都有可能 10 位	角柱 8 位
答案	錐體	柱體	角柱或圓柱
學生數	2 位	2 位	2 位
			圓柱
			1 位
			作答不清
			1 位
S1	<p>(1)是錐體也是柱體</p> <p>(2)因為三角柱的上底和下底都是三角形，因為三角錐的底面是三角形。</p> 	<p>(1)是錐體也是柱體</p> <p>(2)因為圓錐的底面是圓形，因為圓柱的底面是圓形。</p> 	<p>(1)角柱</p> <p>(2)因為角錐不管是幾角錐，側面都是三角形。因為圓柱圓錐的側面永遠是圓形。</p> 
S2	<p>都有可能。</p> <p>但角柱的只有三角柱，錐體只有角錐才有。</p>	<p>都有。</p> <p>但錐體的圓形面只有一個，但柱體的面有二個。</p>	<p>圓柱的邊沒有角度。</p>
S3	<p>錐體。</p> <p>因為三角形上面是尖的，錐體上面都是尖的，柱體上面是平的。</p>	<p>柱體。</p> <p>因為柱體上面有些圓的。</p>	<p>角柱。</p> <p>因為他的側面是平的，上面也是平的。</p>

肆、結論與建議

筆者針對本教學設計與實踐案例進行結論說明，並從數學素養教學、檢核標準、設計策略與實踐方式等方面分別提出建議：

一、結論

十二年國教素養導向的數學教學就是希望將知識、能力與態度就像麻糬一樣揉合在一起，全觀看待學生學習的脈絡。筆者以奠基進教室為取向，選用國小柱體和錐體設計為數學素養教學案例，以五個子活動，鋪成可體現的學習情境。透過教學的實施和結果發現，城堡情境與遊戲激發了學生的學習興趣與正向態度；幾何立體素材的體現，培養學生正確使用工具的學習態度；透過觀察、分類與推理的學習歷程，引動學生主動思考和各項數學能力的涵養，形成有感的學習，促進學生在幾何概念層次的提升和幾何語言發展的精緻性。

二、建議

(一)數學素養教學

筆者以奠基進教室為取向作為數學素養教學設計，但此取向非唯一、全面的教學路徑，鄭章華(2018)認為數學素養導向教學不限於特定的教學方法，應回歸到學習本身，有助於學習者有效建構學科知識和技能，發展對學科正向的態度和動機，為學習者接下來的職涯發展和終身學習做好準備的作為，皆可視為素養導向教學。因此，建議教師必須考量學習者的需求、數學教材內容的難度與特性，彈性的選擇適當的教學取向，落實數學素養的課程與教學設計。

(二)數學素養表現的檢核

筆者以十二年國教課綱六個課程目標作為數學素養教學設計與實施的檢核標準。然而，素養的養成往往是漸進的，未必在短短的幾堂課中，便能有顯著差異的養成(林永豐, 2018)。因此，建議教學設計的重點仍於學習主體性，應盡量能提供學生可參與的學習機會，讓學生在歷程中培養能力與情意面向，毋須一味地強調素養表現的檢核。

(三)設計策略

筆者以四種策略：動手做、遊戲、有目標的系統性觀察活動、表達與溝通活動進行

數學素養教學設計，以不同形式來促成學生在知識、能力與情意面向的均衡統整。不同策略各有重點與功能，筆者建議在未來欲進行數學素養教學設計的教學者，應就其核心素養與領域核心素養、教學設計的目的，希望達到哪些課程目標，選擇合宜的策略。

(四)實踐方式

本教學活動以3節數學課取代原有的教科書內容，進行教學的實踐，協助學生發展新概念為目的。此種方式的益處是不須另外尋求額外的課程節數，也不用擔心教學進度的壓力，乃為目前現場老師較能接納的實踐方式，但非唯一的實施方式。本教學活動亦能用於補救教學或融入校訂課程，以跨領域的方式進行數學探索活動，建議教學者可以視學習者的需求、或針對立體形體的某一概念，彈性選擇實踐方式。

參考文獻

- 李 函 (2016)。學習軌道理論融入國小柱體與錐體概念教學實驗之研究 (未出版之碩士論文)。國立臺中教育大學教育學院：臺中市。
- 李源順 (2018)。數學教師專用課本 (第十冊)。出版地：南一書局。
- 林永豐 (2018)。素養導向教學設計的要領。收錄於周淑卿、吳璧純、林永豐、張景媛、陳美如 (編著)，素養導向教學設計參考手冊 (頁01-04)。臺北市：教育部。
- 林福來 (2012)。談數學素養～用數學思考，聰明過生活。查詢日期：108年1月16日，檢自<http://reading.cw.com.tw/Controller?event=READDOC&docid=2000244>。
- 林福來、林柏寬 (2018)。數學素養好難懂？從遊戲中培養的「數學力」。查詢日期：108年1月16日，檢自<https://opinion.cw.com.tw/blog/profile/52/article/7347>。
- 國立臺灣師範大學數學教育中心 (2018)。國立臺灣師範大學數學教育中心2018數學奠基進教室設計師培訓工作坊手冊。出版地：國立臺灣師範大學數學教育中心。
- 國立臺灣師範大學數學教育中心 (2019)。就是要學好數學計畫：數學奠基活動模組開發執行理念，查詢日期：108年1月16日，檢自http://www.sdime.ntnu.edu.tw/page1/super_pages.php?ID=page1&Sn=4。
- 教育部 (2014)。十二年國民基本教育課程綱要總綱。查詢日期：108年1月16日，檢自<https://www.naer.edu.tw/files/15-1000-7944,c639-1.php?Lang=zh-tw>。
- 教育部 (2018)。十二年國民基本教育課程綱要數學領域課程手冊。查詢日期：108年1

月16日，檢自<https://www.naer.edu.tw/ezfiles/0/1000/img/67/191505529.pdf>。

鄭章華（2018）。淺論十二年國教數學素養導向教學。《臺灣教育》，709，83-91。

Crowley, M. L. 著。譚寧君譯（無日期）。**Van Hiele 幾何思考的發展模式**。查詢日期：108年2月10日，檢自http://www.gtes.ilc.edu.tw/math/Van_Hiele__幾何思考的發展模式.pdf。

John A. Van De Walle 著。張英傑、周菊美合譯（2005）。中小學數學科教材教法 (*Elementary and Middle School Mathematics : Teaching Developmentally*)。臺北市：五南。（原著出版於2001年）。