

ISSN 2312-7716
DOI 10.6610/TJMT

第 39 卷第 1 期
二〇一八年四月
VOL. 39 NO. 1
April 2018

臺灣數學教師

Taiwan Journal of Mathematics Teachers



國立臺灣師範大學數學系
Department of Mathematics,
National Taiwan Normal University



台灣數學教育學會
Taiwan Association
for Mathematics Education

發行單位 | 國立臺灣師範大學數學系
台灣數學教育學會

編輯委員會

主編	林原宏	國立臺中教育大學數學教育學系
副主編	林碧珍	國立清華大學數理教育研究所
	李源順	臺北市立大學數學系
編輯委員	林素微	國立臺南大學教育學系
(依姓氏筆劃排序)	徐偉民	國立屏東大學教育學系
	秦爾聰	國立彰化師範大學科學教育研究所
	張淑怡	國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系
	張煥泉	苗栗縣頭份鎮信德國民小學
	陳嘉皇	國立臺中教育大學數學教育學系
	楊凱琳	國立臺灣師範大學數學系
	劉建成	桃園市平鎮區平鎮國民中學
	劉祥通	國立嘉義大學數理教育研究所
	鄭章華	國家教育研究院
	鍾 靜	國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系

地址	臺北市汀州路四段 88 號國立臺灣師範大學數學系 《臺灣數學教師》
電話	886-2-7734-6576
傳真	886-2-2933-2342
電子郵件	tjmtedit@gmail.com
網址	http://tame.tw/news/news.php?class=204

附 啟

1. 本期刊自 2014 年 35 卷起每年出版二期。
2. 本期刊原名《台灣數學教師(電子)期刊》，自 2014 年 35 卷第 2 期起改名為《臺灣數學教師》。
3. 本期刊電子郵件由自 2015 年 36 卷第 1 期起改為 tjmtedit@gmail.com。

版權所有，轉載刊登本刊文章需先獲得本刊同意，翻印必究

主編的話

在 2018 年的上半年，本期刊論文出版已邁入第 39 卷第 1 期。本期刊由國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會共同發行，收錄有關數學教學、學習與評量等實務論文，只要在數學教育的實務有所創見，輔以學理支持和實踐後有所發現，都歡迎投稿本期刊，俾能落實數學教育的創新實踐。近年來本期刊所刊登的論文，廣受數學教師和研究者參考，所以本期刊也肩負數學教育研究與實務的連結與傳承。

本期論文共有三篇，第一篇是林素微所撰寫的〈數學課室教師支持與學生數學素養關聯探討：以 PISA 2012 臺灣資料為例〉，這篇論文根據 PISA 2012 台灣學生問卷資料，發現學生在數學教師支持反應可分成三群，同時也探討學生的數學素養與其所感知的數學教師支持有高關聯性，本文研究結果可提供教師數學教學與學生數學素養養成的參考。第二篇是葉裕益、吳宛柔、林美杏、陳建亨、許皓雲、曾明德、吳慧珉、楊凱琳所發表的〈由國中學力檢測數學命題反思試題設計原則〉，此篇論文是探討國中學力檢測的數學命題，以具體例子提出優質數學試題設計原則須考量三個面向與十四個原則，本文所提出的實例和面向與原則，可提供國中教師數學試題命題和檢核試題品質的參考。第三篇是楊晉民、陳嘉皇所進行的〈應用數線表徵融入小二學生加減運算教學之成效〉，本篇論文進行小二學童數線表徵的教學實驗，發現參與實驗的學童經數線表徵教學實驗後，其加減問題的解題表現提升，並指出數線表徵教學可強化解題策略，這篇論文對於數線表徵議題提出重要的教學參考。

本期刊能順利出版完成，首先要感謝審查委員不辭辛苦撥冗審查論文，讓論文更臻完善。同時也由衷感謝兩位副主編和編輯委員會委員的奉獻付出，以及編輯助理的辛勞。最後，尚祈各位先進繼續給予本期刊建議指導，您的支持與鼓勵讓本期刊不斷精進。

《臺灣數學教師》主編

林原宏 謹誌

臺灣數學教師

第 39 卷 第 1 期

2005 年 3 月創刊

2018 年 4 月出刊

目錄

- | | |
|---|----|
| 數學課室教師支持與學生數學素養關聯探討：以 PISA 2012 臺灣資料為例
／林素微 | 1 |
| 由國中學力檢測數學命題反思試題設計原則
／葉裕益、吳宛柔、林美杏、陳建亨、許皓雲、曾明德、吳慧珉、楊凱琳 | 18 |
| 應用數線表徵融入小二學生加減運算教學之成效
／楊晉民、陳嘉皇 | 35 |

Taiwan Journal of Mathematics Teachers

Vol. 39 No. 1

First Issue: March 2005

Current Issue: April 2018

CONTENTS

- The investigation of relationship between mathematics teacher support and mathematical literacy: A secondary analysis of Taiwan PISA 2012 data 1
／Su-Wei Lin
- Rethinking item design principles of the basic mathematical competence test for junior high schools 18
／Yu-Yi Yeh 、Wan-Rou Wu 、Mei-Hsing Lin 、Chien-Heng Chen 、
Hao-Yun Hsu 、Ming-Te Tseng 、Huey-Min Wu 、Kai-Lin Yang
- Effectiveness of teaching experiment with number line representations on addition and subtraction calculations for second grades 35
／Jinn-Min Yang 、Chia-Huang Chen

林素微 (2018)。

數學課室教師支持與學生數學素養關聯探討：以 PISA 2012 臺灣資料為例。

臺灣數學教師，39 (1)，1-17

doi: 10.6610/TJMT.201804_39(1).0001

數學課室教師支持與學生數學素養關聯探討：以 PISA 2012 臺灣資料為例

林素微¹

¹國立臺南大學教育學系

教師往往是學生原生家庭之外的重要他人之一，教師對於學生的學習有相當的影響力，因此良好的教師支持應是數學教室經營的一項重點。本研究以 PISA 2012 學生問卷中關於數學教師支持量表來進行探討，探討學生的數學素養與其所感知的數學教師支持的關聯性。研究運用潛在類別分析，分別將學生在數學教師支持量表的反應組型加以意義化分類。結果以分成三種型態為最佳，根據這三群學生在數學教師支持量表的作答機率組型分別命名為低幫助低熱忱（11.19%）、高幫助高熱忱（57.57%）、高幫助低熱忱（31.24%）。成就薄弱組的學生傾向於認同他們的數學教師支持為低幫助低熱忱，相對的，成就頂尖的學生則傾向於有較高幫助高熱忱的數學教師支持認同。針對此一現象，研究建議教育研究者可進一步探討如何提升低成就學生對其數學教師的認同感，而數學教師則可考量如何與這群特殊學生的建立融洽的互動關係，來進一步提升學生的數學素養。

關鍵詞：PISA；低成就；數學素養；數學教師支持

壹、緒論

一、研究動機與背景

數學是科學學習之母，其與生活有相當密切的關聯，數學的知識與技能都與日常生活或職場有密不可分的關係。學習數學，除了邏輯思維等基本能力的訓練之外，也有助升學或者就業。也因為如此，數學一直是臺灣正規教育重要的學科之一。

由於學習內容的抽象性，數學在學校課程中具有特殊的地位，可能導致學習動機低，學習困難。為了克服這些困難，數學教師採用不同的方法，包括注重良好的師生關係。

經營良好的師生關係是學校教育環境中重要的一環，有許多研究探討的師生關係與學習表現的關聯，國內也有許多相關研究指出師生關係對於學生的學習影響不容忽視的影響（例如：丁學勤、曾智豐，2013；張玉茹、江芳盛，2013；黃儒傑，2012）。國外許多研究已經證明了師生關係對於學習數學的成功的重要性（Crosnoe, Morrison, Burchinal, Pianta, Keating, Friedman & Clarke-Stewart, 2010; Mikk, Krips, Säalik, & Kalk, 2016）。Finn 等人（2009）的後設分析中則指出學生的學習成果和其所感知到的教師關懷之相關係數為 0.55。Hattie（2009）指出將師生關係的總體效果（ $d = 0.72$ ），是其探討的 138 個與學習成果關聯的變項中排名第 11 順位。Fast 等人（2010）指出關懷度較高的課室環境會使得學生的數學自我效能顯著提高，進而提高了數學成績。Marzano、Marzano 與 Pickering（2003）總結 100 多項研究的結果指出，良好的師生關係可讓學科學習感到困難、或者違規的學生比率降低約 30%。Cornelius-White（2007）指出基本學習（智商，語言，數學）技能與以學習者為中心的教師變項有較高的關聯。

師生關係對於那些在數學學習掙扎的學生尤為重要（Hughes, Wu, Kwok, Villarreal, & Johnson, 2012）。Leikin 與 Levav-Waynberg（2007）指出，數學教師在課堂上講解時往往不會尋求以多元的解題方式來處理問題，因而數學教師與學生建立關係相對比較困難，該研究建議數學老師可藉由注意他們自身的行為，盡力表達出他們對於學生關心及支持來進一步支持學生發展的機會。Säalik、Mikk、Krips 與 Kalk（2014）的研究指出八至九年級的學生認為文科教師會比數學教師付出較多的關心和支持（引自 Mikk, Krips, Säalik, & Kalk, 2016）。黃儒傑（2012）指出社經弱勢學生相對於一般學生的師生關係可能有所差異，社經弱勢的中低以下收入及單親學生所獲得社會支持較一般學生少，因此，研究建議教師應多關懷弱勢學生，而良好的社會支持與正向的師生關係有助於提高弱勢學生的學習價值，且良好的社會支持還能夠促進良好的師生關係，更加提高學習價值。

Cornelius-White (2007) 指出，人文教育和現今建構主義者所強調的「以學習者為中心」的學習觀強調正向的師生關係可支持理想的 (optimal)、全人式 (holistic) 的學習。建構主義的教育方式改變了教師的角色：他們的主要角色不再是傳播知識，而是促進學習 (Korthagen, Klaassen & Russell, 2000)。儘管已經有許多研究，但 Bernstein-Yamashiro 與 Noam (2013) 宣稱師生關係仍然是一個日益增長的研究領域。

師生關係包括教師支持行為和教師關懷行為 (Mikk, Krips, Säälk, & Kalk, 2016)。教師的公平和誠信對於師生之間的良好關係非常重要 (Minor, Onwuegbuzie, Witcher & James, 2002)。良好的師生關係出現在安全和關懷的課堂環境中。教師可以通過傾聽學生，表達自己的感受，展現出誠實、信任、謙卑、期望和勇氣來表達關懷 (Collinson, Killeavy & Stephenson, 1999)。

良好的師生關係有利於學生的學習和動機 (Hughes et al., 2012)。Marzano 與 Marzano (2003) 指出相對於學校課程、評量，教師協同、和社群參與等學校政策，教師的課堂行動對學生成就的影響是上述這些變項的兩倍。在教學中，最重要的行為是與表達對學生的關懷、以不同方式支持學生以及課室管理。許多研究進一步表明，正向的師生關係與學生投入參與的提升有助於學生學業成就的提高 (Patrick, Ryan, & Kaplan, 2007)。尤其是數學和科學兩個學生容易感到焦慮的學科，教師的鼓勵、讚美和其他形式的支持可能尤為重要 (Wigfield & Meece, 1988)。然而，研究人員經常發現，成績最高的學生通常也獲得最多的鼓勵 (Usher & Pajares, 2008)。

Bandura (1986) 和 Urdan、Schoenfelder (2006) 指出在課堂和學校的社會情境脈絡下學生的學習動機和學習效率受到了師生關係品質的影響。La Paro 與 Pianta (2003) 認為，理想的課堂環境以作業的強烈興趣和專注，尊重的溝通和支持，以及對個別差異的回應為主要特徵。

有證據指出，在越高年級，正向積極的師生關係會下降。Entwisle、Alexander 與 Olson (1997) 以 In the Beginning School Study 資料分析中指出，一年級「喜歡老師」的學生比例較高 (男生 76%，女生 81%)，但在四年級結束時，男生下降至 52%，女生則為 70%。Klem 與 Connell (2004) 指出 22% 的小學生和 39% 的中學生感受到較低水平的教師支持，這些學生往往也面臨較大的學習風險。此外，許多關於師生關係的研究以中高年級國小學生為主，較少涉及中學生可能原因是，當學生上中學時，與特定教師的互動一般而言並不是特定學科的主要決定因素 (Kelly & Zhang, 2016)。針對 61 項與教師正向情感關聯 (即關懷，依戀，支持，喜歡等) 的後設研究中，Roorda、Koomen、

Spilt、與 Oort (2011)。指出了這些正向的教師情感和學生學習投入之間的關係的整體效果大小為 $r = 0.39$ ，其中，中學的關聯比國小中高年級更強。

國際學生能力評量計劃 (the Programme for International Student Assessment, 簡稱 PISA) 是二十一世紀頗受矚目的大型國際評量計畫之一，其以素養為號召，評量目的是想要了解 15 歲學生是否具備面對社會挑戰的能力，而數學素養是其中的核心評量項目之一。為界定這些 15 歲學生是否具有充分參與現代社會的能力，PISA 將數學素養水準 2 被視為是數學精熟度的基準線，PISA 界定低於水準 2 (也就是水準 1 及低於水準 1) 的學生是亟待補救強化的低表現群組，而臺灣從參與 PISA 2006 至今，均約有 12% 左右的比例為低表現群。這些學生未來在日常工作生活的真實世界中將面臨數學思考或學習的困難，教育社群應正視這些弱勢水準可能碰到的挑戰與障礙。

除了測量學生的素養表現之外，PISA 同時也透過學校、學生等問卷的蒐集探討諸多面向可能的影響因子，其中，師生關係便是其感興趣的主題之一。

在 PISA 2009 的學生問卷當中，曾針對學校教師與學生的師生關係進行探討，題目詢問學生對針對學校老師考量「我和大部分老師相處融洽」、「大部分老師都關心我的身心健康」、「大部分老師都公平地對待我」...等問題的同意程度來測量學生所感知到師生關係。Mikk、Krips、Säilik 與 Kalk (2016) 分析了師生關係與國際學生評估計劃 (PISA) 2009 年科學與數學在三個層面上的結果：學生、學校、國家層級。該研究顯示學生層面的弱相關 (相關係數為 0.16)，在學校層面之間存在正相關關係 (高達 0.34)。但在國家層面，師生關係與 PISA 結果卻呈負相關 ($r = -0.51$)。

由於 PISA 2009 的師生關係乃是一般性的師生關係，並沒有針對數學學科進行探討，因此，若以 PISA 2009 的師生關係調查變項和學生的數學素養進行探討，這樣的關聯結果若推論至數學課室可能略為牽強。而 PISA 2012 的探討主軸為數學，因此在這一波調查中，會以數學相關的資訊蒐集為主，其中，數學教師支持量表詢問學生在數學課室中，以下五個事件發生的頻率：「老師對每位學生的學習感興趣」、「當學生有需要時，老師會給予額外的幫助」、「老師會幫助學生學習」、「老師不斷教導，直到學生了解為止」、「老師給學生表達的機會」。因此，在本研究以 PISA 2012 臺灣 15 歲學生為探討對象，檢視這些學生所感知到的數學教師支持和其數學素養的關係。

PISA 2012 將一般性的師生關係、數學教師支持以及相關數學教師教學因素視為學習環境因素之一，並指出在高效能學校和優質的學習環境下通常學生的表現會較好 (Organization for Economic Co-operation and Development [OECD], 2013)。支持性的師

生關係往往導致學生對老師有正向積極的觀感及歸屬感(Battistich et al., 1995)。Roeser、Midgley 與 Urdan (1996) 指出幾乎所有的老師多數都認同教師的正式工作職責之一是支持學生的學習，所以教師支持的相關研究強調支持的程度以及學生所知覺到的教師支持的一致性。

本研究假設師生關係與學生的表現有所關聯，嘗試透過將學生所感知的數學課室的教師支持進行意義化的組型切入，探討學生所感知到的數學教師支持可能有哪些型態？而這些不同的數學教師支持型態的學生，其數學素養的表現又是如何？探討不同數學表現水準學生所感知到的數學教師支持為何？基於這樣的想法，本研究採用潛在類別分析將學生所針對數學課室的教師支持問卷反應進行客觀的分類，進而探討不同數學教師支持型態的學生的數學素養表現是否存在差異，並進一步針對不同師生關係型態與數學素養水準間的關聯性。

二、研究目的

基於上述的研究動機，本研究針對參與 PISA 2012 的臺灣 15 歲學生，提出以下的研究目的：

- (一) 探討臺灣學生所感知的數學課室教師支持狀態。
- (二) 探討學生所感知到的數學課室教師支持組型。
- (三) 檢視不同數學課室教師支持組型的數學素養差異情形。
- (四) 檢視不同數學課室教師支持組型與數學素養水準的關聯情形。

貳、研究方法

一、資料來源

研究中的資料是來自 2012 臺灣地區 PISA 資料，共有 6046 名 15 歲的學生參與，由於此一波調查的學生問卷是採用三套題本隨機分派給學生，問卷試題採螺旋式的設計，故每項數學關聯的量表(如數學自我效能、數學焦慮...等)均約有三分之二的學生填答，因此，刪除數學教師支持問卷的缺失值之後，樣本人數為 3976 人，研究針對用這些學生進行潛在類別分析。而探討不同數學教師支持型態與數學素養的關聯時，考量 PISA 的抽樣方式是以學校類型作為主要的分層變項，依照母群中各的比例以及規模大小比例的概率進行學校抽樣，而抽中的學校再以系統性抽樣 40 名學生(洪碧霞、劉妍希, 2015)，

因此各校學生對應到母體可能有不同的權重，為使本研究更具母體代表，本研究分析使用加權後的學生人數，為 192577 人。

二、數學課室的教師支持量表

在 PISA 2012 學生問卷中，數學課室的教師支持量表詢問學生在數學課室中，以下五個事件發生的頻率：「老師對每位學生的學習感興趣」、「當學生有需要時，老師會給予額外的幫助」、「老師會幫助學生學習」、「老師不斷教導，直到學生了解為止」、「老師給學生表達的機會」；題目為四點量表，分別為「在所有課堂上」、「在大部分課堂上」、「在一些課堂上」、「從來沒有或幾乎不曾」。

此指標透過單參數的試題反應理論模式（one-parameter item response model）進行量尺化（scaling），量尺分數值介於 3 與 -3 之間，其平均為 0，標準差為 1；量尺化程序請參見 OECD 技術報告（OECD, 2014, pp.312-316）。臺灣數學課室教師支持量表的信度分別為 0.86（OECD, 2014, pp.327），OECD 平均則為 0.82（OECD, 2014, pp.326）。

三、分析方法

針對研究目的一，本研究以 SPSS，針對學生所感知到的數學教師支持量尺分數進行描述性統計分析，以及其與數學素養的關聯。針對研究目的二，研究使用 MPLUS 軟體進行潛在類別分析以獲得適切的數學教師支持潛在類別模式，本研究將「在所有課堂上」及「在大部分課堂上」偏向高頻率的回答編碼為 1，「在一些課堂上」和「從來沒有或幾乎不曾」偏向低頻率的作答反應編碼為 0 來進行潛在類別分析以獲得適切的數學教師支持的潛在類別模式。針對研究目的三和四，本研究在取得較佳的模式評估之後，則使用 SPSS 軟體分析不同數學教師支持型態的學生，其數學素養表現的概況；以及進行對應分析來檢視不同數學教師支持型態與不同數學素養水準組型間的關聯情況。由於 PISA 2012 資料庫提供五個數學素養，本研究涉及數學素養的分析時均先分別以五個數學素養值作為結果變項進行分析，之後再以這五次分析結果的平均值作為討論依據。

參、研究結果

一、臺灣學生所感知的數學課室教師支持狀態分析

表 1 呈現的是 15 歲學生所感知到的數學課室中教師對於其學習支持頻率之百分比

摘要。從表 1 可以知道，臺灣學生感知到數學課室中教師對學生學習的支持頻率相當高，其中「當學生有需要時，老師會給予額外的幫助」、「老師會幫助學生學習」兩項有超過八成的學生認為在所有課堂或者是大部分課堂上均可以感受到教師的支持，其次是「老師給學生表達的機會」，約有 77% 的學生認為所有課堂或者大部分課堂會發生；而有近七成的學生認為「老師不斷教導，直到學生了解為止」在課堂發生的頻率相當高；而認為「老師對每位學生的學習感興趣」常常發生的學生的百分比最低，約為 54%。可見臺灣數學教師在提供的數學教學支持上得到大多數學生的認同。

表 1
學生所感知到的數學課室教師支持頻率百分

題目	頻率	在所有 課堂上	在大部 分課堂 上	在一些 課堂上	從來沒 有或幾 乎不曾	合計
老師對每位學生的學習感興趣		16.5%	37.3%	39.6%	6.6%	100%
當學生有需要時，老師會給予額外的幫助		44.7%	37.4%	15.8%	2.1%	100%
老師不斷教導，直到學生了解為止		52.3%	34.4%	11.7%	1.7%	100%
老師會幫助學生學習」		34.9%	35.0%	25.5%	4.6%	100%
老師給學生表達的機會		42.0%	34.8%	20.2%	3.1%	100%

而表 2 呈現的是學生數學素養與教師支持的描述統計及兩者的相關資訊。從表 2 可以看出，雖然本研究僅以臺灣約三分之二的 15 歲學生母群進行分析，但本研究樣本的數學素養表現資訊（平均 560.74，標準差為 113.9）和整體 15 歲母群的表現（平均 560，標準差 116）接近，而臺灣學生所感知到的教師支持平均為 0.12，標準差為 0.85，顯示臺灣學生所感知到的教師支持略高於 OECD 平均，且個別差異略小於 OECD。教師支持與數學素養兩者的相關為 0.06，解釋力為 0.36%。從這樣的結果來看，兩者的關聯不高，主要原因在於多數學生對於教師支持感到認同，因此，若要檢視不同表現精熟學生成就與師生關係的關聯，可能有進一步採用不同分析進行探討的必要。因此，本研究後續將學生在教師支持量表的回應採用類別化的方式進行探討，期待能進一步釐清可能的關聯。

表 2

學生之數學素養及教師支持之描述統計摘要 (n = 192577)

	平均數	標準差	相關
數學素養	560.74	113.9	0.06**
教師支持	0.12	0.85	

** $p < .01$.

二、數學課室的教師支持之潛在類別模式分析結果

數學教師支持的潛在類別模式適配指標如表 3 所示，AIC、BIC 及 Adjusted BIC 在三個潛在類別的模式適配指標均最低(這些適配指標數值愈小，則模式愈佳，而 Nylund、Asparouhov 與 Muthén (2007) 建議樣本人數多，以 BIC 來選擇最佳模式)，因此，本研究的資料顯示以三個類別的模式為最佳模式。表 4 顯示類別比率及這三種型態學生在試題的作答反應機率，這三個型態的類別比率分別為 11.19%、57.57%、31.24%，也就是全部的學生有接近 11%被分到類別 1，58%被歸類為類別 2，31%的學生則是被歸類為類別 3。類別 2 的學生在題目 2 同意的條件機率为 0.987，代表類別 2 的學生有 98.7%的機率認為在「當學生有需要時，老師會給予額外的幫助」事件在數學課室中有高頻的發生率。

圖 1 及表 4 可以觀察到類別 2 的學生指出數學課室中教師在各項支持行為均常常發生，因此本研究將類別 2 命名為「高幫助高熱忱」組，他們感知到數學課室當中的老師常常給予協助、對學生學習感興趣、也會持續教導直到學生理解；相對於類別 2，類別 1 的學生相對認為數學課室中教師在各項支持行為並不常發生，顯示他們並沒有在數學課室中特別感受到教師的支持，此種類型的學生本研究歸之為「低幫助低熱忱」；類別 3 的學生則是在認為教師會給予幫助，但似乎較少感受到老師對於學生的學習感興趣，給予學生表達的機會，或者不斷教導等，因此，本研究針對類別 3 的學生命名為「高幫助低熱忱」組。

表 3

問題解決探索性潛在類別分析模型適配指標摘要表

Model	AIC	BIC	Adjusted BIC
2-class	18020.49	18089.66	18054.71
3-class	17580.14	17687.04	17633.02
4-class	17546.36	17690.98	17617.90
5-class	17551.06	17733.41	17641.26

表 4

三類別模式在數學教師支持量表題目上的條件機率與潛在類別比率

題目	類別 1	類別 2	類別 3
老師對每位學生的學習感興趣	0.052	0.804	0.303
當學生有需要時，老師會給予額外的幫助	0.051	0.987	0.803
老師會幫助學生學習	0.043	1.000	0.913
老師不斷教導，直到學生了解為止	0.064	0.959	0.507
老師給學生表達的機會	0.230	0.972	0.627
類別比率	11.19%	57.57%	31.24%

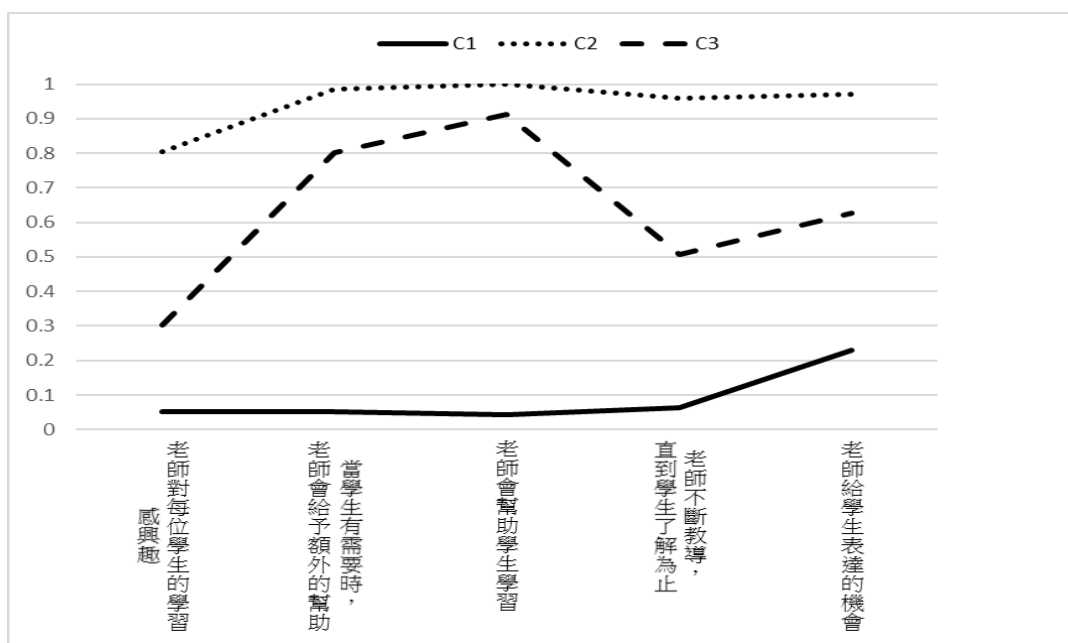


圖 1 三類別模式在數學教師支持量表題目頻率反應的條件機率

三、不同數學教師支持組型的學生數學素養差異分析

研究針對三種數學教師支持組型學生的數學素養進行探討，結果如表 5 所示，這三

種類型當中，以感知到數學教師的支持為「高幫助高熱忱」的學生有較高的數學素養，平均為 565.99，而以「低幫助低熱忱」的學生數學素養較為薄弱，平均為 526.58，變異數分析顯示三組差異達顯著， $F_{(2,192574)} = 1091.86$ ， $\eta^2 = 0.012$ ，而事後比較的結果顯示各組彼此之間均達顯著，不過由於本研究人數眾多，顯著性受到人數的影響，這些相關檢定顯著性結果僅供參考。三種數學教師支持型態對於學生數學表現變異的解釋力為 0.012，屬於小型效果量，可能原因是三類人數差異頗大，且仍有其他變項影響臺灣學生的數學素養，所以各類別的學生數學素養分數的變異仍然頗大，由於組內誤差大，因而效果量偏低。

表 5

不同數學教師支持類型學生的數學素養表現描述統計

	低幫助低熱忱	高幫助高熱忱	高幫助低熱忱	全體
平均數	526.58	565.99	560.77	560.77
標準差	118.11	111.82	114.15	113.91
人數	21052	110220	61305	192577

四、不同數學教師支持組型與不同數學表現水準之關聯分析

為檢視不同數學素養水準學生與不同數學教師支持類型的關聯，本研究將學生的數學素養水準分成高數學素養組（原國際定義的水準 5 及水準 6）、中數學素養組（原國際定義的水準 2 至水準 4）、及低數學素養組（原國際定義的水準 1 及低於水準 1），使用對應分析檢視不同數學教師支持型態與不同數學表現水準組型的關聯情形，結果 $\chi^2 = 1797.220$ ， $p < .001$ ，表示數學教師支持型態與數學素養水準組型存在著依賴的關係，從圖 2 可以觀察到低數學素養組的學生傾向於較低頻的教師支持感知，也就是「低幫助低熱忱」；中數學素養組的學生則傾向於「高幫助低熱忱」，換句話說，中數學素養的學生認為老師較常協助他們的數學學習，但對於學生的學習較少感到興趣與持續的教導，而學生也不太有機會發表；相對的，高數學素養組的學生則傾向於認為老師常常幫助學生且持續的教導，對學生的學習感到興趣，同時學生也常有機會發表。

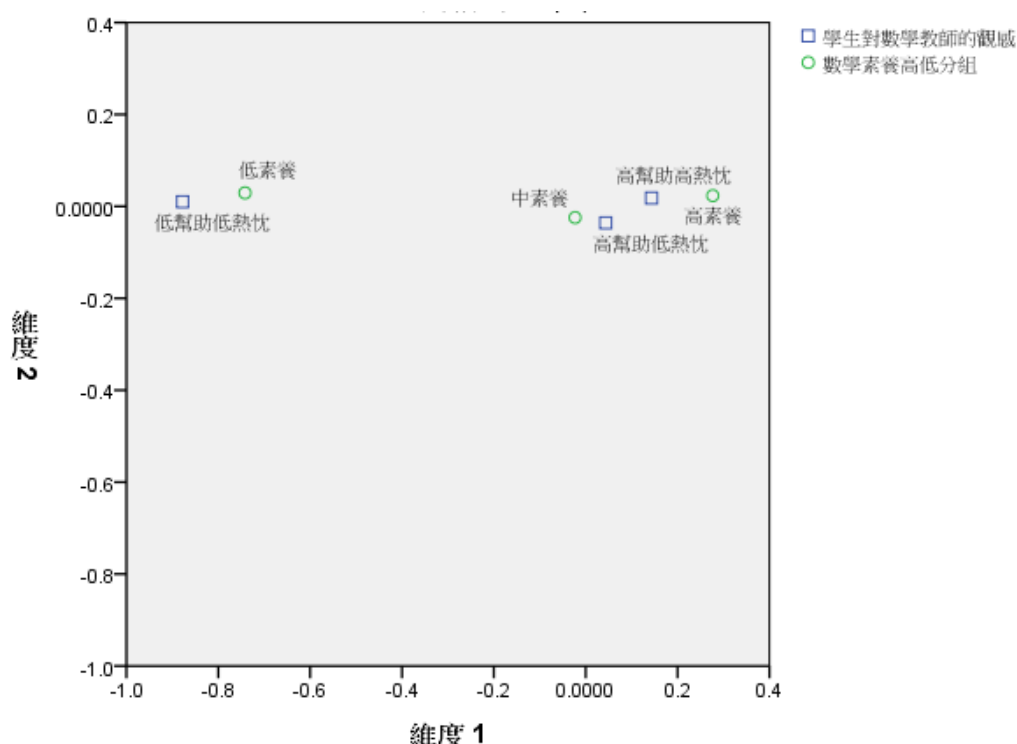


圖 2 數學課室的教師支持類型與數學素養組型的對應分析圖

肆、結論與建議

一、研究結論

在學生進入中學以後，他們的學業投入與表現受到一系列因素的影響，包括他們過去的成敗歷史，這些因素包括社區鄰里、家庭和同伴的影響（Crosnoe, 2011）。因此，許多教育工作者可能會質疑，到了中學，教師是否有可能會改變學生的學習興趣、學科的認同或投入參與（Kelly & Zhang, 2016）。本研究透過檢視學生在數學課室教師支持量表回應的次數分配，整體而言，結果顯示學生認為教師的確在數學課室中提供相當高頻率的學習支持，這樣的結果可以和許多相關研究文獻以互相呼應。例如，Perry、Donohue 與 Weinstein（2007）指出教師溫暖的平均水準為 3.57，相當於「經常出現」和「常常出現」之間。同樣，在大規模的小學課室觀察結果顯示，評分者給予這些教師在營造正向的情意氛圍的整體評分為 7 分制的 5.36 分，相當於「非常有特色」之上（National Institute for Child Health and Human Development and Early Child Care Research Network, 2002）。在芝加哥學校研究（Chicago School Study）指出公立和天主

教中學學生的平均覺知分數為 2.89 到 3.17 四點，其中 3.00 是「同意」，4.00 是「非常同意」(Hallinan, 2008)。Muller (2001) 以 National Education longitudinal Study 進行探討，指出 10 年級的學生所感知到的學校教師關懷水平的平均為 2.8 (四分制)，相當於對正面陳述的「同意」。因此，本研究和上述研究均顯示教師在學生學習所投入的努力是可以被學生所感受到，學生認同數學課室中教師所提供的學習支持。

本研究利用潛在類別分析，針對學生在數學課室中「老師對每位學生的學習感興趣」、「當學生有需要時，老師會給予額外的幫助」、「老師會幫助學生學習」、「老師不斷教導，直到學生了解為止」、「老師給學生表達的機會」等事件的發生頻率將數學教師支持型態可以分高幫助高熱忱、高幫助低熱忱、以及低幫助低熱忱三種潛在類型，其中高幫助高熱忱類型的學生有 57.57%，認為教師高幫助低熱忱有 31.24%，而認為數學教師屬於低幫助低熱忱類型學生僅有 11.19%；換句話說，近六成的學生認為數學課室中教師所提供的支持是屬於高幫助高熱忱，他們認為數學課室中教師常常幫助學生學習，尤其是需要幫助的學生，而且教師會不斷的教導直到學生了解，教師也對學生的學習感到興趣，並且也常常提供學生機會發表。透過類別化的分析，再次驗證臺灣數學教師在提供的數學教學支持上得到大多數學生的認同。以數學教師支持類別為自變項，數學素養分數為依變項，進行變異數分析，結果顯示三個類別的平均數差異達顯著，高幫助高熱忱類型的學生數學素養分數最高，而低幫助低熱忱的學生數學素養分數最低，效果量為 0.012，屬於小型效果量，可能原因是三類人數差異頗大，且仍有其他因素影響臺灣學生的數學素養，單以數學教師的支持感知來看數學素養的變異可能有所不足，所以各類別內的學生數學素養分數變異高，由於組內誤差大，因而效果量偏低。

研究再進一步透過潛在類別分析，檢視不同數學素養水準組型與數學教師支持類別的關聯。結果指出，不同數學教師支持類型在數學素養表現上，以高幫助高熱忱表現相對較高，而感受到低幫助低熱忱的數學教師支持的學生通常表現也相對較低。此結果顯示相對於相關係數的呈現，透過對應分析檢視數學素養水準組型與數學教師支持類別可以得到相對較多的訊息，低數學素養組的學生傾向於低幫助低熱忱的數學教師支持感受。基於這樣的結果，研究者建議針對這一群表現薄弱的學生而言，數學教師有必要再努力提升其給予學生的教學支持。整體而言，本研究建議教育研究者可以針對低數學素養學生探討如何提升他們對於數學教師的認同感，而教師除了積極提升低成就學生表現的同時，也能考量如何與這群特殊學生的建立融洽的互動關係，透過高幫助高關懷的學習氛圍營造提升學生對於教師支持的感受，同時提升其數學表現。

二、研究限制與建議

本研究屬於橫斷性的研究，教師支持和數學素養同時進行測量。因此，觀察到的教師支持與數學素養之間的關係可能部分地反映了一個尚未測量的共同因素，例如學生先備知識、班級風氣等；另一方面，學生對於教師支持的覺知可能很大程度上反映了其對學習環境的普遍正面感受，而不純然是教師本身的因素。儘管嘗試釐清教師支持與學生學習表現的影響仍具有挑戰性，但本研究結果顯示支持性的教學環境以及教師對學生成就表現應有相當的貢獻。雖然 PISA 資料無法讓我們深入探討數學教師如何與學生建立積極關係而應進行的具體行動，但是研究結果顯示對於薄弱群組的學生而言，教師的支持的感知相對較低，顯示教師支持與學生表現的關聯應不容小覷。後續研究可以考慮透過長期性以及更多元變項的資料蒐集，檢視這些變項的可能關聯，或許可能可以對教師支持與學生表現進行更全面或者因果之間的探討。

而在教師支持量表的內涵部分，除了 PISA 所探討的教師支持，其他教學處理中教師可能運用的課室支持做法（例如，使課堂活動的目標明確，提升學生的歸屬感和認同感等）也是引發學生課室參與投入常見的方式。後續研究可考慮研發更直接、更全面關心學生投入與表現和支持性的教學實務的相關研究工具及內涵。

此外，本研究僅針對數學領域，其他學科領域的教師支持與成就表現可能有不同的關聯，因此，未來可考慮其他學科領域（語文、社會、科學等）關於教師支持與其相關學習的關聯探討，以利學生學校學習全方位的提升。

參考文獻

- 丁學勤、曾智豐（2013）。影響國中階段貧窮學生學業表現之因素探析-以臺灣兒童暨家庭扶助基金會扶助對象為例。**臺灣教育社會學研究**，13（1），1-42。
- 洪碧霞、劉研希（2015）。臺灣 PISA 2012 執行說明。載於臺灣 PISA 國家研究中心（主編），**臺灣 PISA 2012 結果報告**（13-22 頁）。臺北：心理出版社。
- 張玉茹、江芳盛（2013）。師生關係、學習動機與數學學業成就模式之驗證－以 PISA2003 資料庫為例，**測驗統計年刊**，21（2），91-121。
- 黃儒傑（2012）。弱勢學生師生關係、社會支持及其學習任務價值之相關研究。**臺東大學教育學報**，23（2），1-26。

- Bandura, A. (1986). *Social foundations of thought and action: A social cognitive theory*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall. doi: 10.1207/s15326985ep3203_1
- Battistich, V., Solomon, D., Kim, D., Watson, M., & Schaps, E. (1995). Schools as communities, poverty levels of student populations, and students' attitudes, motives, and performance. *American Educational Research Journal*, 32(3), 627–658. doi: 10.2307/1163326
- Bernstein-Yamashiro, B. & Noam, G. G. (2013). Teacher-student relationships: A growing field of study. *New Directions for Youth Development*, 137, 15–26. doi: 10.1002/yd.20045
- Collinson, V., Killeavy, M. & Stephenson, H. (1999). Exemplary teachers: Practicing an ethic of care in England, Ireland, and the United States. *Journal for a Just and Caring Education*, 5, 349–366.
- Cornelius-White, J. (2007). Learner-centered teacher-student relationships are effective: A meta-analysis. *Review of Educational Research*, 77(1), 113–143. doi: 10.3102/003465430298563
- Crosnoe, R. (2011). *Fitting in, standing out: Navigating the social challenges of high school to get an education*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Crosnoe, R., Morrison, F., Burchinal, M., Pianta, R., Keating, D., Friedman, S. L. & Clarke-Stewart, K. A. (2010). Instruction, teacher–student relations, and math achievement trajectories in Elementary School. *Journal of Educational Psychology*, 102(2), 407–417. doi: 10.1037/a0017762
- Entwisle, D. R., Alexander, K. L. & Olson, L. S. (1997). *Children, schools, and inequality*. Boulder, CO: Westview Press.
- Fast, L. A., Lewis, J. L., Bryant, M. J., Bocian, K. A., Cardullo, R. A., Rettig, M. & Hammond, K. A. (2010). Does math self-efficacy mediate the effect of the perceived classroom environment on standardized math test performance? *Journal of Educational Psychology*, 102(3), 729–740. doi: 10.1037/a0018863
- Finn, A. N., Schrod, P., Witt, P. L., Elledge, N., Jernberg, K. A. & Larson, L. M. (2009). A meta-analytical review of teacher credibility and its associations with teacher behaviors

- and student outcomes. *Communication Education*, 58(4), 516–537. doi: 10.1080/03634520903131154
- Hallinan, M. T. (2008). Teacher influences on students' attachment to school. *Sociology of Education*, 81, 271–283. doi: 10.1177/003804070808100303
- Hattie, J. A. C. (2009). *A synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement*. London, England: Routledge.
- Hughes, J. N., Wu, J. Y., Kwok, O., Villarreal, V. & Johnson, A. Y. (2012). Indirect effects of child reports of teacher–student relationship on achievement. *Journal of Educational Psychology*, 104(2), 350–365. doi: 10.1037/a0026339
- Kelly, S. & Zhang, Y. (2016). Teacher Support and Engagement in Math and Science: Evidence from HSLs. *The High School Journal*, 99, 141–165. doi: 10.1353/hsj.2016.0005
- Klem, A. M., & Connell, J. P. (2004). Relationships matter: Linking teacher support to student engagement and achievement. *Journal of School Health*, 74(7), 262–273. doi: 10.1111/j.1746-1561.2004.tb08283.x
- Korthagen, K., Klaassen, C. & Russell, T. (2000). New learning in teacher education. In R. J. Simons, J. van der Linden & T. Duffy (Eds.), *New learning* (pp. 243–259). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer. doi: 10.1007/0-306-47614-2_13
- La Paro, K. M. & Pianta, R. C. (2003). *CLASS: Classroom Assessment Scoring System*. Charlottesville: University of Virginia Press.
- Leikin, R. & Levav-Waynberg, A. (2007). Exploring mathematics teacher knowledge to explain the gap between theory-based recommendations and school practice in the use of connecting tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 66(3), 349–371. doi: 10.1007/s10649-006-9071-z
- Marzano, R. J. & Marzano, J. S. (2003). The key to classroom management. *Educational Leadership*, 61(1), 6–13.
- Marzano, R. J., Marzano, J. S. & Pickering, D. J. (2003). *Classroom management that works*. Alexandria, VA: ASCD.
- Mikk, J., Krips, H., Säälk, Ü, & Kalk, K. (2016). Relationships between student perception

- of teacher-student relations and PISA results in mathematics and science. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 14, 1437-1454. doi: 10.1007/s10763-015-9669-7
- Minor, L. C., Onwuegbuzie, A. J., Witcher, A. E. & James, T. L. (2002). Preservice teachers' educational beliefs and their perceptions of characteristics of effective teachers. *Journal of Educational Research*, 96(2), 116–128. doi: 10.1080/00220670209598798
- Muller, C. (2001). The role of caring in the teacher-student relationship for at-risk students. *Sociological Inquiry*, 71, 241–255. doi: 10.1111/j.1475-682X.2001.tb01110.x
- National Institute for Child Health and Human Development and Early Child Care Research Network. (2002). The relation of global first-grade classroom environment to structural classroom features and teacher and student behaviors. *The Elementary School Journal*, 102, 367–387. doi: 10.1086/499709
- Nylund, K. L., Asparouhov, T. & Muthén, B. O. (2007). Deciding on the Number of Classes In Latent Class Analysis and Growth Mixture Modeling: A Monte Carlo Simulation Study. *Structural Equation Modeling*, 4, 535–569. doi: 10.1080/10705510701575396
- OECD (2013), *PISA 2012 Results: What Makes Schools Successful? Resources, Policies and Practices (Volume IV)*, PISA, OECD Publishing.
<http://dx.doi.org/10.1787/9789264201156-en>
- Patrick, H., Ryan, A. M., & Kaplan, A. (2007). Early adolescents' perceptions of the classroom social environment, motivational beliefs, and engagement. *Journal of Educational Psychology*, 99(1), 83–98. doi: 10.1037/0022-0663.99.1.83
- Perry, K. E., Donohue, K. M., Weinstein, R. S. (2007). Teaching practices and the promotion of achievement and adjustment in first grade. *Journal of School Psychology*, 45(3), 269–292. doi: 10.1016/j.jsp.2007.02.005
- Roeser, R. W., Midgley, C., & Urdan, T. C. (1996). Perceptions of the school psychological environment and early adolescents' psychological and behavioral functioning in high school: The mediating role of goals and belonging. *Journal of Educational Psychology*, 88(3), 408–422. doi: 10.1016/j.jsp.2007.02.005
- Roorda, D. L., Koomen, H. M. Y., Spilt, J. L., & Oort, F. J. (2011). The influence of affective

teacher-student relationships on students' school engagement and achievement: A meta-analytic approach. *Review of Educational Research*, 81(4), 493–529. doi: 10.3102/0034654311421793

Urdu, T. & Schoenfelder, E. (2006). Classroom effects on student motivation: Goal structures, social relationships, and competence beliefs. *Journal of School Psychology*, 44, 331–349. doi: 10.1016/j.jsp.2006.04.003

Wigfield, A., & Meece, J. L. (1988). Math anxiety in elementary and secondary school students. *Journal of Educational Psychology*, 80, 210–216. doi: 10.1037/0022-0663.80.2.210

葉裕益、吳宛柔、林美杏、陳建亨、許皓雲、曾明德、吳慧珉、楊凱琳（2018）。

由國中學力檢測數學命題反思試題設計原則。

臺灣數學教師，39（1），18-34

doi: 10.6610/TJMT.201804_39(1).0002

由國中學力檢測數學命題反思試題設計原則

葉裕益¹ 吳宛柔² 林美杏³ 陳建亨⁴ 許皓雲⁵ 曾明德⁶ 吳慧珉⁷ 楊凱琳⁸

¹ 國立臺灣師範大學附屬中學

⁵ 臺北市立萬華國民中學

² 臺北市立東湖國民中學

⁶ 臺北市立南門國民中學

³ 臺北市立中正國民中學

⁷ 國家教育研究院

⁴ 臺北市立大理高中國中部

⁸ 臺灣師範大學數學系

數學試題品質首重效度，本文試題雙向細目表的內容效度以七年級九年一貫課程綱要能力指標為基礎，認知向度分成概念理解、程序執行、邏輯推理、解數學文字題和解情境文字題等五個向度。以此雙向細目表為基礎，進行七年級的數學學力檢測試題設計。透過國中七年級數學學力檢測正式測驗卷的產出過程，本文以具體例子提出優質數學試題設計原則須考量三個面向與十四個原則。三個面向依序為測驗目標、文字敘述、情境與數學等三個面向。在測驗目標面向中，歸納出四個原則為避免陌生的語彙影響測驗目標、以多數學生的解題方法來檢測該題是否符合預期的測驗目標、避免重複計算產生的錯誤以增進該測驗的精準度、用施測對象的年級來評估試題難度的適切性。在文字敘述面向中，歸納出五個原則為避免使用未知數或數字開頭命題、描述相同物件用詞需一致、選項敘述宜簡單明瞭、正確使用專有名詞、句子須兼顧主詞與受詞的明確。在情境與數學面向中，歸納出五個原則為提供充分資訊增進題幹的完整性、檢驗情境背後隱藏假設是否具合理性、檢驗數據背後隱藏的關係是否具合理性、考量題目的敘述是否過度冗長而影響學生的閱讀理解力、考慮學生學習其他學科的知識並兼顧數學測驗目標。

關鍵詞：國中學力；數學命題；檢測

通訊作者：葉裕益，e-mail：yyy146@gmail.com

收稿：2018 年 1 月 18 日；接受刊登：2018 年 03 月 19 日。

壹、前言

曾建銘（2014）指出試題編寫的一般原則有試題應依循測驗目的、試題內容應具代表性、試題的題型應多樣化、試題文句應簡潔明確、試題答案應明確可靠、測驗試題應彼此獨立等六大項，其中試題內容應具代表性、試題的題型應多樣化、測驗試題應彼此獨立等三項屬於編寫整份試卷的範疇，而試題應依循測驗目的、試題文句應簡潔明確、試題答案應明確可靠等三項屬於個別試題命題的範疇。作者以國語文、英語文、數學、社會與自然等五大科目舉出範例說明一般性原則。而僅有兩個範例屬於數學科目，這較難有效用來增進教師設計數學試題的知能。故本文欲從命題的實務經驗中分析歸納數學試題的設計原則，並提供更多的數學試題範例說明所歸納的設計原則。

目前關於檢測國中階段（7~9 年級）學生數學能力的大型測驗有四種，國內檢測有國中教育會考、學習能力檢測[學力檢測]等兩大測驗；國際間有 The Programme for International Student Assessment [PISA]、Trends in International Mathematics and Science Study [TIMSS]等兩大測驗。PISA、TIMSS 等測驗有系統性追蹤學生的學習狀況，評估學生數學學習成就及各國文化背景、學習環境、教師因素等影響因子之相關性。而國中教育會考屬於國中學習階段的總結性評量，適用於九年級學生，測驗範圍以數學領域課綱為依據。至於學力檢測的測驗目的，乃是為了瞭解學生學習狀況及提早發現待加強的學生並啟動積極性教學介入。關於國中教育會考、學力檢測、PISA、TIMSS 等四種大型測驗的測驗目的、對象與範圍請詳見附錄（附錄 1）。本文要探討的便是國中七年級數學學力檢測數學命題與修題原則。

基於各縣市欲追蹤學生之數學學習狀況的需求、參與的縣市策略結盟、降低各縣市試題研發量、減低縣市命題壓力及預試成本，各縣市教育局處委請國家教育研究院所屬之「臺灣學生學習成就評量資料庫」團隊，自 2016 年起，規劃協助縣市辦理國中階段學生學習能力檢測計畫。藉由檢測結果，協助教師瞭解其所教導的學生與該縣市學生的數學學習表現，同時也期望藉由學生的錯誤選答分析進而提供適當教學介入的建議。

國家教育研究院（2017）檢測數學七年級施測結果報告指出國中七年級數學學力檢測試題評量的內容效度以七年級九年一貫課程綱要能力指標（詳見附錄 2）為基礎，認知向度分成概念理解、程序執行、邏輯推理、解數學文字題和解情境文字題等五個向度組成，其操作說明詳見附錄 3。

學力檢測的試題是透過各縣市推派的數學老師參加命題工作坊，並進行命題實作與

分工命題後，再經由審題小組逐題修審後納入預試試題題庫，最後以學生預試後結果進行篩選出適當的試題，再重組出一整份的正式學力檢測試題。在這樣的實務脈絡中，我們分析命題歷程並歸納出一些數學試題的設計原則，希望日後對於教師進行命題或修題時能有所助益。

貳、優質數學試題設計原則

我們透過審題小組在命題與修審題的歷程中所獲得的經驗，統整出三大面向，提供教師在命題時參考。一是測驗目標，二是文字敘述，三是情境與數學。以下將以例子分別說明該三大面向的子項目與其內涵。

一、測驗目標

(一) 避免陌生的語彙影響測驗目標

緣由：測驗目標是要檢測學生的數學概念是否清楚，而非因陌生的語彙造成學生無法順利進行解題。

舉例：下列何數可表示六兆八千億？

- (1) 6.8×10^{-12} (2) 6.8×10^{-11} (3) 6.8×10^{11} (4) 6.8×10^{12}

理由：此題要檢測學生是否能用科學記號表達很大的數，而非讓學生計算數字後面有幾個零，且學生對「兆」可能比較陌生。

修改：已知小明中了樂透彩頭獎五億六千萬，則下列何數可表示「五億六千萬」？

- (1) 5.6×10^6 (2) 5.6×10^7 (3) 5.6×10^8 (4) 5.6×10^9

(二) 以多數學生的解題方法來檢測該題是否符合預期的測驗目標

緣由：命題時仍然以課程綱要能力指標為擬訂測驗目標的依據，但是當試題出現多元解法時，此時需要重新檢視該題是否達到預期的測驗目標。重新檢視該題測驗目標的方法，以多數學生的解題方法來判斷該題是否達到預期的測驗目標。

舉例：某速食店業者促銷活動，買 3 份主餐和 2 杯飲料需 210 元。若小美全家點了 6 份主餐和 4 杯飲料，付 1000 元鈔票一張，則可找回多少元？

- (1) 580 (2) 290 (3) 210 (4) 420

理由：此題的測驗目標為能力指標 7-a-05 能利用移項法則來解一元一次方程式，並做驗算。若以使用一元一次方程式解題，則須將 3 份主餐和 2 杯飲料視為一個整體，

得到 6 份主餐和 4 杯飲料的費用為 3 份主餐和 2 杯飲料費用的 2 倍，即 420 元，但多數學生應會使用二元一次方程式解題，假設每份主餐為 x 元，每杯飲料為 y 元，得到 $3x + 2y = 210$ 。

修改：本題變更測驗目標，將能力指標 7-a-05 改為 7-a-06 能理解二元一次方程式及其解的意義，並能由具體情境中列出二元一次方程式，能力指標 7-a-06 較 7-a-05 更為合適此題測驗目標。

(三) 避免重複計算產生的錯誤以增進該測驗的精準度

緣由：如果試題已對應到預期的測驗目標，則避免不必要的類似計算過程。

舉例：狀元國中九年級學生共有 800 位，第一次模擬考全校有 80 位數學達到「精熟」，已知數學達到「基礎」與「待加強」人數比為 5：4，且第二次模擬考達到「精熟」人數維持不變，但「基礎」與「待加強」的人數比為 7：5，則第二次模擬考比第一次模擬考數學達到「基礎」的人數增加或減少多少位？

(1) 減少 40 位 (2) 減少 20 位 (3) 增加 20 位 (4) 增加 40 位

理由：此題測驗目的在於檢測學生對於比例概念的理解，並透過題目閱讀回答問題，而非讓學生不斷地做類似同樣步驟的計算，計算「基礎」與「待加強」人數比為 5：4 與「基礎」與「待加強」的人數比為 7：5 的步驟類似，避免學生因重複計算產生的錯誤，因此同樣的計算步驟只須讓學生做一次即可。

修改：狀元國中九年級學生共有 800 位參加第一次模擬考測驗，數學科測驗結果顯示全校有達到「精熟」、「基礎」與「待加強」的人數依序為 80、400 與 320 人。全校學生再參加第二次模擬考測驗，發現數學科測驗結果達到「精熟」人數與第一次模擬考人數相同，但「基礎」與「待加強」的人數比為 7：5，則第二次模擬考比第一次模擬考數學達到「基礎」的人數增加或減少多少位？

(1) 減少 100 位 (2) 減少 20 位 (3) 增加 20 位 (4) 增加 100 位

(四) 用施測對象的年級來評估試題難度的適切性

緣由：命題的前提是以課程綱要能力指標為依據，在相同的試題，如果使用古典測驗理論，也會因施測對象的年級不同而產生不同的難度，命題時應以施測對象的年級來評估試題難度的適切性。

舉例：如圖的方格中，填入適當的數字，使得每行、每列以及對角線上的數字和是相同的，則★的值為何？

(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 13

16	★	14
	13	

理由 1：本題修改自 93 年第二次基測試題，原基測試題為：如圖的方格中，填入適當的數字，使得每行、每列以及對角線上的數字和是相同的，則★的值為何？

(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 13

16		14
★		15
12		

相較於基測試題，此題需要更多等式的運算，且基測試題評量對象是九年級，但此次學力檢測的對象是七年級，因而須調整該試題的難度

修改 1：如圖的方格中，填入適當的數字，使得直行與橫列上的三個數字和是相同的，則★的值為何？

(A) 11 (B) 12 (C) 15 (D) 17

16		14
★	13	

理由 2：此題未填數字的方格較多，可能會干擾學生作答，為了精準聚焦於評量目標上，

因而設計適當有數字方格的位置，並隱藏多餘的格線，簡化圖形中的方格。

修改 2：如圖的方格中，填入適當的數字，使得直行與橫列上的三個數字和是相同的，則★的值為何？

(A) 11 (B) 12 (C) 15 (D) 17

16		
★		
	13	14

二、文字敘述

(一) 避免使用未知數或數字開頭命題

緣由：若將未知數或數字開頭命題，容易與該題題號混淆，造成理解上的困惑。

舉例： $x=2$ 為下列哪一個方程式的解？

$$(1) 2 + \frac{1}{3}(2x+1) = 4 \quad (2) x + \frac{2-x}{3} = 4 \quad (3) 3x-5 = 2(x-1) \quad (4) 5x-5 = 2x+1$$

理由：以未知數開頭命題，容易將題幹與題號弄混。

修改：下列哪一個方程式的解為 $x=2$ ？

$$(1) 2 + \frac{1}{3}(2x+1) = 4 \quad (2) x + \frac{2-x}{3} = 4 \quad (3) 3x-5 = 2(x-1) \quad (4) 5x-5 = 2x+1$$

(二) 描述相同物件用詞需一致

緣由：避免用詞的背後具有不同的表徵含意。

舉例：小欣原有 x 元，他用所有錢的 $\frac{1}{3}$ 買一顆籃球，又用所有錢的 $\frac{1}{8}$ 買 10 枝原子筆，結

果剩下 390 元，則小欣原有多少元？

理由：第一次出現的所有錢指的是 x 元，但無法確定第二次出現的所有錢指的是原來的

錢 x 或剩餘的錢 $(x - \frac{1}{3}x)$ 元。

修改：小明原有錢 x 元，用 x 元的 $\frac{1}{3}$ 買一顆籃球，又用 x 元的 $\frac{1}{8}$ 買 10 枝原子筆，結果剩

下 390 元，則小欣原有多少元？

(三) 選項敘述宜簡單明瞭

緣由：選項敘述宜簡單明瞭，不宜出現冗長文字。

舉例：關於多項式的敘述何者錯誤？（以下皆為 x 的多項式）

- (1) $x^2 + 2x - 5 = 0$ 不是 x 的二次多項式
- (2) 兩個一次多項式相乘，其結果是一個二次多項式
- (3) 一個二次多項式 x^2 項係數必不為零
- (4) 兩個二次多項式相加，其結果是一個二次多項式

理由：讓選項文字更加簡單且精確。

修改：已知 A, B 皆為 x 的二次多項式，下列選項何者錯誤？

- (1) $x^2 + 2x - 5 = 0$ 不是 x 的二次多項式

- (2) $A \times B$ 必為四次多項式
 (3) A 的 x^2 項係數必不是 0
 (4) $A + B$ 必為二次多項式

(四) 正確使用專有名詞

緣由：避免誤用專有名詞而影響學生作答。

舉例：甲、乙、丙三人跑 100 公尺時間分別為 12 秒、15 秒、18 秒，則甲、乙、丙三人的速度比為何？

- (1) 4 : 5 : 6 (2) 6 : 5 : 4 (3) 15 : 12 : 10 (4) 10 : 12 : 15

理由：速度具有方向性，考慮位移，而速率不需考慮方向，考量所走的路徑總長。此題敘述三人跑 100 公尺，並未說明方向是否為單一方向，因而將速度改為速率更為貼切，避免爭議。

修改：甲、乙、丙三人跑 100 公尺時間分別為 12 秒、15 秒、18 秒，則甲、乙、丙三人的速率比為何？

- (1) 4 : 5 : 6 (2) 6 : 5 : 4 (3) 15 : 12 : 10 (4) 10 : 12 : 15

(五) 句子須兼顧主詞與受詞的明確

緣由：句子敘述的主詞與受詞所對應的物件須明確，文字敘述表達方式並非是生活上精簡化的口語表達。

舉例 1：小明中樂透彩，下列何者是「五億六千萬」的表示法？

- (1) 5.6×10^6 (2) 5.6×10^7 (3) 5.6×10^8 (4) 5.6×10^9

理由：此題句子敘述屬於口語化，句子中出現「小明中樂透彩」與「五億六千萬」的兩者關聯性不明確，題幹敘述表達較不完整。

修改：已知小明中了樂透彩頭彩五億六千萬元，則下列何數可表示「五億六千萬」？

- (1) 5.6×10^6 (2) 5.6×10^7 (3) 5.6×10^8 (4) 5.6×10^9

舉例 2：張老師想幫學生上網購買課外讀物，每本原價 350 元，現在特價 8 折，張老師買了 x 本，結帳時另外需付運費 200 元，則最後結帳時要付多少元？

- (1) $350 \times 0.8 \times x + 200 \times 0.8$ (2) $350 \times 0.8 \times x + 200$
 (3) $(350 + 200) \times 0.8 \times x$ (4) $(350 \times 0.8 + 200)x$

理由：句子中「特價」沒有主詞，「特價」所指是原價或是某一個特價，「特價 8 折」又是指什麼打八折或是「特價後再打 8 折」，如此敘述，導致敘述不夠完整，容易

造成錯誤解讀。

修改：網路書局在週年慶期間，所有書籍皆以 8 折出售。已知張老師買了 x 本原價為 350 元的書，加上運費 150 元，則最後結帳時張老師總共付了多少元？

- (1) $350 \times 0.8x + 150 \times 0.8$ (2) $350 \times 0.8x + 150$
 (3) $(350 + 150) \times 0.8x$ (4) $(350 \times 0.8 + 150)x$

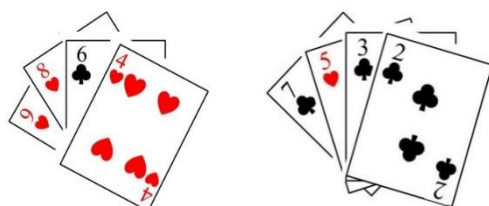
三、情境與數學

(一) 提供充分資訊增進題幹的完整性

緣由：過於簡略的題幹可能會讓學生在閱讀理解上產生困擾，適當的加入一些能夠連結各個條件的敘述可以增加閱讀的流暢度與題幹的完整性。

舉例：魔術師小莊將手邊點數 2~9 的撲克牌分成兩堆（如下圖），魔術師的分類方法可能是下列哪一個選項？

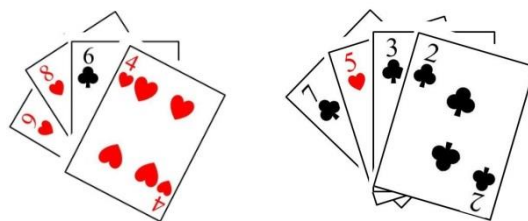
- (1) 愛心與梅花
 (2) 相同點數和
 (3) 偶數與奇數
 (4) 質數與合數



理由：「手邊點數 2~9 的撲克牌」是比較口語的表達方式，另外在分類的敘述上感覺太過於簡略，因此修改為魔術師在表演過程中「抽出八張牌」，增強情境的完整性，並且在題幹中條列出所有牌的點數，加強條件的完整程度，最後在分類的部分加入了甲、乙兩堆的分類代號，讓學生在讀題時能夠更加流暢。

修改：魔術師小莊在表演時從一副撲克牌中抽取八張撲克牌，其點數有 2、3、4、5、6、7、8、9，並分成甲、乙兩堆，如圖所示。甲、乙兩堆的分類方式根據下列哪一個選項進行？

- (1) 甲堆為愛心、乙堆為梅花
 (2) 甲堆的點數和等於乙堆點數和
 (3) 甲堆為偶數、乙堆為奇數
 (4) 甲堆為合數、乙堆為質數



甲堆

乙堆

(二) 檢驗情境背後隱藏假設是否具合理性

緣由：試題敘述中，有時疏忽了情境鋪陳的合理性。

舉例：左左和右右逛夜市，左左買了每 3 隻 100 元的雞腿 x 隻，右右買了每 2 塊 55 元的雞胸 y 塊，共需付多少元？

$$(1) 100+55 \quad (2) 300+110 \quad (3) 300x+110y \quad (4) \frac{100}{3}x + \frac{55}{2}y$$

理由：雞腿 x 隻的價錢會列出 $\frac{100}{3}x$ 元，其背後的假設是每 3 隻 100 元，得到 1 隻雞腿

為 $\frac{100}{3}$ 元，但 $\frac{100}{3}$ 元沒有出現在現實情境上，價錢面值都是整數，沒有小數。同

理，雞胸 y 塊的價錢會列出 $\frac{55}{2}y$ 元，也是將 1 塊雞胸視為 $\frac{55}{2}$ 元。為了符合購買

數量上的合理性，建議修改為每 3 隻雞腿賣 $3x$ 元，每 2 塊雞胸賣 $2y$ 元。

修改：左左和右右逛夜市，左左買了每 3 隻 100 元的雞腿 $3x$ 隻，右右買了每 2 塊 55 元的雞胸 $2y$ 塊，共需付多少元？

$$(1) \frac{100}{3}x + \frac{55}{2}y \quad (2) 100x+55y \quad (3) 300x+110y \quad (4) 900x+220y$$

(三) 檢驗數據背後隱藏的關係是否具合理性

緣由：試題題幹的敘述中，疏忽了數據的合理性。

舉例：國家衛生研究院最新研究指出，青少年含糖飲料攝取量日益增加，花了 4 年追蹤了 584 位 12 歲的青少年，發現這些青少年每增加一份含糖飲料的攝取，BMI 值就增加 0.24。根據上述研究，小維的 BMI 值為 22，當小維增加 x 份含糖飲料的攝取，小維的 BMI 值預估會變成多少呢？

$$(1) 22x \quad (2) 22.24x \quad (3) 22+0.24x \quad (4) 22x+0.24$$

理由：若以 160 公分的青少年為例，增加一份含糖飲料 BMI 值就增加 0.24，即表示此青少年增加一份含糖飲料，會增加 0.6 公斤，0.6 公斤數據似乎不合理。

修改：研究指出青少年含糖飲料攝取量日益增加，4 年來追蹤了 584 位 12 歲的青少年，發現這些青少年持續平均每天多增加一份 350ml 的含糖飲料攝取，BMI 值就增加 0.24。根據上述研究，小維的 BMI 值為 22，當小維增加 x 份 350ml 的含糖飲料攝取，小維的 BMI 值預估會變成多少呢？

- (1) $22x$ (2) $22.24x$ (3) $22 + 0.24x$ (4) $22x + 0.24$

(四) 考量題目的敘述是否過度冗長而影響學生的閱讀理解力

緣由：為了符合情境脈絡的合理性，容易出現冗長敘述而增添閱讀理解的困難度，故當脈絡合理性與敘述之可理解性難以兼顧時，優先考量敘述之可理解性。

舉例：縣市政府舉辦五天「聯合耶誕市集」的活動，市集中只能使用主辦單位發行的消費點券來交易。每購買一張消費點券可獲得一個「暖心禮物」，禮物有聖誕老人與雪人兩種造型的暖暖袋可供挑選。消費點券預售結束後，主辦單位統計預售期間「暖心禮物」的索取比例後，發現聖誕老人與雪人暖暖袋的索取比例為 3:2。已知活動才進行一天，聖誕老人與雪人暖暖袋的庫存分別只剩 600 個與 200 個。主辦單位擔心禮物的庫存量不足，於是再趕製聖誕老人暖暖袋 1200 個與雪人暖暖袋 a 個來應急，使得聖誕老人與雪人暖暖袋的總庫存量與預售期間的索取比例一致，則 a 之值為何？

- (1) 1200 (2) 1000 (3) 800 (4) 600

理由：原本設計的脈絡情境擬採用「預售期間兩種禮物的索取比例」來作為「活動期間庫存不足時需追加多少數量」的依據。但此鋪陳讓題目的文字敘述增加許多，導致多數學生可能會因為無法順利閱讀完題目而放棄作答，故捨棄情境脈絡的鋪陳，且在不影響敘述完整性之下去精簡敘述。

修改：縣市政府共同舉辦的「耶誕市集」推出「滿百送好禮」活動，禮物有聖誕老人與雪人兩種造型的暖暖袋可供挑選。已知活動才進行一天，聖誕老人與雪人暖暖袋的庫存分別只剩 600 個與 200 個。主辦單位擔心禮物的庫存量不足，於是再趕製聖誕老人暖暖袋 1200 個與雪人暖暖袋 a 個來應急，使得聖誕老人與雪人暖暖袋的總庫存量為 3:2，則 a 之值為何？

- (1) 1200 (2) 1000 (3) 800 (4) 600

(五) 考慮學生學習其他學科的知識並兼顧數學測驗目標

緣由：自然界中許多測量數據皆為近似值，使用於數學試題中需注意是否合理；命題時也應考慮其他學科的常用表示法。

舉例：自然界中的物體會因為溫度不同，而產生體積的變化，此現象稱為熱脹冷縮，是指物體受熱時會膨脹，遇冷時會收縮的特性。熱脹冷縮是一般物體的特性，但水、銻、鉍、鎳和青銅等物質，在某些溫度範圍內受熱時收縮，遇冷時會膨脹，恰與

一般物體特性相反。而某種特殊物質 α 在 6°C 時較不穩定，會有兩種組成結構。
 以下是一些常見物質以及特殊物質 α 的體積與溫度關係表。

100 公克的酒精

體積 (cm^3)	124.290	124.549	124.808	125.225
溫度 ($^{\circ}\text{C}$)	2	4	6	8

100 公克的水

體積 (cm^3)	100.006	100.003	100.006	100.015
溫度 ($^{\circ}\text{C}$)	2	4	6	8

100 公克的特殊物質 α

體積 (cm^3)	12.625	17.125	18.663	18.792
溫度 ($^{\circ}\text{C}$)	2	4	6	6

100 公克的水銀

體積 (cm^3)	7.358	7.361	7.364	7.366
溫度 ($^{\circ}\text{C}$)	2	4	6	8

依據上面表格的體積與溫度對應關係，假設體積為 x ，溫度為 y ，判斷哪些物質的 y 是 x 的函數？

- (1) 酒精、水、水銀
- (2) 酒精、水銀、特殊物質 α
- (3) 水、特殊物質 α
- (4) 酒精、水銀

理由：1、理化常用表示法為溫度與體積的變化關係，溫度為自變數 x 、體積為應變數 y 。

此題應以理化常用表示法來呈現，使學生在閱讀試題目不會和理化學習經驗產生混淆。

2、此題題幹敘述自然界物質的體積表示至小數點後第三位，增加了閱讀複雜度，且酒精、水、水銀溫度的數值皆為 2、4、6、8，而特殊物質 α 溫度的出現兩次 6，學生容易誤以為題目有誤。因此修正以簡單的數據取代真實自然界物質的體積數據，並設定每個物質的溫度皆不同，避免造成學生的誤解。

3、以數學脈絡而言，題目的資訊無法判斷哪個物質「是函數」；只能判斷哪個物質「不是函數」，調整題幹讓題目更嚴謹，減少疑義。此理由呼應了面向三之

(三) 檢驗數據背後隱藏的關係是否具合理性。

- 4、題目敘述過長且並非提供解題的關鍵訊息，造成學生理解題目的困難度，應將題目敘述簡化。此理由呼應了面向三之(四)考量題目的敘述是否過度冗長而影響學生的閱讀理解力。

修改：物質 A、物質 B、物質 C、物質 D 的溫度與體積對應關係如下方表格所示，假設溫度為 x 、體積為 y ，試判斷哪些物質的 y 不是 x 的函數？

100 公克的物質 A

溫度 ($^{\circ}\text{C}$)	20	21	22	23
體積 (cm^3)	126.6	126.7	126.8	126.9

100 公克的物質 B

溫度 ($^{\circ}\text{C}$)	2	4	6	8
體積 (cm^3)	100.3	100.6	100.6	100.9

100 公克的物質 C

溫度 ($^{\circ}\text{C}$)	10	14	18	22
體積 (cm^3)	7.1	7.2	7.3	7.4

100 公克的物質 D

溫度 ($^{\circ}\text{C}$)	30	40	50	50
體積 (cm^3)	12.6	17.1	18.6	18.7

(1) 物質 A

(2) 物質 B

(3) 物質 C

(4) 物質 D

參、總結

本文數學試題雙向細目表的内容效度以七年級九年一貫課程能力指標為基礎，認知向度分成概念理解、程序執行、邏輯推理、解數學文字題和解情境文字題等五個向度，進行七年級的數學學力檢測試題設計，統整出優質數學試題設計原則。

我們以具體範例提出優質數學試題設計原則有測驗目標、文字敘述、情境與數學等三個面向，並歸納出測驗目標面向須具備四個原則，分別是：避免陌生的語彙影響測驗

目標、以多數學生的解題方法來檢測該題是否符合預期的測驗目標、避免重複計算產生的錯誤以增進該測驗的精準度、用施測對象的年級來評估試題難度的適切性。文字敘述面向須具備五個原則，分別是：避免使用未知數或數字開頭命題、描述相同物件用詞需一致、選項敘述宜簡單明瞭、正確使用專有名詞、句子須兼顧主詞與受詞的明確。情境與數學面向須具備五個原則，分別是：提供充分資訊增進題幹的完整性、檢驗情境背後隱藏假設是否具合理性、檢驗數據背後隱藏的關係是否具合理性、考量題目的敘述是否過度冗長而影響學生的閱讀理解力、考慮學生學習其他學科的知識並兼顧數學測驗目標。

本研究非實徵性研究，實屬實務工作中歸納出三個面向與十四個命題的設計原則。雖然國內已有專書探討命題技巧（如蕭儒棠、曾建銘、吳慧珉、林世華、謝佩蓉、謝名娟，2014），但是仍較缺乏對應各設計原則的數學試題的範例。本文不僅提出更多的數學範例，所歸納的設計原則除了符合文獻上的應依循測驗目的、試題文句應簡潔明確、試題答案應明確可靠等三項一般原則外，也補充其它新的設計原則。而這些新的設計原則主要屬於情境與數學面向，這也適合作為設計素養導向課程的評量試題之參考。

數學試題評量著重於診斷學習者的學習成效與教學者的教學方式，兩者息息相關。試題品質重視效度，建議老師從事命題時，內容效度之質性分析可以課程綱要為基礎，依循本文所提之原則檢視，至於量化分析則可參照國教院學力檢測（<http://rap.naer.edu.tw/>）歷年試題結果進行評估，以提升試題之品質。此外，本文內容也可作為數學師資培育的教學評量課程之教材，或是這些優質數學試題未來可提供教師施測，並分析學生作答反應，作為教師命題設計及教學之參考。

參考文獻

- 曾建銘（2014）。**選擇題命題原則與不良題範例**。載於測驗之編製-命題技巧與測驗資料分析。國家教育研究院。新北市。ISBN 978-986-043496-5
- 國家教育研究院（2017）。**106 年協助縣市辦理學生學習能力檢測數學七年級施測結果報告**。新北市：國家教育研究院。
- 蕭儒棠、曾建銘、吳慧珉、林世華、謝佩蓉、謝名娟（2014）。**測驗之編製：命題技巧與測驗資料之分析**。出版社：國家教育研究院。
- PISA in Taiwan**（PISA 國家研究中心）。查詢日期：2018 年 1 月 11 日。檢自

<http://pisa.nutn.edu.tw/>。

TIMSS-國家教育研究院。查詢日期：2018 年 1 月 11 日。檢自

<https://www.naer.edu.tw/files/11-1000-1267.php?Lang=zh-tw>。

附錄 1 國中會考、學力檢測、PISA、TIMSS 四個大型測驗的 測驗目的、對象與範圍

考試類別	測驗目的	測驗對象	測驗範圍
國中會考	國中學習階段的總結性評量	九年級	數學領域課綱
學力檢測	瞭解學生學習狀況，及早發現待加強學生，及早啟動積極性教學介入	七年級、八年級	該年級國中數學領域
PISA	了解他們是否對進入社會成為公民做好準備	國際性學生 15 歲在學學生	以情境化、生活化的試題，評量這些學生在閱讀素養、數學素養、科學素養的表現
TIMSS	各國學生數學及科學學習成就及其各國文化背景、學習環境、教師因素等影響因子之相關性；同時亦可對連續參加的國家進行縱向的趨勢比較，以協助參加的國家瞭解其在教育改革或課程改革的成效。	八年級	舉行數學（內容涵蓋數感、幾何、代數、資料呈現分析、測量等）與科學（內容涵蓋物理、化學、生命科學、地球科學等）的學習成就測驗。

附錄 2 七年級縣市學力檢測評量內容效度之架構

內容	能力指標
數與量	7-n-01能理解質數的意義，並認識100以內的質數。
	7-n-02 質因數、倍數、公因數、公倍數及互質的概念，並熟練質因數分解的計算方法。
	7-n-03 數、最小公倍數熟練約分、擴分、最簡分數及分數加減的計算。
	7-n-04並能以「正、負」表徵生活中性質相反的量。
	7-n-05 並能利用絕對值比較負數的大小。
	7-n-06特性並熟練數（含小數、分數）的四則混合運算。
	7-n-07能熟練數的運算規則。
	7-n-08能理解數線，數線上兩點的距離公式，及能藉數線上數的位置驗證數的大小關係。
	7-n-09能以不等式標示數的範圍或數線上任一線段的範圍。
	7-n-10能理解指數為非負整數的次方，並能運用到算式中。
	7-n-11能理解同底數的相乘或相除的指數律。
	7-n-12能用科學記號表示法表達很大的數或很小的數。
	7-n-13能理解比、比例式、正比、反比的意義，並能解決生活中有關比例的問題。
	7-n-14能熟練比例式的基本運算。
	7-n-15能理解連比、連比例式的意義，並能解決生活中有關連比例的問題。
代數	7-a-01能熟練符號的意義，及其代數運算。
	7-a-02能用符號算式記錄生活情境中的數學問題。
	7-a-03能理解一元一次方程式及其解的意義，並能由具體情境中列出一元一次方程式。
	7-a-04能以等量公理解一元一次方程式，並做驗算。
	7-a-05能利用移項法則來解一元一次方程式，並做驗算。
	7-a-06能理解二元一次方程式及其解的意義，並能由具體情境中列出二元一次方程式。
	7-a-07能理解二元一次聯立方程式，及其解的意義，並能由具體情境中列出二元一次聯立方程式。
	7-a-08能熟練使用代入消去法與加減消去法解二元一次方程式的解。
	7-a-09能認識函數。
	7-a-10能認識常數函數及一次函數。
	7-a-11能理解平面直角坐標系。

附錄 3 學力檢測試題認知向度說明

向度	內容說明
概念理解	指數學內容的概念性知識，評量概念理解的試題，是測驗學生是否具備數學基本概念，要求作答者將腦中的記憶知識應用出來做判斷。能理解、指認題目中相關的符號、圖表、公式及原理，並能比較、對照並統整相關概念與原理來延伸概念與原理的性質。
程序執行	評量程序執行的試題，是測驗學生是否「知道要如何完成數學運算」的數學知識，包括操作數與符號的運算、幾何構圖的執行及估計、正確選擇適當的程序、能判別或判斷算式或符號運用方法過程的正確性或適切性，並運用不同的數學邏輯有效解決數學問題。
邏輯推理	測驗學生是否能使用邏輯或運算規則和前提來推導出結論、由結論反推可能的前提、或是檢驗解題過程的有效性。
解數學文字題	數學文字題是以數學語言的方式來描述問題情境的數學問題（例如：甲乙兩數和是多少？），學生在解數學文字題時，除了必須對題目語意內容作解讀外，還需再將這些文字脈絡與數學運算符號連結，轉譯成數學算式表徵，然後執行運算。
解情境文字題	情境文字題是以日常生活語言的方式來描述問題情境的數學問題（例如小華和小美的存款加起來是多少元？），學生在解情境文字題時，除了必須對題目語意內容作解讀外，還需再將這些文字脈絡與數學運算符號連結，轉譯成數學算式表徵，然後執行運算。

楊晉民、陳嘉皇（2018）。
應用數線表徵融入小二學生加減運算教學之成效。
臺灣數學教師，39（1），35-66
doi: 10.6610/TJMT.201804_39(1).0003

應用數線表徵融入小二學生加減運算教學之成效

楊晉民¹ 陳嘉皇¹

¹ 國立臺中教育大學數學教育學系

本研究旨在探討小二學生於數線表徵的教學實驗下之加減運算和心智策略的表現，透過「二位數加減法概念」試卷的分析，了解數線表徵對學生學習加減法運算教學前後的效果，提供教師日後課程及教學的參考。藉由兩班學生在本研究之結果，以瞭解學生是否具備二位數加減知識與數線表徵實驗成效的關聯。有關二位數加減法概念測驗表現部分，進行描述性統計與等組 t 考驗比較分析；並根據學生在教學情境進行的活動內容及呈現之說明、解題策略與思考方式，採用質性分析方式加以詮釋。本研究發現參與實驗小二學生經數線表徵教學實驗後，其加減法概念測驗的表現，較教學實驗前為佳，且達到統計上的顯著差異；另外，研究結果顯示數線表徵教學確可強化學生運算策略與數線表徵之關係，有助教師掌握學生加減概念的發展。

關鍵詞：加減法；表徵；數線

壹、緒論

近年來數學教育的重點，強調發展小學生的數學心智策略（National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000），因此為傳統加減算則導入一新的教學工具-數線（number line），提供作為發展學生數學概念與能力的有效教學措施。數線係指在一條印記刻度的線上某個位置，加以數字或標記呈現意指的數，是學生記錄和分享心智運算思考策略時的表徵（Bobis, 2007; Frykholm, 2010; Gonsalves & Krawec, 2014）。

數線可廣泛的運用在一系列相關的數學問題進行解題，在強調某特殊心智的數學策略或重要的數學概念時，採用特定的數線結構進行解題，可了解學生在心智上對某問題執行解題方法與認知的歷程，並可作為和同學分享方法的工具，發展出更強的策略與數感（Bobis, 2007; DiBrienza & Shevell, 1998; Fosnot & Dolk, 2001; Parrish, 2011）。下圖 1 為學生使用跳躍（jump）策略來進行（53-26）的解題，從圖中可以發現學生的問題表徵步驟為從 53 往前跳 10，並標記-10 後算出目前結果為 43，然後再往前跳 10，標記-10 後算出目前結果為 33，接著再往前跳 3，並標記-3 後算出目前結果為 30，最後再往前跳 3，並標記-3 後算出目前結果為 27。數線記錄了學生每一步的思考結果，並且可以提供視覺化的驗算機制，也可以讓學生思考下一步解題方向該如何處理。

Lampert、Beasley、Ghousseini、Kazemi 和 Franke（2010）認為，教師應將教學的焦點放在協助學生探索數學與促進對解題方法和推理的對話上面，而數線就是一個適合當作解題探索、直覺、推理和溝通時的表徵工具之一（Bobis, 2007; Frykholm, 2010）。然而，對於教師如何執行此習慣，與執行時可讓學生熱烈並維持高程度數學討論的研究並不多。因此，如何讓數線的應用變成有效且協助師生變成解決數學問題的心智工具，是一項重要議題，值得探究。

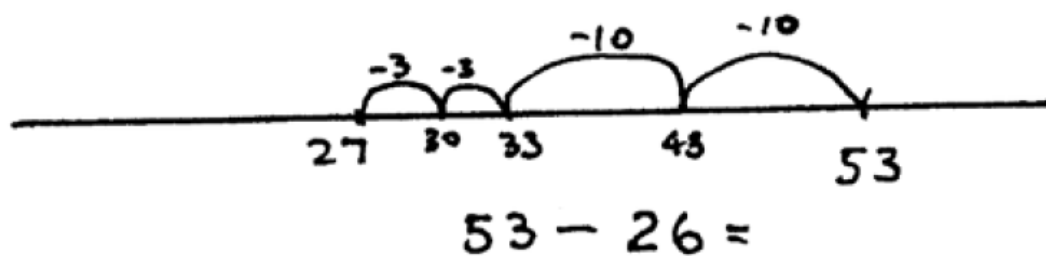


圖 1 學生以數線進行 53 - 26 運算之策略與過程。資料來源：Bobis, J. (2007). The empty number line: a useful tool or just another procedure? *Teaching Children Mathematics*, 13(8), 410-413.

加減法的概念無疑是數學學習的基礎，是國小低年級學生重要的學習內容，而加減法文字題的解題策略，更是將來高年級學習數學解題的前置經驗，因為在加減法運算的過程中，有許多彈性的解題方法與可逆思考等心智策略，需學生精熟，俟奠基此心智策略後，才得以面對更複雜的數學問題解題，因此加減法的學習在小學低年級階段，無疑是數學學習的重要基模。融入數線表徵的方式可提供視覺化的工具，讓學生比較解題策略，確定學生能確實溝通與瞭解彼此的思考與方法（Fosnot & Dolk, 2001），激發學生數學學習的動機與熱忱。Moeller、Fischer、Nuerk 與 Cress（2015）的回顧文章顯示融入電腦科技在數線訓練，可以為數數和計算能力的訓練上提供一個新的方向。因此本研究擬將數線表徵融入小二學生加減運算的學習，設計活動並進行教學實驗，以探究其成效。

另外，學生使用數線記錄二位數加減法更複雜的心智策略前，需要具備兩項基礎的計數技巧和知識才能理解與有效的運用數線：（1）透過 10 往上或往下計數，（2）跨越 10 計數（jumping across tens）（李源順，2014；教育部，2008）。前者讓學生從任何數字開始，以 10 的倍數往前或往後計數，例如 $13 + 10 + 10$ ；或是 $53 - 10 - 10$ 。後者的技巧則需學生能彈性的分割數字，例如 $8 + 5$ 可以將 5 分割成 $2 + 3$ ，然後 $8 + 2 = 10$ ， $10 + 3 = 13$ ，熟悉此策略後才可應用到二位數的加減法，例如 $38 + 5 = (38 + 2) + 3 = 40 + 3 = 43$ 。數線的運用需具備基礎的能力不可，二位數加減法是小二學生該階段學習的重點，所需運算的心智策略變得更加複雜，為瞭解學生的運算策略精熟程度與數線表徵教學的關係，擴展數線教學的成效，本研究針對運算策略程度不同之小二學生（進入小二前、小二結束），進行教學實驗成效的比較，分析數線表徵教學時學生呈現的心智表現情形，以提供數線教學實務的參考。本研究目的具體呈現如下：

- 一、探究小二學生經由數線表徵教學實驗後，其加減法概念測驗的表現，以瞭解數線教學的成效，作為數線設計修正的參考。
- 二、探索數線表徵教學歷程學生之心智表現情形，瞭解學生運算策略與數線關係，掌握學生加減概念的發展。

貳、文獻探討

一、數線表徵之功能與應用

表徵的方式可分為描述（depiction）和符號化（symbolization）兩種（陳嘉皇、梁

淑坤，2014，2015；Goldin & Kaput, 1996)。前者以圖像為主，後者則以公式為代表。根據教育部（2008）九年一貫數學課程綱要能力指標分年細目「1-n-09 能認識長度，並做直接比較」、「1-n-10 能利用間接比較或以個別單位實測的方法比較物體的長短」，可知學生在一年級時就已具備長度概念。因此可透過線段表徵的模式（如表 1）與學生學習經驗的結合，利用兩線段長度相等，則兩線段之表徵數相等概念，練習以線段方式表示兩數量間的關係。又如，若將線段融入分年細目「2-a-04 能理解加減互逆，並運用於驗算與解題」，則可以依情境引入線段圖的說明方式融入加減互逆概念學習，讓學生更易理解加和減的關係。

表 1
線段表徵模式

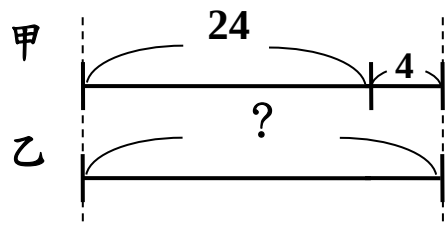
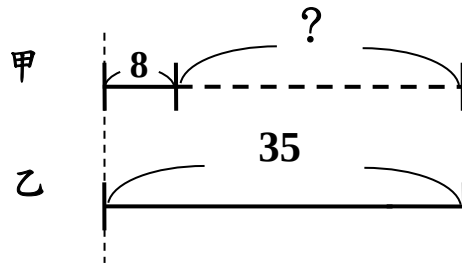
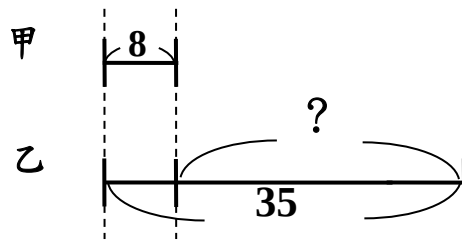
線段表徵	數學思考
	● $24 + 4 = (\quad)$ ● $4 + 24 = (\quad)$ ● $(\quad) - 4 = 24$ ● $(\quad) - 24 = 4$
	● $8 + (\quad) = 35$ ● $(\quad) + 8 = 35$ ● $35 - 8 = (\quad)$ ● $35 - (\quad) = 8$
	● $35 - (\quad) = 8$ ● $8 + (\quad) = 35$

表 1 (續)

甲		● $(\quad) - 4 = 24$
乙		● $24 + 4 = (\quad)$ ● $4 + 24 = (\quad)$

Treffers (1991) 和 Beishuizen (2001) 發現學生可結合計數的策略 (counting strategy) 和等分割的策略 (partition strategy) 成功的進行數線的記錄而解題。Gravemeijer (1994) 描述運用數線的優點包括 (一) 針對線性表徵數字的需求；(二) 利用數線密切結合學生的直覺心智策略；(三) 促進學生更聰慧策略發展的潛能。

有別於積木或花片使用以個或堆的集合表徵，數線之線性表徵對於學習數數和瞭解數字關係時，提供更容易理解之心像具體會表徵 (Frykholm, 2010)。若數線和學生的直覺心智策略可強烈的連結，當嘗試解決100以內的數字問題時是很有力的，但需先將重點放在計數策略 (counting strategy) 上—全部數、往上數或是往下數。具有心智運算能力的學生會使用組合的計數策略和分割策略 (partition strategy)。在分割時，學生會採用拆開 (take apart) 數字的策略，以更彈性方式方便進行心智運算，這些策略典型上以在數線上跳躍為主，以53-26為例，學生使用以10為一串 (chunk) 往下數的組合方式，與分割26為20和3+3，分別運算，讓10之間的結合更容易。

數線具備協助學生發展解題策略發展的潛能，讓學生得使用此線記錄計算策略，因此可向他人揭櫫其思考歷程，不僅可看見思考的層次，也包含可能發生之思考上的錯誤 (Frykholm, 2010)。因此數線可做學生更有效策略的發展，思考策略視覺化的記錄，也可以作為提供教室討論和分享心智策略的催化劑，學生可以透過顯示這些記錄向他人解釋他們的策略，成為促進教室裡溝通有利的工具。數線容易使用是因為學生 (一) 能夠理解數線的使用方式並表徵其思考方式；(二) 記錄思考中的每一步驟；(三) 可以且容易追蹤錯誤；(四) 可促進下一步驟的思考。

然，在介紹數線前，學生要熟悉數線是具有數字的線性表徵。Buys (2001) 建議，數線的介紹可透過每 10 個一組的「串珠」 (strings of beads)，再配合使用具有 0 至 100 數字的數線，要求學生沿著數線移動片段的距離至指示的數字，經過移動後的數線位置，估算出指示的數字，然後檢核其估算如何接近指示的數字。學生使用數線記錄二位數加

減法更複雜的心智策略前，需要特定的計數技巧和知識。在他們可以使用更聰慧的數線前，「透過 10 往上或往下計數」和「跨越 10 計數」兩項基礎的策略學生必須理解與有效運用（李源順，2014；教育部，2008）。兩種策略的學習後，可介紹學生兩位數加減法「跳躍」（jump strategy）的策略，此策略基本的特徵是將某一數字視為整體，將第二個數字採取用 10 位數和個位數串連的方式進行加減，例如 $66-29$ ，學生可以減 30 再加 1（ $66-29=(66-30)+1$ ）。當策略更聰慧時，跳躍的數字就可自由彈性，此時就可執行「類程序」的方式，而不用跳躍。為提供學生有效數線學習的工具，動畫教材設計可提供學生學習的成效，因為良好的動畫教材可激發學生學習的興趣，引導其做數學概念的統整（Mayer, 1997, 2004）。因此，本研究以數線表徵作為教學工具，探討其對學生二位數加減運算能力發展的影響。

二、數線表徵教學設計

本研究利用 Dick 與 Carey（2005）的系統化教學設計模式（the systematic design of instruction），此模式包含以下步驟：

（一）確認教學目標

本教材實施年級為二年級，根據九年一貫數學領域能力指標 2-a-04 中提到，在加減互逆的學習裡，可以依情境引入線段圖的說明方式，讓學生更理解加和減的關係。學生在學習此一指標產生的問題：利用數線的操弄與轉化進行數量之間的加減運算等步驟，並未讓學生有進一步的探究和理解，致使算術的目的只在計算出答案，未能協助其發展歸納和推理能力，因此教材呈現配合教師口語描述問題情境，讓學生理解動畫內容，並希冀作答時學生能利用口語解釋或文字作答方式展現其思考。

（二）教學分析

得知學習者在數線表徵學習上有所困難，分析教學上的需求，應讓學生從數棒至數線的操作，利用視覺化表徵方式讓學生發展數學思考與推理的能力，解決加減法可逆的問題。

（三）學習者和內容分析

依據皮亞傑（Piaget）的分類，二年級學生處於具體運思期（concrete operational stage），透過比較具體的表徵方式（如：線段）幫助他們觀察兩數量之間的關係，從算術關係轉

換成代數關係，並透過觀察體會加減互逆的概念。在學習本單元之前，學生應具備有個位數整數的加減計算能力。

(四)撰寫目標

本教材的內容可以分為表徵和解題兩大部分，其中表徵為線段模式，解題部分為加減互逆運算之心智策略表現（如附錄一）。本教材希望學習者在本單元中能獲得的學習表現如下。

- 1.學習者能根據線段表徵正確列出含有未知數的加減法等式。
- 2.學習者能利用數線表徵正確呈現加減互逆計算之多元心智策略。

(五)研究工具

以自編之「二位數加減法概念測驗」（如附錄二）做為蒐集學生數線表徵教學後成就表現之工具，該測驗內容包含：

1. 數字算式對錯判斷問題

目的在於檢測學生是否理解各類算式呈現之不同二位數加減法概念，總計 8 題，包含等號反身性、單邊運算、雙邊運算等數字加、減命題，要求學生對呈現之數字算式敘述是否正確進行判斷，每答對一題可得 1 分，全對者可得 8 分。

2. 數字填充問題

目的在於檢測學生是否理解等號代表之意義，運用數字合成、分解進行運算，總計 4 題，包含數字加、減二位數加減法概念問題，要求學生寫出算式中空格的數字，空格位置分別位於等號之兩邊，答對一題可得 2 分，全對者可得 8 分。

3. 看圖解題

本測驗目的在於透過文字題結合圖像呈現問題結構，檢測學生是否具備二位數加減法的概念，總計 4 題。

(六)教學策略

提供老師上課的教案及教材，採用 Gagne 的九大教學事件設計。本教材搭配的教案內容如表 2 所示。

表 2

教案設計內容表式

教學活動說明	時間(分)	教學方式
0.【準備活動】 教師事先準備單槍及電腦設備並確定設備可用。		
1.【引起學生注意】 教師依照投影片的內容，講述數學文字題的內容， 引發學生的學習興趣。	1 分鐘	老師講解
2.【提示教學目標】 教師依照投影片的內容，講述本節教學重點。	2 分鐘	老師講解
3.【喚起舊有經驗】 教師依照投影片內容，引導學生喚起以前學習整數分與合的經驗。	2 分鐘	老師講解
4.【呈現數位教材】 5.【指導學生學習】 教師依照投影片內容，依序講解數線表徵解題的內容。	20 分鐘	老師講解
6.【誘發表現學習行為】 7.【適時給予回饋】 教師依照投影片內容，給予學生加法運算練習的機會， 根據學生的回答，給予回饋。	15 分鐘 40 分鐘	學生回答 老師講解
8.【學習練習】 教師依照投影片內容，給予學生減法運算練習的機會。	40 分鐘	學習單
9.【學習練習】 教師依照投影片內容，給予學生加減法運算綜合練習的機會。	40 分鐘	學習單
10.【加強記憶與學習遷移】 搭配練習卷，經過小組討論及回饋，達到學習的效果。	40 分鐘	學習單
	40 分鐘	練習卷

本研究教學活動分為二位數加減法概念前、後測與數線表徵練習 6 節課，總計 8 節。教學節數及內容順序的安排如表 3 所示。

表 3

教學內容和節數

教學單元	教學內容	教學節數
先備能力	二位數加減法概念前測	1
第 1 節	1.從實體物件之辨識開始（數棒）	1
	2.數量大小之排序	
第 2 節	3.數線數字大小辨識與排列	1
	1. 跳躍式的練習（單位 1、單位 10 或複合單位練習）	
第 3 節	2. 整數加法運算在數線上的操作與應用	1
第 4 節	3. 整數減法運算在數線上的操作與應用	1
第 5 節	4. 整數加減法運算在數線上的操作與應用	1
第 6 節	綜合練習	1
學習評量	二位數加減法概念後測	1

(七)發展和選擇教材

提供老師上課的電腦輔助教材，以畫面流程以及教材畫面兩方面來說明。

1. 教材畫面流程圖

本數位教材的畫面流程，首先以數學達人的事件引發學生的學習興趣。主選單有三題講解題及三題練習題。

2. 教材介面設計

教學輔助數位互動教材將以 Microsoft Office PowerPoint 2007 軟體為主。

(八)形成性評量

教材的形成性評量，從課程內容、教材設計、評量設計探討。

1. 課程內容之評量

課程教學內容，經數學教學專家（數學教育教授及國小數學教師）檢視內容是否正確、是否合宜，以及教學方法與學習活動是否合適。

2. 教材設計之評估

教材內容製作完成後，與數學教育專家及教育科技專家對於教材設計、介面設計和

教學策略等進行討論之後，給予修正。接著找二位學生，進行一對一測試（one-to-one trials），針對內容是否清楚以及學習者對教材的直覺反應及學習表現，進行測試。再依據測試意見修改教學內容後再度進行測試。

(九)修正

從形成性評量獲得的資料作成摘要，解釋學生要達到目標經歷的困難，及將這些困難和教學聯結在一起。重新檢查教學分析和起點能力的假設。檢視教學策略以及最終的考量則被融合在一起修訂教學，以便讓整個教學活動能更完整。

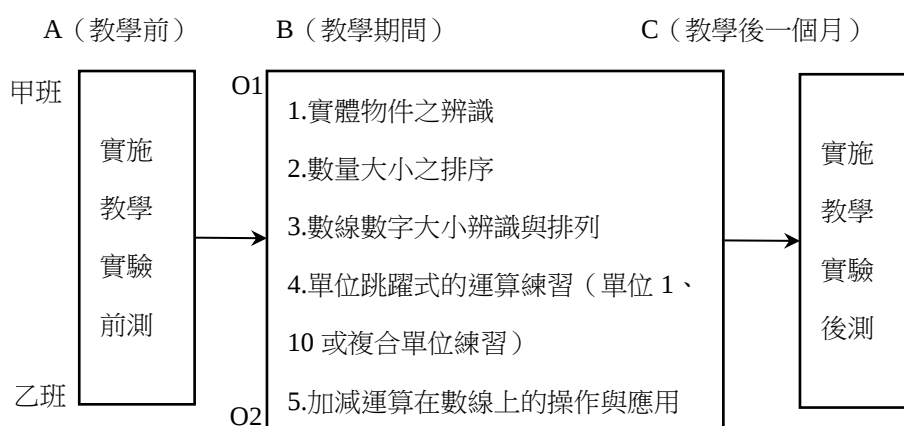
(十)總結性評量

當課程完成後，對整個課程效果做評量。評量者從內容、設計、一致性、可行性共四個方面來評鑑教材 1.內容：整個教材的內容是否完整及正確。2.設計：教材設計是否符合教學、媒體、學習等原則。3.一致性：教材內容是否符合學習目標以及需求。4.可行性：教材是否符合成本效益以及實用性，除能讓使用者感到滿意外，且以後測方式評量其學習成效。

參、研究方法與步驟

一、研究架構

本研究之教學實驗設計架構如圖 2 所示。參與教學實驗的學生有 2 班，甲班為剛升上二年級的學生 22 人，其具有個位數加減法的知識，但未學習二位數加減法進退位的運算；另一班之教學實驗則選在二下快結束時進行，參與的乙班學生 26 人，皆學習過二位數加減法進退位的運算。藉由兩班級學生產出之結果，以協助瞭解數線表徵對學生是否具備二位數加減先備知識產出的關聯。實驗教學皆由研究者擔任，因此可掌控教學歷程如時間安排、教學進度與教師期待等不同因素產生的影響。有關教學實驗歷程師生互動及學生解題表現，皆予以錄影（音），以做為分析學生二位數加減法概念習得與轉化資料之用。



註：甲、乙班皆為接受數線表徵教學實驗之二年級學生。

- 1.甲班為 2 位數加減法學習前組，接受教學實驗 (O1)，每週 3 節持續 2 週。
- 2.乙班為 2 位數加減法學習後組，接受教學實驗 (O2)，每週 3 節持續 2 週。

圖 2 本研究教學實驗設計

二、研究工具與計分方式

採取自編之「二位數加減法概念測驗」(如附錄二)，做為蒐集學生加減法概念教學前後成就表現之工具，該測驗內容包含：

(一)數字算式對錯判斷問題

本測驗主要目的在於檢測學生對於各類算式呈現之加減概念是否理解，總計 10 題，包含數字加、減法概念之問題，例如比較排序 (2 題)、組合分解 (4 題)、位值與進退位等命題 (4 題)，要求學生對呈現之數字算式敘述是否正確進行判斷，每答對一題可得 1 分，全對者可得 10 分。

(二)數字填充問題

目的在於檢測學生是否理解等號代表之意義，運用數字合成、分解進行運算，總計 4 題，包含數字加、減二位數加減法概念問題，要求學生寫出算式中空格的數字，空格位置分別位於等號之兩邊，答對一題可得 2 分，全對者可得 8 分。

(三)看圖解題

本測驗目的在於透過文字題結合圖像呈現問題結構，檢測學生是否具備二位數加減

法的概念，總計 4 題，包含加減法中被加減數未知（1 題）、加減數未知（1 題）及總數未知的問題（2 題），要求學生將解法予以呈現，正確者每題可得 1 分，全對者可得 4 分。

測驗試題採取複本方式，將「二位數加減法概念測驗」之內容與試題加以順序更改與數字修正後，成為「二位數加減法概念測驗 I、II」，分別於教學實驗各情境活動前、後施測，每項測驗時間為 30 分鐘，測驗時學生可配合採用各式表徵，例如畫圖、手指比畫等進行解題。

三、資料分析

資料分為兩部分處理，有關二位數加減法概念測驗表現部分，進行描述性統計與相依樣本 t 考驗比較分析；教學實驗歷程師生互動之敘述內容，則根據學生在教學情境、進行的活動內容及呈現之說明、解題策略與思考方式進行編碼與文字稿轉譯，採用質性分析方式加以詮釋。

四、研究執行步驟

先行分析教科書文本，進行數線表徵活動的設計與編製，於 2015 年 9 月初至 2016 年 6 月底期間實施教學實驗，首先對受試班級施予「二位數加減法概念測驗」，瞭解學生的實際程度，並作為實驗教材內容的修正和調整的參考；其次每位學生皆須接受 6 小時之教學安排，教學實驗完後，各施予「二位數加減法概念測驗」，以了解接受教學實驗的效果。教學實驗及測驗完後，針對蒐集資料，進行分析整理、撰寫研究報告。

肆、研究結果與討論

針對研究目的，將研究結果與發現分為：一、數線表徵教學成效，二、學生數線表徵解題策略運用等兩部分加以分析說明。

一、數線表徵教學成效

二位數加減運算學習前之學生（甲班）於「二位數加減概念測驗」前、後測表現如表 4 所示。

表 4

甲班學生於數線表徵教學實驗前後表現之比較表 ($N = 22$)

比較方式	平均數	t 值	顯著性 (p)
前測	10.1	-4.14	0.01*
後測	13.6		
前測子測驗 1	5.1	-2.62	0.02*
後測子測驗 1	7.0		
前測子測驗 2	3.0	-0.81	0.43
後測子測驗 2	3.2		
前測子測驗 3	1.9	-4.86	0.01*
後測子測驗 3	3.4		

* $p < .05$.

註：子測驗 1：數字算式對錯判斷問題；子測驗 2：故事閱讀填充問題；子測驗 3：看圖解題。

從表 4 統計資料分析得知，甲班學生經動畫表徵教學實驗後，其二位數加減法概念測驗整體表現、數字算式對錯判斷問題與看圖解題，皆明顯的較教學前的表現佳（ $13.6 > 10.1$ ； $7.0 > 5.1$ ； $3.4 > 1.9$ ），且達顯著水準。顯示出數線表徵教學實驗對二位數加減法運算學習前的學生具有成效，可引導其做數學概念的增進。學生在數字算式對錯判斷問題較教學實驗前之前測表現佳，研究者認為數線表徵的教學，透過數字的「分」與「合」的行動與以 1、10 及其他大單位之跳躍移動聰慧的策略，協助學生在算式的運算上更易得出結果，經由比較等號兩邊數字之和是否相同，判斷是否為等值的描述，數線表徵促進學生對數字運算策略更佳彈性的運用，呼應了學者強調的數線是一個適合解題探索、直覺、推理和溝通的表徵工具（Bobis, 2007; Frykholm, 2010）。而在運用數線表徵解題的歷程，增強了學生對文字題的判別理解，與透過理解而正確和邏輯的列式，因此經數線表徵教學後，學生在看圖解題的測驗後測上的表現，明顯進步。

二位數加減運算學習後之學生（乙班）於「二位數加減概念測驗」前後、測表現如表 5 所示。

表 5

乙班學生於數線表徵教學實驗前後表現之比較表 ($N = 26$)

比較方式	平均數	t 值	顯著性 (p)
前測	11.5	-3.09	0.01*
後測	13.8		
前測子測驗 1	5.1	-0.90	0.39
後測子測驗 1	5.4		
前測子測驗 2	4.2	-2.74	0.02*
後測子測驗 2	5.3		
前測子測驗 3	2.2	-2.22	0.05*
後測子測驗 3	3.1		

* $p < .05$.

從表 5 統計資料分析得知，乙班學生經動畫表徵教學實驗後，二位數加減法概念測驗整體表現、故事閱讀填充問題與看圖解題，皆明顯的較教學前的表現佳 ($13.8 > 11.5$ ； $5.3 > 4.2$ ； $3.1 > 2.2$)，且達顯著水準 ($*p < .05$)。顯示數線表徵的教學對乙班學生的二位數加減法運算學習有其成效。由於乙班學生具有二位數加減運算的經驗，教學實驗後之數字算式對錯判斷問題的表現雖有進步，但與前測並無顯著差異，原因在於先前一般的教學，加減運算的基模已建立，數線表徵提供的策略可能與他不同，但能對算式等號兩邊數字的運算獲得正確結果，因此差異不大，此也與 Gravemeijer (1994) 描述運用數線的經驗需包括對線性表徵數字的需求，利用數線密切結合心智策略有關；然而乙班學生經由數線表徵教學後，在故事閱讀填充問題與看圖解題兩子測驗的後測表現皆較前測為佳，且達到顯著水準。研究者認為教學實驗過程，學生要在數線上標記正確的數字位置，進行移動的行為，需依題意按部就班解題的行動，要求進一步分析問題中變數的關係與結構，促進其對題意的理解，因此在這兩個子測驗上的表現較佳。

從上述兩個班級的教學實驗結果，得知數線表徵的教學對於乙班學生在二位數加減運算的表現有其成效存在，歸納研究發現：1.數線表徵的教學對加減法尚未精熟學生，可透過數線聰慧的標記與移動策略，協助對二位數加減法更加流暢的運算；2.數線表徵的教學，在數線標記和移動的行為，可促進學生對問題中變數的關係與結構的理解，提升對數學文字題解題的表現，這些發現與 Frykholm (2010) 的結果相一致。

二、學生數線表徵解題策略運用

關於教學實驗歷程學生在各活動呈現的解題策略表現，茲分為(一)數棒分合解題，(二)數線數字大小辨識與排列；(三)單位 1、10 或複合單位在數線上跳躍練習；(四)加減運算在數線上的操作與應用四部分加以分析說明。

(一)數棒分合解題

圖 3 顯示甲乙兩班學生對於數線表徵學習前之數棒實物之分與合的活動，皆能正確的完成任務，且呈現出多元的思考，顯示學生具備良好的數量分與合的基模，此基模可做為學生學習運用數線解題策略的基礎。

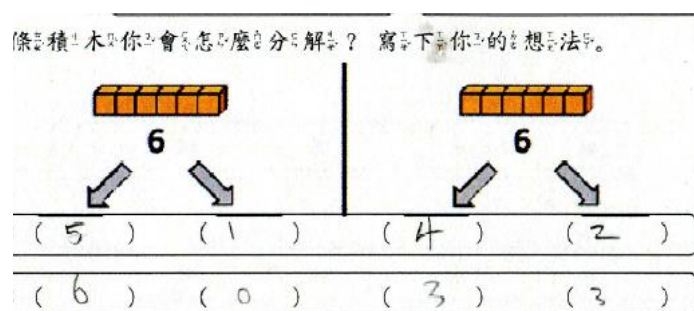


圖 3 學生在數棒分與合活動的表現

(二)數線數字大小辨識與排列

針對文字題的描述，要求學生將問題中的數字標記在數線上適當的位置(圖 4)，所有參與教學實驗的學生，皆正確的做出反應，顯示學生能理解數線上刻度代表的意義，且明白數字在數線上的位置越右，表示數量越大，此結果與 Frykholm (2010) 主張的數線之線性表徵對於學習數數和瞭解數字關係時，提供更容易理解之心像具體表徵。此行動表示學生可從數棒實物代表的單位長度，成功的轉化至數線位置的估計或標示。

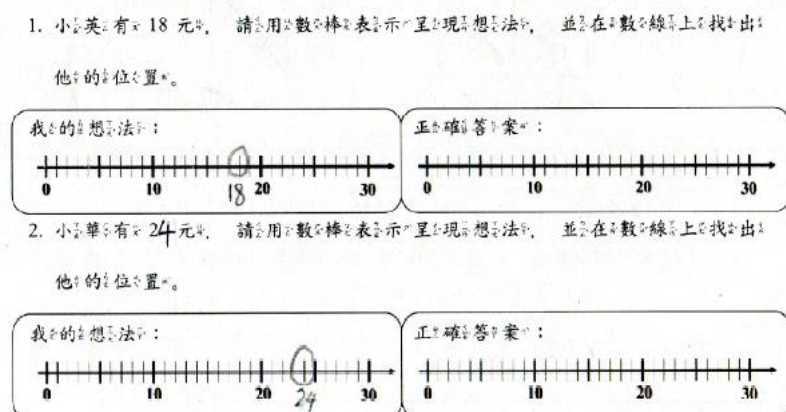


圖 4 在數線上標記出數字正確的位置

進一步的活動要求學生依問題的要求計算結果，並在數線上正確標示此結果的位置，大部分學生可分別標記出個別數字的位置，且經加減計算後，將答案在正確的標記出來（圖 5 與圖 6），然有部分學生因加減法計算錯誤，以致造成在數線上標記錯誤，此表現可能是學生在「透過 10 往上或往下計數」和「跨越 10 計數」兩項基礎的策略無法理解與有效運用造成（李源順，2014）。研究者思考，若能利用數線表徵解題策略的引導，應能協助學生增進運算的能力，促其在數線上正確的標記出位置。

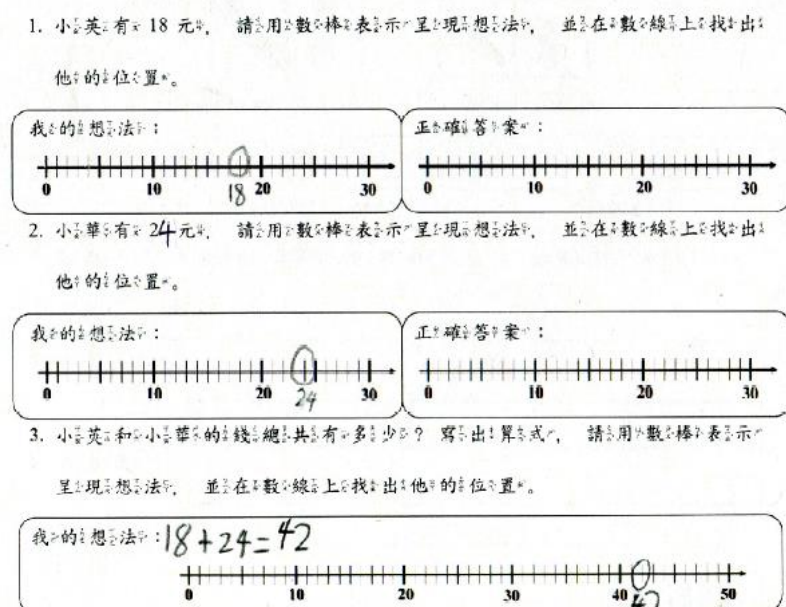


圖 5 學生加法運算後於數線上的標記

4. 小華比小英多多少錢？寫出算式，請用數棒表示呈現想法。

法，並在數線上找出他的位置。 $24 - 18 = 6$

我的想法：

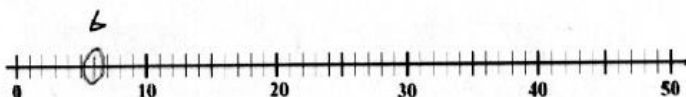
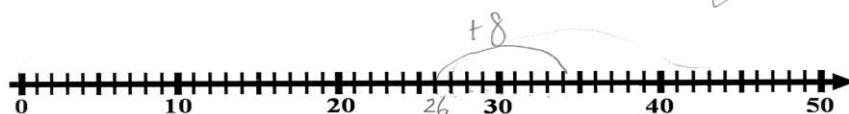


圖 6 學生減法運算後於數線上的標記

(三)單位 1、10 或複合單位在數線上跳躍運算練習

在此活動的初期，學生運用的策略分為 2 類：一是視覺化轉換至大單位跳躍運算（如圖 7 所示，例如 10、20、30…），使用此種策略的學生先將算式的答案解出後，透過視覺搜尋將結果標記於正確位置上；當要求產出另類思考時，因算式中的數字較大，為便於計算，將 38 予以分割成 30 與 8，採用大單位（30）的方式協助運算。

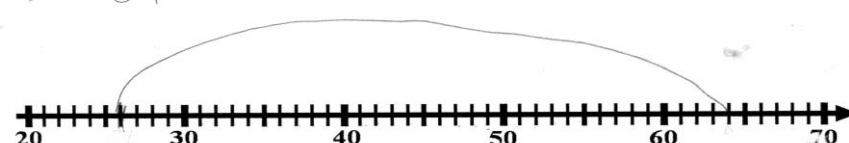
$$26 + 8 = 34$$



2. 請你利用數線計算 $26 + 38 =$ (64)

● 我的第一種作法：

$$26 + 38 = 64$$



● 我的第二種作法：

$$26 + 38 = 64$$

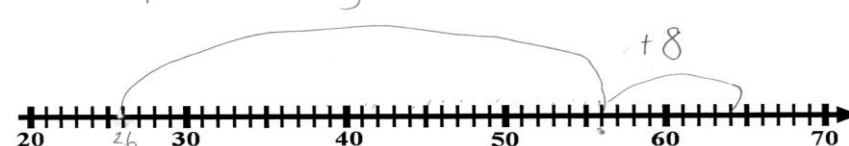


圖 7 視覺化轉換至大單位跳躍運算的表現

另一種策略則先採取小單位計數（例如採數字 1 - 9），然後轉換成大單位跳躍運算（圖 8）。採取此策略的學生，運用小單位（1）方式在數線上計數，然後在數線上標記結果的位置；同樣的，要求提供另類解題策略時，學生亦能將 38 分解成 30 和 8，轉換

成運用大單位跳躍運算的方式協助解決二位數加法的問題。

從解題表現加以分析，發現學生受限於教學文化的影響，不管是否精熟加減法運算，學生最常利用個位數相加進位的方式處理運算，對數字分解與在數線上大單位跳躍的策略並不熟悉，經數線表徵教學後，已能明白數線表徵發展的任務可協助提供多元的解題思考，逐步運用在後來的加減運算上。

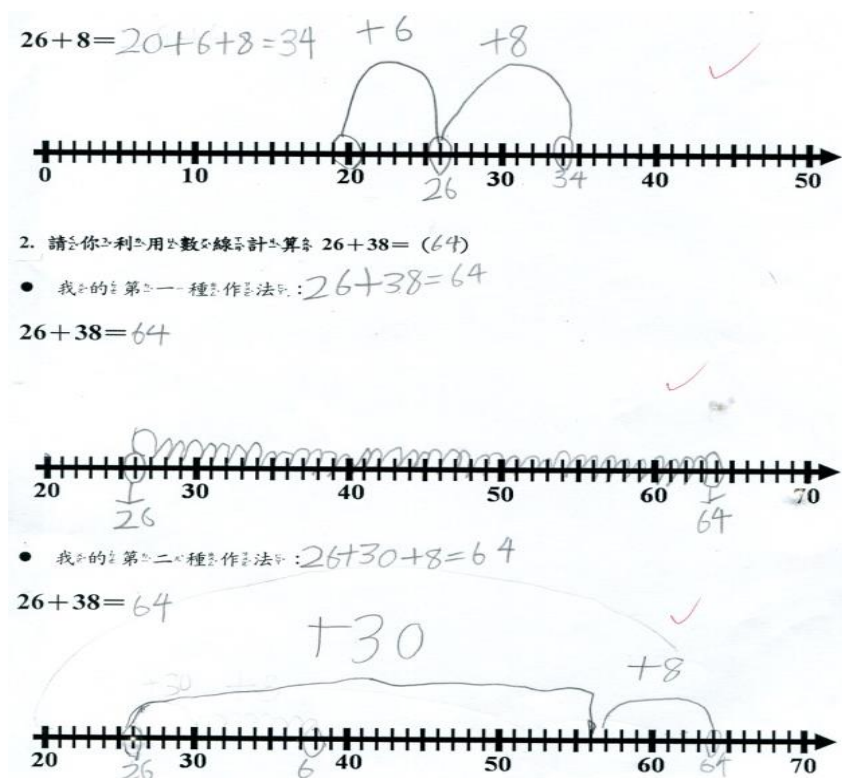
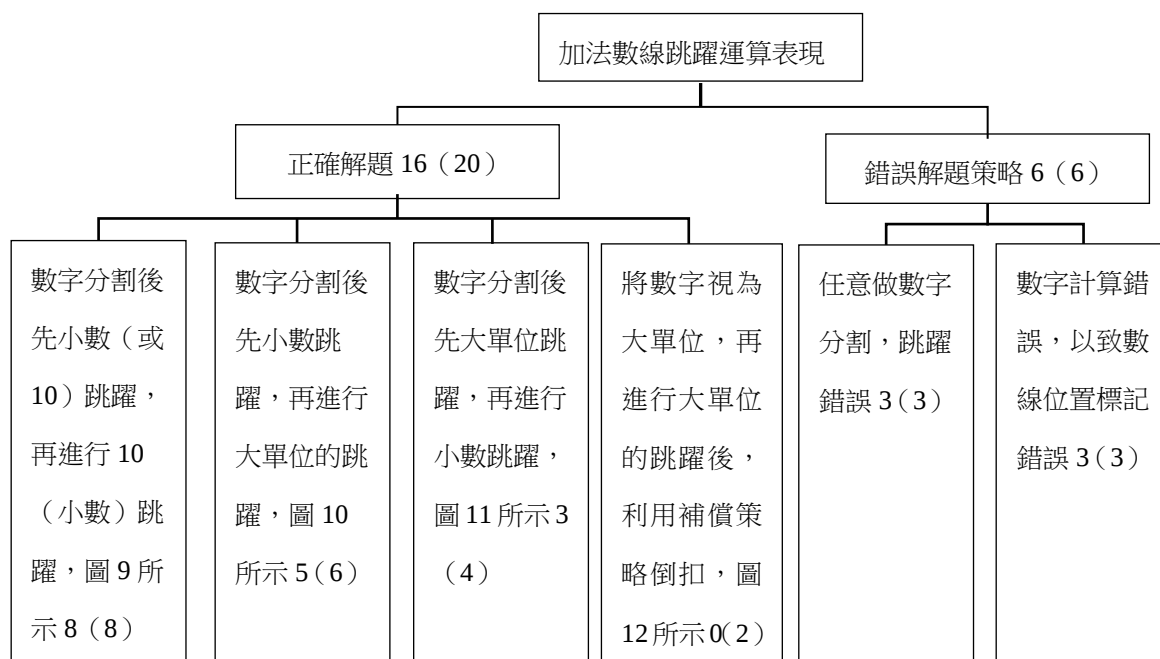


圖 8 先採取小單位計數，然後再轉換成大單位跳躍運算

分析甲乙兩班學生複合單位在數線上跳躍運算練習加法作業的表現，發現學生呈現出的數線表徵策略之分析，其結果如圖 9 所示：



註：括弧前方數字為甲班的學生人數，而後方括號內的數字則為乙班的學生人數

圖 9 學生之加法數線表徵策略分析

從圖 9 分析加以說明，發現對於加法數線表徵策略運用錯誤者（甲班 6 人，乙班 6 人），皆是由對數線表徵運用不熟悉、或想利用運算結果以標記數字位置，因運算錯誤造成。學生正確運用數線表徵的策略，可分成 4 種：

1. 數字分割後先小數（或 10）跳躍，再進行 10（小數）跳躍，如圖 10 所示。即學生先將被加數 24 在數線上定位，再將 39 分割為 $9 + 10 + 10 + 10$ ，然後 $24 + 9$ 在 33 處標記，接著以 10 為單位逐次跳躍，最後在 63 處標記。此策略為最多學生使用（甲乙兩班各有 8 人）。

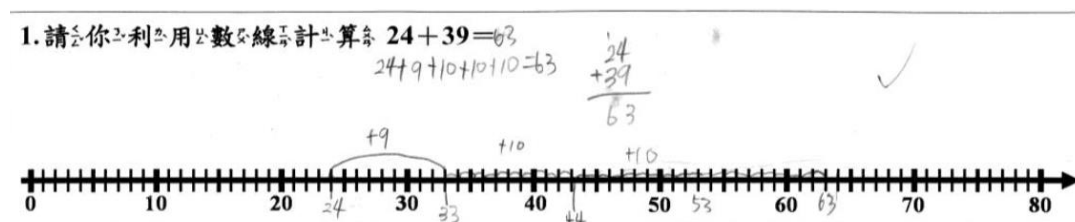


圖 10 數字分割後先小數（或 10）跳躍，再進行 10（小數）跳躍

2. 數字分割後先小數跳躍，再進行大單位的跳躍，如圖 11 所示，此策略與前策略不同處，在於將 39 分割成小數 9 和 30，先標記 $24 + 9 = 33$ 後，再以大單位 30 進行跳躍至 63 位置，甲乙兩班分別有 5 和 6 人運用。

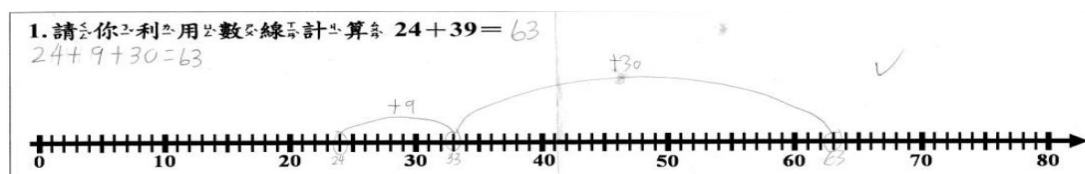


圖 11 數字分割後先小數跳躍，再進行大單位的跳躍

3. 數字分割後先大單位跳躍，再進行小數跳躍，如圖 12 所示，此策略與圖 10 不同處是將 39 分割成 30 和 9，先進行大單位 30 的跳躍後，再加上 9 進行數字的標記，甲乙兩班分別有 3 和 4 人運用。

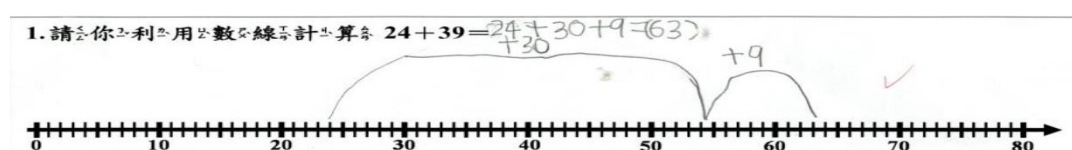


圖 12 數字分割後先大單位跳躍，再進行小數跳躍

4. 將數字視為大單位，再進行大單位的跳躍後，利用補償策略倒扣，如圖 13 所示，此策略是將 39 當成 40，然後以此大單位跳躍標記數字 64 後再倒回 1，定位在 63，因為 40 是原先的 39 加 1，所以運算後要再減 1。此策略只有乙班 2 位學生運用。

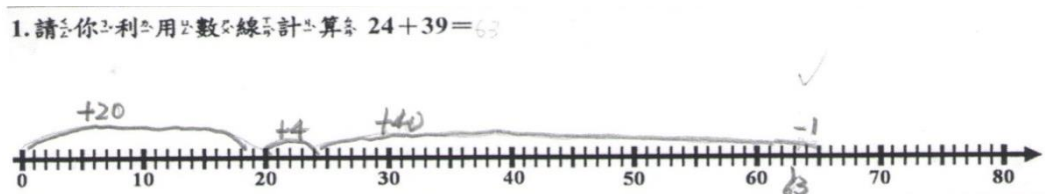


圖 13 將數字視為大單位，再進行大單位的跳躍後，利用補償策略倒扣

由上述學生的表現分析發現：一是學生學習數線表徵前的基礎能力會影響數線表徵運用的正確和聰慧解題的展現，甲班學生之數線表徵策略仍以基礎的分合方式、配合以 10 為單位做數字的跳躍和標記；乙班學生因有二位數加減的基模，可擴展運用大單位和補償策略協助解題。二是學生利用數線表徵標記與移動之視覺化行動，協助進行運算結果之檢驗與聰慧策略的發展，使其運算更有效率和正確。上述發現也驗證學者的研究結果，數線表徵是可以給予學生機會發展解題策略的類型（Bobis, 2007; Fosnot & Dolk, 2001; Frykholm, 2010; Parrish, 2011）。

歸納甲乙兩班學生減法作業的表現，發現學生呈現出 3 種數線表徵策略之分析，其結果如圖 14 所示：

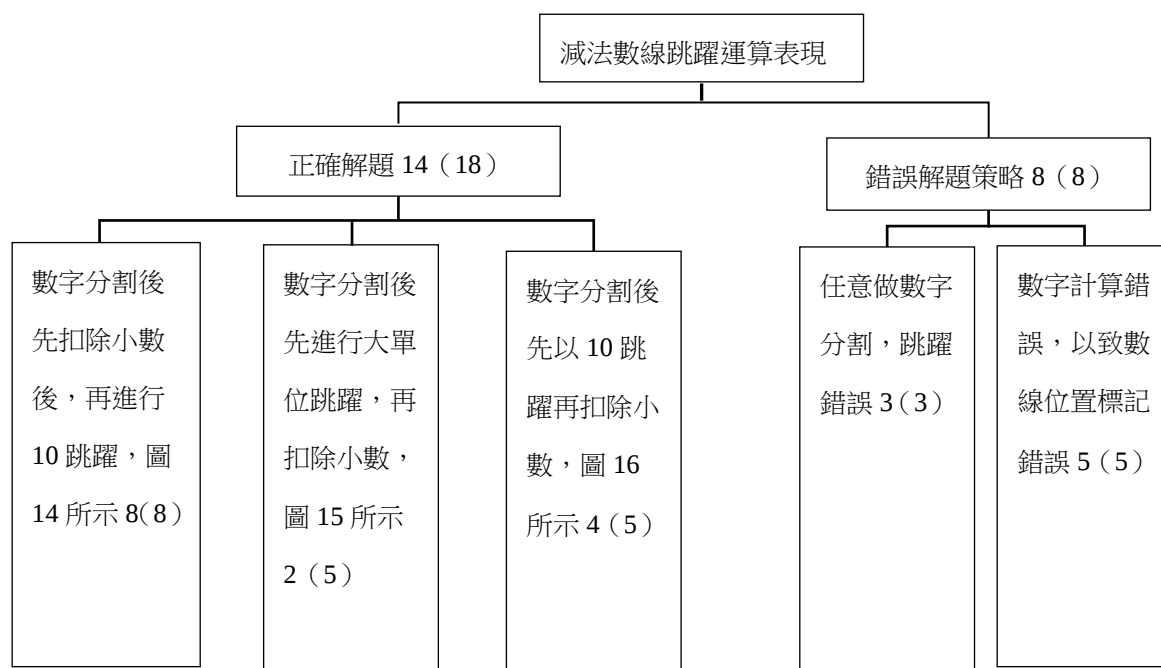


圖 14 學生之減法數線表徵策略分析

同樣的，對於加法數線表徵策略運用錯誤者（甲班 8 人，乙班 8 人），皆由對數線表徵運用不熟悉、或是想利用運算結果以標記數字位置，因運算錯誤造成。學生正確運用數線表徵的策略，可分成 3 種：

1. 數字分割後先扣除小數後，再進行 10 跳躍，如圖 15。學生先將減數進行分割成一小數及數個以 10 為單位的數，先扣除小數，再連續扣除以 10 為單位的數，然後進行標記與定位，此策略是學生最常運用的數線表徵策略，甲乙兩班各有 8 人使用。

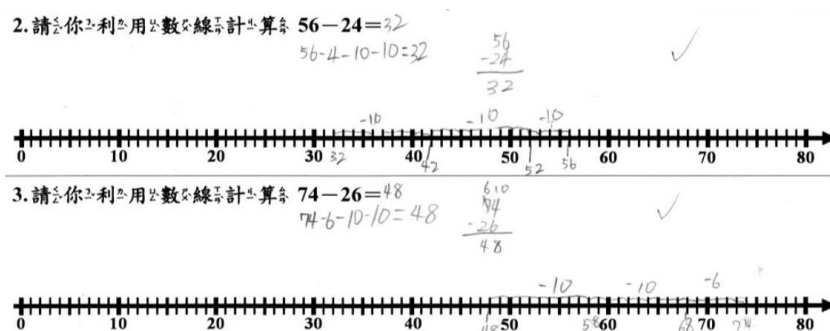


圖 15 數字分割後先扣除小數後，再進行 10 跳躍

2. 數字分割後先進行大單位跳躍，再扣除小數，如圖 16 所示。學生將減數分割成一大單位和一小數，然後先扣除大單位數後先行標記，再扣除小數而獲得結果，甲乙兩班分別有 2 和 5 人運用。

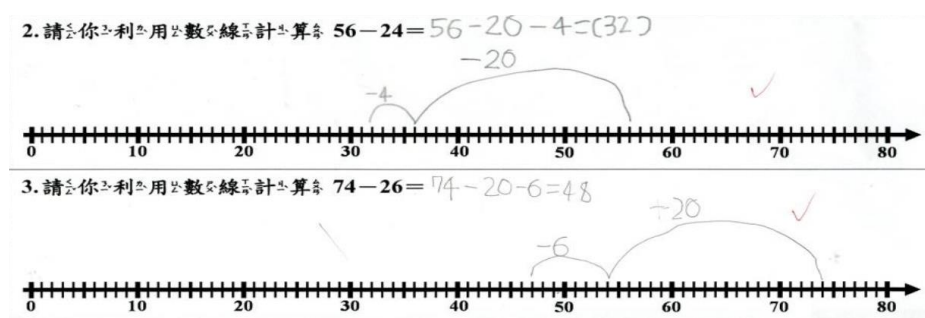


圖 16 數字分割後先進行大單位跳躍，再扣除小數

3. 數字分割後先以 10 跳躍再扣除小數，如圖 17 所示。學生先將減數進行分割成一小數及數個以 10 為單位的數，先連續扣除以 10 為單位的數，再扣除小數，然後進行標記與定位，甲乙兩班分別有 4 和 5 人使用。

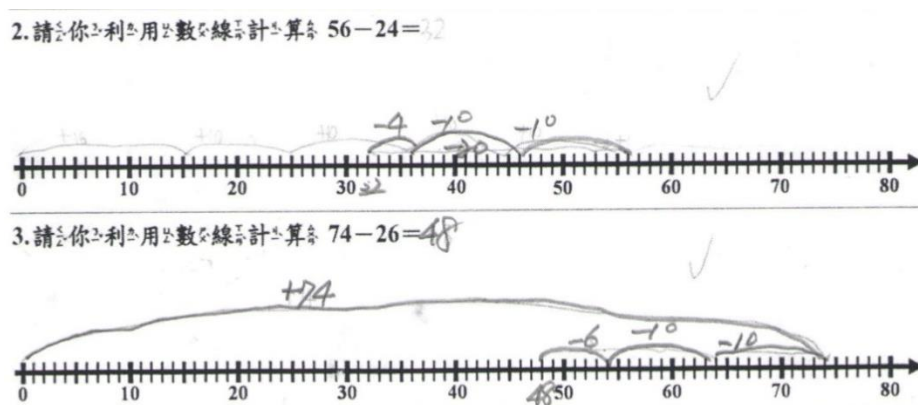


圖 17 數字分割後先以 10 跳躍再扣除小數

因為減法是加法的可逆思考，學生在退位運算時需付出更多的認知資源，因此易產生錯誤，聰慧策略的產出亦容易受限，因此大多數學生採取逐次扣除的方式進行標記和定位，但從學生數線表徵策略的運用表現，可支持協助學生算則的運算和概念思考，此與 Frykholm (2010) 的主張一致，將數線視為一種解題的習慣，可協助探索數學與促進對解題方法和推理的對話。

(四) 加減運算在數線上的操作與應用

在此活動的表現以 2 位 (A 與 B) 學生的任務產出 (如圖 18 和 19)，歸納本研究數線表徵教學實驗的成效與學生解題策略的發展，說明如下：

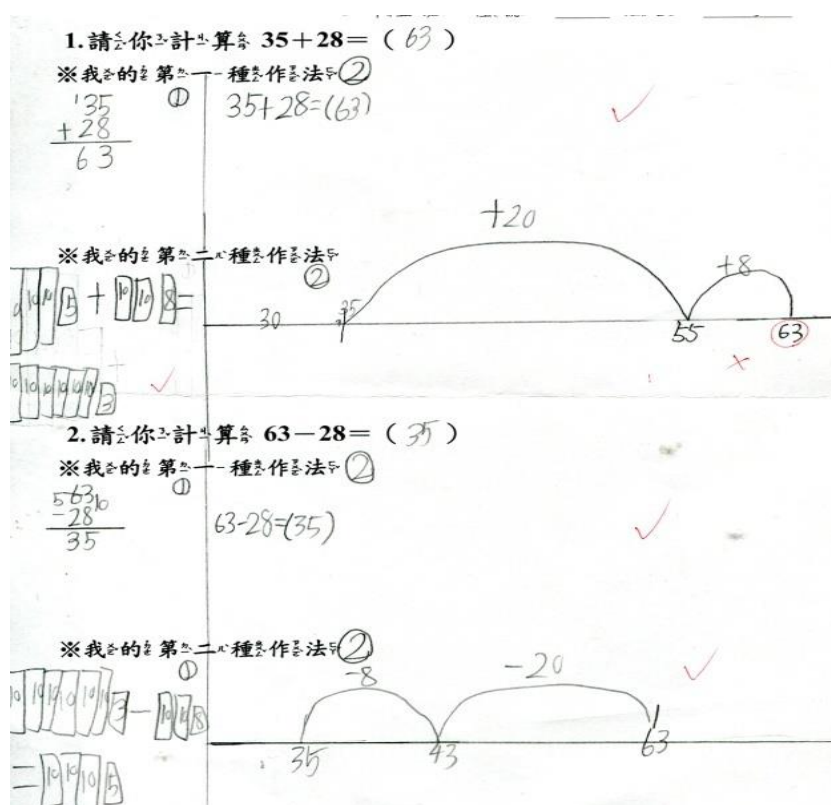


圖 18 A 生在數線上的加減運算操作與應用

1. A 生和 B 生兩位皆可利用分合方式，將數字分解，協助其進行數線表徵行動。
2. 學生可以從空數線正確的進行數字的標記和定位。從圖 18 和 19 可知 A 生和 B 生可在空數線上標示出被加數（減）和加（減）數的位置，理解題目之意義，在數線上進行往左和往右之移動，獲得正確答案。
3. 學生可以利用以 1、10 或其他大單位進行數字跳躍移動視覺化的策略，獲得正確答案。A 生和 B 生利用 1 或 10 的單位概念，在數線上標示刻度，協助運用不同的單位作為跳躍的基礎，進行計數或視覺化的運算，進行定位和標記。
4. 學生配合分割方式與課堂強調之直式算則，利用數線表徵解題，或作為檢驗其他策略結果之手段，相互驗證答案。

例如 A 生先行利用直式算則算出答案後，配合圖像表徵呈現 1 和 10 的單位，從中比較而在數線上運用大單位跳躍的策略標記出答案；B 生則先運用數線表徵方式標記出答案，然後運用直式算則運算，因瞭解加減法中單位與進退位的關係，所以順利解出答案。

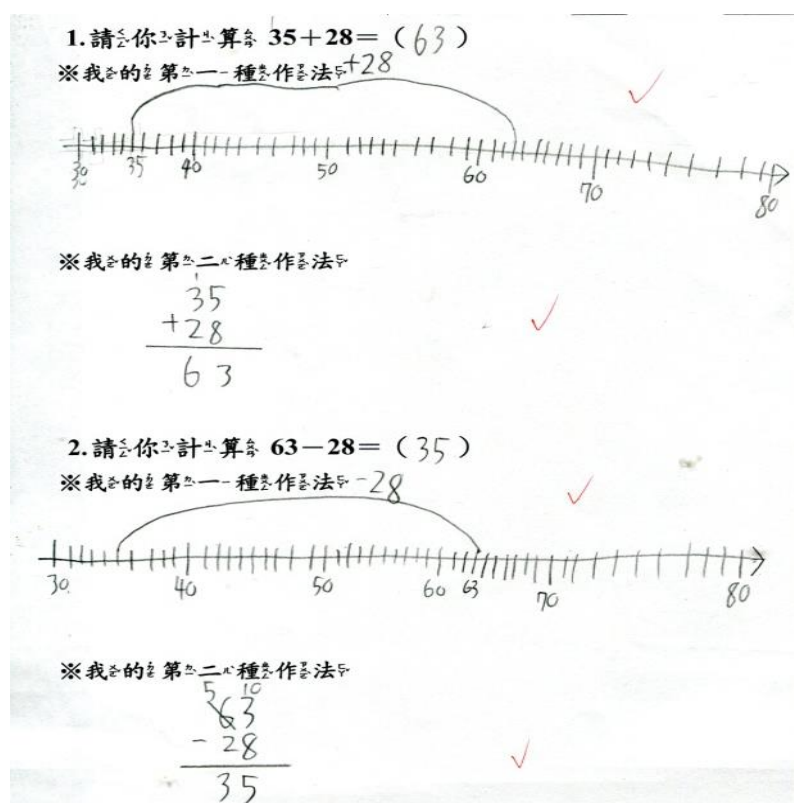


圖 19 B 生在數線上的加減運算操作與應用

伍、結論與建議

本研究研究結論如下：

一、經數線表徵教學實驗後之乙班學生，其在加減法概念測驗部分層面的表現，較教學實驗前為佳，且呈現顯著差異

本研究發現經教學實驗後，乙班學生在加減法概念測驗部分層面的表現呈現進步，數線表徵的經驗對於提升數字算式對錯判斷問題、故事閱讀填充問題與看圖解題的表現是有幫助的。

二、數線表徵教學之跳躍與移動策略，增進學生運算思維，掌握加減概念的發展

研究發現，學生利用數線表徵標記與移動之視覺化行動，協助其進行運算結果之檢驗與聰慧策略的發展，使其運算更加有效和正確。另外學生配合分割方式與課堂強調之

直式算則，利用數線表徵解題，或作為檢驗其他策略結果之手段，相互驗證答案。

本研究結果除驗證學者之發現外，也支持數線表徵教學可以培養學生聰慧的加減運算產出，提升學生數學概念的理解，增進數學素養多元解題和彈性策略能力的發展；除此之外也瞭解到小二學生數線標記和定位策略發展的軌道，透過分合基模與單位運用的層次，安排合適的教學活動順序，可透過電腦動畫強化數學概念的連結與轉化；最重要的是透過視覺化的行動，讓學生從操作和比對中，洞察出數學中變化與不變性的特質，掌握數學學習的心智習性，培養出數學研究的興趣。為擴展本研究成果與提供未來研究方向，根據研究歷程之省思，提供以下建議：

(一)深入設計研究問題，釐清研究變項與數線表徵成效間的關係

本研究雖採取兩組學生不同學習經驗的方式，探討有無加減法概念與數線表徵成效的關聯，獲得教學實驗的成效，然因不同班級的樣本，且受成熟、學習和多種中介變項影響，此成果尚須精確的實驗設計進一步證實，因此建議為來可針對某班級設計縱貫研究，掌握重要變項，深入探索其間的關聯。

(二)配合多元表徵解題理念，融入數學教材教法，提升有效教學成效

本研究發現二年級學童配合數線表徵的學習歷程可發展出多元表徵的解題策略，這些策略是未來進入高等數學重要的能力，也是培養學生推力思考的基礎，要讓學生有帶的走的能力，教師應積極的在教學歷程應用多元表徵促進學生有效學習。

(三)強化運用數線表徵工具的習慣，增進學生應用彈性解題策略的數學素養

Vygotsky (1987) 宣稱人們行動使用的工具深層的影響著其發展的理解，勝過於理論的臆測，本研究透過學實驗描述了教學上的實際現象：學生受限於單一教學文化，運用一種技巧解決問題，可能造成數學意義學習的遺落和困難。因此，建議在教室裡可強化運用數線表徵工具的習慣，增進數學推理的機會，提升解題的動機。

參考文獻

- 李源順（2014）。**數學這樣教—國小數學感教育**。臺北市：五南。
- 教育部（2008）。**國民中小學九年一貫課程綱要：數學學習領域**。臺北市：教育部。
- 陳嘉皇、梁淑坤（2015）。姿勢、言辭表徵與代數思考之研究。**教育學報**，43（1），103-127。

陳嘉皇、梁淑坤（2014）。表徵與國小學生代數思考之初探性研究。《教育研究集刊》，60（2），1-40。

Beishuizen, M. (2001). Different approaches to mastering mental calculation processes. In J. Anghileri (Ed.), *Principles and Practices in Arithmetic Teaching* (pp. 119–130). London: Open University Press.

Bobis, J. (2007). The empty number line: a useful tool or just another procedure? *Teaching Children Mathematics*, 13(8), 410–413.

Buys, K. (2001). Progressive mathematization: sketch of a learning strand. In J. Anghileri (Ed.), *Principles and Practices in Arithmetic Teaching* (pp. 107–118). London: Open University Press.

DiBrienza, J., & Shevell, G. (1998). Number strings: developing computational efficiency in a constructivist classroom. *The Constructivist*, 13(2), 21–25.

Dick, W., Carey, L., & Carey, J. O. (2005). *The systematic design of instruction* (6th ed), Harper Collins.

Fosnot, C. T., & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: Constructing multiplication and division*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Frykholm, J. (2010). *Learning to Think Mathematically with the Number Line*. Boulder, Colorado: Cloudbreak Publishing, Inc..

Goldin, G. A., & Kaput, J. J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. In L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin, & B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 397-430). Mahwah NJ: Erlbaum.

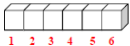
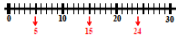
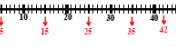
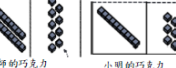
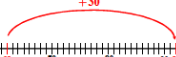
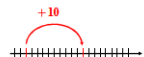
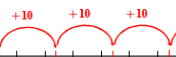
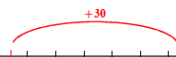
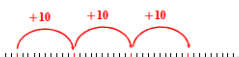
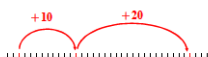
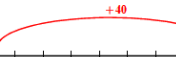
Gonsalves, N. & Krawec, J. (2014). Using number lines to solve math word problems: a strategy for students with learning disabilities. *Learning Disability*, 29(4), 160-170. doi: 10.1111/ldrp.12042

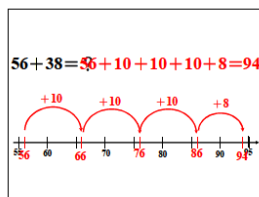
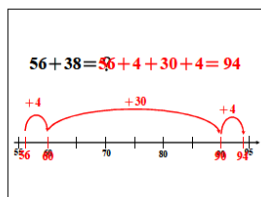
Gravemeijer, K. (1994). Educational development and educational research in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education* 25(5), 443-471. doi: 10.2307/749485

Lampert, M., Beasley, H., Ghousseini, H., Kazemi, E., & Franke, M. (2010). Using designed instructional activities to enable novices to manage ambitious mathematics teaching. In

- M.K. Stein & L. Kucan (Eds.), *Instructional explanations in the disciplines* (pp. 129–141). New York, NY: Springer. doi: 10.1007/978-1-4419-0594-9_9
- Mayer, R. E. (1997). Multimedia learning: Are we asking the right questions? *Educational Psychologist*, 32, 1-19. doi: 10.1207/s15326985ep3201_1
- Mayer, R. E. (2004). Designing multimedia technology that supports human learning. In M. Rabinowitz., F. C. Blumberg, & F. T. Everson(Eds.), *The design of instruction and evaluation: Affordances of using media and technology* (pp. 33-49). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Moeller, K., Fischer, U., Nuerk, H.-C., & Cress, U. (2015). Computers in mathematics education – training the mental number line. *Computers in Human Behavior*, 48, 597-607. doi: 10.1016/j.chb.2015.01.048
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Parrish, S. D. (2011). Number talks build numerical reasoning. *Teaching Children Mathematics*, 18(3), 198–206. doi: 10.5951/teacchilmath.18.3.0198
- Treffers, A. (1991). Didactical background of a mathematics program for primary education. In Streefland, L. (ed.), *Realistic Mathematics Education in Primary School: On the Occasion of the opening of the Freudenthal Institute*, Freudenthal Institute/CD-β, Utrecht, pp. 21–57..
- Vygotsky, L. S. (1987). Thinking and speech. In R. W. Riebrt & A. S. Carton (Eds.), *The collected words of Vygotsky, L. S. vol. 1: Problems of general psychology* (pp.37-285). New York: Plenum.

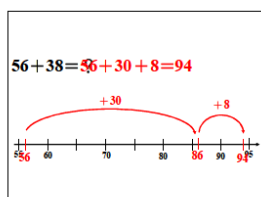
附錄 1 加減法文字題線段動畫表徵之學習活動

運用數線表徵進行整數 加減法補救教學	一、以下是一條積木，他是由 幾個正方形方塊組成？  6個	三、做做看 1. 小華有 18 元，請用數棒表示想法，並在數線上 找出他的位置。 	2. 小華有 24 元，請用數棒呈現想法，並在數線上 找出他的位置。 
二、這條積木你會怎麼分解？ 寫下你的想法。  () ()	1.  (1) (5) 2.  (5) (1)	18元 24元 3. 小華和小華的總共有多少元？寫出算式。 請用數棒呈現想法，並在數線上找出他的位置。 小華 + 小華 = 總共有多少元 $18 + 24 = 42$ 	24元 18元 3. 小華比小華多多多少元？寫出算式。 請用數棒呈現想法，並在數線上找出他的位置。 小華 - 小華 = 多多多少元 $24 - 18 = 6$ 
3.  (2) (4) 4.  (4) (2)	5.  (3) (3) 6.  (6) (0)	四、觀察下圖回答問題  老師的巧克力 小明的巧克力 1. 老師的巧克力有幾顆？ 29顆 2. 小明的巧克力有幾顆？ 16顆	29顆 16顆 3. 他們兩人的巧克力總共有幾顆？請寫出算式。 利用數棒呈現計算的結果。 $29 + 16 = 45$ 
數線表徵整數加法運算	$62 + 10 = 72 + 8 + 2 = 72$ 	$62 + 30 = 92 + 30 = 92$ 	$62 + 39 = ?$
$62 + 10 = 72 + 10 = 72$ 	$62 + 30 = ?$	$62 + 39 = 72 + 10 + 10 + 10 + 9 = 101$ 	$62 + 39 = 72 + 30 + 9 = 101$ 
$62 + 30 = 72 + 10 + 10 + 10 = 92$ 	$62 + 30 = 72 + 10 + 20 = 92$ 	$62 + 39 = 72 + 40 - 1 = 101$ 	$56 + 38 = ?$



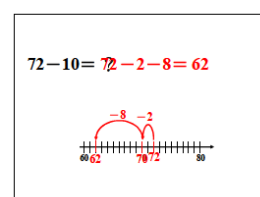
$27 + 6 = ?$
 $27 + 16 = ?$
 $27 + 36 = ?$

數線表徵整數減法運算



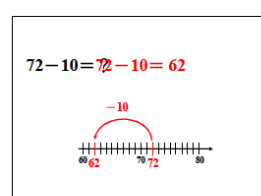
$37 + 4 = ?$
 $37 + 14 = ?$
 $37 + 34 = ?$

$72 - 10 = ?$

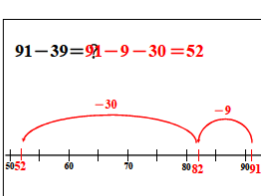
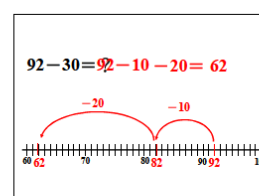
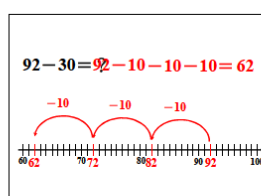


$42 + 9 = ?$
 $42 + 19 = ?$
 $42 + 39 = ?$

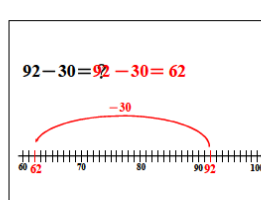
$46 + 7 = ?$
 $46 + 17 = ?$
 $46 + 37 = ?$



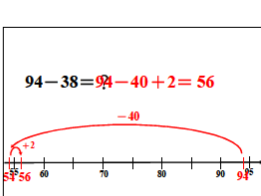
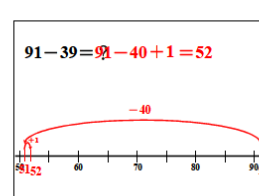
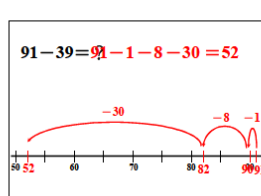
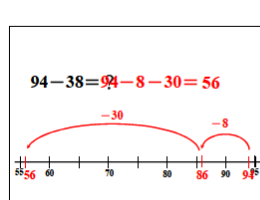
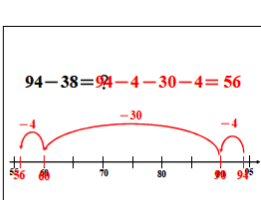
$92 - 30 = ?$



$94 - 38 = ?$



$91 - 39 = ?$



$45 - 4 = ?$
 $45 - 14 = ?$
 $45 - 34 = ?$

$$\begin{aligned}78 - 6 &= ? \\78 - 16 &= ? \\78 - 36 &= ?\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}53 - 7 &= ? \\53 - 17 &= ? \\53 - 37 &= ?\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}84 - 6 &= ? \\84 - 16 &= ? \\84 - 36 &= ?\end{aligned}$$

THE END

附錄 2 加減法文字題線段動畫表徵之學習活動

一、判斷下列呈現的算式，正確的請在括弧中劃○，錯誤的請劃×

1. () $17 + 30 = 30 + 17$ (比較排序)
2. () $17 - 10 = 10 - 17$ (比較排序)
3. () $19 + 11 = 10 + 10 + 9 + 1$ (分解組合)
4. () $59 + 21 = 50 + 20 + 10$ (分解組合)
5. () $37 - 23 = 30 - 23 + 7$ (分解組合)
6. () $38 - 12 = 30 - 10 + 8 - 2$ (分解組合)
7. () $72 - 18 = 52 + 20 - 18$ (進退位)
8. () $19 + 11 = 10 + 10 + 10$ (進退位)
9. () $36 + 36 = 30 + 30 + 10 + 2$ (進退位)
10. () $70 - 23 = 60 - 20 + 10 - 3$ (進退位)

二、閱讀以下的故事後，想想看空格裡應該填上那個數字比較適合，請從三個選項選擇出最好的數字。

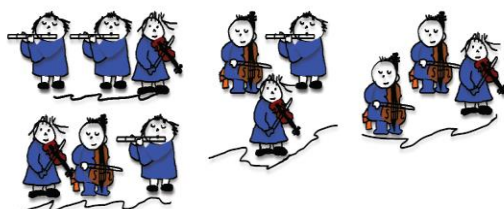
1. 小明不知道有 () 顆糖果，他吃了 () 後，不知道還剩下幾顆？以下哪一組的數字最適合放進這些括弧裡？請打√ (減法)
A.() (27, 37, 10) B.() (97, 57, 40) C.() (27, 19, 46)
2. 陳老師有 () 枝的紅筆，() 枝的藍筆，紅筆比藍筆少 () 枝？以下哪一組的數字最適合放進這些括弧裡？請打√ (比較)
A.() (40, 25, 15) B.() (25, 40, 15) C.() (25, 40, 52)
3. 小魯現在有 () 元，媽媽再給他 () 元，他現在總共有 () 元？以下哪一組的數字最適合放進這些括弧裡？請打√ (加法)
A.() (20, 5, 25) B.() (35, 20, 5) C.() (5, 50, 25)
4. 王媽媽做了 () 塊香草餅乾，() 塊的香蕉餅乾，香草餅乾比香蕉餅乾多 () 塊？以下哪一組的數字最適合放進這些括弧裡？請打√ (比較)
A.() (80, 56, 14) B.() (45, 55, 10) C.() (25, 40, 65)

三、看圖回答問題

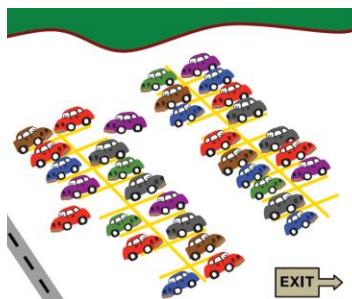
1. 木柵動物園裡現在有 36 隻的企鵝，如果要讓企鵝變成 64 隻，還需要再加上多少隻的企鵝？將你的解法寫下來。（加減數未知）



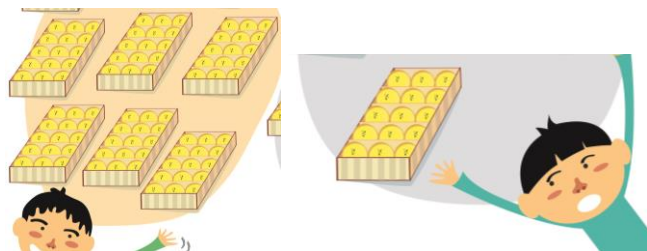
2. 音樂館裡有一些學生在練習樂器，走了 27 個同學後，現在還有 12 位同學繼續練習，想想看！原先有多少為學生在練習樂器？將你的解法寫下來。（被加減數未知）



3. 甲停車場裡停了 17 輛汽車，乙停車場裡停了 16 輛汽車，兩個停車場總共停了幾輛汽車？將你的解法寫下來。（總數未知）



4. 小武早上製作了 90 個太陽餅，小新只製作了 15 個，小武比小新多製作了幾個太陽餅？將你的解法寫下來。（總數未知）



《臺灣數學教師》稿約

2013.09.27 編審委員會會議通過
2014.09.04 編審委員會會議修訂通過
2015.05.24 編輯委員會會議修訂通過
2016.05.15 編輯委員會會議修訂通過

- 壹、《臺灣數學教師》（原名為《台灣數學教師(電子)期刊》）（Taiwan Journal of Mathematics Teachers）（以下簡稱本刊）是國立臺灣師範大學數學系及台灣數學教育學會共同發行之期刊，內容以出版數學教育領域相關議題的原創性論文為宗旨。本刊徵求符合宗旨之教學實務文稿，內容包含探討數學教學策略、學生迷思概念之教學引導、數學教育課程、教材與教法等實務經驗分享、研究問題評析、數學教育之構想、書評、論文批判、數學教學與應用性研究、數學教育研究趨勢介紹、專題演講講稿、數學學習評量、電子媒材設計、數學教師專業發展及其他數學教育相關議題等內容。
- 貳、本刊每年發行兩期，分別於四月、十月出刊，並採電子方式發行。全年徵稿，隨收隨審。
- 參、本刊所刊之文稿須為原創性的教學實務文章，即未曾投遞或以全論文形式刊登於其他期刊、研討會彙編或書籍。若文稿在送審後自行撤稿，或出現一稿多投、修正稿回覆逾期、侵犯著作權等違反學術倫理等情況，將依下列規則處理：
- 一、來稿一經送審，不得撤稿。因特殊理由而提出撤稿申請者，案送主編決定；非特殊理由而自行撤稿者，一年內將不再接受該作者的投稿。
 - 二、若文稿被發現一稿多投、侵犯著作權或違反學術倫理等情況，除文稿隨即被拒絕刊登外，一切責任由作者自負，且本刊於三年內不接受該作者來稿，並視情節嚴重程度求償。
 - 三、作者應於發出文稿修正通知的二週內回傳修正稿及修正回覆說明書，逾期視同撤稿。若有特殊情況請先與本刊聯絡。
- 肆、未經本刊同意，已獲本刊接受之文章不得再於他處發表。投遞本刊之文稿須經編審委員會送請專家學者審查通過後予以刊登，被刊登文章之著作財產權歸國立臺灣師範大學數學系及台灣數學教育學會共同擁有，文責由作者自負。
- 伍、文稿請以中文撰寫，以8,000字為原則（包含摘要、文章全文、圖表、附註、參考文獻、附錄等）。文稿的呈現請使用單行間距之12級字新細明體或Times New Roman字體，以橫書方式於A4規格紙張上，文稿上下左右各留2.5公分空白，並以Microsoft Word 98以上之繁體中文文書軟體處理。

陸、文稿格式請參考《臺灣數學教師》期刊論文撰寫體例的說明或已發行之文稿，若有需要引用英文文獻以及數學符號、公式等請參考APA第六版出版手冊。交遞稿件時需注意下列事項：

一、提交投稿基本資料表

(一) 文稿基本資料。

(二) 通訊作者之姓名、服務單位、職稱、通訊地址、聯絡電話和電子郵件地址。

一位以上作者時，非通訊作者只需填寫姓名、服務單位和職稱。

(三) 任職機構及單位：請寫正式名稱，分別就每位作者寫明所屬系所或單位。

(四) 頁首短題（running head）：以不超過15個字為原則。

(五) 作者註（author note）：說明與本篇研究相關的資訊。

二、提交已簽署的《臺灣數學教師》著作財產權讓與同意書。

三、文稿除正文外，還需包含中文摘要，摘要請獨立一頁呈現，並置於正文之前。摘要頁內容包括論文題目（粗體20級字、置中）、摘要（不分段，限500字以內）、與關鍵詞（以五個為上限，並依筆畫順序由少到多排列）。

四、若為修正稿，遞交修正的文稿上請以色字標示修改處，並需提交「修正回覆說明書」，依審查意見逐項說明修改內容或提出答辯。作者應於發出文稿修正通知的二週內回傳修正稿及修正回覆說明書，若有特殊情況請先與本刊聯絡。

柒、文稿以電子郵件方式投遞，包括作者基本資料表、著作財產權讓與同意書與全文共三份資料。作者應負論文排版完成後的校對之責，編輯委員僅負責格式上之校對。

捌、投稿電子郵箱：tjmtedit@gmail.com

《臺灣數學教師》投稿基本資料表

篇名		(中文)		
		(英文)		
總字數		稿件全文 (含中英文摘要、正文、參考文獻、附錄等) 共_____字。		
關鍵詞 (最多五個)		(中文)		
		(英文)		
頁首短題 (running head)		(請以不超過15個中文字或40個英文字元為原則。)		
通訊作者資料	姓名	(中文) _____ (英文) _____		
	職稱	_____		
	服務單位 (或就讀校系)	(中文) _____		
		(英文) _____		
	E-mail	_____		
	通訊地址	_____		
	電話	辦公室：() _____ 分機 _____		
		行動電話： _____		
如為共同著作，請詳填以下共同著作人欄位，非共同著作則不需填寫。(以下欄位不敷填寫時請自行增加)				
共同著作人	姓名	服務單位 (或就讀校系) 職稱		
第一作者 (☐ 通訊作者)	(中文) _____	(中文) _____		
	(英文) _____	(英文) _____		
第二作者 (☐ 通訊作者)	(中文) _____	(中文) _____		
	(英文) _____	(英文) _____		
第三作者 (☐ 通訊作者)	(中文) _____	(中文) _____		
	(英文) _____	(英文) _____		
作者註 (可複選)	☐ 本篇論文為碩、博士論文改寫，指導教授為_____。 ☐ 本篇論文曾於_____發表。 ☐ 本篇論文獲科技部補助，計劃編號：_____。			
1.茲保證本論文符合研究倫理。 2.茲保證所填基本資料正確，文稿未曾以任何方式出版或發行，且無一稿多投、違反學術倫理，或違反著作權相關法令等事情。 3.茲瞭解並同意貴刊著作權授權規範，並保證有權依此規範進行相關授權。 4.茲保證文稿已經所有作者同意投稿至《臺灣數學教師》。				
填表人：_____		填表日期：_____年_____月_____日		

《臺灣數學教師》著作財產權讓與同意書

茲同意投稿至國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會共同發行的《臺灣數學教師》之一文，名稱為：

立書人聲明及保證本著作為從未出版之原創性著作，所引用之文字、圖表及照片均符合著作權法及相關學術倫理規範，如果本著作之內容有使用他人已具有著作權之資料，皆已獲得著作權所有者之（書面）同意，並於本著作中註明其來源出處。著作人並擔保本著作未含有毀謗或不法之內容，且絕未侵害他人之智慧財產權，並同意無償授權台灣數學教育學會於本著作通過審查後，以論文集、期刊、網路電子資料庫等各種不同方法形式，不限地域、時間、次數及內容利用本著作，並得進行格式之變更，且得將本著作透過各種公開傳輸方式供公眾檢索、瀏覽、下載、傳輸及列印等各項服務。國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會並得再授權他人行使上述發行之權利。惟著作人保有下列之權利：

- 1.本著作相關之商標權及專利權。
- 2.本著作之全部或部份著作人教學用之重製權。
- 3.出版後，本著作之全部或部份用於著作人之書中或論文集集中之使用權。
- 4.本著作用於著作人受僱機關內部分送之重製權或推銷用之使用權。
- 5.本著作及其所含資料之公開口述權。

著作人同意上述任何情形下之重製品應註明著作財產權所屬，以及引自《臺灣數學教師》。

如果本著作為二人以上之共同著作，下列簽署之著作人已通知其他共同著作人本同意書之條款，並經各共同著作人全體同意，且獲得授權代為簽署本同意書。如果本著作係著作人於受僱期間為雇用機構所作，而著作財產權為該機構所有，則該機構亦同意上述條款，並在下面簽署。

本著作之著作財產權係屬（請勾選一項）

- ☐ 著作人所有
☐ 著作人之僱用機構所有

立同意書人（著作人或僱用機構代表人）簽章：_____

著作人姓名或僱用機構名稱：_____

（正楷書寫）

中華民國 年 月 日

Publisher	Department of Mathematics, National Taiwan Normal University Taiwan Association for Mathematics Education
-----------	--

Editorial Board

Chief Editor	Yuan-Horng Lin (Department of Mathematics Education, National Taichung University of Education)
Vice Chief Editor	Pi-Jen Lin (Graduate Institute of Mathematics and Science Education, National Tsing Hua University)
Editorial Panel	Yuan-Shun Lee (Department of Mathematics, University of Taipei) Su-Wei Lin (Department of Education , National University of Tainan) Wei-Min Hsu (Department of Education, National Pingtung University) Erh-Tsung Chin (Graduate Institute of Science Education, National Changhua University of Education) Shu-Yi Chang (Department of Mathematics Education and Information Education, National Taipei University of Education) Huan-Chuan Chang (Sinde Elementary School, Toufen, Miaoli) Chia-Huang Chen (Department of Mathematics Education, National Taichung University of Education) Kai-Lin Yang (Department of Mathematics, National Taiwan Normal University) Jian-Cheng Liou (Ping-jhen Junior High School, Taoyuan City) Shiang-Tung Liu (Graduate school of Math and Science Education , National Chiayi University) Chang-Hua Chen (National Academy for Educational Research) Jing Chung (Department of Mathematics Education and Information Education, National Taipei University of Education)

Address	No.88 Sec. 4, Ting-Chou Rd., Taipei City, Taiwan, R.O.C. Department of Mathematics, National Taiwan Normal University <i>" Taiwan Journal of Mathematics Teachers"</i>
TEL	886-2-7734-6576
FAX	886-2-2933-2342
E-mail	tjmtedit@gmail.com
Website	http://tame.tw/news/news.php?class=204

1 數學課室教師支持與學生數學素養關聯探討：以 PISA 2012 臺灣資料為例
/ 林素微

The investigation of relationship between mathematics teacher support and mathematical literacy: A secondary analysis of Taiwan PISA 2012 data
／ Su-Wei Lin

18 由國中學力檢測數學命題反思試題設計原則
/ 葉裕益、吳宛柔、林美杏、陳建亨、許皓雲、曾明德、吳慧珉、楊凱琳

Rethinking item design principles of the basic mathematical competence test for junior high schools
／ Yu-Yi Yeh 、 Wan-Rou Wu 、 Mei-Hsing Lin 、 Chien-Heng Chen 、 Hao-Yun Hsu 、 Ming-Te Tseng 、 Huey-Min Wu 、 Kai-Lin Yang

35 應用數線表徵融入小二學生加減運算教學之成效
/ 楊晉民、陳嘉皇

Effectiveness of teaching experiment with number line representations on addition and subtraction calculations for second grades
／ Jinn-Min Yang 、 Chia-Huang Chen

