

林碧珍 (2020)。
數學奠基活動遇見臆測活動：扇形的教學設計。
臺灣數學教師，41 (1)，26-39
doi: 10.6610/TJMT.202004_41(1).0002

數學奠基活動遇見臆測活動：扇形的教學設計

林碧珍

國立清華大學數理教育研究所

數學奠基活動的主要目的是激發學生的數學學習興趣和動機，數學奠基進教室的目的是將奠基模組活動轉化於實際課堂中。本文的目的是提供一個如何將數學奠基活動融入於數學臆測活動的範例，以幫助教師能將更多課外學習的奠基活動順利轉化為奠基進教室活動。該範例起源於作者到嘉義市一所小學申請的教育部亮點計畫教師社群帶教師們進行共同備課，此備課活動是以奠基活動模組為進路，探討教科書對扇形的教材設計及扇形教學的本質。本文描述奠基活動的設計原則和臆測活動設計的原則，並實際展現如何將奠基活動轉化為臆測活動的教學設計。數學奠基活動的亮點是引起學生的學習興趣和學習動機，數學臆測教學強調思考的過程與方法，當數學奠基活動和臆測活動相遇時，調整與修正了圖卡的數量和類型，以及增加使用資料彙整單上，不僅增加造例的趣味性和活潑性，而且讓學生有機會有系統的觀察資料，體會和欣賞數學是有規律和有結構之美。

關鍵詞：扇形、奠基活動、奠基進教室、數學臆測教學模式、臆測活動

壹、緣起

近幾年來，奠基活動和奠基進教室活動是國立臺灣師範大學數學教育中心、教育部中央數學輔導團的亮點計畫及易思計畫、地方各縣市數學輔導團的推動業務項目之一，在國內中小學校園中引起熱潮。在 2020 年 2 月 14 日嘉義市晴天國小教師組成的亮點計畫社群，當天遠從臺南和嘉義地區來的國中和國小教師共 12 位。這群教師不因武漢肺炎疫情瀰漫全球而澆熄他們對數學教學的熱情，雖然全國高中以下延後兩週開學，但該校亮點計畫照常舉行。

在事前聯繫時，該校負責聯繫的研究發展組組長和我，都關注在如何透過備課、觀課和議課，讓社群教師能獲得有關教學或教材知識的最佳學習。為了配合開學初第二週 3 月 4 日要進行五年級的教學單元，我們邀請該校鶯鶯老師，從已研發的奠基活動中尋找適合的模組改編為奠基進教室活動，當日的備課活動包含鶯鶯老師報告扇形的教科書設計和自新北市景興國中鄧家駿老師設計的數學奠基活動模組《扇形分類》改編後的教學活動。從備課活動中，我們一起解讀教材，並討論有關扇形的本質，2 月 14 日備課當天，讓我了解到以奠基活動模組作為備課的進路，教師彼此間很容易墜入數學本質的對話，基於此而撰寫本文，是源起之一。

當我將數學奠基活動模組《扇形分類》的學習單在黑板上以表格列出每個圖卡的特性和是否能連續摺疊 0 次、1 次、或兩次以上時，再修改調整圖卡的兩邊長度是否為半徑、弧是否在圓周上成為各欄位的屬性，社群教師立即察覺到表格中所列出的這些欄位屬性，正是扇形的定義，他們察覺到這些正是此奠基模組的教學目標，比起原先的奠基活動讓學生漫無目的地去觀察零散的各種圖卡，還要來得容易，而這張表格就是臆測活動設計的彙整資料單，目前我指導的研究生有多位意圖將有趣的奠基活動模組融入到臆測教學模式，但尚處於摸索階段，需要多一些將奠基活動融入臆測活動的文獻參考，做為指導方針，是撰寫本文的源起二。

貳、扇形教學的本質

依據國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域和十二年國民基本教育課程綱要數學領域，扇形都是五年級的學習內容。九年一貫課程綱要數學領域的分年細目為「5-s-03 能理解圓面積與圓周長的公式，並計算簡單扇形的面積。」(教育部，2008)。十二年國民基本教育課程綱要數學領域的學習表現為「s-III-2 認識圓周率的意義，理解

圓面積、圓周長、扇形面積與弧長之計算方式。」，五年級的學習內容為「S-5-3 扇形：扇形的定義。「圓心角」。扇形可視為圓的一部分。將扇形與分數結合（幾分之幾圓）。能畫出指定扇形。」（教育部，2018）。課程領域綱要對該分年細目特別指明：「扇形面積的計算可與分數平分的操作相互加強。知道半圓、 $\frac{1}{4}$ 圓、 $\frac{1}{8}$ 圓的面積計算方式。」。依據分年細目的說明，明確的說明扇形是圓形的一部份。

有些教科書採用扇形是圓形一部份作為認識扇形的啟蒙活動，如下圖所示。利用兩個不同顏色且大小一樣的圓，分別在圓上剪出一條半徑，由切口處把兩圓交叉疊合在一起，使圓心重疊。慢慢旋轉一個顏色紙卡，另一個顏色的面積產生變化，而形成扇形的變化，並引出扇形的定義。



何謂扇形？（1）扇形是圓形的一部份，（2）扇形的兩邊等長是圓形的半徑，（3）扇形的弧是該圓形的圓周，（4）扇形的頂點是該圓形的圓心，（5）扇形的兩邊所夾的角為圓心角，圓心角介於 0 度~360 度之間。扇形的構成要素中兩邊和弧是圓形的半徑和圓周的部分，圓形的半徑都相等，所以一個扇形弧上任何一點到頂點都等長。反之，並非兩條等長的邊和一弧所構成的圖形就是一個扇形，如圖 1-（7），雖是兩邊等長、弧是圓周的部分，但頂點不是圓心，兩邊也不是此圓形的半徑。

若認識扇形的教學非從扇形是圓的一部份的路徑進入，則學生很容易產生概念的迷思或學習上的困難。這些困難或迷思諸如：一旦提供一個脫離了圓形的扇形，學生誤以為「形狀像摺扇的圖形就是扇形」，如圖 1-（2）、1-（6）、1-（7）。

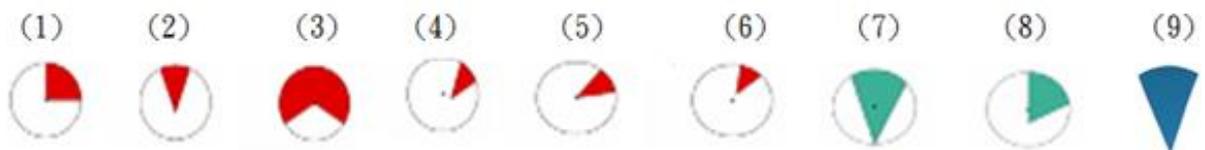
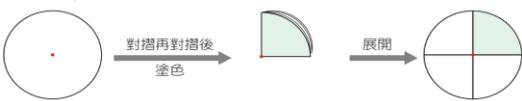


圖 1 判斷是否為扇形？

圖 1-(9) 並沒有伴隨一個圓形，直觀上學生很容易誤判它是一個扇形，究竟它是否為一個扇形？用什麼方法可以確認？下面至少有四種方法可以確認圖 1-(9) 是否為一個扇形。(1) 利用圓規，以頂點為圓心，其中一邊為半徑畫出圓弧，辨識弧線是否和圓周重疊。(2) 利用直尺測量弧線上任一點到頂點的直線距離是否處處相等。(3) 重覆複製此圖形到紙上，辨識是否能剛好組成一個完整的圓形，而不是變成一個花瓣狀的圓周。(4) 利用對摺兩次：辨識對摺兩次後的弧線是否完全疊合。第一次對摺僅能確認此圖形兩邊長度是否相等，對摺第二次，才能檢驗出弧線上任一點到頂點的直線長是否都相等（用來檢驗半徑是否處處相等），以及弧線是否都能完全處處重合（用來檢驗弧線是否為圓周的部分）。

扇形的學習內容除了辨識扇形與其定義外，還須學習扇形的繪製。繪製任務的複雜度會影響繪製的難易。繪製扇形的任務至少有三種類型（如表 1）：(1) 在給定的圓上做出幾分之一圓，如 $\frac{1}{2}$ 圓、 $\frac{1}{4}$ 圓、 $\frac{1}{8}$ 圓，並求出圓心角的度數。(2) 在圓形上畫出一個給定半徑長和圓心角的扇形。(3) 任意畫出一個指定邊長和圓心角的扇形。對學生而言，任務 (1) 及 (2) 較為簡單，因為只要利用分數概念即可做出扇形，但任務 (3) 則較困難。教科書僅提供前兩種任務，而缺少第 (3) 種任務。若學生有機會學習第 (3) 任務，則可能有助於確認上述圖 1-(9) 是否為一個扇形。

表 1
「繪製扇形」的三種不同任務

<p>(一) 在圓上做出特殊圓，如 $\frac{1}{2}$ 圓、$\frac{1}{4}$ 圓</p>	<p>做一個 $\frac{1}{4}$ 圓的扇形。(附件 1)</p>  <p>這個扇形的圓心角是多少度？</p>
<p>(二) 在圓上畫出一個指定半徑長和圓心角的扇形</p>	<p>畫一個半徑為 4 公分的圓，如何在圓上畫出圓心角是 120° 的扇形呢？</p>  <p>這個扇形是幾分之幾圓呢？</p>
<p>(三) 任意畫出一個指定邊長和圓心角 60 度的扇形</p>	<p>畫出一個半徑 5 公分圓心角 60 度的扇形。</p> <p>先利用先備知識畫出 30 度角，但不容易畫出正確的弧線位置。除非，利用圓規以邊長為半徑畫出通過兩邊長的端點的弧線。</p> 

參、數學奠基活動融入臆測教學模式的任務設計

一、數學奠基活動設計原則

國立臺灣師範大學數學教育中心自 103 年度起開始推動「奠基活動模組」專案計畫，至少完成了中小學 119 件的「數學奠基活動模組資料庫」。「奠基」是在學習前，先經由活潑有趣的數學活動，激發學生對數學的興趣，引起學生的數學學習動機；同時，在進行數學活動時，培養數學內容的具象經驗，讓學生體會與數學單元連結的關鍵點，進一步探索相關問題。數學奠基活動工作坊手冊提出的設計原則，包含：(一) 活動內容需以特定數學內容為載體來設計。(二) 活動需以學生先備經驗為起點，採序列性的設計方式。(三) 活動需能激發學生參與學習的動機且願意持續投入。(四) 活動需能清楚描述學習目標及數學概念，並能成為學習其他活動的基礎（國立臺灣師範大學數學教育中心，2018）。這些活動已引起學生的學習興趣為主要目標，奠基活動多數使用於課外的營隊。之後，基於現場教學的需求，原先使用於課外營隊的奠基模組活動需要現場教師轉化運用於實際課堂中。自 106 年度起數學教育中心推動將 90 分鐘的奠基活動模組加以轉化成一節課（40~45 分鐘），發展一系列「數學奠基進教室模組」教學影片，以使每一位學生都能在課室中得到如數學奠基活動的學習機會（國立臺灣師範大學數學教育中心，2019）。

奠基活動模組轉化為數學奠基進教室的設計原則為：引動思考、營造數學感、共建數學、診斷介入、單元滲透（國立臺灣師範大學數學教育中心，2018）。(一) 引動思考是要設計激發學生將具體操作轉化成內在思考的學習活動。(二) 營造數學感是要設計促進學生將知覺性操作轉化成概念性運思的學習活動。(三) 共建數學是要設計藉由生生與師生討論發展學生表達思維的語言與媒介達成師生共建數學的學習活動。(四) 診斷介入是要設計能診斷學生可能的學習困難及教學當下提出適當的教學介入的學習活動。(五) 單元滲透的設計原則是要設計活動能貫穿整個單元教學目標的學習活動。依據五項教學活動設計原則，課堂教學活動盡量提供學生動手做、遊戲、有目標的系統性觀察活動、表達與溝通活動、論辯活動的學習機會，以達成學生的主動思考習慣、樂於學習數學。

二、數學臆測教學的活動設計原則

數學臆測教學模式包含五個階段（林碧珍，2019）：(一) 造例：教師提供素材由個

別學生造例、組織及彙整、觀察例子、尋找關係。由於個別學生造一、二個例子數量，不易觀察規律性，因而需要彙整小組或全班的更多例子，以培養學生有系統地整理及觀察資料。(二) 提出猜想：觀察造例階段彙整的例子尋找關係並先提出個人猜想。組內需要共同檢驗可能錯誤或非有憑有據的個人猜想，以培養學生說話有憑有據，幾分證據說幾分話的民主素養。(三) 效化：小組的猜想，還需要他組更多的例子來支持或反駁；此階段是在培養學生以理性批判與說服他人的民主溝通方式的素養。設計任務時需要考量組間與組內相同或不同的例子，以能即時提出效化該猜想，方便又節省教學時間。(四) 一般化：目的是將非恆真猜想以限縮範圍或條件推論到所有的例子都成立，成為恆真的猜想；將恆真猜想加入全稱量詞（如：所有、任意等）放諸四海皆準。此階段是在培養學生大膽推論成為有膽識的公民。(五) 證實：將歸納得出的恆真命題利用已知知識來說服他人相信。此階段在於培養學生利用有效嚴謹的演繹推理說服他人相信。

基於上述數學臆測教學模式的五個階段，目標是在創造課堂中人人參與學習的機會，以培養學生主動思考的學習習慣。臆測教學模式是體現十二年國教課程綱要核心素養和數學素養的一種教學模式，諸如(一)藉由組織整理資料並觀察數字間或圖形間的關係，讓學生尋找規律性，欣賞數學結構規律之美。(二)藉由依據資料提出多元的數學想法，培養學生幾分證據說幾分話的民主素養。(三)藉由找例子支持自己的想法、找證據來辯護自己的主張或支持他人的想法，舉反例反駁他人的論點，培養學生理性溝通的民主素養（林碧珍，2016，2019）。

三、奠基活動融入數學臆測活動的任務設計範例

課堂教學的實踐所依循的處方是教案，數學臆測教學模式的處方是數學臆測任務。為了能有效實踐數學臆測教學，在任務設計時需考量的任務設計原則包含：(一) 設計任務中的資料要先確立教學目標：設計時考量多個教學目標。(二) 任務中的資料要考量猜想的類型、品質與數量。(三) 設計任務中的資料要考量資料的效化：提出的猜想可能只受限於少數例子，需要考量組間不同的例子進行效化。設計臆測任務時，需要考量組和組之間例子是相同例或相異。(四) 設計彙整資料工作單需能察覺數學規律性。

本文主要是提供一個範例，如何利用現有的數學奠基活動模組轉化為數學臆測教學的活動任務設計。該範例是鄧家駿老師設計的《誰是扇形》數學奠基活動模組（鄧家駿，2018），將此模組依據十二年國教的核心素養與數學素養及對應的課程目標，整理於表 2。

表 2

扇形奠基模組活動融入臆測活動之任務設計

誰是扇形		
核心素養面向及項目		項目說明
核心素養	A 自主行動	具備問題理解、思辨分析、推理批判的系統思考與後設思考素養，並能行動與反思，以有效處理及解決生活、生命問題。 --具備基本的算術操作能力、並能指認基本的形體與相對關係，在日常生活情境中，用數學表述與解決問題。 --具備從證據討論事情，以及和他人有條理溝通的態度。
	A2 系統思考與問題解決	
數學素養	數-E-A2 數-E-C1	
學習表現	s-III-2 認識圓周率的意義，理解圓面積、圓周長、扇形面積與弧長之計算方式。	
學習內容	S-5-3 扇形：扇形的定義。「圓心角」。扇形可視為圓的一部分。將扇形與分數結合（幾分之幾圓）。能畫出指定扇形。	
活動目標	<p>內容目標：認識扇形、扇形的定義</p> <p>素養目標：</p> <ul style="list-style-type: none"> ▶ 透過操作、分類有系統的整理、觀察資料、尋找規律性、發現並欣賞數學結構關係之美。 ▶ 能從操作扇形中，培養分類、溝通、表述數學性質等能力。 	
設計理念	<p>(一) 扇形奠基活動的「基」：扇形是圓形的一部分、頂點在圓心、尖點到弧的距離處處相等、角度可以超過 180 度，這些都是扇形定義的重要基礎概念。</p> <p>(二) 認識扇形不僅需要提供滿足這些構成要素的各種圖形，也需要提供不滿足扇形定義中的一個條件或兩個條件的非例，如兩邊不相等也不是半徑，兩邊相等但不是半徑、弧線不在圓弧上、頂點不再圓心上。類扇形圖卡可以透過連續對摺至少兩次來檢驗是否尖點到弧的距離處處相等。</p>	
先備知識和迷思	<p>(一) 學生的先備知識：圓的認識及其構成要素、旋轉角、繪製給定度數的角。對摺是對半摺疊的意義。</p> <p>(二) 學生的迷思：常會誤判以為兩條邊加一段弧線就是扇形，必須弧線上任一點到頂點都等長。由於生活中的扇子之圓心角是小於平角，常以為圓心角大於平角的扇形不是一個扇形。</p>	

除了表 2 中描述模組名稱、素養指標、學習內容、學習表現、活動目標、設計理念、學生的起點知識和迷思與學習困難之外，由於有關活動材料和活動流程內容較為冗長，以及為了呈現原先奠基活動和融入臆測活動之後的對照版面，因此將活動材料和活動流程分別描述於下表 3 和表 4。

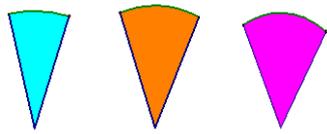
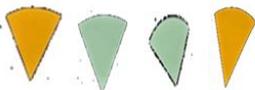
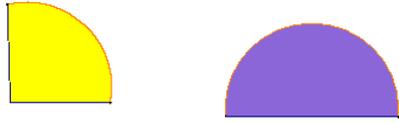
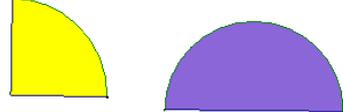
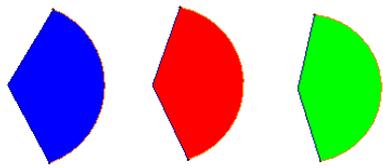
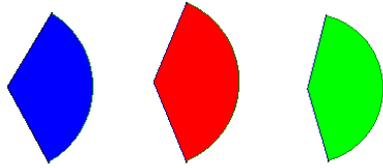
表 3

扇形奠基模組活動與融入臆測活動之任務修改前後對照

活動材料	奠基活動模組（修改前）														
圖卡（24 張） （見下表 4）	扇形、類扇形紙片若干個。角度分別為銳角（30、45、60 度）、直角（90 度）、鈍角（120、135、150、180、210、225 度）（以顏色區分） 第一類：正常半徑 第二類：半徑大一點（多 10%） 第三類：弧長不一樣外、兩旁的半徑皆相等														
紀錄單	<table border="1" data-bbox="411 1010 1254 1205"> <thead> <tr> <th data-bbox="411 1010 759 1059">對摺次數</th> <th data-bbox="764 1010 970 1059">圖示分類</th> <th data-bbox="975 1010 1254 1059">得分</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td data-bbox="411 1066 759 1104">可以對摺 2 次以上</td> <td data-bbox="764 1066 970 1104"></td> <td data-bbox="975 1066 1254 1104"></td> </tr> <tr> <td data-bbox="411 1111 759 1149">可以對摺 1 次</td> <td data-bbox="764 1111 970 1149"></td> <td data-bbox="975 1111 1254 1149"></td> </tr> <tr> <td data-bbox="411 1155 759 1193">完全不能對摺</td> <td data-bbox="764 1155 970 1193"></td> <td data-bbox="975 1155 1254 1193"></td> </tr> </tbody> </table>			對摺次數	圖示分類	得分	可以對摺 2 次以上			可以對摺 1 次			完全不能對摺		
對摺次數	圖示分類	得分													
可以對摺 2 次以上															
可以對摺 1 次															
完全不能對摺															
學習單	一、請寫出你是如何分類這些扇型紙片呢？ 二、他們都是真的扇形嗎？指出不是扇形的？說說看你為何認為它不是扇形？ 三、請將你認為的扇形寫出它的性質。														
回饋單	我們玩過「誰是扇形」單元的活動，度過了快樂的時光，現在請你用心想一想，「誰是扇形」帶給你（妳）的感覺是什麼呢？你（妳）學了些什麼？請用自己的話寫下來。														
活動流程	每位選取圖卡 5~6 張。 ▶ 每次將紙片依弧對摺，使兩邊重疊，若可以重疊得 1 分；不能重疊的放在第三類。 ▶ 再對摺一次，可以重疊再得 1 分，並將可以重疊的擺在一起；不可重疊的另外擺。 ▶ 請互相檢查一下。 ▶ 將分類與得分紀錄在紀錄單上（見上）。 ▶ 並且用量角器測量角度，用尺量旁邊的線段長，並寫在紙片上。														

表 4

扇形奠基活動 24 張圖卡

圓心角 θ	扇形	類扇形	
		兩邊相等	兩邊不等
$\theta < 90^\circ$	 30° 45° 60°	 30° 45° 60°	 45° 60° 75° 85°
$\theta = 90^\circ,$ 180°	 90° 180°	 90° 180°	
$90^\circ < \theta$ $< 180^\circ$	 120° 135° 150°	 120° 135° 150°	
$180^\circ < \theta$ $< 360^\circ$	 210° 225°	 210° 225°	

當考慮將扇形奠基活動融入臆測活動時，我們先減少各組使用的圖卡類型和數量。在圖卡數量上，奠基活動提供 24 張圖卡，對五年級學生而言，數量太多，因此修改為每組 4 人操作一套圖卡（含 10 張圖卡和 2 個相同的圓），全班共有兩套圖卡做為臆測活動的造例素材；其中的 10 張圖卡各含扇形和非扇形圖卡 5 張。10 張圖卡設計的變因考量：頂點是否為圓心？兩邊是否為半徑？兩邊是否等長？弧是否為圓周的部分？見表 5 彙整資料單。

表 5

扇形奠基模組活動與融入臆測活動之任務修改前後對照

活動材料	奠基活動融入臆測活動模組 (修改後)									
圖卡 (10+2 張)	教師準備從相同的圓剪出不同的扇形、類扇形圖卡共 10 張，全班提供兩套圖卡 (一套給三組學生，另一套給另三組學生)，每套圖卡包含 2 個圓、10 張。每套 10 圖卡的變因考量為：(1) 頂點是否為圓心。(2) 圓心角為銳角、直角、平角、鈍角四類 (3) 兩邊是否為半徑。(4) 圖卡兩邊是否等長 兩邊是否為半徑。(5) 弧是否為圓弧的一部分									
彙整工作單	圖卡 (10 張)						連續對摺次數			
	圓心角 θ	頂點圓心	兩邊半徑	兩邊相等	弧在圓周	圖卡設計*	學生操作的圖卡	0 次	1 次	2 次以上
	銳角 (30°)	✓	✓	✓	✓					
	直角 (90°)	✓	✓	✓	✓					
	平角 (180°)	✓	✓	✓	✓					
	鈍角 (135°)	✓	✓	✓	✓					
	鈍角 (225°)	✓	✓	✓	✓					
	銳角 (45°)	✗	✗	✓	✓					
	銳角 (30°)	✗	✗	✓	✓					
	銳角 (60°)	✗	✗	✗	✗					
	銳角 (75°)	✓	✗	✗	✗					
	鈍角 (135°)	✗	✗	✗	✓					
* 本欄僅是提供給教師設計圖卡時的參考，給學生的彙整工作單必須刪除此欄。										
活動流程	全班分成每組 4 人，每組拿到 2 張相同的圓形圖卡及 10 張圖卡 (如上)。 <p>一、造例</p> <ul style="list-style-type: none"> ▶ 將各組合力將 10 張圖卡對摺，判斷哪些不能對摺？哪些只能對摺一次？哪些可以連續對摺兩次以上？摺好後，分別放一堆，組員再互相檢驗是否正確？ ▶ 先將圖卡的頂點對齊圓之圓心，再檢核圖形卡的兩邊是否相等？是否為該圓形的半徑？弧是否為圓弧的一部分？請在表格上打✓或✗。 									

表 5 (續)

<p>活動</p> <p>流程</p>	<ul style="list-style-type: none"> ▶ 操作後進行分類，並填入彙整工作單上的表格。 ▶ 全班一起檢核各組的彙整單上的資料是否正確？ 二、提出猜想 ▶ 請每位學生觀察小組彙整單上的資料、尋找規律性、 ▶ 在個人猜想單上寫下自己發現的數學想法，每人至少寫一張，每個想法寫在一張個人猜想單上。 ▶ 組內分享個人想法，並互相檢驗想法是否有憑有據？是否正確？ ▶ 將雷同或相似的組內猜想進行歸類。 ▶ 形成小組的各種猜想。 三、效化 ▶ 先請一組上臺報告的小組猜想，並張貼彙整資料單，說明猜想內容，並判斷小組猜想是否有憑有據。 ▶ 請他組有相同的猜想拿到臺上歸類，並全班一起檢查是否正確歸類。 ▶ 是否有他組更多的例子可以支持或推翻該猜想？ ▶ 這些同一類的猜想要選用拿一個猜想作為全班猜想？如何修改這個猜想的語句？ ▶ 逐一歸類各組的猜想，依此方式持續進行，並形成全班猜想。 四、一般化 ▶ 在這些全班猜想中，如果有讓這個猜想在所有的例子都成立，還需要加什麼條件？怎麼描述這些全班猜想？ 五、證實 ▶ 這些猜想，您如何說服別人相信這個猜想永遠都是對的？
---------------------	---

在圖卡類型上，是考慮圖卡兩邊夾角大小是銳角、直角、平角、鈍角。兩套圖卡的設計是同構的結構，僅考慮兩套圓的半徑不相等。若全班分成六組，每三組拿到相同的一套圖卡，另三組拿到相同的另一套圖卡。設計兩套圖卡是為了讓學生提出的數學想法快速從他組中找到支持例或反駁例，不僅方便效化猜想，且有助於學生以例子作為證據的理性溝通。

為了讓學童理解扇形是圓形的一部份，教師在製作 10 張扇形或非扇形圖卡時，須從同一個圓中剪下來（在彙整單上顯示的圖卡欄是對應到學生操作的 10 張圖卡，僅是為了提供給教師參考）。設計弧不在圓周上或兩邊不等長的非扇形圖卡時，若要不因粗心或視覺上而造成的錯誤判斷，我們建議需將兩邊不等的長度差距或對摺後弧的差異拉大些。

在進行操作活動前，教師需幫學生複習舊經驗：圓心、半徑、圓弧、圓周、區分連續對摺兩次和一般對摺兩次（對摺一次攤開再對摺一次共兩次）的不同。在操作圖卡前，教師必須先和學生溝通「對摺」的意義。對摺是對半摺疊，可以將一個圖形對半摺成兩

部分，使兩半部的圖形剛好重疊。學生完成對摺活動之後，每組學生合力利用完整的 2 個圓檢核 10 個圖卡的頂點是否在圓心上？圖卡的兩邊是否相等？是否為圓形的半徑？

原先設計的扇形奠基活動依據可以連續對摺 0 次、1 次、2 次分類後，學生恐難以洞察各堆圖卡深層的共通性，而難以提出扇形的定義，以致難以達成教學目標。當奠基活動遇見臆測活動時，則將每張圖卡的各種屬性和連續對摺次數整理於彙整資料單上，有順序的整理排列資料，將利於學生有系統觀察行與行、列與列、行與列資料間的關係，以提供機會讓學生體會並欣賞數學是有規律和數字背後結構之美。

四、奠基活動融入數學臆測活動的扇形教學說明

當學生完成彙整資料單上的資料後，必須各組相互檢驗是否資料正確無誤，才不會影響隨後提出數學想法的正確性。之後，學生依據彙整資料單上所有的扇形和非扇形圖卡，觀察並尋找數學規律，將所發現的數學想法寫在個人猜想單上。個人提出猜想目的在於提供每位學生獨立思考的機會，讓低成就學生有主動參與的學習機會。此時低成就的學生可能提出表象的數學想法、程度較好的學生可能提出比較有數學性或邏輯性的扇形相關的知識。依據彙整資料單，學生可能提出的數學想法包含：

- (1) 可以對摺 2 次以上的圖卡，它的兩邊都是該圓的半徑，弧都在圓周上。(見表 5 圖 A, B, C, D, E)
- (2) 只可以對摺一次的圖卡，它的兩邊不是半徑但等長，且弧在圓周上。(見表 5 圖 F, G)
- (3) 不能對摺的圖卡，它的兩邊不是半徑且不等長，弧不在圓周上。(見表 5 圖 H, I, J)
- (4) 圖卡兩邊有些是半徑，有些不是半徑。
- (5) 圖卡弧有些在圓周上，有些不在圓周上。
- (6) 只要圖卡的兩邊不等長，就不能兩次對摺。
- (7) 只要弧不在圓周上且兩邊不是半徑，就不能兩次對摺。

之後，教師須善用學生提出(1)的數學想法，將圖卡 A, B, C, D, E 展示在黑板上，說明並定義這些圖形稱為「扇形」。讓學生瞭解構成扇形的條件：它是圓形的一部分、它的弧是圓周的部分、它的頂點在圓心上、它的兩條邊等長，也就是該圓形的半徑。活動中更須強調利用連續對摺和成為扇形的關係，讓學生討論為何任何一個扇形都可以連續對摺兩次，它是用來檢核看起來像扇子的圖形是否為扇形的有效方法之一。

當臆測教學活動進行完後，師生可以一起討論右圖雖不是此圓形的扇形，但是否為另一個圓形的扇形？它的頂點不是已知圓的圓心，此時可以用連續對摺兩次檢驗，發現對半後兩弧線並未重合，所以此圖形非一個扇形，只是形狀長得像扇子一樣。



由於教科書提供的辨識扇形活動幾乎都是伴隨著圓形出現，因此在認識扇形之後，教師可以提供右圖讓學生確認是否為扇形？以及如何確認？



肆、結論

數學奠基活動的亮點是引起學生的學習興趣和學習動機，數學臆測教學模式的五個階段是在於培養學生的獨立思考，讓學生經驗數學知識形成的過程，強調思考的過程與方法，若將數學奠基活動融入數學臆測教學模式的造例階段中，減少了操作的圖卡數量及類型的調整與修正，增加彙整資料單的配合使用，有利於學生觀察並發現數學關係，而察覺到數學是具結構且有規律性的美，並考慮個人、小組、全班的活動型態的教學設計。數學奠基活動和臆測活動兩者的相遇，則更有機會讓學生在造例時增加趣味性和活潑性，以及有利於培養學生的數學素養。

參考文獻

- 林碧珍主編（2016）。**數學臆測任務設計與實踐**。臺北市：師大書苑。
- 林碧珍主編（2019）。**數學臆測任務設計與實踐：整數、分數與小數篇**。臺北市：師大書苑。
- 國立臺灣師範大學數學教育中心（2018）。**國立臺灣師範大學數學教育中心2018數學奠基教室設計師培訓工作坊手冊**。臺北市：國立臺灣師範大學數學教育中心。
- 國立臺灣師範大學數學教育中心（2019）。**就是要學好數學計畫：數學奠基活動模組開發執行理念**，查詢日期：109年1月16日，檢自
https://www.sdime.ntnu.edu.tw/zh_tw/page104/page1/page1_0。
- 教育部（2008）。**國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域**。臺北市：教育部。
- 教育部（2018）。**十二年國民基本教育課程綱要數學領域課程手冊**。查詢日期：109年1月16日，檢自

<http://www.cshs.ntct.edu.tw/mediafile/14490027/fdownload/21/72/2018-8-6-15-40-12-7-2-nf1.pdf>。

鄧家駿（2018）。數學奠基活動模組：扇形分類。載於國立臺灣師範大學數學教育中心（彙編）。**就是要學好數學計畫：數學奠基活動模組開發執行理念**，查詢日期：109年1月16日，檢自

https://www.sdime.ntnu.edu.tw/zh_tw/Resource/page202/page202_1。