ISSN 2312-7716
DOI 10.6610/TJMT

第 41 卷第 1 期
二〇二〇年四月
VOL. 41 NO. 1
April 2020

臺灣數學教師

Taiwan Journal of Mathematics Teachers

國立臺灣師範大學數學系
Department of Mathematics,
National Taiwan Normal University

台灣數學教育學會
Taiwan Association
for Mathematics Education

臺灣數學教師　　第 41 卷第 1 期　2020 年 4 月

地址　臺北市汀州路四段 88 號國立臺灣師範大學數學系
《臺灣數學教師》
電話　886-2-7734-6576
傳真　886-2-2933-2342
電子郵件　tjmtedit@gmail.com
網址　http://tame.tw/news/news.php?class=204

附　啟

1. 本期刊自 2014 年 35 卷起每年出版二期。
2. 本期刊原名《台灣數學教師(電子)期刊》，自 2014 年 35 卷第 2 期起改名為《臺灣數學教師》。
3. 本期刊電子郵件由自 2015 年 36 卷第 1 期起改為 tjmtedit@gmail.com。

主編的話

在 2020 年的上半年，本期刊論文出版已邁入第 41 卷第 1 期。本期刊由國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會共同發行，收錄有關數學教學、學習與評量等實務論文。歡迎數學教育實務與研究者，在數學教育的實務落實與研究構思方面有想法，輔以學理和實踐支持的研究成果投稿至本期刊，提供給廣大的數學教育研究者與教師參考。非常感謝的是，本期刊的論文，逐漸受到數學教師和研究者重視並列入參考資源，所以誠摯邀請大家一起來耕耘這塊數學教育研究與實務的溝通園地。

本期論文共有三篇，第一篇是劉祥通、洪筱柟所撰寫的＜五年級資優生在非例行性數線問題解題表現的個案研究＞，這篇論文探討一位五年級資優生在數線問題的解題表現，藉由個案在自行編製任務單之解題表現，分析 Schoenfeld 之資源、捷思、控制與信念四個項目，這篇論文可供數學資優教育研究參考。第二篇是林碧珍所發表的＜數學奠基活動遇見臆測活動：扇形的教學設計＞，將奠基模組活動轉化於扇形教材的課堂中，當數學奠基活動和臆測活動相遇時，不僅增加造例的趣味性和活潑性，也讓學生有機會有系統的觀察資料，欣賞數學的規律和結構之美，這篇論文提供如何將數學奠基活動融入於數學臆測的範例。第三篇是梁淑坤所撰寫的＜數學是人文活動的結果：分享數學遊戲案例的故事＞，作者分析學員參與數學遊戲教材教法的成果與活動案例，探討以數學遊戲設計的案例，具體呈現出數學是人文活動的教師專業發展經驗，可供師培及在職教師專業成長的參考。

本期刊能順利出版完成，首先要感謝所有審查委員撥冗審查論文並提供寶貴建議，也非常感謝兩位副主編和編輯委員會委員的奉獻付出，以及編輯助理的辛勞。尚祈各位先進繼續給予本期刊建議和指導，讓本期刊不斷精進。

《臺灣數學教師》主編

林原宏謹誌

臺灣數學教師

第 41 卷　第 1 期

2005 年 3 月創刊　　2020 年 4 月出刊

目錄

Taiwan Journal of Mathematics Teachers

Vol. 41 No. 1

First Issue: March 2005 Current Issue: April 2020

CONTENTS

期刊網址：http://tame.tw/news/news.php?class=204
劉祥通、洪筱楠（2020）。
五年級資優生在非例行性數線問題解題表現的個案研究。
臺灣數學教師，41（1），1-25
doi: 10.6610/TJMT.202004_41(1).0001

五年級資優生在非例行性數線問題解題表現的個案研究

劉祥通[1]　洪筱楠[2]
[1]國立嘉義大學數理教育所
[2]臺北市私立東山高中

本研究主要目的在探討一位五年級資優生在數線問題的解題表現。為了深入了解個案的解題表現，本研究採用個案研究法。研究者根據學生的課程進度自行編製「非例行性數線問題任務單」給個案進行解題，藉由個案學生在任務單上的解題表現作為訪談的基礎，又依據 Schoenfeld 所提出的資源、捷思、控制與信念四個項目分析個案的解題表現。本研究有下列發現：1. 能利用「等值分數」的概念以及「利用兩點之間距離當作基準量」為個案學生解題的重要資源、2. 能展現多元的策略，以解不同的數線題型、3. 個案學生以「高、低階兩單位並用」方式找尋目標點與「數間隔數」等方法來控制答案的合理性、4. 個案學生在解題之初，持有「數線上越左邊的坐標越小、越右邊的坐標越大」以及解題之後，發展出「距離參考點一定長度時，會有左右兩個目標點」的信念。

關鍵詞：小學數學、資優生、解題表現、數線問題

通訊作者：劉祥通，e-mail：shiangtungliu@gmail.com
收稿：2019 年 7 月 18 日；接受刊登：2019 年 12 月 3 日。

壹、 研究背景與目的

近年來，許多的數學教育人士都同意「將數學視為解題」。舉例來說，美國數學督導學會（National Council of Supervisors of Mathematics, [NCSM], 1977）指出「學習解題是研讀數學的主要目的」；接著美國數學教師協會（National Council of Teachers of Mathematics, [NCTM], 1980）在行動綱領亦強調「解題是數學教育的中心」；1989 年 NCTM 在其出版的中小學數學課程及評量標準中第一項即提出「數學即是解題（mathematics as problem solving）」；之後在 NCTM（2000）所公佈的數學課程原則與標準中，也把「問題解決（problem solving）」列為重點之一。再者，我國 108 課綱除了強調數學素養以外，數學教育的課程目標有強調：培養運用數學思考問題、分析問題和解決問題的能力， 以及培養日常生活應用與學習其他領域/科目所需的數學知能。由此可見，數學解題在數學課程中所受到的重視。

眾多的學者都以解題歷程來分析解題的行為，唯獨 Schoenfeld（1985）以影響解題的變項來探討解題的表現，因此研究者挑選 Schoenfeld（1985）所強調數學解題研究方向所需要考慮的四個變項，以詮釋個案的解題表現，此四個變項分別為資源、捷思、控制與信念，其中主要的原因在於 Schoenfeld 認為在四個變項中，控制因素居於較為關鍵的地位，因為如何有效的運用資源、如何採用適當的捷思策略，常常是由控制因素所主導（Schoenfeld, 1985）。在研究者的課室中，發現許多學生最嚴重缺乏的就是控制答案的能力,許多小朋友只執著於算出答案而忽略掉答案的合理性,研究者也想經由此研究，了解資優生是否在解題上能有優異地控制答案的能力。

數線就是一種數字符號與視覺結合而成的表示法，它可以表示出數線上的一個數值，或是一個線段長;數線具有相同的單位長及等分段的特徵,只要標示兩個參考點的數字，就能找出其他點所表示的值，且數線可以當作是一把尺，因為數線是連續的，任兩個數之間必定有一個數存在的稠密性質。數線問題具有以上多種性質，所以研究者選擇數線問題作為研究的題材，以考驗解題者解決問題時是否能利用上述性質已克服解題的障礙？數線也是問題表徵的重要項目之一，學生如何在數現表徵他們的想法，可以透過外顯的落筆順序來判斷，也可以輔之以訪談來追問。Mayer（1992）指出，學生的解題困難主要是發生在問題表徵（problem representation）階段，而非在問題解決（problem solving）階段，如果能在國小階段讓學童具備數線表徵關鍵能力，相信對學童的數學解題能力會有事半功倍之效。

本研究選擇研究參與者為通過瑞文氏黑白圖形補充測驗且百分等級為九十九的五年級資優生小貞（化名）。哇，難得出現一位百分等級是九九的學生，除了聰明、活潑、開朗，好學、好奇的特質以外，而且個案在解決非例行性的問題時，勇於嘗試運用自己方式來解題，也很有耐心面對難題，並清楚寫下數學算式並解釋原因，表達能力也是十分清楚，所以更可以突顯其解題想法的原創性。值得一提的是，她解有關「文字題型」的數線問題都能迎刃而解，本文因而再以「標數題型」挑戰她，以探討她的解題表現。

如果在數線上標示兩個參考點的位置與數值，其他點的位置與數值，就已經被定位了。個案既然如此優秀，任務單就給定二個分數的參考點，如何尋找第三個點？也給二個點，如何尋找原點位置？再者，如果告訴已知的二點（A、B）距離，再提供 C 點位置，且$\overline{AB} = \overline{CD}$，如何找出 D 點的多個位置？以上問題都是非例行性問題，課堂與課外的老師都沒有介紹過，研究者好奇小貞是否能解答非例行任務單呢？

本研究旨在探討個案小貞在數線問題的解題表現。研究者認為資優生在拿到非例行性問題時，常採取自發性的策略來解決問題，面對陌生且無法用直接的算則來解決的題目，能夠觀察題目所提供的線索而思考出自行的解決方式，因此其所運用的解題策略、直觀方法，控制能力與所持的數學信念等，是值得我們探索與解析的課題。

貳、 文獻探討

本研究主要的目的在於探究資優生的解題表現，以數學解題與影響因素、資優生的解題特質、數線問題，作為研究者研究時的理論與依據。

一、數學解題與影響因素

近年來，我國及世界各國對於數學解題能力都相當的重視，Kilpatrick（1985）指出，所有的數學都是在形成問題及解決問題的過程中被創造出來的。在 NCTM（2000）所公佈的數學教育原則與標準（Principles and Standard for School Mathematics）中提出，數學即解題、推理與證明、溝通、連結、表徵，可見數學解題是數學學習的核心之一。Mayer 與 Hegarty（1996）認為數學問題的型態有二：「例行性問題（routine problem）」與「非例行性問題（non-routine problem）」。「例行性問題」是指問題解決者已經知道解決這個問題的方法；「非例行性問題」是指解題者有了問題，卻不能立刻知道如何解決。NCTM 於 2000 年再次提出「解題」是非常重要的課題，尤其是解非例行性的問題（NCTM, 2000）。

國內學者黃敏晃（1991）在「淺談數學解題」中也談到數學解題就是解決數學問題，對解題者而言，只有當數學問題為非例行性問題（non-routine problem）時，才有解題行為的發生，在解題過程中，需要用到數學相關概念、知識、技能、經驗等。因此，研究者認為學習者遇到一個非例行性的數學問題或是一個情境不熟悉的數學問題時，利用其舊有的知識與經驗，經過反覆的思考、邏輯推理與歸納後，所提出的一個解決問題的方法或策略，就是數學解題。

依照時間先後，先介紹 Polya（1957）數學解題歷程的四個步驟，其次介紹 Schoenfeld（1985）解題的四個變項，再者，Mayer（1992）從認知心理學的觀點來看數學解題的過程。

(一) Polya（1957）是最早有系統提出解題策略的學者，他在其著作「怎樣解題」（How to solve it）書中，強調教導學生啟發知識（Heuristic knowledge）與解題的重要性，並將解題歷程分為四個步驟如下：

1. 了解問題（understanding the problem）：解題者必須了解題意，並識別已知數與未知數，以及題意中所能運用的條件。
2. 擬定計畫（devising a plan）：解題者根據題意，從自我的舊經驗中搜尋相關性的問題或數學概念，而後設計一個具有可能成功的計畫。
3. 執行計畫（carrying out the plan）：解題者將計畫付諸實行，並校核明白步驟的正確性與否。
4. 驗算與回顧（looking back）：解題者根據題意的條件，對答案再做一次的驗算或回顧答案是否合理。

研究者認為正確了解題意是解決問題的必要條件，其次擬定一個可行且正確的解題策略，是一個重要的解題關鍵。正如 Polya（1957）解題歷程中的第二階段擬定解題計劃，計劃可能是逐漸地形成，也可能是瞬間突然產生的靈感（inspiration）。在擬訂計畫中，學生往往用畫圖表示，國內外學者所提出的解題策略，發現有多位學者皆提出「畫圖表徵」的解題策略，可見畫圖表徵是一個學生經常使用的解題方式（Kilpatrick, 1967；Sander, 1973；Larson, 1983；李佩樺、劉祥通，2008；劉哲源、劉祥通，2008；張祥瑞，2009）。

(二) Schoenfeld（1985）強調數學解題的研究方向需要從以下四個類別（catogories）來考

慮：

1. 資源（resources）：解題者所擁有的相關數學知識，包含了數學定義、運算程序及相關技巧等訊息。
2. 捷思（heuristics）：解題者解非例行性問題所利用的策略與技巧，例如：簡化問題、畫表格、尋找組型等。
3. 控制（control）：解題者在解題時，如何決定計畫、如何選擇目標和次目標，以及如何評估解題結果等方面，包括計畫、決策的評估與有意識的後設認知（metacognition）。
4. 信念系統（belief system）：解題者對於數學的觀點，而解題者所擁有的數學觀點將會影響其解題行為。

Polya 也主張，捷思的目標是研究發現與創新的方法與規則，作為一個形容詞，捷思意味著為了發現的服務（Heuristic, as an adjective, means“serving to discover”）（Polya, 1957）。

Schoenfeld 發現如何有效的運用資源、如何採用適當的捷思策略，常常是由控制因素所主導，至於信念系統影響解題更是顯著，是 Schoenfeld 獨到的見解。

Schoenfeld（1985）又依據 Polya（1957）的解題理論，提出的解題歷程模式包括，閱讀：解題者開始讀題；分析：解題者簡化或重述問題以分析問題；探索：解題者探求問題已知和未知間的關係；計畫：訂定解題計畫，並評估其適當性；執行：執行解題計畫，並檢查是否依解題計畫執行；驗證：檢查解題結果是否正確合理。

Schoenfeld（1985）的解題歷程模式，描述每一階段的解題行為，著重每一決策點，即後設認知行為發生處的分析，在驗證方面，提出用不同方法檢查解法，不僅評估解題過程，同時評估解題者自己對解題結果的信心（李心儀，2016）。

(三) Mayer（1992）從認知心理學的觀點來看數學解題的過程，將其區分成：問題轉譯（problem translation）、問題整合（problem integration）、解題計畫及監控（solution planning and monitoring）、解題執行（solution execution）四階段。Mayer（1992）也強調解文字題時，問題轉譯依賴語言（linguistic）知識與語意（semantic）知識，問題整合要有基模（schematic）知識，解題計畫及監控要有策略（strategies）知識，解題執行則要有程序性（procedural）知識。研究者認為 Mayer（1992）主張：監控的行為不僅是解題之後，在解題計畫的過程中即發生，這樣的觀點不同於 Polya，研究者同意監控的行為與思考在解

題過程中隨時在發生是合理的。

二、資優生的能力特質

資優生特質分成以下幾個文獻來說明：

(一)Krutetskii（1976）認為資優生的能力特質有以下四點：

1. 靈活性（flexibility）：在處理數學題目資訊的過程中，透過反向思考（reverse train of thought)達到快速重新建構的能力。
2. 壓縮（curtailment）：透過簡化（curtail）數學的過程，力求清晰（clarity）、簡潔（simplicity, economy）且合理的解法。
3. 邏輯思維（logical thought）：會出現在數量（quantitative）和空間（spatial）關係、數字和字母符號的範圍內的邏輯思維。
4. 形式化（formalization）：包含快速的掌握問題結構，與察覺（perception）數學材料，具備這兩種能力，找到廣泛概括其中的數學材料、關係與方法，稱之為形式化。

(二)Rogers（1986）發現在認知過程中資優生於下列優於普通生的特質：

1. 辨認（recognize）出欲解決的問題。
2. 預備好（readily）、自發性（spontaneously）地產生一串解決問題的方法。
3. 解決問題時所採取的方法先設定好優先順序（set priorities）。
4. 如專家一般的選擇表徵（select representation）資訊方式。
5. 能夠分配（allocate）解決某項問題時所需要的資源。
6. 有系統性地監控解答的過程（monitor solutions systematically）。
7. 解決問題時運用較長的醞釀思考時間（pre-conceptual time）。

Steiner（2006）也有類似的研究發現：資優生，當面對較新奇的非例行性的問題情境時，資優生較一般生能選擇正確的解題策略，在解題策略的運用上，資優生會使用其原先所具備的概念作基礎，進行有效率的策略與分析，建構自己的解題計畫。

(三)Davis 與 Rimm（2004）指出許多資優生的特質，其中與解題較有關的特質整理如下：

1. 優異的分析能力與卓越的推理、解題能力。
2. 使用抽象、複雜與具邏輯性的高層次思考能力與有效率的解題策略。

3. 具有**洞察力**、看見問題的架構、歸納規律並推廣到其他問題。
4. 自我反思、較佳的自覺與後設認知能力。
5. 具有創意與想像力，探究為何（why）以及如何（how）。

Cai（2005）也指出兒童發明解法的過程則是植基於他們深層的直覺與自然思考方式，雖然這樣結合正式與非正式數學經驗的解題方法與過程，並不完全是有效用或是有效率的，也常會有錯誤的結果發生，但經由學生自行發明的解題策略是具有原創性的。而這樣自發性的解題策略是一種無價的資產，並可作為教師了解學生想法的一扇窗，更是一種無價的工具（Yackel, 2005）。

Olson（齊若蘭譯，2007）的研究發現，美國六位參加 2001 年國際數學奧林匹亞競賽選手的解題，無庸置疑的，這些數學解題高手所展現出來的特質，除了天份與多元的興趣之外，更提到洞察力與創造力，其中洞察力在於觀察到問題的結構與困難點，而創造力則是在現有的知識裡，找到一個乾淨俐落的解決方法。由上述所統整的解題特質可以發現，資優生富有發現問題結構的洞察力。

資優教育學者 Renzulli（1978）提出資賦優異的三環理論（Theory of three rings），他主張資賦優異的行為表現要同時具備三種條件才有優異的行為表現，分別是：1.中等以上的智能（above average ability）、2.工作投入（task commitment）以及 3.創造力（creativity）等三種條件。Renzulli（1978）的以上論點，告訴世人不要過度迷信智商，反而要強調專注工作的重要，也鼓勵創造，不要因循舊制，才會有傑出的表現，也告訴教師鼓勵學生要有面對困難的堅持，並期勉學生全心投入，以及求新求變的表現。同樣的，Griggs（1991）歸納出資優生有以下幾點認知特質：獨立學習、內控的、堅持的、知覺強（perceptually strong）、非從眾的（nonconforming）和高度的學習動機，此堅持的特質與工作投入，非從眾的特質與創造力，與 Renzulli（1978）的主張有「異詞同工」之妙。

綜合以上學者所述，研究者認為資優生在遇到數學問題時，具有天生的直觀力來發現其解題的步驟，並能簡化問題、找尋解答的方向；資優生還具有敏銳的洞察力來發現題意的關鍵與歸納、推廣其解題過程；最後，資優生所具有的新穎創造力，能夠創造出異於傳統制式化而具有創意的解答方式，利用自身所擁有的舊知識與舊經驗，創新解題的過程，此類的解題不但可做為教師了解學生想法的參考，也能作為教師在設計題型時的參考依據。

三、數線問題

在我國的中小學數學教材中，數線的概念在國小課程中便已出現，但直到國中階段才有其專屬的課程單元。數線在教學上不僅只是標示出數在一條線上的位置，還有線段上的合成與分割概念，因此在教學上是一種容易讓學生了解題意的表徵方式。本節針對數線問題分別探討：（一）數線的意義、（二）數線問題相關的教材、（三）數線問題的研究。

(一)數線的意義

有關數線的特徵，Bright、Behr 與 Post 與 Wachsmuth（1988）提出以下 4 點做說明：

1. 數線必須標上數字符號，並定義出兩個參考點（reference points），才能根據參考點所顯示出的單位狀況找出其他點所代表的數值。
2. 數線是利用長度來代表單位，不僅單位可以重複（iteration）分割，且每一單位（unit）均相等。
3. 數線是一種連續（continuous）模式，數線上任兩個數之間必定有另一數存在，顯示實數具有連續性與稠密性。
4. 數線不像面積及離散量屬於單純的視覺組合。數線上必須標記兩點才構成意義，就是說數線有賴視覺及符號兩種訊息整合。

綜合以上四點說明，研究者認為數線就是一種數字符號與視覺結合而成的表示法，它可以表示出數線上的一個數值，或是一個線段長；數線具有相同的單位長及等分段的特徵，同時必須標示兩個參考點的數字，才能找出其他點所表示的值，且數線可以當作是一把尺，因為數線是連續的，任兩個數之間必定有一個數存在的稠密性質。

(二)數線問題相關的教材分布

教育部（2003）公布的九年一貫數學課程正式綱要中，將數線問題歸類於五大數學主題中的「數與量」，雖然數線問題的基本概念在國小階段即開始出現，但是直到國中階段才有「數線」的正式課程。

本研究的研究參與者是國小高年級學生，因此文獻只探討康軒版（個案就讀的學校用康軒版）的課本有關數線問題的教材，尤其是比較深入的部分，以方便讀者連結教材與任務單的關聯與差異（變異）：

在國小高年級時，開始正式引入數線問題，從五年級上學期第 1 單元「小數與分數」

就教導學生如何在數線上標示出其代表的分數或小數數值。

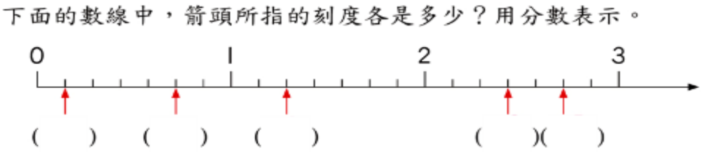


圖 1　康軒第九冊第 1 單元「分數」圖片（引自康軒出版社，2009）

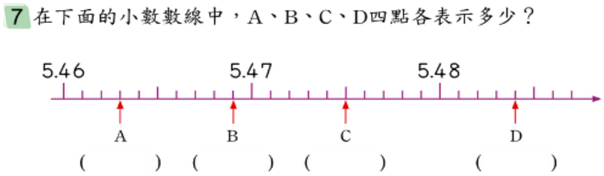


圖 2　康軒第九冊第 1 單元「小數」圖片（引自康軒出版社，2009）

以上二圖是該版本代表性的問題，圖 1 告訴我們學生可以利用等分的概念，找出分數的位置；圖 2 告訴我們學生可以從學習小數的百分位進階到千分位，找出千分位的位置，而本文的任務單與以上教材的任務大不同。

(三)數線問題的研究

Skemp（1976）強調二種數學理解，一是工具性的理解（instrumental understanding），二是關係性的理解（relational understanding）。工具性的理解相當於程序性知識，而關係性的理解相當於概念性知識。Skemp（1976）以 $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$ 為例，學生能計算出 $\frac{8}{15}$ 是屬於工具性理解，而能瞭解 $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$ 的意義是 $\frac{4}{5}$ 的 $\frac{2}{3}$，則屬於關係性理解。研究者認為一旦有了關係性理解就容易從 $\frac{4}{5}$ 找出 $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$ 的位置，也就是關係性理論有助於分數關係位置的表徵。

劉祥通、康淑娟（2012）的研究（以 $\frac{11}{6} \div \frac{4}{3}$ 為例）強調：如果學生會計算 $\frac{11}{6} \div \frac{4}{3} = \frac{11}{6} \div \frac{8}{6} = 1\frac{3}{8}$，此乃程序性知識，也稱為工具性理解，但要知道以 $\frac{4}{3}$ 當做基準量(1)，比較量 $\frac{11}{6}$ 變成 $1\frac{3}{8}$，能夠理解與熟悉這種知識是關係性理解。

Shaughnessy（2011）指出學生在一條數線上指認分數與小數位置點的困難，尤其是在使用非約定的記號（unconventional notation）。但是有關資優生在數線問題的尋找分數或小數位置的文獻卻是闕如。

參、研究方法

本章旨在說明本研究所採取的研究方法與程序，內容共分成研究方法與研究架構、研究參與者、研究工具等四個部分敘述如下：

一、研究方法

本研究主要目的在於探討國小五年級資優生在數線問題中的解題表現，研究者為了充分了解研究參與者的初始想法與解題表現，預定全心投入心力與時間探索，因此採取「個案研究法（case study）」來進行研究。

二、研究工具

本節研究工具分為研究者本身與任務單，任務單的問題，既非課本的例題、練習題，也非市面上參考書所能見到的題目，以尋找數線上的定位點，稱為標數問題作為主軸，並以個案學生任務單的寫作為基礎，再深入訪談其真實想法。分別敘述如下：

(一)研究者

本研究屬於質性研究，在研究過程中，研究者本身即為研究工具（Guba & Lincoln, 1981）。因為在質性研究的過程中，充滿了不確定性和可變性，只有研究者本身作為研究工作才能順應這種多變的研究情境（Lincoln & Guba, 1985），尤其在數線問題中，學生在數線上下筆順序與塗改部份會影響研究者對個案解題的分析，因此研究者必須特別仔細觀察學生的下筆與修改的情況。

研究者即教學者（researcher as teacher），研究者應從教學者的角色去了解與分析學生的解題表現，進行訪談時，應適時的發揮教學者的角色，透過教學互動，才能更深入了解個案學生的想法；研究者即模型的建造者（researcher as model builder），不斷地修正與建立自己對受試者解題的看法（Cobb & Steffe, 1983）。

(二)非例行性數線問題任務單

任務單的設計是以尋找數線上的定位點為主軸，研究者參考數線相關文獻與國內各版本數學教材，以及國內外各項數學競試試題，為了研究需要，研究者自行編製「非例行性數線問題任務單」，分成「文字題型」與「標數題型」（在數線上標坐標點），本文只呈現「標數題型」以挑戰個案學生，所謂非例行性問題對於學生是陌生的、不熟悉的、也沒有解過的問題。為確認任務單問題的適切性，二位研究者於任務單擬定後，特別商請一位具有多年資優班數學教學經驗的教師，共同檢視每道題目，進一步提供有效的觀

點來做適度的修正，以建立本研究任務單的專家效度。

在「標數題型」中，研究者依問題性質分為「尋找目標點」、「尋找原點」、「尋找多個目標點」三大類。

「尋找目標點」的挑戰在於給定的二點，此二點是異分母的分數，挑戰學生如何找到二點距離，並以此距離當作基準量，進而尋找比較量（目標點）的距離與位置。

例行性問題都是給定原點與另外一點，尋找第三個點，本任務單設計「尋找原點」問題以挑戰學生，也可說是非例行性的問題。

已知某二點的距離是多少，但未註明二點的位置關係，這樣的問題有二種可能，因此「尋找多個目標點」，對個案是個考驗，考驗她如何周全的解題，甚至監控答案的合理等等。

以上三類型分別設計易、中、難各 1 個問題，共三類 9 題（參見附錄）。難易度的主要的區分為坐標點是整數與分數，其次，分數又分成分母是倍數關係與否（例如 $\frac{5}{6}$ 與 $\frac{4}{3}$，$\frac{2}{5}$ 與 $\frac{4}{3}$）。限於篇幅，並未每題都討論。

三、研究參與者

本研究的研究參與者為通過瑞文氏黑白圖形補充測驗且百分等級為九十九的五年級資優生小貞（化名），學籍在雲林縣。根據班級導師在訪談中的描述，此個案學生面對數學問題具有高度的挑戰熱誠，能以積極的態度面對挑戰，在解決問題時，可以清楚了解數學題目所表達的意涵，也能明白的寫下數學算式並解釋原因，勇於嘗試運用自己方式來解題，且表達能力也是十分清楚，也很有耐心向艱難問題挑戰，另外，小貞的解題想法更可以突顯其自發性與原創性。再者，她解有關數線問題的「文字題型」，都能迎刃而解，所以本文再以「標數題型」（附錄），以觀察她的解題表現。

四、資料的分析

資料的來源主要是研究者所設計的任務單，藉此瞭解個案資優生在數線問題上的解題表現和解題想法。學生的表現往往超乎研究者的預期，分析她的表現不在於驗證是否符合文獻所說的特質，而是在於從哪種向度來看比較有意義。Schoenfeld（1985）所提出的解題的影響因素「資源、捷思、控制與信念系統」，此觀點層面甚廣， 包括了先備知識、策略的推演、監控解題計畫與結果的正確，還有對於數學的本質，自己的解題信心，以及問題的看法等。Schoenfeld（1985）的理論可謂匠心獨具，因此本文從此四個

向度分析。

對個案資優生在任務單上的解題逐一分析；再以個案學生在非例行性數線問題任務單的解題表現為基礎，採結構式任務單為基礎的訪談技巧進行訪談，而訪談的問題卻是依照學生的解題表現與訪談現場學生對解題想法的解釋作調整。

為增加本研究的效度，包含文字或符號敘述、解題運算（通分與擴分）、畫圖表徵、標位置圖的順序、任務單為基礎的晤談等等，進行資料的三角校正。

為了增進資料分析與詮釋上的信度，研究者不同的問題，利用重複的情結考驗個案的解題想法，例如若是個案依賴直尺實測，她可能是利用比例的方法解決問題，研究者會要求她，如果不依賴用直尺實測，您有甚麼方法呢？藉以了解個案解題時所用的資源，與持續地了解個案所採用的解題策略，包括她如何監控答案的合理性，以增加研究的信度。

肆、 研究結果與討論

本章的內容以個案學生的任務單解題與訪談內容為基礎，再將資料依據 Schoenfeld（1985）所提出的資源、捷思、控制、與信念系統四個類別做分析架構，分析個案學生解題的表現。

一、標數題型的解題分析

本節依標數題型分類為尋找目標點、尋找原點與尋找多個目標點三個部分，礙於篇幅，研究者以呈現「尋找目標點之題目 1-3、找尋原點之題目 2-3、尋找多個目標點之題目 3-2 與 3-3」，分別敘述如下：

(一)尋找目標點

題目 1-3 根據下列的數線，請你畫出 4/3 的位置，並說明為什麼？

個案的解題表現分析（一）

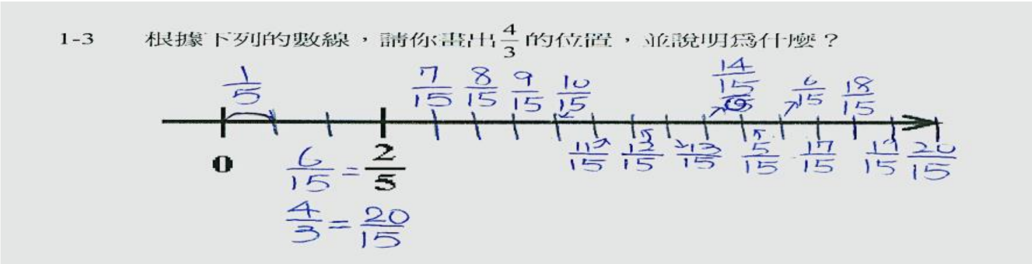


圖 3　個案小貞在題目 1-3 的初始解題

個案小貞對分數的通分的嫻熟，可見等值分數概念是她的解題的資源，將「$\frac{4}{3}$ 與 $\frac{2}{5}$ 通分成 $\frac{20}{15}$ 與 $\frac{6}{15}$ 」，再將數線上 0 到 $\frac{2}{5}$ 的距離分成三等份，並註明上 $\frac{1}{5}$ 的記號，發生了等分的錯誤；她再利用 $\frac{1}{5}$ 的距離從 $\frac{2}{5}$ 往後畫，並標上坐標 $\frac{7}{15}$、$\frac{8}{15}$、$\frac{9}{15}$…，造成解題上的錯誤。

研究者詢問小貞的解題步驟時，她自己發現在「0 到 $\frac{2}{5}$ 的距離分成三等份」的步驟上發生錯誤，因此研究者推論她是不小心將 $\frac{1}{5}$ 與 $\frac{1}{15}$ 搞混，可以說是當下**控制**欠佳的表現。

研究者請小貞再次解題，她一樣先將題目的兩個分數通分成 $\frac{20}{15}$ 與 $\frac{6}{15}$，然後將 0 到 $\frac{2}{5}$ 的距離分成兩等份，並標示出 $\frac{1}{5}$ 的位置，但是她再次將 $\frac{1}{5}$ 與 $\frac{1}{15}$ 搞混，於是研究者想確定學生是否了解「0 到 $\frac{2}{5}$ 分成一半的距離為 $\frac{1}{5}$」的觀念。研究者便以引導她理解 $\frac{1}{5}$ 與 $\frac{1}{15}$ 的倍數關係，小貞利用分數擴分寫下「$\frac{1}{5}=\frac{3}{15}$」的算式，並解釋「因為 $\frac{1}{5}$ 等於 $\frac{3}{15}$ ，所以是 $\frac{1}{15}$ 的 3 倍」，她且能反推「把 $\frac{1}{5}$ 分成 3 格，一格便是 $\frac{1}{15}$」的觀念；研究者因此認為此題的重要關鍵小貞已完全理解，所以請她又再次解題。

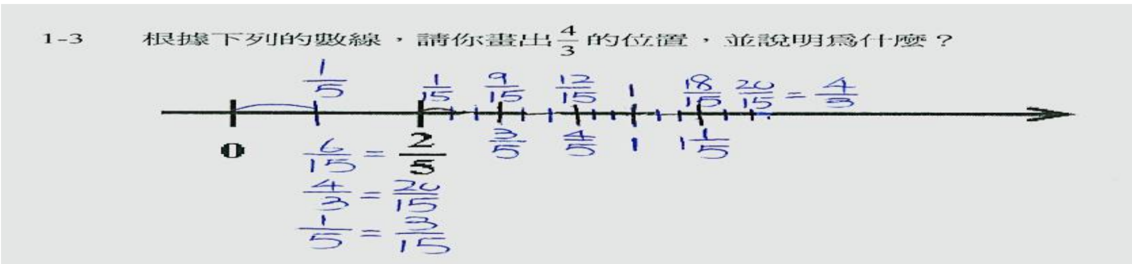


圖 4　個案小貞在題目 1-3 經教學後的解題表現

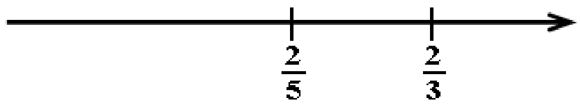
個案小貞先將 0 到 $\frac{2}{5}$ 的距離平分成兩段得到 $\frac{1}{5}$，再將 $\frac{1}{5}$ 平分成三等份得到 $\frac{1}{15}$ ，所以將一小格標示出 $\frac{1}{15}$，將一大格標示出 $\frac{1}{5}$ ；研究者認為這裡的等分步驟已經成為學生解此題的資源。接著，個案小貞再利用 $\frac{1}{5}$ 的距離推出 $\frac{3}{5}$、$\frac{4}{5}$、1 與 $1\frac{1}{5}$ 的位置，並瞭解 $1\frac{1}{5}$ 就是 $\frac{18}{15}$，發現再 $\frac{2}{15}$ 就能到達目標點，於是利用 $\frac{1}{15}$ 的距離找到 $\frac{20}{15}$ 的位置；研

究者認為個案反覆利用 $\frac{1}{5}$ 與 $\frac{1}{15}$ 兩者的距離（6 次 $\frac{1}{5}$ 的距離， 2 次 $\frac{1}{15}$ 的距離），以找出 $\frac{4}{3}$ ，可見她解題時能將所學學習遷移，此是其捷思的策略。

最後，研究者再次請她確認 $\frac{4}{3}$ 的位置，小貞利用$\frac{1}{5}$與 $\frac{1}{15}$ 二個高低階單位，找到 $\frac{4}{3}$ 就是 $\frac{20}{15}$ ，學生終於發揮了優秀的**<u>控制</u>**能力。如此有系統性地監控解答的過程（monitor solutions systematically）是 Rogers（1986）發現資優生解決問題的在認知過程中的一項優於普通生的一項重要的特質。

(二)尋找原點

$\boxed{\text{題目 2-3}}$ 根據下列的數線，請你畫出原點 0 的位置，並說明為什麼？



個案的解題表現分析（二）

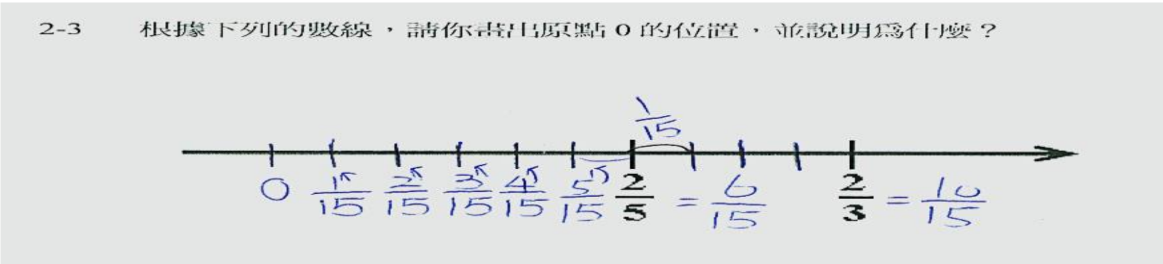


圖 5　個案小貞在題目 2-3 的解題表現

小貞利用等值分數的概念將「$\frac{2}{5}$ 和 $\frac{2}{3}$ 通分成同分母，得到 $\frac{6}{15}$ 和 $\frac{10}{15}$」，並發現兩數之間相差 4 個單位長度（$\frac{1}{15}$），於是把「$\frac{2}{5}$ 和 $\frac{2}{3}$ 之間平分成 4 格」 $\frac{4}{15}$ 得到單位長度為 $\frac{1}{15}$，這些皆為小貞所具備的解題**<u>資源</u>**；接著問她，「你怎麼找到 0 的？」，回答「這裡是 $\frac{1}{15}$，從 $\frac{2}{5}$ 就是 $\frac{6}{15}$，往左推就找到了。」；其次，她從 4 格的間距往相反方向去找 6 格，得到原點的位置，研究者認為，基準化的能力是她擁有的解題資源；再者，她在數線上持有「數線上越左邊的坐標越小、越右邊的坐標越大」的信念系統（也是先備知識），因此在尋找原點時，都是從給予的參考點往左邊找原點位置，找到了原點 0 的位置，以前她從未解決過找原點的問題，面對此一非典型問題（非例行性問題），她直覺就能解決，此點能力也呼應 Griggs（1991）所點出的資優生具有知覺強（perceptually strong）的認知特質；最後，研究者再次詢問個案「為何往前推 6 格就是原點的位置？」，她回答「我往前數就是 $\frac{5}{15}$、$\frac{4}{15}$、$\frac{3}{15}$、$\frac{2}{15}$、$\frac{1}{15}$，接下來就是 0 了」。研究者認為，她從 $\frac{6}{15}$ 利用

往後數 4 個 $\frac{1}{15}$，得到 $\frac{10}{15}$，同樣的推理，往前數 6 個 $\frac{1}{15}$，得到 0。研究者認為：往前找原點的活動，是前所未有的課題，而且 將 $\frac{4}{15}$ 與$\frac{6}{15}$ 看成 4 個 $\frac{1}{15}$，與 6 個 $\frac{1}{15}$，把 $\frac{1}{15}$ 的單位具象化與物件化了，此項能力也呼應了 Krutetskii（1976）所主張：資優生解決問題時擁有壓縮（curtailment）的能力。研究者發現個案小貞解題時，是先標示 0 的位置，在最後檢查答案的時候才將 $\frac{5}{15}$、$\frac{4}{15}$、$\frac{3}{15}$、$\frac{2}{15}$、$\frac{1}{15}$ 標示上去，用數格子的方式將每個標數都表示出來，證明原點的位置正確，並點數自己推得的格子數是否正確，這些都是她所具備的<u>**監控**</u>能力。

(三)尋找多個目標點

$\boxed{\text{題目 3-2}}$ 根據下列的數線，已知知$\overline{AB}=\overline{CD}$（A、B 兩點的距離等於 C、D 兩點的距離），請在下列數線上畫出 D 點的位置，並說明為什麼？

個案的解題表現分析（三）

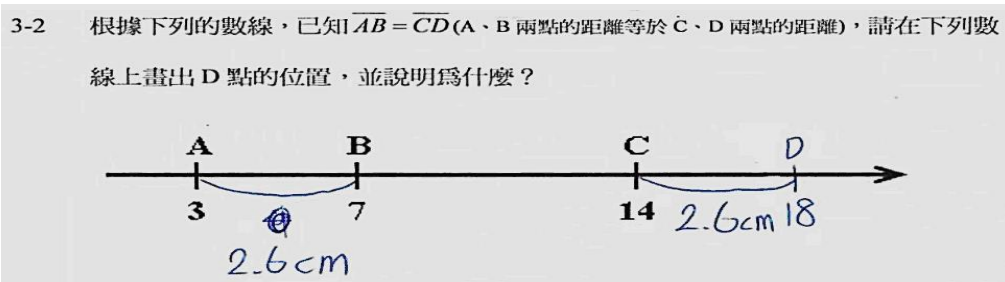


圖 6　個案小貞在題目 3-2 的初始解題

3-1 問題（參見附錄），給定 P 點(13)，請劃出與 P 點相距 5 的位置。小貞直接在參考點前後標示， 標示 5 個單位，8 與 18 的位置。

在解 3-2 的問題時，研究者預期小貞在數線 14 的坐標左右 4 個單位，直接標示出 10 與 18。但是，從圖 6 來看小貞是選擇「用尺量」的方式，研究者詢問「你為何麼要用尺量呢？」，小貞直接回答「測得 A、B 兩點的距離是 2.6 公分，然後認為 C、D 兩點的距離也是 2.6 公分」，她為了精確找出 D 的位置，利用量尺求出兩點實際的距離，找出單位長度後，再找出目標點的相對位置，研究者認為此為她意圖得到距離的真確性，研究者認為她解讀題意的當下，認為題目要求畫出精確距離，這個面向是 Mayer 所稱的問題轉譯， 也可以說是 Polya 所說的理解題意。而她以等距離觀念解題，此為她解題前

所擁有的解題**資源**。

她初始用選擇「用尺量」與等比例的方式解題，接著她自己又採取**坐標點**的資源解題：因為 A、B 兩點差 4 個單位長，所以 D 點就是 14 往右移動 4 個單位長，也就是 18 的位置，研究者認為以上就是她所運用的**捷思**策略，利用坐標的觀念，以 4 個單位長的距離，直接平移至參考點 C 點上。但在題目 3-2 中，目標點應該有兩個，她在初始解題中只畫出 C 點右側的目標點，研究者猜測認為有二種可能：1. 是 A、B 兩點的相對位置關係，使得個案學生在解此題目當下一時忽略了 C 點左右兩邊都有目標點的關鍵；2. 沒有充分詮釋線段符號$\overline{AB}=\overline{CD}$，此符號也等同於$\overline{AB}=\overline{DC}$，所以 D 點可以在 C 點左右二個位置。

進一步推論，小貞可能在長度平移時，因為參考長度 B 點在 A 點的右側，因此影響到學生在作答時，直覺的畫出 D 點也在 C 點右側的答案，因而忽略 C 點左側的目標點。研究者認為，她並沒有完全地成功解題，第一個原因可能是題目增加其他條件而影響作答；第二個原因可能是她並未使用其**控制**答案的能力，因此造成解題的不完整。

研究者提出「如果你不用尺去量的話，你覺得還有什麼方法可以做？」的問題，小貞受訪時回答「我是利用數線上坐標點來判斷兩點的距離」。題目雖然提供了資訊，但是解讀資訊，是靠解題者的先備知識，也就是她擁有解題資源。

她接著回答「可以用平分等分的方法」，她將 A 點到 B 點的距離 4 個單位長平分成 4 個間隔，作為解題的**捷思**策略（如圖 7）。

研究者提問「這次為什麼會出現兩個點？」，她回答「距離參考點一定長度時，會有左右兩個目標點」（研究者認為這是屬於解題的**資源**，也是發展成為**信念系統**的一部分），看出 D 點有 2 個。她接著說「C 點往前數 4 格，往後也數 4 格」，將 4 格以畫圖表徵的方式是**監控**的行為，在數線上 C 點左右各標示 4 個單位長，分別為 10 和 18。

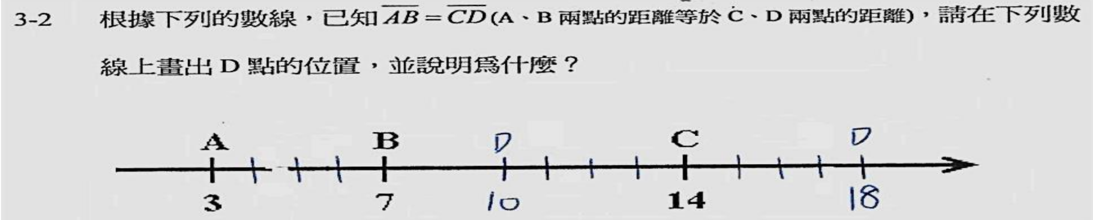
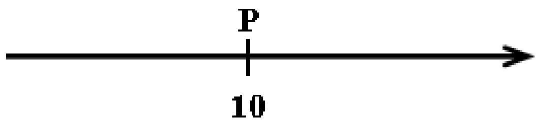


圖 7　個案小貞在題目 3-2 使用另一策略的解題表現

$\boxed{\text{題目 3-3}}$ 已知 P 點的坐標為 10，且 P 點和 Q 點距離 2 個單位長，若 M 點坐標比 Q 點大，且 M 點和 Q 點距離 3 個單位長，請在下列數線上畫出 M 點的位置，並說明為什

麼？



個案的解題表現分析（四）

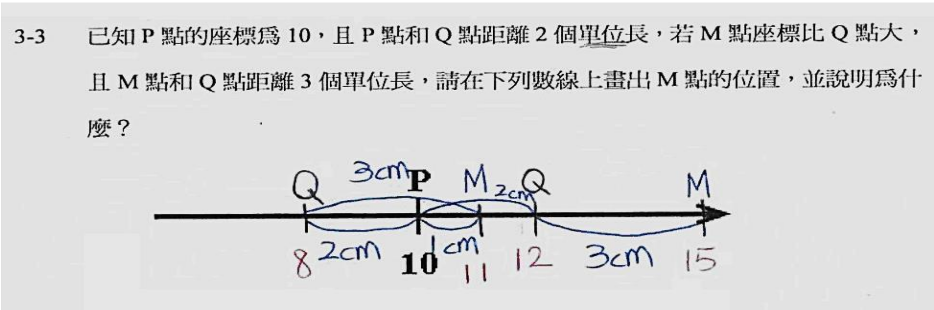


圖 8　個案小貞在題目 3-3 的解題表現

小貞從解 3-1、3-2 的解題中得到的經驗，此解題經驗已發展成為「距離參考點一定長度時，會有兩個目標點」的**信念**，發現在題目 3-3 中，能直覺的發現 Q 點也是會有兩個可能，研究者認為此信念亦可視為她從經驗中提取出的解題**資源**，因此利用題目給的題意「P 點和 Q 點距離 2 個單位長」，從參考點 P 往左找 2 公分找到 Q 點位置為坐標 8，往右找 2 公分找到 Q 點位置為坐標 12；研究者認為小貞利用量尺的刻度當作解題**捷思**策略，小貞先找到 Q 點的二個位置（子目標），接著，個案小貞繼續找目標點 M 點的位置，繼續以 1 公分當作一個單位長，這也代表學生擁「有在同一個數線上，一個單位長的長度是固定不變的」的**信念**；因此小貞從坐標為 8 的 Q 點，依照題意往右找 3 公分（也就是 3 個單位長），到達 M 點坐標 11；又從坐標為 12 的 Q 點往右找 3 公分（也是 3 個單位長），到達 M 點坐標 15，又得到二個 M 點（終極目標）。正如，Steiner（2006）的研究發現：在解題策略的運用上，資優生會使用其原先所具備的概念作基礎，進行有效率的策略與分析，建構自己的解題計畫。

研究者又詢問小貞「為什麼 M 你只找右邊的點，沒有找左邊的呢？」她回答「因為題目說 M 的坐標比 Q 大，數線右邊的點比較大」。更確定她了解「數線上點的位置」觀念。在尋找目標點 M 點的位置時，小貞利用其「數線上越右邊的點越大」的概念**控制**其答案，只找 Q 點右邊的目標點，不需找 Q 點左邊較小的點，因此研究者認為，她

具有良好的數線概念來<u>控制</u>其答案的正確性。也如同 Davis 與 Rimm（2004）所強調的特質，資優生擁有較佳的後設認知能力。

伍、 結論與討論

本研究目的為藉由研究者設計的非例行性數線問題任務單，探討國小五年級資優生在數線問題的解題表現，並針對小貞解題表現，分析資優生如何有效運用資源（resources）、如何採用適當的捷思（heuristics）策略、如何控制（control）過程，以及如何利用信念性統（belief system）得到答案之四個變項做討論。因此，本章分兩個部份，第一節針對研究結果，綜合論述個案資優生解非例行性數線問題的解題表現，作為本研究的結論；第二節則依據研究結論提出相關之建議。

一、結論

本節依據個案資優生的解題表現，分為資源（resources）、捷思（heuristics）、控制（control）、信念系統（belief system）四個變項，分述如下：

(一)資源（resources）

「等值分數」的概念以及「利用兩點之間距離當作基準量」為個案學生解標數題型所運用的重要解題資源

本研究結果發現，在題目 2-3 中，小貞能利用「等值分數」的概念，將參考點 $\frac{2}{5}$ 以及目標點 $\frac{2}{3}$ 化為同分母的分數，再進行等分線段長度的步驟。在題目 3-2 她利用在數線上坐標點來定位與判斷兩點的距離。因此研究者認為她是能夠善用自身所擁的有數學知識和解題經驗當作其解題資源。

(二)捷思（heuristics）

個案學生能展現多元策略，以解不同的數線題型

從本研究結果發現，小貞在題目 2-3 中，能利用等分線段的方式找出目標點，也能利用比例原則，從 $\frac{4}{15}$ 與 $\frac{6}{15}$ 看出是 4：6 關係，找出原點位置， 此乃基準化能力的展現；在題目 3-2 中，分別用「量尺」的方式與數線上坐標點來定位與判斷兩點的距離的方法作為其解題的捷思策略。從研究者所設計的數線問題中，其所分別需要的解題策略

大不相同，因此可以看出個案學生在解題時所運用策略的多元性。

(三)控制（control）

個案學生以「高、低階兩單位並用」方式找尋目標點與「數間隔數」等方法來控制答案的合理性

從本研究結果發現，在解數線問題的 1-3 任務單中，找 $\frac{4}{3}$ 的位置，小貞利用 $\frac{1}{5}$ 與 $\frac{1}{15}$ 二個高低階單位，找到 $\frac{4}{3}$ 就是 $\frac{20}{15}$ ，她發揮了優秀的**控制**能力，以監控解答的準確性，並能利用有別於原來的方法來驗證自己的答案，或是利用觀念來檢視答案的正確性，更能利用概念來控制答案的可能性。例如她會利用「數間隔數」的方式關係來確認自己答案是否正確，研究者認為此為學生最容易運用來檢驗自己答案的方式；另外，她也能運用數線上兩點之間的距離來檢驗答案的正確性，利用求出的答案坐標來反推與另一目標點的距離，確認是否與題意相同；又或者利用其先備知識「數線上越右邊的點越大」來控制自己所運用的策略，只找出題意上可能的目標點。

(四)信念系統（belief system）

個案學生在解題之初，持有「數線上越左邊的坐標越小、越右邊的坐標越大」以及解題之後，發展出「距離參考點一定長度時，會有左右兩個目標點」的信念

本研究結果發現，在題目 2-3 中，小貞在解題的開始以「數線上越左邊的坐標越小、越右邊的坐標越大」的信念（也是先備知識），先判斷原點的位置，0 會落在小的數 $\frac{2}{5}$ 的左邊。在解完 3-1 的題目後 3-2 她能利用「距離參考點一定長度時，會有左右兩個目標點」的信念，接著透過在數線上坐標點來定位與判斷兩點的距離，在題目 3-3 她持有「有在同一個數線上，一個單位長的長度是固定不變的」的信念。研究者認為，因為她擁有的正確信念系統，所以能有效率幫助其解題上的流暢。

二、建議

研究者將於本節針對此研究中，個案資優生在任務單上的解題表現、訪談內容與綜合分析結果所獲得的收穫、回饋和反思，提出相關之建議，分述如下：

(一)鼓勵學生解題時採取多元的解法

從個案小貞的解題表現發現，她在面對非例行性數線問題時，為了答案的正確性，

她利用不同的策略來解題，並能清楚的寫下運算過程，藉由自己的先備知識來思考或驗證答案的合理性，此行為不但提高了學生在解題時的正確率，也能讓學生自己清楚的知道每一個算式或步驟代表的涵義為何。以上是一個個案面對非例行性問題解題時能採用多元的解題策略，卻也證實了 Krutetskii（1976）所歸納的資優生解決問題時的靈活性（flexible）特質。建議教師教解題時最好多鼓勵學生發表不一樣的方法，相信資優生們各自會貢獻不一樣的解題想法與策略，如此百花齊放，學生對於數學的愛好與學習動機會更強烈。

(二)關於資優生的學習內容，建議教師嘗試設計與安置非例行性問題

解題能力的增加，可以從自己的解題經驗中累積，若只是單純的例行性問題，學生只模仿老師的解法，對學生的解題經驗成長並未有太大的幫助。在個案小貞解非例行性數線問題時，因對於不熟悉的題目可以反覆的思考，搜尋自己所具備的先備知識與數學相關的舊經驗，透過自身所發展出的解題策略來成功解題，在學習上，學生自行發展出的解題策略會比老師所教學的策略來得牢靠，在經驗的成長上，此次利用的解題策略也將成為以後解題所運用的資源。因此，在資優生的數學學習上，除了加深、加廣的課程外，可嘗試設計與加入非例行性問題當作學生學習新知的教學內容，以挑戰學生的能力，進而發展學生解決問題的能力。

(三)任務單的設計可再加入負數概念等題材，以加深任務單的難度

從研究結果發現，此任務單對個案小貞來說，似乎顯得較容易發揮，原本研究者認為數線單元為學生較少碰觸的題型，但研究結果發現個案小貞在數線問題上並未遇到太大的困難，因此研究者認為若在未來的研究上面，可加深任務單的難度，例如增加負數概念，舉例來說，在「尋找原點」題型中，因研究者的任務單只有正數的參考點，因此學生只需往數線左邊找原點的位置，若加入負數的概念，學生可能很自然理解：**數線上正數在原點右側，負數在原點左側的概念**。

誌謝

感謝科技部計畫（NSC 98-2511-S-415-003-MY3）的經費補助，本文只代表二位研究者的意見，不代表科技部的觀點。也感謝投稿過程中匿名審查人的辛苦付出與寶貴意見，使得本文得以較完善的面貌，與同道分享。

參考文獻

李心儀（2016）。不同解題歷程模式中的回顧。**臺灣教育評論月刊**，**5**（8），157-161。

李佩樺、劉祥通（2008）。分析國小資優生解連比問題之自發性策略。**資優教育季刊**，**106**，8-17。

康軒出版社（2009）。**國民小學數學第九冊**。臺北市：康軒文教。

張祥瑞（2009）。**分析資優生解速率問題之研究**。（未出版之碩士論文）。國立嘉義大學數學教育研究所，嘉義縣。

教育部（2003）。**國民中小學九年一貫課程正式綱要**。臺北市：教育部。

黃敏晃（1991）。淺談數學解題。**教與學**，**23**，2-15。

劉哲源、劉祥通（2008）。國一資優生對因倍數問題的解題分析。**資優教育研究**，**8**（1），47-66。 doi: 10.7089/JGE.200806.0047

劉祥通、康淑娟（2012）。小美在數線上關於分數基準化問題的解題表現。**科學教育學刊**，**20**（1），23-29。 doi: 10.6173/CJSE.2012.2001.02

Olson, S.著。齊若蘭譯（2007）。**數學高手特訓班**。臺北市：遠流。（原著出版於 2004年）

Bright, G. W., Behr, M. J., Post, T. R., & Wachsmuth, I. (1988). Identifying fractions on number line. *Journal for Research in Mathematics Education, 19*(3), 215-232. doi: 10.2307/749066

Cai, J. (2005). What research tells us about teaching mathematics through problem solving. In F. K. Lester & R. I. Carles (Eds.), *Teaching mathematics through problem solving* (pp. 241-253). Reston, VA: VCTM.

Cobb, P., & Steffe, L. P. (1983). The constructivism researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education, 14*(2), 83-94. doi: 10.2307/748576

Davis, G. A., & Rimm, S. B. (2004). *Education of the gifted and talented*(5th ed.). Boston: Pearson/ A and B.

Guba, E. G., & Lincoln, Y. S. (1981). *Effective evaluation: Improving the usefulness of evaluation results through responsive and naturalistic approaches.* San Francisco: Jossey-Bass.

Kilpatrick, J. (1967). Analyzing the solution of word problems in mathematics: An exploratory study. *Dissertation Abstracts International, 28,* 4380A. University Microfilms No. 68-6442.

Kilpatrick, J. (1985). A retrospective account of the past 25 years of research on teaching mathematical problem solving. In E. A. silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 1-15). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Krutetskii, V. A.(1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren.* Thanslated from the Russian by Joan Teller, edited by Jeremy Kilpatrick and Izaak Wirzup. Chicago: The University of Chicago Press. (Original work published 1968.)

Larson, L. C. (1983). *Problem-solving through problems*. New York: Springer.

Lincoln, Y. S., & Guba, E. G. (1985). *Naturalistic inquiry.* Beverly Hill, CA: Sage. doi: 10.1016/0147-1767(85)90062-8

Mayer, R. E. & Hegarty, M. (1996). The process of understanding mathematical problems. In R. J. Sternberg & T. Ben-Zeev (Eds.), *The nature of mathematical thinking.* NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Mayer, R. E. (1992). *Thinking, problem solving, cognition*, (2nd ed.). NY︰Freeman.

National Council of Supervisors of Mathematics. (1977). Position paper on basic mathematical skills. *Arithmetric Teacher, 25,* 19-22.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

National Council of Teachers of Mathematics. (1980). *An Agenda for Action: Recommendations for school mathematics of the 1980's.* Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Polya, G. (1957). *How to solve it* (2nd ed.). Garden City, NY: Doubleday and Co., Inc.

Renzulli, J. S. (1978). What makes giftedness? Reexamining a definition. *Phi Delta Kappan, 60*(3), 180-184.

Rogers, M. T. (1986). *A comparative study of developmental traits of gifted and average children*. Unpublished doctoral dissertation, University of Denver.

Sander, V. A. (1973). *Arithmetic problem-solving strategies of fourth grades children.* Doctoral dissertation, Wayne State University.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press. doi: 10.1016/B978-0-12-628870-4.50008-6

Shaughnessy, M. M. (2011). Identify fractions and decimals on a number line. *Teaching Children Mathematics*, *17*(7), 428-434.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, *77*, 20-26.

Steiner, H. H. (2006). A micro genetic analysis of strategic variability in gifted and average-ability children. *Gifted Child Quarterly, 50*(1)， 62-74. doi: 10.1177/001698620605000107

Yackel, E. (2005). Listening to Children: Informing us and guiding our instruction. In F. K. Lester & R. I. Carles (Eds.), *Teaching mathematics through problem solving* (pp. 107-121). Reston, VA: VCTM.

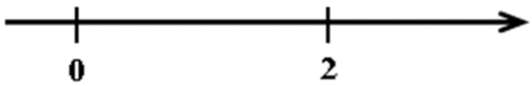
附錄　數線問題工作單

姓名：

親愛的小朋友，您好：

這是一份關於數線問題的工作單，請運用你所學過的數學知識，儘可能地在每一個題目下方的空白處（或數線上）寫下您的想法和計算過程，此份試題並不會在學業成績上做參考，請您放心作答。您的填寫對於此方面的研究相當寶貴，請認真作答，謝謝您！

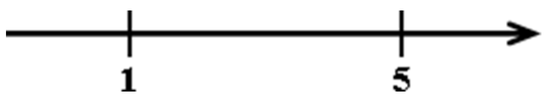
1-1　根據下列的數線，請你畫出$1\frac{2}{5}$的位置，並說明為什麼？



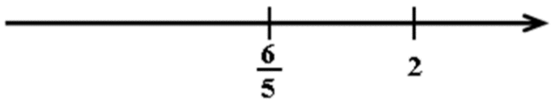
1-2　根據下列的數線，請你畫出$\frac{5}{6}$的位置，並說明為什麼？

1-3　根據下列的數線，請你畫出$\frac{4}{3}$的位置，並說明為什麼？

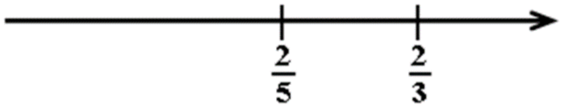
2-1　根據下列的數線，請你畫出原點 0 的位置，並說明為什麼？



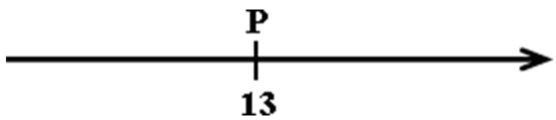
2-2　根據下列的數線，請你畫出原點 0 的位置，並說明為什麼？



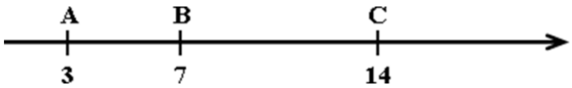
2-3　根據下列的數線，請你畫出原點 0 的位置，並說明為什麼？



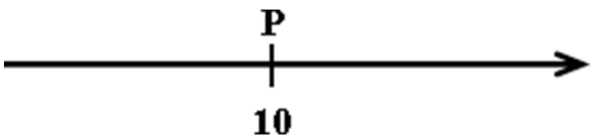
3-1　根據下列的數線，請你畫出與 P 點相距 5 的位置？



3-2　根據下列的數線，已知 $\overline{AB}=\overline{CD}$（A、B 兩點的距離等於 C、D 兩點的距離），請在下列數線上畫出 D 點的位置，並說明為什麼？



3-3　已知 P 點的座標為 10，且 P 點和 Q 點距離 2 個單位長，若 M 點座標比 Q 點大，且 M 點和 Q 點距離 3 個單位長，請在下列數線上畫出 M 點的位置，並說明為什麼？



林碧珍（2020）。
數學奠基活動遇見臆測活動：扇形的教學設計。
臺灣數學教師，41（1），26-39
doi: 10.6610/TJMT.202004_41(1).0002

數學奠基活動遇見臆測活動：扇形的教學設計

林碧珍
國立清華大學數理教育研究所

數學奠基活動的主要目的是激發學生的數學學習興趣和動機，數學奠基進教室的目的是將奠基模組活動轉化於實際課堂中。本文的目的是提供一個如何將數學奠基活動融入於數學臆測活動的範例，以幫助教師能將更多課外學習的奠基活動順利轉化為奠基進教室活動。該範例起源於作者到嘉義市一所小學申請的教育部亮點計畫教師社群帶教師們進行共同備課，此備課活動是以奠基活動模組為進路，探討教科書對扇形的教材設計及扇形教學的本質。本文描述奠基活動的設計原則和臆測活動設計的原則，並實際展現如何將奠基活動轉化為臆測活動的教學設計。數學奠基活動的亮點是引起學生的學習興趣和學習動機，數學臆測教學強調思考的過程與方法，當數學奠基活動和臆測活動相遇時，調整與修正了圖卡的數量和類型，以及增加使用資料彙整單上，不僅增加造例的趣味性和活潑性，而且讓學生有機會有系統的觀察資料，體會和欣賞數學是有規律和有結構之美。

關鍵詞：扇形、奠基活動、奠基進教室、數學臆測教學模式、臆測活動

通訊作者：林碧珍，e-mail：linpj@mx.nthu.edu.tw
收稿：2020 年 3 月 8 日；接受刊登：2020 年 3 月 25 日。

壹、 緣起

近幾年來，奠基活動和奠基進教室活動是國立臺灣師範大學數學教育中心、教育部中央數學輔導團的亮點計畫及易思計畫、地方各縣市數學輔導團的推動業務項目之一，在國內中小學校園中引起熱潮。在 2020 年 2 月 14 日嘉義市晴天國小教師組成的亮點計畫社群，當天遠從臺南和嘉義地區來的國中和國小教師共 12 位。這群教師不因武漢肺炎疫情瀰漫全球而澆熄他們對數學教學的熱情，雖然全國高中以下延後兩週開學，但該校亮點計畫照常舉行。

在事前聯繫時，該校負責聯繫的研究發展組組長和我，都關注在如何透過備課、觀課和議課，讓社群教師能獲得有關教學或教材知識的最佳學習。為了配合開學初第二週 3 月 4 日要進行五年級的教學單元，我們邀請該校鶯鶯老師，從已研發的奠基活動中尋找適合的模組改編為奠基進教室活動，當日的備課活動包含鶯鶯老師報告扇形的教科書設計和自新北市景興國中鄧家駿老師設計的數學奠基活動模組《扇形分類》改編後的教學活動。從備課活動中，我們一起解讀教材，並討論有關扇形的本質，2 月 14 日備課當天，讓我了解到以奠基活動模組作為備課的進路，教師彼此間很容易墜入數學本質的對話，基於此而撰寫本文，是源起之一。

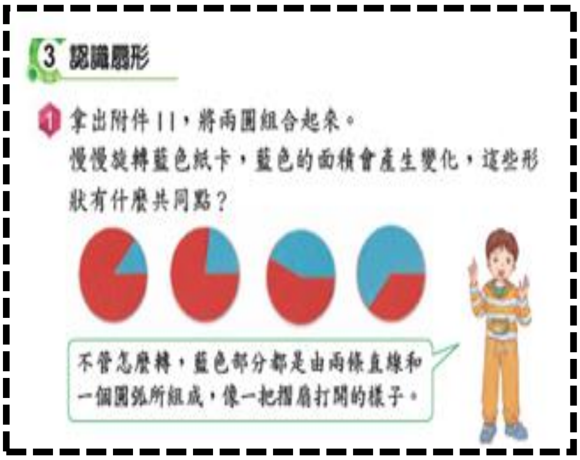
當我將數學奠基活動模組《扇形分類》的學習單在黑板上以表格列出每個圖卡的特性和是否能連續摺疊 0 次、1 次、或兩次以上時，再修改調整圖卡的兩邊長度是否為半徑、弧是否在圓周上成為各欄位的屬性，社群教師立即察覺到表格中所列出的這些欄位屬性，正是扇形的定義，他們察覺到這些正是此奠基模組的教學目標，比起原先的奠基活動讓學生漫無目的地去觀察零散的各種圖卡，還要來得容易，而這張表格就是臆測活動設計的彙整資料單，目前我指導的研究生有多位意圖將有趣的奠基活動模組融入到臆測教學模式，但尚處於摸索階段，需要多一些將奠基活動融入臆測活動的文獻參考，做為指導方針，是撰寫本文的源起二。

貳、 扇形教學的本質

依據國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域和十二年國民基本教育課程綱要數學領域，扇形都是五年級的學習內容。九年一貫課程綱要數學領域的分年細目為「5-s-03 能理解圓面積與圓周長的公式，並計算簡單扇形的面積。」（教育部，2008）。十二年國民基本教育課程綱要數學領域的學習表現為「s-III-2 認識圓周率的意義，理解

圓面積、圓周長、扇形面積與弧長之計算方式。」，五年級的學習內容為「S-5-3 扇形：扇形的定義。「圓心角」。扇形可視為圓的一部分。將扇形與分數結合（幾分之幾圓）。能畫出指定扇形。」（教育部，2018）。課程領域綱要對該分年細目特別指明：「扇形面積的計算可與分數平分的操作相互加強。知道半圓、$\frac{1}{4}$ 圓、$\frac{1}{8}$ 圓的面積計算方式。」。依據分年細目的說明，明確的說明扇形是圓形的一部份。

有些教科書採用扇形是圓形一部份作為認識扇形的啟蒙活動，如下圖所示。利用兩個不同顏色且大小一樣的圓，分別在圓上剪出一條半徑，由切口處把兩圓交叉疊合在一起，使圓心重疊。慢慢旋轉一個顏色紙卡，另一個顏色的面積產生變化，而形成扇形的變化，並引出扇形的定義。



何謂扇形？（1）扇形是圓形的一部份，（2）扇形的兩邊等長是圓形的半徑，（3）扇形的弧是該圓形的圓周，（4）扇形的頂點是該圓形的圓心，（5）扇形的兩邊所夾的角為圓心角，圓心角介於 0 度~360 度之間。扇形的構成要素中兩邊和弧是圓形的半徑和圓周的部分，圓形的半徑都相等，所以一個扇形弧上任何一點到頂點都等長。反之，並非兩條等長的邊和一弧所構成的圖形就是一個扇形，如圖 1-（7），雖是兩邊等長、弧是圓周的部分，但頂點不是圓心，兩邊也不是此圓形的半徑。

若認識扇形的教學非從扇形是圓的一部份的路徑進入，則學生很容易產生概念的迷思或學習上的困難。這些困難或迷思諸如：一旦提供一個脫離了圓形的扇形，學生誤以為「形狀像摺扇的圖形就是扇形」，如圖 1-（2）、1-（6）、1-（7）。

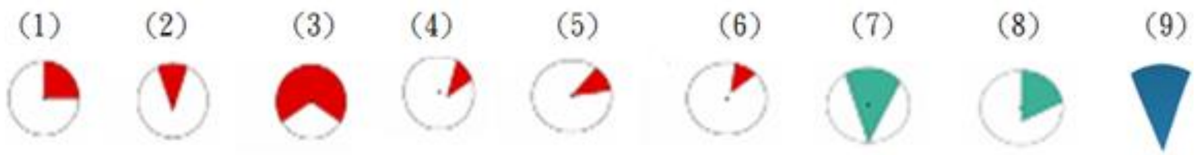


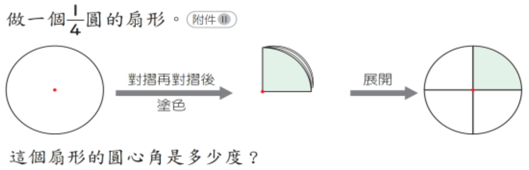
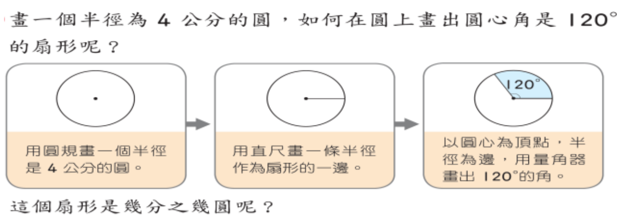
圖 1　判斷是否為扇形？

圖 1-（9）並沒有伴隨一個圓形，直觀上學生很容易誤判它是一個扇形，究竟它是否為一個扇形？用什麼方法可以確認？下面至少有四種方法可以確認圖 1-（9）是否為一個扇形。（1）利用圓規，以頂點為圓心，其中一邊為半徑畫出圓弧，辨識弧線是否和圓周重疊。（2）利用直尺測量弧線上任一點到頂點的直線距離是否處處相等。（3）重覆複製此圖形到紙上，辨識是否能剛好組成一個完整的圓形，而不是變成一個花瓣狀的圓周。（4）利用對摺兩次：辨識對摺兩次後的弧線是否完全疊合。第一次對摺僅能確認此圖形兩邊長度是否相等，對摺第二次，才能檢驗出弧線上任一點到頂點的直線長是否都相等（用來檢驗半徑是否處處相等），以及弧線是否都能完全處處重合（用來檢驗弧線是否為圓周的部分）。

扇形的學習內容除了辨識扇形與其定義外，還須學習扇形的繪製。繪製任務的複雜度會影響繪製的難易。繪製扇形的任務至少有三種類型（如表 1）：（1）在給定的圓上做出幾分之一圓，如 $\frac{1}{2}$ 圓、$\frac{1}{4}$ 圓、$\frac{1}{8}$ 圓，並求出圓心角的度數。（2）在圓形上畫出一個給定半徑長和圓心角的扇形。（3）任意畫出一個指定邊長和圓心角的扇形。對學生而言，任務（1）及（2）較為簡單，因為只要利用分數概念即可做出扇形，但任務（3）則較困難。教科書僅提供前兩種任務，而缺少第（3）種任務。若學生有機會學習第（3）任務，則可能有助於確認上述圖 1-（9）是否為一個扇形。

表 1

「繪製扇形」的三種不同任務

（一）在圓上做出特殊圓，如$\frac{1}{2}$圓、$\frac{1}{4}$圓	
（二）在圓上畫出一個指定半徑長和圓心角的扇形	
（三）任意畫出一個指定邊長和圓心角 60 度的扇形	畫出一個半徑 5 公分圓心角 60 度的扇形。 先利用先備知識畫出 30 度角，但不容易畫出正確的弧線位置。除非，利用圓規以邊長為半徑畫出通過兩邊長的端點的弧線。 

參、 數學奠基活動融入臆測教學模式的任務設計

一、數學奠基活動設計原則

國立臺灣師範大學數學教育中心自103年度起開始推動「奠基活動模組」專案計畫，至少完成了中小學 119 件的「數學奠基活動模組資料庫」。「奠基」是在學習前，先經由活潑有趣的數學活動，激發學生對數學的興趣，引起學生的數學學習動機；同時，在進行數學活動時，培養數學內容的具象經驗，讓學生體會與數學單元連結的關鍵點，進一步探索相關問題。數學奠基活動工作坊手冊提出的設計原則，包含：（一）活動內容需以特定數學內容為載體來設計。（二）活動需以學生先備經驗為起點，採序列性的設計方式。（三）活動需能激發學生參與學習的動機且願意持續投入。（四）活動需能清楚描述學習目標及數學概念，並能成為學習其他活動的基礎（國立臺灣師範大學數學教育中心，2018）。這些活動已引起學生的學習興趣為主要目標，奠基活動多數使用於課外的營隊。之後，基於現場教學的需求，原先使用於課外營隊的奠基模組活動需要現場教師轉化運用於實際課堂中。自 106 年度起數學教育中心推動將 90 分鐘的奠基活動模組加以轉化成一節課（40~45 分鐘），發展一系列「數學奠基進教室模組」教學影片，以使每一位學生都能在課室中得到如數學奠基活動的學習機會（國立臺灣師範大學數學教育中心，2019）。

奠基活動模組轉化為數學奠基進教室的設計原則為：引動思考、營造數學感、共建數學、診斷介入、單元滲透（國立臺灣師範大學數學教育中心，2018）。（一）引動思考是要設計激發學生將具體操作轉化成內在思考的學習活動。（二）營造數學感是要設計促進學生將知覺性操作轉化成概念性運思的學習活動。（三）共建數學是要設計藉由生生與師生討論發展學生表達思維的語言與媒介達成師生共建數學的學習活動。（四）診斷介入是要設計能診斷學生可能的學習困難及教學當下提出適當的教學介入的學習活動。（五）單元滲透的設計原則是要設計活動能貫穿整個單元教學目標的學習活動。依據五項教學活動設計原則，課堂教學活動盡量提供學生動手做、遊戲、有目標的系統性觀察活動、表達與溝通活動、論辯活動的學習機會，以達成學生的主動思考習慣、樂於學習數學。

二、數學臆測教學的活動設計原則

數學臆測教學模式包含五個階段（林碧珍，2019）：（一）造例：教師提供素材由個

別學生造例、組織及彙整、觀察例子、尋找關係。由於個別學生造一、二個例子數量，不易觀察規律性，因而需要彙整小組或全班的更多例子，以培養學生有系統地整理及觀察資料。（二）提出猜想：觀察造例階段彙整的例子尋找關係並先提出個人猜想。組內需要共同檢驗可能錯誤或非有憑有據的個人猜想，以培養學生說話有憑有據，幾分證據說幾分話的民主素養。（三）效化：小組的猜想，還需要他組更多的例子來支持或反駁；此階段是在培養學生以理性批判與說服他人的民主溝通方式的素養。設計任務時需要考量組間與組內相同或不同的例子，以能即時提出效化該猜想，方便又節省教學時間。（四）一般化：目的是將非恆真猜想以限縮範圍或條件推論到所有的例子都成立，成為恆真的猜想；將恆真猜想加入全稱量詞（如：所有、任意等）放諸四海皆準。此階段是在培養學生大膽推論成為有膽識的公民。（五）證實：將歸納得出的恆真命題利用已知知識來說服他人相信。此階段在於培養學生利用有效嚴謹的演繹推理說服他人相信。

基於上述數學臆測教學模式的五個階段，目標是在創造課堂中人人參與學習的機會，以培養學生主動思考的學習習慣。臆測教學模式是體現十二年國教課程綱要核心素養和數學素養的一種教學模式，諸如（一）藉由組織整理資料並觀察數字間或圖形間的關係，讓學生尋找規律性，欣賞數學結構規律之美。（二）藉由依據資料提出多元的數學想法，培養學生幾分證據說幾分話的民主素養。（三）藉由找例子支持自己的想法、找證據來辯護自己的主張或支持他人的想法，舉反例反駁他人的論點，培養學生理性溝通的民主素養（林碧珍，2016，2019）。

三、奠基活動融入數學臆測活動的任務設計範例

課堂教學的實踐所依循的處方是教案，數學臆測教學模式的處方是數學臆測任務。為了能有效實踐數學臆測教學，在任務設計時需考量的任務設計原則包含：（一）設計任務中的資料要先確立教學目標：設計時考量多個教學目標。（二）任務中的資料要考量猜想的類型、品質與數量。（三）設計任務中的資料要考量資料的效化：提出的猜想可能只受限於少數例子，需要考量組間不同的例子進行效化。設計臆測任務時，需要考量組和組之間的例子是相同例或相異。（四）設計彙整資料工作單需能察覺數學規律性。

本文主要是提供一個範例，如何利用現有的數學奠基活動模組轉化為數學臆測教學的活動任務設計。該範例是鄧家駿老師設計的《誰是扇形》數學奠基活動模組（鄧家駿，2018），將此模組依據十二年國教的核心素養與數學素養及對應的課程目標，整理於表2。

表 2

扇形奠基模組活動融入臆測活動之任務設計

<table>
<tr><td colspan="3">誰是扇形</td></tr>
<tr><td colspan="2">核心素養面向及項目</td><td>項目說明</td></tr>
<tr><td>核心素養</td><td>A 自主行動
A2 系統思考與問題解決</td><td>具備問題理解、思辨分析、推理批判的系統思考與後設思考素養，並能行動與反思，以有效處理及解決生活、生命問題。</td></tr>
<tr><td>數學素養</td><td>數-E-A2

數-E-C1</td><td>--具備基本的算術操作能力、並能指認基本的形體與相對關係，在日常生活情境中，用數學表述與解決問題。
--具備從證據討論事情，以及和他人有條理溝通的態度。</td></tr>
<tr><td>學習表現</td><td colspan="2">s-III-2 認識圓周率的意義，理解圓面積、圓周長、扇形面積與弧長之計算方式。</td></tr>
<tr><td>學習內容</td><td colspan="2">S-5-3 扇形：扇形的定義。「圓心角」。扇形可視為圓的一部分。將扇形與分數結合（幾分之幾圓）。能畫出指定扇形。</td></tr>
<tr><td>活動目標</td><td colspan="2">內容目標：認識扇形、扇形的定義
素養目標：
▶ 透過操作、分類有系統的整理、觀察資料、尋找規律性、發現並欣賞數學結構關係之美。
▶ 能從操作扇形中，培養分類、溝通、表述數學性質等能力。</td></tr>
<tr><td>設計理念</td><td colspan="2">（一）扇形奠基活動的「基」：扇形是圓形的一部分、頂點在圓心、尖點到弧的距離處處相等、角度可以超過 180 度，這些都是扇形定義的重要基礎概念。
（二）認識扇形不僅需要提供滿足這些構成要素的各種圖形，也需要提供不滿足扇形定義中的一個條件或兩個條件的非例，如兩邊不相等也不是半徑，兩邊相等但不是半徑、弧線不在圓弧上、頂點不再圓心上。類扇形圖卡可以透過連續對摺至少兩次來檢驗是否尖點到弧的距離處處相等。</td></tr>
<tr><td>先備知識和迷思</td><td colspan="2">（一）學生的先備知識：圓的認識及其構成要素、旋轉角、繪製給定度數的角。對摺是對半摺疊的意義。
（二）學生的迷思：常會誤判以為兩條邊加一段弧線就是扇形，必須弧線上任一點到頂點都等長。由於生活中的扇子之圓心角是小於平角，常以為圓心角大於平角的扇形不是一個扇形。</td></tr>
</table>

除了表 2 中描述模組名稱、素養指標、學習內容、學習表現、活動目標、設計理念、學生的起點知識和迷思與學習困難之外，由於有關活動材料和活動流程內容較為冗長，以及為了呈現原先奠基活動和融入臆測活動之後的對照版面，因此將活動材料和活動流程分別描述於下表 3 和表 4。

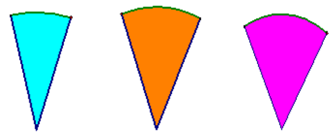
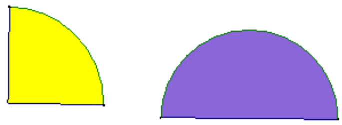
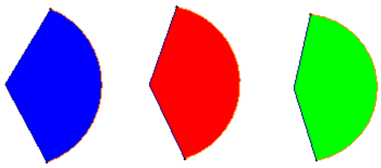
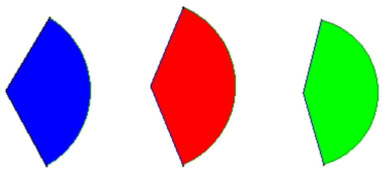
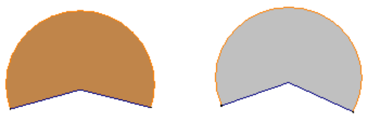
表 3

扇形奠基模組活動與融入臆測活動之任務修改前後對照

<table>
<tr><th>活動材料</th><th>奠基活動模組（修改前）</th></tr>
<tr><td>圖卡（24 張）
（見下表 4）</td><td>扇形、類扇形紙片若干個。角度分別為銳角（30、45、60 度）、直角（90 度）、鈍角（120、135、150、180、210、225 度）（以顏色區分）
第一類：正常半徑
第二類：半徑大一點（多 10%）
第三類：弧長不一樣外、兩旁的半徑皆相等</td></tr>
<tr><td>紀錄單</td><td><table>
<tr><th>對摺次數</th><th>圖示分類</th><th>得分</th></tr>
<tr><td>可以對摺 2 次以上</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>可以對摺 1 次</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>完全不能對摺</td><td></td><td></td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>學習單</td><td>一、請寫出你是如何分類這些扇型紙片呢?
二、他們都是真的扇形嗎?指出不是扇形的?說說看你為何認為它不是扇形?
三、請將你認為的扇形寫出它的性質。</td></tr>
<tr><td>回饋單</td><td>我們玩過「誰是扇形」單元的活動，度過了快樂的時光，現在請你用心想一想，「誰是扇形」帶給你（妳）的感覺是什麼呢？你（妳）學了些什麼？請用自己的話寫下來。</td></tr>
<tr><td>活動流程</td><td>每位選取圖卡 5~6 張。
▶ 每次將紙片依弧對摺，使兩邊重疊，若可以重疊得 1 分；不能重疊的放在第三類。
▶ 再對摺一次，可以重疊再得 1 分，並將可以重疊的擺在一起；不可重疊的另外擺。
▶ 請互相檢查一下。
▶ 將分類與得分紀錄在紀錄單上（見上）。
▶ 並且用量角器測量角度，用尺量旁邊的線段長，並寫在紙片上。</td></tr>
</table>

表 4

扇形奠基活動 24 張圖卡

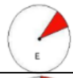
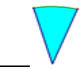
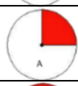
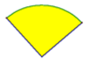
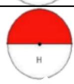
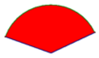
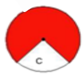
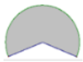
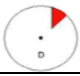
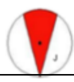
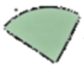
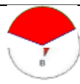
圓心角θ	扇形	類扇形：兩邊相等	類扇形：兩邊不等
θ < 90°	 30° 45° 60°	 30° 45° 60°	 45° 60° 75° 85°
θ = 90°, 180°	 90° 180°	 90° 180°	
90° < θ < 180°	 120° 135° 150°	 120° 135° 150°	
180° < θ < 360°	 210° 225°	 210° 225°	

當考慮將扇形奠基活動融入臆測活動時，我們先減少各組使用的圖卡類型和數量。在圖卡數量上，奠基活動提供 24 張圖卡，對五年級學生而言，數量太多，因此修改為每組 4 人操作一套圖卡（含 10 張圖卡和 2 個相同的圓），全班共有兩套圖卡做為臆測活動的造例素材；其中的 10 張圖卡各含扇形和非扇形圖卡 5 張。10 張圖卡設計的變因考量：頂點是否為圓心？兩邊是否為半徑？兩邊是否等長？弧是否為圓周的部分？見表 5 彙整資料單。

表 5

扇形奠基模組活動與融入臆測活動之任務修改前後對照

活動材料	奠基活動融入臆測活動模組（修改後）
圖卡（10+2 張）	教師準備從相同的圓剪出不同的扇形、類扇形圖卡共 10 張，全班提供兩套圖卡（一套給三組學生，另一套給另三組學生），每套圖卡包含 2 個圓、10 張。每套 10 圖卡的變因考量為：（1）頂點是否為圓心。（2）圓心角為銳角、直角、平角、鈍角四類 （3）兩邊是否為半徑。（4）圖卡兩邊是否等長 兩邊是否為半徑。（5）弧是否為圓弧的一部分
彙整工作單	（見下表）

圖卡（10 張）							連續對摺次數		
圓心角 **θ**	頂點圓心	兩邊半徑	兩邊相等	弧在圓周	圖卡設計＊	學生操作的圖卡	0 次	1 次	2 次以上
銳角 (30^o)	✓	✓	✓	✓					
直角 (90^o)	✓	✓	✓	✓					
平角 (180^o)	✓	✓	✓	✓					
鈍角 (135^o)	✓	✓	✓	✓					
鈍角 (225^o)	✓	✓	✓	✓					
銳角 (45^o)	×	×	✓	✓					
銳角 (30^o)	×	×	✓	✓					
銳角 (60^o)	×	×	×	×					
銳角 (75^o)	✓	×	×	×					
鈍角 (135^o)	×	×	×	✓					

＊本欄僅是提供給教師設計圖卡時的參考，給學生的彙整工作單必須刪除此欄。

活動流程

全班分成每組 4 人，每組拿到 2 張相同的圓形圖卡及 10 張圖卡（如上）。

一、造例

- 將各組合力將 10 張圖卡對摺，判斷哪些不能對摺？哪些只能對摺一次？哪些可以連續對摺兩次以上？摺好後，分別放一堆，組員再互相檢驗是否正確？
- 先將圖卡的頂點對齊圓之圓心，再檢核圖形卡的兩邊是否相等？是否為該圓形的半徑？弧是否為圓弧的一部分？請在表格上打✓或×。

表 5（續）

活動 流程	▶ 操作後進行分類，並填入彙整工作單上的表格。 ▶ 全班一起檢核各組的彙整單上的資料是否正確？ 二、提出猜想 ▶ 請每位學生觀察小組彙整單上的資料、尋找規律性、 ▶ 在個人猜想單上寫下自己發現的數學想法，每人至少寫一張，每個想法寫在一張個人猜想單上。 ▶ 組內分享個人想法，並互相檢驗想法是否有憑有據？是否正確？ ▶ 將雷同或相似的組內猜想進行歸類。 ▶ 形成小組的各種猜想。 三、效化 ▶ 先請一組上臺報告的小組猜想，並張貼彙整資料單，說明猜想內容，並判斷小組猜想是否有憑有據。 ▶ 請他組有相同的猜想拿到臺上歸類，並全班一起檢查是否正確歸類。 ▶ 是否有他組更多的例子可以支持或推翻該猜想？ ▶ 這些同一類的猜想要選用拿一個猜想作為全班猜想？如何修改這個猜想的語句？ ▶ 逐一歸類各組的猜想，依此方式持續進行，並形成全班猜想。 四、一般化 ▶ 在這些全班猜想中，如果有讓這個猜想在所有的例子都成立，還需要加什麼條件？怎麼描述這些全班猜想？ 五、證實 ▶ 這些猜想，您如何說服別人相信這個猜想永遠都是對的？

在圖卡類型上，是考慮圖卡兩邊夾角大小是銳角、直角、平角、鈍角。兩套圖卡的設計是同構的結構，僅考慮兩套圓的半徑不相等。若全班分成六組，每三組拿到相同的一套圖卡，另三組拿到相同的另一套圖卡。設計兩套圖卡是為了讓學生提出的數學想法快速從他組中找到支持例或反駁例，不僅方便效化猜想，且有助於學生以例子作為證據的理性溝通。

為了讓學童理解扇形是圓形的一部份，教師在製作 10 張扇形或非扇形圖卡時，須從同一個圓中剪下來（在彙整單上顯示的圖卡欄是對應到學生操作的 10 張圖卡，僅是為了提供給教師參考）。設計弧不在圓周上或兩邊不等長的非扇形圖卡時，若要不因粗心或視覺上而造成的錯誤判斷，我們建議需將兩邊不等的長度差距或對摺後弧的差異拉大些。

在進行操作活動前，教師需幫學生複習舊經驗：圓心、半徑、圓弧、圓周、區分連續對摺兩次和一般對摺兩次（對摺一次攤開再對摺一次共兩次）的不同。在操作圖卡前，教師必須先和學生溝通「對摺」的意義。對摺是對半摺疊，可以將一個圖形對半摺成兩

部分，使兩半部的圖形剛好重疊。學生完成對摺活動之後，每組學生合力利用完整的 2 個圓檢核 10 個圖卡的頂點是否在圓心上？圖卡的兩邊是否相等？是否為圓形的半徑？

原先設計的扇形奠基活動依據可以連續對摺 0 次、1 次、2 次分類後，學生恐難以洞察各堆圖卡深層的共通性，而難以提出扇形的定義，以致難以達成教學目標。當奠基活動遇見臆測活動時，則將每張圖卡的各種屬性和連續對摺次數整理於彙整資料單上，有順序的整理排列資料，將利於學生有系統觀察行與行、列與列、行與列資料間的關係，以提供機會讓學生體會並欣賞數學是有規律和數字背後結構之美。

四、奠基活動融入數學臆測活動的扇形教學說明

當學生完成彙整資料單上的資料後，必須各組相互檢驗是否資料正確無誤，才不會影響隨後提出數學想法的正確性。之後，學生依據彙整資料單上所有的扇形和非扇形圖卡，觀察並尋找數學規律，將所發現的數學想法寫在個人猜想單上。個人提出猜想目的在於提供每位學生獨立思考的機會，讓低成就學生有主動參與的學習機會。此時低成就的學生可能提出表象的數學想法、程度較好的學生可能提出比較有數學性或邏輯性的扇形相關的知識。依據彙整資料單，學生可能提出的數學想法包含：

(1) 可以對摺 2 次以上的圖卡，它的兩邊都是該圓的半徑，弧都在圓周上。（見表 5 圖 A, B, C, D, E）

(2) 只可以對摺一次的圖卡，它的兩邊不是半徑但等長，且弧在圓周上。（見表 5 圖 F, G）

(3) 不能對摺的圖卡，它的兩邊不是半徑且不等長，弧不在圓周上。（見表 5 圖 H, I, J）

(4) 圖卡兩邊有些是半徑，有些不是半徑。

(5) 圖卡弧有些在圓周上，有些不在圓周上。

(6) 只要圖卡的兩邊不等長，就不能兩次對摺。

(7) 只要弧不在圓周上且兩邊不是半徑，就不能兩次對摺。

之後，教師須善用學生提出（1）的數學想法，將圖卡 A, B, C, D, E 展示在黑板上，說明並定義這些圖形稱為「扇形」。讓學生瞭解構成扇形的條件：它是圓形的一部分、它的弧是圓周的部分、它的頂點在圓心上、它的兩條邊等長，也就是該圓形的半徑。活動中更須強調利用連續對摺和成為扇形的關係，讓學生討論為何任何一個扇形都可以連續對摺兩次，它是用來檢核看起來像扇子的圖形是否為扇形的有效方法之一。

當臆測教學活動進行完後，師生可以一起討論右圖雖不是此圓形的扇形，但是否為另一個圓形的扇形？它的頂點不是已知圓的圓心，此時可以用連續對摺兩次檢驗，發現對半後兩弧線並未重合，所以此圖形非一個扇形，只是形狀長得像扇子一樣。

由於教科書提供的辨識扇形活動幾乎都是伴隨著圓形出現，因此在認識扇形之後，教師可以提供右圖讓學生確認是否為扇形？以及如何確認？

肆、 結論

數學奠基活動的亮點是引起學生的學習興趣和學習動機，數學臆測教學模式的五個階段是在於培養學生的獨立思考，讓學生經驗數學知識形成的過程，強調思考的過程與方法，若將數學奠基活動融入數學臆測教學模式的造例階段中，減少了操作的圖卡數量及類型的調整與修正，增加彙整資料單的配合使用，有利於學生觀察並發現數學關係，而察覺到數學是具結構且有規律性的美，並考慮個人、小組、全班的活動型態的教學設計。數學奠基活動和臆測活動兩者的相遇，則更有機會讓學生在造例時增加趣味性和活潑性，以及有利於培養學生的數學素養。

參考文獻

林碧珍主編（2016）。**數學臆測任務設計與實踐**。臺北市：師大書苑。

林碧珍主編（2019）。**數學臆測任務設計與實踐：**整數、分數與小數篇。臺北市：師大書苑。

國立臺灣師範大學數學教育中心（2018）。**國立臺灣師範大學數學教育中心2018數學奠基進教室設計師培訓工作坊手冊**。臺北市：國立臺灣師範大學數學教育中心。

國立臺灣師範大學數學教育中心（2019）。**就是要學好數學計畫：數學奠基活動模組開發執行理念**，查詢日期：109年1月16日，檢自 https://www.sdime.ntnu.edu.tw/zh_tw/page104/page1/page1_0。

教育部（2008）。**國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域**。臺北市：教育部。

教育部（2018）。**十二年國民基本教育課程綱要數學領域課程手冊**。查詢日期：109年1月16日，檢自

http://www.cshs.ntct.edu.tw/mediafile/14490027/fdownload/21/72/2018-8-6-15-40-12-72-nf1.pdf。

鄧家駿（2018）。數學奠基活動模組：扇形分類。載於國立臺灣師範大學數學教育中心（彙編）。**就是要學好數學計畫：數學奠基活動模組開發執行理念**，查詢日期：109 年 1 月 16 日，檢自 https://www.sdime.ntnu.edu.tw/zh_tw/Resource/page202/page202_1。

梁淑坤（2020）。
數學是人文活動的結果：分享數學遊戲案例的故事。
臺灣數學教師，**41**（1），40-52
doi: 10.6610/TJMT.202004_41(1).0003

數學是人文活動的結果：分享數學遊戲案例的故事

梁淑坤
國立中山大學教育研究所

108 綱要總綱重視跨領域以及人文關懷，本文就筆者的一次教師研習課程（數學遊戲教材教法），分析上課時教學行動的資料，包括：照片 、學習單、札記及學員日記，呈現出一些人文活動結果及比較不同參與者的異同(梁淑坤，2008， 2015 2019)，其中有七巧板、統計圖表、公平的交易（單位的換算）和四面八方。另外，筆者也分析學員自編活動案例，於上課後口頭報告再以文字紀錄改編的 4 個數學遊戲設計。以上的隨堂活動事例及課後分析，呈現出數學是人文活動的教師專業發展案例，供師培及在職進修國小數學課程設計的參考（Math as human activity；見 Freudenthal, 1973）。

關鍵詞：人文活動、師資專業發展、數學遊戲

通訊作者：梁淑坤，e-mail：leung@mail.nsysu.edu.tw
收稿：2020 年 2 月 27 日；接受刊登：2020 年 3 月 31 日。

壹、前言

本文是一個數學教學案例分享，筆者乃師資培育者，常為中小學教師研習擔任講師，包括共同備課、教學演示及共同議課。無論是任教大學的師資生、在職教師、家長或是中小學生等，其教學策略加入個人特別研擬的隨堂活動，均以分組進行，使組員互動，完成任務後向同儕報告結果，整合所有結果與全班分享，形成後一起學習成長的共識域（consensus domain）。本文是其中一個案例，參與者是在職小學教師，學員來自不同地區，共完成 12 節數學遊戲教材教法的課程。由於資料宏大，本文僅供針對部分資料分析及報告。感謝教師們上課熱烈討論及認真付出，筆者留下文字記錄，與沒有參加這一次課程的教師分享結果。

貳、緣起

荷蘭學者弗賴登塔爾（Freudenthal, 1973）說過，數學是人文活動（Math as a human activity）。筆者在任何一個教學歷程，力圖加入「數學人文活動」的精神，令數學學習成為一個動人的活動過程，如同鋼琴的鍵盤，要動手動腦去玩（play），學習數學倘若只接受結果而不理會過程，就會使數學的學習失去意義。

筆者採數學是人文活動取向，是參考荷蘭數學家及數學教育家 Hans Freudenthal 對課程討論的主張，載於 Gravemeijer & Ternel（2000）文章中。荷蘭馳名的 RME（Realistic Math Education）對傳統教數學方法起了很大的改革方向，過去在教數學時，一般教師均有操作性目標、固定的評量手法甚至標準的測驗。可是，到現今世代的數學教育取向，Freudenthal 的 RME 想法已被普遍的採納。RME 重視真實（想象）性的數學教育，Freudenthal 同時受到歐洲當時的”Didaktik”及”Bildung”主張，認為教育的理想，就是人格的形式（personality formation）而不是單純的傳授知識（transmission of knowledge）。

對 Freudental 而言，課程理論不是固定、預先指定的目的及手法、教材和教法，而是和過程相關的（related to process）且可允許改變及發展的東西。

舉例來說，教師研習的課程是「數學遊戲的教材及教法」，除了連結課程標準解讀，更有教學內容分析與編擬遊戲技巧、遊戲執行的要領、撰寫想法以及教學生如何去學習等等。身為教師，如何想像學生能否透過「玩」去學習？

對數學是人文活動而言，教數學是要教學生做數學（Mathematizing）。Freudenthal 認為數學起始是一個活動，一個人文活動，而做數學（doing math）的過程比數學現成品（ready-made product）來得重要。Polya（1945）也提到做數學的重要性（Math in the making）。因此，Freudenthal 認為先教結果後教活動就是顛倒了教學（Gravemeijer & Terwel 2000, p.780）。若是採用數學是人文活動主張的話，應該展示的是教學者和學習者共同解題，一起發現問題並能把數學知識組織起來的教學過程。

為了讓學員理解其中的道理，筆者會刻意安排時間帶領遊戲的實作，筆者認為加入課程的實作（配合學習單、操作材料），可以整體呈現課的重點，包括課程地圖、遊戲編擬、執行要領、場地佈置、教具的選取及製作、活動的編寫原則、學習單的設計以及難易度的調整。筆者引導教師是用推介的數學方式帶領教師，不只是心動，而是要行動。

玩，要玩出數學的魔力！

玩，要玩出數學的學習力！

參、 師生共學形成人文活動故事四則

在某一次工作坊，筆者準備了學習單以及操作材料，這些材料是「低結構」的，能夠供老師們做各種操作，從而吸納老師們創新的想法。靜態的物料配合生動的遊戲設計，企圖引領工作坊老師多姿多彩的創意，演繹出一個個學習故事。

好的教育，一定會有學習故事發生，因為教育是人與人之間的交往，數學教學，也可以是「人文活動」。

一、百變七巧板（圖形）-（梁淑坤，2008，頁 139）

遊戲玩法：每一位組員先各自用正方形紙折出七巧板（見附錄），剪下（亦可變換顏色），再各自拼出圖案，最後組員合力，根據組員拼出的圖案編寫故事並上臺發表。這個遊戲，把數學和編故事（語文、作文）結合在一起。而數學老師們，也都是「戲精」呢！下面三則成果，是到研習會場才相遇被別人分組的教師們「玩」出的故事：新小貓釣魚、貓咪與風箏和百變哪吒。

(一)新小貓釣魚

圖 1　教師用七巧板拚搭的衣服、小貓、帆船、魚和螃蟹

一隻穿著黃色衣服的小貓咪，肚子餓啦。它想找點食物吃，遠遠望去前面有一條河。咦！在河邊上停了一條小帆船。它開心極了，一下子跳到了小帆船上，划到了河中間。可是他想呀！「咦……我怎麼釣到魚呢？」於是，它把尾巴放到了水裡，想用尾巴釣上一條魚，可是魚沒上鉤，卻被螃蟹給夾住了尾巴！

(二)貓咪與風箏

圖 2　故事由兩位老師創作，二人上台時以對話的方式講述。

貓咪：秋高氣爽的天氣，貓小飛在路上走著，他的心情太低落了，他覺得生活很無聊！走呀走呀走呀，突然，看到天空飄來了一個影子。哇!是漂亮的風箏!他在想：風箏，你在天上的生活應該特別美好吧！（突然把麥克風交給另一位老師）。

風箏：（愣住）對呀！——怎麼突然輪到我說話（看來兩人有即興發揮，大家大笑）但是，我看你在地上跑著，可以跟很多朋友說話、聊天，然後做遊戲，我覺得你的生活也很美好。

貓咪：那麼，我們就來換換角色？

風箏：好呀！我們換一下角色吧！（兩位老師交換自己的作品表示角色交換）

貓咪：我就變成了一隻風箏，在天上游呀游，飄呀飄！忽然，烏雲來了，天空開始下雨了，還伴隨著雷電交加。哎呀！媽呀！我就被擊中了！哎呀呀！旁邊的小鳥，還來啄我！原來，天上的生活並不是那麼好玩的！唉！原來風箏的生活也沒有麼好玩呀！

旁白（扮演風箏的老師）：風箏在地上，也失去了他的色彩，所以他們最後還是決定換回他們的身分，因為屬於自己的生活才是最美好的（大家都鼓掌）。也祝福我們所有的夥伴們：「做最好的自己就是最好的。」

(三)真身之「百變哪吒」

圖 3　續寫了哪吒故事，學員拼出哪吒、樹、蛇、貓、飛魚。

大家都知道剛上映的電影中，哪吒最後失去了他的肉身，只剩下了靈魂。這個時候，太乙真人找了他的祖師爺救了哪吒。之後，哪吒有一次喝醉了酒，被壞

人設計陷害變成了一棵樹，不能動彈！這個時候，太乙真人拋出了三個妖孽（拼成蛇、貓、飛魚的老師招手示意，大家哄堂大笑），指揮哪吒去降服。因為哪吒已經失去真身，所以還沒能力再變成人形，所以降伏這三個妖孽就暫時獲得靈魂的寄存處，獲得了三個新的真身。最後，哪吒成為一個百變哪吒。

分析

同樣的活動，由不同的參與者嘗試，其結果會有所不同。首先，第一則「新小貓釣魚」故事和原來的不同，由於筆者令學員先拼圖，到組員拼完取名後，才知道要用所有組員拼的圖去創故事，因此，故事就安排魚就被螃蟹吃掉算了。第二則「貓咪和風箏」有說教的部份~「我們不必羨慕他人，要滿意自己的身份」。學員（教師身份）結論出「做最好的自己就是最好的」是非常有教育價值的故事。這與梁淑坤（2008，頁 148-149）的「自由的快樂」故事有同樣的效果，那一則故事，由小學高年級學生拼出魚、人、魚缸、家及橋，故事是說小孩抓魚返家養，看到魚不快樂就放回溪中給小魚自由，小魚才會快樂，這簡單的拼七巧板活動可以被變成寓言的編寫。最後一則是哪吒，七巧板可以與有名的神話結合。以上事例結合數學、美學、語文等多領域，非常配合 108 綱要的跨領域精神。

二、人體長條圖（統計）-（梁淑坤，2015，頁 55）

遊戲玩法：把一年 12 個月分成四季，春（1-3 月），夏（4-6 月），秋（7-9 月），冬（10-12 月）——這裡不求科學層面的準確，只是相對定義；各找一位在不同季節出生的老師作為每個季節的代表，大家根據自己生日的季節分別記住各自的代表是誰；從二樓會場下到一樓大廳，代表舉起「春夏秋冬」的牌子，所有老師根據自己的生日分別站在牌子後面，形成直直的隊伍；向二樓微笑、拍照，留下「人體長條圖」的照片，如圖 4。

圖 4　人體長條圖

這個遊戲安排在上午學習的最後，前面的內容比較燒腦，恰好可以提前結束，讓所有的老師都離開會場活動一下。這個遊戲也是在示範「遊戲場地佈置」中如何根據會場條件設計遊戲活動。長條圖（條形統計圖）不用紙筆去畫，用身體排出來這樣體驗一次，卻給老師們留下深刻的印象——研習老師們紛紛把照片發朋友圈。為了這個小活動，主辦方提前一晚製作標牌，筆者提前查看場地，計算人數安排間距，估算能否站下所有老師……。

分析

梁淑坤（2015，頁 55；2019，頁 47）以堆饅頭來做統計圖表，這次場地允許及研習教師合作，成功的用身體堆出長條圖。任課教師當天的應變臨時起意加此活動，令大家有難忘的人文活動，也很生活化，找出冬天這季節最多人生日。

三、公平的交易（量）-（梁淑坤，2015，頁 111）

遊戲玩法：玩牌時，抽出一張，正反面寫不同大小的單位，雙方要講出答案；若為相等，握手說：「公平的交易」；若不相等，則不握手，說：「我不跟你交易」；兩位玩家自己決定先後順序再抽牌玩。例如：牌正面是（　）星期，背面是（　）日，甲方先說「3 星期」，乙方再說「21 日」，則甲方則可喊「公平的交易」並和乙方握手。

這個遊戲可以用於各種量的互換上，還可以用在等值分數以及分數小數等的互換上。在現場，老師們針對量的連續換算，還發明了多人玩法，比如 600 秒換成 10 分鐘是一次公平交易，10 分鐘換成$\frac{1}{6}$小時又是一次公平交易；還有老師也發明出逆向玩法，比如，小時換分鐘，再換秒；如此一來轉圈玩法也出現了，比如，4 個人圍成圈，大換小、小換大，最大的單位（天）和最小的單位（秒）是相鄰的兩個人，也要交易一次。

老師們還自己製造新牌，如下圖 5。

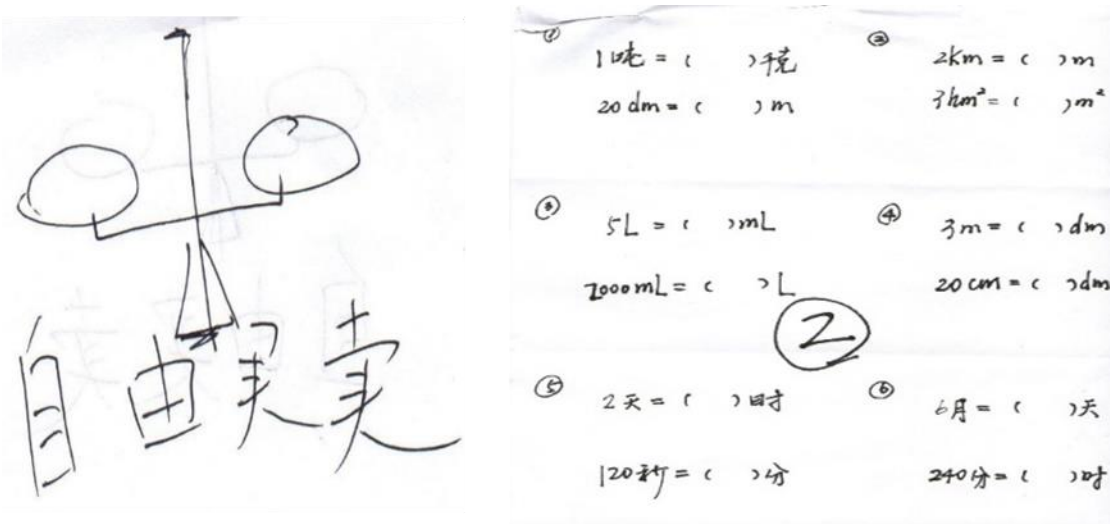


圖 5　公平的交易

分析

筆者前一項帶領活動是親子為參與者，這一次是教師為學員，於是加入發明新的交易卡及製作紙牌，大家除了玩指定的牌，也玩新發明新的換算單位的牌，筆者馬上檢查學員的創新效果。

四、四面八方（配對）

遊戲玩法：遊戲用的道具就是兒時的「東南西北」，用正方形紙折好（補充折法）；提前寫好不同的素材；利用手指指定變多下的操作得到不同的配對結果；根據配對結果進行進一步的遊戲。

筆者提供了 6 種配對情況（可說明），現場請學員發明新玩法，以下分享兩個結果。

(一)玩算數字（兩位數的加減）

玩法：每次選一個黑色數字和紅色數字（如下圖 6）；可以做一種運算計算（加/減/乘/除法）。例如：$18 + 7 = 25$、$18 - 7 = 11$、$18 \times 7 = 126$、$18 \div 7 = 2\ldots\ldots1$。

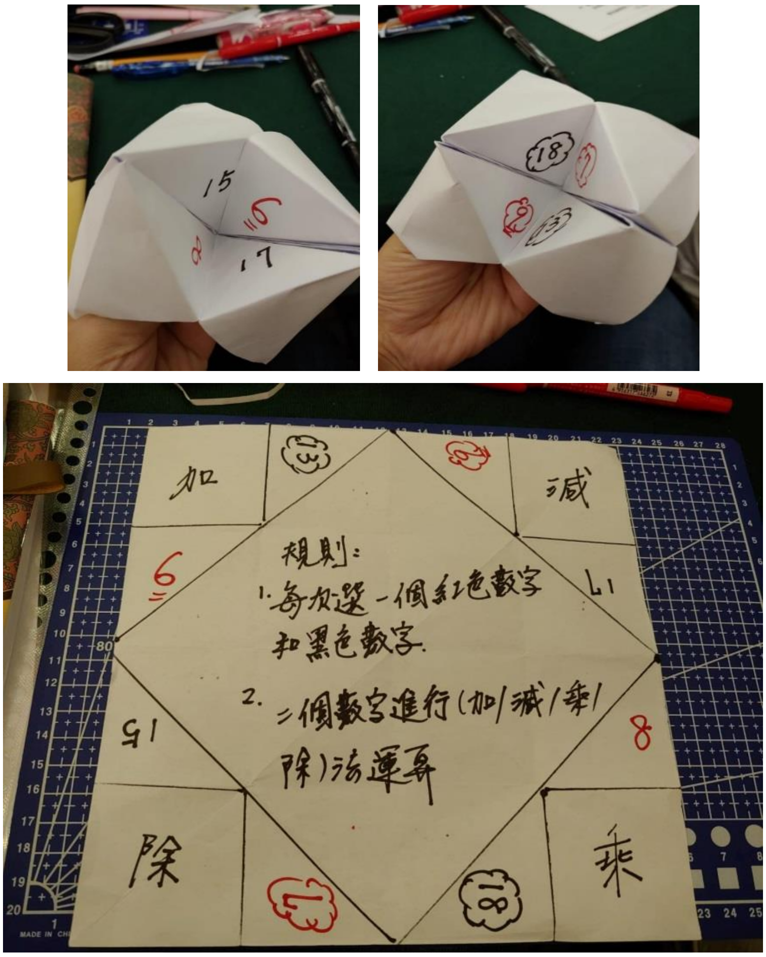


圖 6　玩算數字

(二)七夕配對（一一對應）

出自《孔雀東南飛》。

愛情故事總是和動物結合在一起，白蛇傳有白蛇、青蛇，牛郎織女有牛和喜鵲，梁山伯與祝英台有蝴蝶，想想第四個故事找什麼動物呢？咦！突然想到《孔雀東南飛》有個孔雀，特別巧！而且，前面三個結局是比較快樂的，哪怕是化蝶也很浪漫，最後一個故事卻世俗又悲慘。四個故事，配合摺紙，第一層設計是叫

做「我愛佳節」，第二層藏著的是「更愛佳人」（大家都鼓掌）——學員的設計很配合 8 月 7 日那一天（農曆七夕，中國情人節！）。沒想到，還有第三層呢！包藏在最裡面的是三個字：最愛你。真是太有創意了！

圖 7　七夕配對

分析

這活動在筆者個人網頁（http://www2.nsysu.edu.tw/leung/home.html）的親子成長班課程有介紹，由於參加者不是家長或學生而是教師，筆者延續此活動，請教師自創新的對應遊戲。

註：當天是農曆七夕，學員真有創意！

以上是筆者帶領的四個人文活動的真實故事。雖然筆者在別的研習也有帶領過以上的數學活動，活動內容一樣，但由不同學員完成，結果就會不同。而所謂「人文活動」，本就意味著老師把自己的感情、想法、趣味、創意融合進去！

數學 ~ 是人文活動，以上事例可以證明，不單只是學童，連教師也能玩出數學力！

下面是學員自編活動的案例，經筆者修改後呈現。

肆、 學員自創遊戲四則

工作坊第三天，是學員自己編擬新的數學遊戲，限於篇幅，筆者只選 4 個分享於下。

一、步步為營（20 以內的加減）

兩位一年級小朋友在一端並列站好，老師站好在另一端（約 5-8 步），二人

看數學題一起，誰最先搶到正確答案就向前一步，誰最快走到老師的位置，則為贏家，將會得到小獎品。

“Are you ready？5+12、7+10、19+1、16+3、8+9、13+7、7+6、18-6……”老師示範遊戲的玩法。

第一輪加減法遊戲決出勝負之後，下面同學還想繼續參加的，就可以換下獲勝學生，獲勝學生可以做小老師出題，直到被新的獲勝者替代。

二、大比拼、快搶分（20 以內的加減）

(一)玩法 1：速算大比拼

一個同學拿著一疊卡片給另一個同學測試，卡片問題如下表 1 呈現。

表 1

速算大比拚

卡片 正面問題	(答案)	卡片 反面問題	(答案)
$\boxed{3+17}$	(20)	$\boxed{20-17}$	(3)
$\boxed{7+8}$	(15)	$\boxed{15-8}$	(7)
$\boxed{7+7}$	(14)	$\boxed{14-7}$	(7)
$\boxed{9+8}$	(17)	$\boxed{17-8}$	(9)
$\boxed{15-6}$	(9)	$\boxed{9+6}$	(15)

一年級的小朋友，怎麼能快速判斷計算結果是否正確呢？答案就在它的反面。例如，正面的問題為 3+17，背面就是 20，題目可以根據需要設計。所以兩個學員在玩的時候，同學 A 答出答案，同學 B 馬上就能判斷出他是否是正確的，如果 A 回答的正確，這張卡片就給 A。最後看看 A 能得多少張卡片。這個玩法可以測出孩子對 20 以內加減法的熟練度，玩的同時也可以評量。

(二)玩法 2：搶分達人

可以設置裁判員，玩的兩人搶答卡片上的問題，回答得又快又對的人就把卡片拿走，最後看誰得的卡片較多。若想升級，可以將搶到的分數相加，分多的就贏。在剛才的搶牌遊戲中，遊戲者為小朋友的話，則可以同時搶；若是小朋友跟老師搶，或者是放學後小朋友回家跟家長練習這個遊戲的話，家長可以在想出答案後，以敲桌的形式，敲一次或者兩次讓孩子時間，然後讓孩子再來搶。

三、大富翁之小小投資家

我們這一組把原來用整數玩的大富翁，改成六年級學生玩的——應用百分數的大富翁。學生可以用計算器來算，保留兩位小數，具體如圖 8。

基本的設置有：起點本金 100 萬、銀行利息 5%、命運（漲停、跌停）、銀行投資 6%、凍結一次、炒股+50%、機會（縮水、增值）、投資成功+20%、投資虧損-10%、期貨交易+50%、基金交易-20%、炒股失利、黃金交易+20%、慈善贊助-20%。

(百分數的應用)　　　　　　姓名:
(六年級-用計算機算)

投資虧損 -10%	期貨交易 +10%	命運 ?	基金交易 +20%	炒股失利 -60%
投資成功 +20%	金融有風險 投資須謹慎			黃金交易 +20%
機會 ?				機會 ?
炒股成功 +50%	機會:縮水 20%/增值 30% 命運:停/漲 20%/跌停 10%			慈善贊助 -20%
凍結 一次	融資銀行 利息 6%	命運 ?	工商銀行 利息 5%	起點 本金 100 萬

圖 8　百分數大富翁

四、左右握握手（100 以內的數）

方框裡面填 100 以內的數，圓圈裡面填加或減號，4 個人一組，可以不按順序填，你想填哪就填哪，要填上 100 以內的數：□填數字，○填「+」、「-」。

如果填的正確，小組就會一起喊一個口號：「左右握握手」。此遊戲可以擴展到分數、小數或者更大的數；圓圈裡面也不只局限於加法、減法，也可以填乘號或除號。然後有餘數的除法也可以，但是中間得寫一個除號。(如：□ ⊕ □ = □……□)。

分析

第一個遊戲（步步為營）是從 1 年級 20 以內的加法教材設想，由於「+」、「-」和數字的計算很乾燥無趣，設計教師改為 2 人比賽往前走，好動的小孩，除了會算，也要協調手腳，一步一步往前走，直到目標，使無趣的數字計算變得好好玩。

第二個遊戲（大比拼、快搶分），目標教材為加減互逆，共 2 個玩法可以多加練習，複習加減互逆。

玩法 1 的卡片，提供兩位數的加減，正反面巧妙安排，使得正確與否可以由兩位玩家互相檢查，不必找老師。另外，玩法 2 是可以升級，孩子玩遊戲時連結到家長，將學習數學，從學校延伸到家中。

第三個遊戲（大富翁之小小投資家）是六年級百分比的運用，結合六年級孩子喜歡的大富翁遊戲規則，非常方便，教師不用再發明如何玩，直接用大富翁的規則即可。至於題材，運用可以「增加」、也可以「減少」的情境，以圖 8 為例，增加的有銀行的利息、期貨以及黃金的交易。減少的情境也有，包括有投資虧損、股票失利以及捐款做公益。

第四個遊戲（左右握握手）這遊戲 4 人玩之前先握手，引來不少溫馨，四人填寫數字在式子裡，不用理會順序，只要填寫後，令「=」，左邊和右邊相等即可。背後的理念是加強孩子們的默契，既要自己填也要觀察別人填什麼，才能完成一個「=」式。

上述的遊戲都不複雜，在讀者看來可能會覺得也不是那麼巧妙，但關鍵是，經過工作坊的學習，老師們在嘗試把內容遊戲化，嘗試著把遊戲方法、遊戲精神融入到教學中。最重要的是，由口頭報告形成文字介紹自創遊戲，這是學員日記中表示很喜歡的實作，可以練習文字表達，非常珍惜，更說「得意已忘言」（載於日記）。學員認為遊戲的精神與教學方法及未來自編活動，和工作坊介紹給大家的具體的遊戲均有長遠的價值和意義。教師們在學習單或日記寫出遊戲設計的理念。

伍、 人文活動的結後語

臺上臺下不分彼此，互助互愛，共同學習，共同創造，形成上述師生共學故事。紙短情長，筆者以這篇短文分享工作坊的成果與感受，期待教師們三天以來凝聚而產生的熱情，不因課程結束而曲終人散，而是能一直燃燒下去，並傳遞給孩子們。教師與孩子們牽手「玩」數學，玩出感情、玩出無限的數學力。

參考文獻

梁淑坤（2008）。**逃吧！數學瞌睡蟲**。臺灣：格子外面文化專業有限公司。

梁淑坤（2015）。**晚餐後，幸福的數學時光**。臺灣：格子外面文化專業有限公司。

梁淑坤（2019）。**嗨！我是好玩的數學遊戲**。中國：湖南科學技術出版社。【內容與梁淑坤（2015）相同，簡體字印刷】

Freudenthal, H. (1973), *Mathematics as an Educational Task*, Springer Netherlands. doi: 10.1007/978-94-010-2903-2

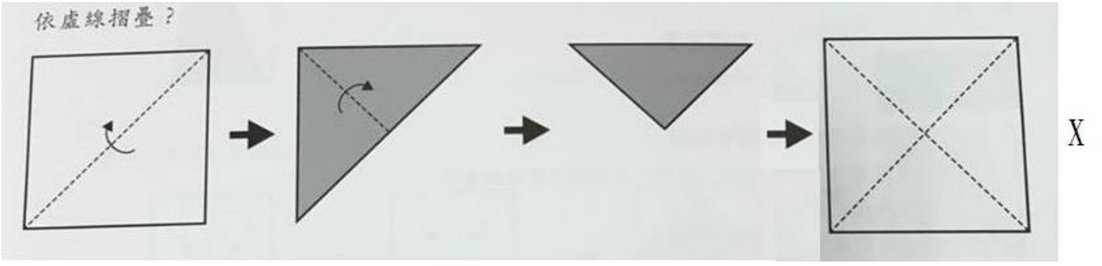
Gravemeijer K., and Terwel J. (2000) Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory, *Journal of Curriculum Studies, 32*(6), 777-796

Polya, G. (1945). *How to solve it：a new aspect of mathematical method.* Princeton University Press.

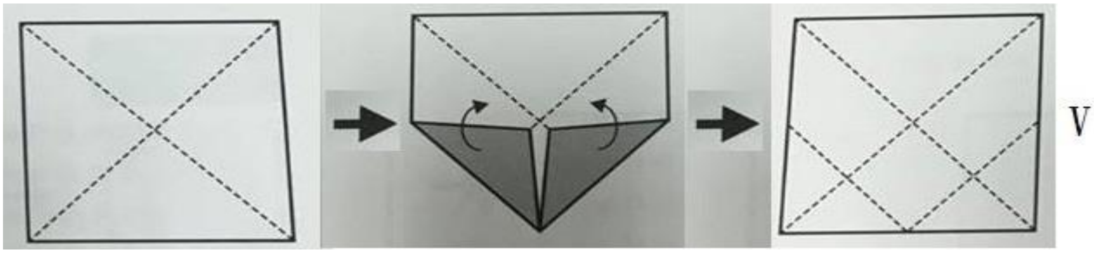
附錄　如何折出七巧板

折 X→V→l

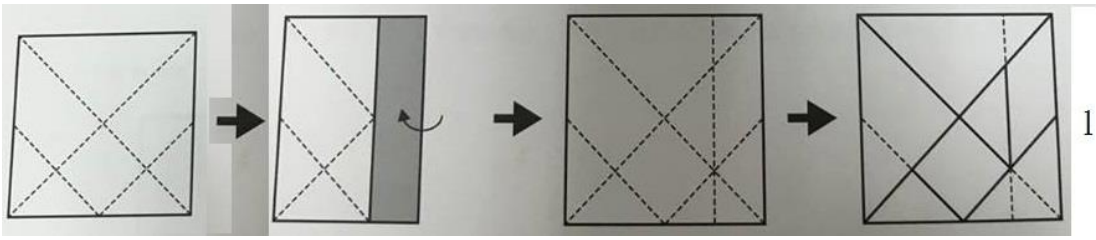
1. 先將色紙對折再對折---X



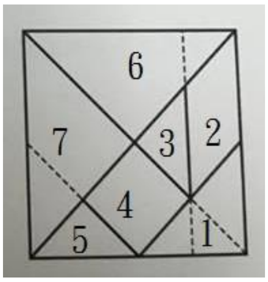
2. 再將右下角與左下角對準正方形中心---V



3. 將右邊直線往左最准中心折四分之一---l



4. 最後給予圖形編號 1~7



《臺灣數學教師》稿約

2013.09.27 編審委員會會議通過
2014.09.04 編審委員會會議修訂通過
2015.05.24 編輯委員會會議修訂通過
2016.05.15 編輯委員會會議修訂通過
2018.05.12 編輯委員會會議修訂通過
2019.05.25 編輯委員會會議修訂通過
2020.05.編輯委員會會議修訂通過

壹、《臺灣數學教師》（原名為《台灣數學教師(電子)期刊》）（Taiwan Journal of Mathematics Teachers）（以下簡稱本刊）是國立臺灣師範大學數學系及台灣數學教育學會共同發行之期刊，內容以出版數學教育領域相關議題的原創性論文為宗旨。本刊徵求符合宗旨之教學實務文稿，內容包含探討數學教學策略、學生迷思概念之教學引導、數學教育課程、教材與教法等實務經驗分享、研究問題評析、數學教育之構想、書評、論文批判、數學教學與應用性研究、數學教育研究趨勢介紹、專題演講講稿、數學學習評量、電子媒材設計、數學教師專業發展及其他數學教育相關議題等內容。本期刊徵稿分為以下兩類：

一、 實徵研究：中文文稿以8000字為原則、英文文稿以4000字為原則。

二、 實務分享：中文文稿以3000~8000字為原則、英文文稿以2000~3000字為原則。

貳、本刊每年發行兩期，分別於四月、十月出刊，並採電子方式發行。全年徵稿，隨收隨審。

參、本刊所刊之文稿須為原創性的教學實務文章，即未曾投遞或以全論文形式刊登於其他期刊、研討會彙編或書籍。若文稿在送審後自行撤稿，或出現一稿多投、修正稿回覆逾期、侵犯著作權等違反學術倫理等情況，將依下列規則處理：

一、來稿一經送審，不得撤稿。因特殊理由而提出撤稿申請者，案送主編決定；非特殊理由而自行撤稿者，一年內將不再接受該作者的投稿。

二、若文稿被發現一稿多投、侵犯著作權或違反學術倫理等情況，除文稿隨即被拒絕刊登外，一切責任由作者自負，且本刊於三年內不接受該作者來稿，並視情節嚴重程度求償。

三、作者應於發出文稿修正通知的二週內回傳修正稿及修正回覆說明書，逾期視同撤稿。若有特殊情況請先與本刊聯絡。

肆、未經本刊同意，已獲本刊接受之文章不得再於他處發表。投遞本刊之文稿須經編審委員會送請專家學者審查通過後予以刊登，被刊登文章之著作財產權歸國立臺灣師範大學數學系及台灣數學教育學會共同擁有，文責由作者自負。

伍、文稿請以中文或英文撰寫（包含摘要、文章全文、圖表、附註、參考文獻、附錄等）。文稿的呈現請使用單行間距之12級字新細明體或Times New Roman字體，以橫書方式於A4規格紙張上，文稿上下左右各留2.5公分空白，並以Microsoft Word 98以上之

繁體中文或英文文書軟體處理。

陸、文稿格式請參考《臺灣數學教師》期刊論文撰寫體例的說明或已發行之文稿，若有需要引用英文文獻以及數學符號、公式等請參考APA第六版出版手冊。交遞稿件時需注意下列事項：

一、提交投稿基本資料表

(一) 文稿基本資料。

(二) 通訊作者之姓名、服務單位、職稱、通訊地址、聯絡電話和電子郵件地址。一位以上作者時，非通訊作者只需填寫姓名、服務單位和職稱。

(三) 任職機構及單位：請寫正式名稱，分別就每位作者寫明所屬系所或單位。

(四) 頁首短題（running head）：以不超過15個字為原則。

(五) 作者註（author note）：說明與本篇研究相關的資訊。

二、提交已簽署的《臺灣數學教師》著作財產權讓與同意書。

三、文稿除正文外，還需包含中英文摘要，摘要請獨立一頁呈現，並置於正文之前。摘要頁內容包括論文題目（粗體20級字、置中）、摘要（不分段，限500字以內）、與關鍵詞（以五個為上限，並依筆畫順序由少到多排列）。

四、若為修正稿，遞交修正的文稿上請以色字標示修改處，並需提交「修正回覆說明書」，依審查意見逐項說明修改內容或提出答辯。作者應於發出文稿修正通知的二週內回傳修正稿及修正回覆說明書，若有特殊情況請先與本刊聯絡。

柒、文稿以電子郵件方式投遞，包括作者基本資料表、著作財產權讓與同意書與全文共三份資料。作者應負論文排版完成後的校對之責，編輯委員僅負責格式上之校對。

捌、投稿電子郵箱： tjmtedit@gmail.com

《臺灣數學教師》著作財產權讓與同意書

茲同意投稿至國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會共同發行的《臺灣數學教師》之一文，名稱為：

____

立書人聲明及保證本著作為從未出版之原創性著作，所引用之文字、圖表及照片均符合著作權法及相關學術倫理規範，如果本著作之內容有使用他人以具有著作權之資料，皆已獲得著作權所有者之（書面）同意，並於本著作中註明其來源出處。著作人並擔保本著作未含有毀謗或不法之內容，且絕未侵害他人之智慧財產權，並同意無償授權國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會於本著作通過審查後，以論文集、期刊、網路電子資料庫等各種不同方法形式，不限地域、時間、次數及內容利用本著作，並得進行格式之變更，且得將本著作透過各種公開傳輸方式供公眾檢索、瀏覽、下載、傳輸及列印等各項服務。國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會並得再授權他人行使上述發行之權利。惟著作人保有下列之權利：

1.本著作相關之商標權及專利權。

2.本著作之全部或部份著作人教學用之重製權。

3.出版後，本著作之全部或部份用於著作人之書中或論文集中之使用權。

4.本著作用於著作人受僱機關內部分送之重製權或推銷用之使用權。

5.本著作及其所含資料之公開口述權。

著作人同意上述任何情形下之重製品應註明著作財產權所屬，以及引自《臺灣數學教師》。

如果本著作為二人以上之共同著作，下列簽署之著作人已通知其他共同著作人本同意書之條款，並經各共同著作人全體同意，且獲得授權代為簽署本同意書。如果本著作係著作人於受僱期間為雇用機構所作，而著作權為讓機構所有，則該機構亦同意上述條款，並在下面簽署。

本著作之著作財產權係屬（請勾選一項）

☐ 著作人所有

☐ 著作人之僱用機構所有

立同意書人（著作人或僱用機構代表人）簽章：________________________

著作人姓名或僱用機構名稱：________________________

（正楷書寫）

中華民國　　年　　月　　日

Taiwan Journal of Mathematics Teachers Vol. 41, No. 1 April, 2020

Address	No.88 Sec. 4, Ting-Chou Rd., Taipei City, Taiwan, R.O.C. Department of Mathematics, National Taiwan Normal University "*Taiwan Journal of Mathematics Teachers*"
TEL	886-2-7734-6576
FAX	886-2-2933-2342
E-mail	tjmtedit@gmail.com
Website	http://tame.tw/news/news.php?class=204