

設計一般化活動促進學童乘法概念理解

陳嘉皇

崑山科技大學 通識教育中心

摘要

本研究旨在利用數學一般化的活動設計，呈現創意教學技巧，以協助學生進行乘法表的學習，增進乘法概念之理解。在教學實務上，教科書的內容與教師採用的教學方式，大多利用傳統記憶背誦乘法表的方式教導學生學習乘法概念，學生則因認知負荷與表面的理解容易產生錯誤，致使在乘法學習的歷程喪失興趣、信心和自尊。因此有必要提供教師有趣及具效用之教學方式，利用數字理論的一般化活動，透過理解及運用乘法有關的律則像是交換律、結合律等，及肢體表徵與視覺感受，強化數字變化的關係而理解乘法概念。教師利用本文教學設計介紹之技巧與策略，可提升教學效果，增進教學信心，並在實際的操作過程，提升學生學習的興趣與數學成就。

關鍵字詞：一般化、乘法概念、教學設計

壹、緒論

能理解乘法的意義，使用運算符號(\times)和等於符號(=)做橫式紀錄，並解決生活中的問題，是小學二年級學生必須發展的基本數學能力(教育部，2003)，精熟與理解算術的樞紐九九乘法，才能作為日後所有計算的基礎。但審視教科書與教師提供給學生的作業安排，並不足以充分滿足學生的需求，例如課本提供文字題，要求學生呈現算式解題，精確且立即算出結果，強迫學生背誦九九乘法表，並未解說乘法之意義與功能，致使學生計算表現良好，但概念較為匱乏。因此需有合適的挑戰與高品質的作業，協助教師擴展數學教育的觀點，提升數學專業能力，包含活動設計、數學研究、概念的解析，以改變教室實務強調學生知識背誦的現象，藉由乘法推理活動的進行，提供更多概念發展的機會並運用於真實世界以解決面對的問題。鑑此，本研究之目的如下：

(一)提供乘法概念一般化活動設計範例，增進教師數學教學效能。

(二)分析學生乘法問題解題策略，提升學生乘法概念理解表現。

貳、文獻探討

乘法常被教師視為是「同數累加」的改寫，例如 8×3 是 $8+8+8$ 的改寫，這是從心理學的觀點來看，因為乘法只不過是同數累加的「較為簡單的記述方式」。學童被期望利用乘法的算式取代手續冗長的同數累加的加法關係。教學時，「倍」的意義則被提示成「同數累加的次數」(國立編譯館，1993)。此種處理會產生一些問題，例如：1. 認為產生乘法就是累加的錯覺，過度強調乘法就是累加的說法，容易造成小數或分數的乘法障礙，或認為「凡是乘的，其積不會小於被乘數」；2. 教材過度集中，學習的精熟建築在記憶，而非活動類型的內蘊化，此舉易造成學童面對問題時，往往不究其意，逕自以乘法方式加以解題；造成日後在指導整數四則運算時，認為乘法是較加法「高級」的運算的錯誤，從而使得先乘法後加減的算則成為必然(甯自強，1994)。

乘法算則為在合成性巢狀數概念之下，利用多單位系統來描述被乘數及乘數，並在心智操作一個單位量轉換的問題，也就是倍的問題(陳竹村，1997)。所謂單位量的轉換，

是指「將數個非 1 的單位量，轉化成以 1 為單位量」的活動。例如：3 個蘋果放 1 盤，五盤共有幾個蘋果？這是以 1 盤為單位，共有五個單位，每個單位是 3 個蘋果；然後以 1 個蘋果為單位，最後得到總數為 15 個蘋果。以上述為例，把以盤為單位的量，轉化乘以個為單位的量，就是單位量的轉換。從單位量轉換的觀點來看，被乘數是異於原初的單位量，乘數是新單位量的倍數，而積數則是以 1 為單位量的倍數。從心理學的觀點來看，可將乘法看成是單位量轉化活動類型的抽象。在學習乘法初始，學童需將新的單位量，按照他的倍數，加以表現，然後重新點數，以確定積是幾個新的單位量。在乘法問題解題的過程，教師若能思考單位量轉換的問題，協助學童紀錄解決單位量轉換的過程，並能用乘號敘寫解決單位量轉換問題的活動紀錄，那麼可促進學生對乘法概念的理解。

學生若理解乘法概念，那麼應能解釋與證明執行計算時所運用的算術推理。但根據教學現場的觀察，在學習乘法這方面，教師並未提供一個概念學習的基礎，常將乘法當成是一系列加法的運算，很少提供學生進行數學關係思考的機會與活動，因此，學童接觸較艱難的問題時，常無法洞察及運用數學關係，解決等式和簡單的代數問題(陳嘉皇，2010)。「美國數學教師協會」(National Council of Teachers of Mathematics, NCTM, 2000)認為有效的數學教學應該瞭解學童需學習與明白的事物是什麼，然後支持他們接受作業的挑戰。因此，教師需要選擇與設計讓學童可以進行推理與感覺乘法概念的作業，這些作業的安排可參照 NCTM(2000)提出的建議：讓學生都能：1. 理解樣式、關係，2. 使用數學的模式呈現與瞭解數量的關係，3. 分析不同情境的變化。這些建議可以透過一般化的活動予以設計，數學一般化活動是概念與不同表徵和它們之間關係的推理，及對一些概念實體有關事實宣稱的檢驗與探究(Carpenter, Franke., & Levi, 2003； Kieran, 2004)。一般化的作業可提供學童思考路徑及發現規則等實質效益，若能透過特殊案例的分析，進行資料系統的組織、臆測和歸納，將樣式裡的規則抽離出來，呈現知識結構化與數學物件間關係轉化的技巧，也可促進解題能力的發展(Sfard, 1991)。Dreyfus (1991)視一般化為：對特殊案例進行推理或化約，辨識出其間的共通性，並正確的擴展到更大的案例上。Kaput (1999)則將一般化定義為：對數學問題擴展的可能範圍加以推理與溝通，能明確

的辨識與說明不同樣式的共通性，轉移推理與溝通至更大層面的樣式或情境。因此，學校數學教學的重點，必須要能夠促進學生一般化的推理技巧，且能表達和論證一般化。

為協助教師教導學童對數學概念的推理，而發展最佳的乘法概念理解，本文擬藉由一般化的理念設計相關作業，提供教師有趣及具效用之教學方式，透過理解及運用乘法有關的律則像是交換律、結合律等，經由肢體表徵與視覺感受，強化數字變化的關係而理解乘法概念。設計之活動總計四個單元，分別為：串珠遊戲、百格板學乘法、雙手萬能、建構乘法表等。其教學目標、內容、實施方式與學生表現分析，如下所述。

參、研究設計與實施

本文目的在於深入理解二年級學生乘法推理的發展，設計的單元分四節教學時間進行，每節課程包含2至3個活動，教學活動後即讓學生練習，以組織與精熟其學習乘法概念的經驗。學習活動呈現的順序，主要以學生乘法概念的理解與解題作為考量，首先是有關集聚單位的辨識與轉換，其次是乘法等式中數字關係的探索，再者是透過身體姿勢的操弄以連結九九乘法，最後則透過九九乘法表之建構，讓學生精熟與彈性運用乘法表所習得的知識。如何測量學生是否深化其對乘法概念的理解？研究者以學生在作業歷程呈現的乘法解題說明與表徵策略作為分析的行為的要點，將活動內容與歷程，包含師生對話、解題進行的實物操作與各式表徵予以錄影，作為教學效果分析的項目。參與的學生為台灣南部某公立小學二年級學生26人，該班學生家長社經地位中上程度，職業多為公務人員或經商，提供多元學習經驗給予學生參與，例如課後安親班、各式才藝與競賽、參訪與觀摩。教師重視學生閱讀能力之培養，利用每日早修時間進行說故事、寫作等活動，因此學生發表能力佳。本文活動於2011年3月進行，歷時一週四節課完成，上課時間為星期一、三、四、五之第一節課，教學實驗階段該班課程進度為乘法(二)單元，內容主要為0與10、直式記錄、加減法與乘法關係，乘法(一)已於開學初(二月底)教授完畢，主要內容為九九乘法表的精熟。教學活動採小組(2人1組)合作學習方式進行，學生可利用口語、畫圖、肢體動作等各式表徵方式呈現其數學概念，教師則鼓勵學生進行樣

式觀察、推理與臆測乘法表各表列式之間的關係，進而瞭解數學乘法的結構概念。

肆、研究結果與討論

有關乘法概念設計範例與學生作業產出結果的分析，以單元設計方式呈現如下，各單元之教學目標、內容、實施方式與學生表現分析，如下所述：

一、單元一：串珠

(一)教學目標

1. 透過觀察物件，將具相似特徵的物件組合成一集聚單位，以明瞭被乘數意義。
2. 明瞭相同數量之物件可組合成不同的集聚單位，熟悉單位量的轉換。
3. 瞭解乘法交換律的意義

(二)內容

活動一、

小花利用不同顏色的積木練習串珠，串好的項鍊如桌上擺放的積木(呈現具體物)，他總共用了多少個積木呢？



1 2 3 4 5 6 25 26 27

1. 首先觀察桌上的積木，你發現幾個積木之後會再重複？()個
2. 這樣的情況重複了幾次？()
3. 所以可以用()個 \times ()次=()個，算出全部的積木。

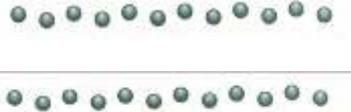
活動二、

小花第二次串好的珠子項鍊如下圖，他總共用了多少珠子呢？



1. 首先觀察珠子項鍊，你發現幾個珠子之後會再重複？()個
2. 這樣的情況重複了幾次？()
3. 所以可以用()個 \times ()次=()個，算出全部的珠子。

活動三、
利用乘法的方式計算出下列圖形有幾個圓圈？



1. 將 4 個圈起來
第一種乘法
()×()=()

2. 將 6 個圈起來
第二種乘法
()×()=()

3. 將 8 個圈起來
第三種乘法
()×()=()

4. 將 3 個圈起來
第四種乘法
()×()=()

(三)實施方式

1. 教師於每組學生(2人一組)桌上，分配已經結合好的積木(表示串珠，分別為紅藍綠三種各9個)，要求學童不能採取計數方式求出串珠的數目，可以辨別排列的串珠，幾個之後會再重複，將他一組一組拆解，計數有幾組，然後列出乘法等式，並解釋此等式的意義。
2. 比較不同組合但相同數目之串珠，可以形成乘法交換律的關係。

(四)學生表現分析

以下從活動的歷程師生對話與學生的表徵，進行描述，呈現本教材設計產生的效果。

活動一、二：

師：說說看，你是用什麼方法算出答案的！

生：我看到紅色、藍色和綠色的積木可以一組，然後又一組(指出)，這裡總共有
1. 2. 3……9組。

師：有9組，每組有幾個積木？

生：有3個。

師：9組代表什麼意思？

生：每一組有3個積木，9組表示有3個積木的有9個。

師：要怎樣才能算出積木有幾個？

生： $3 \times 9 = 27$

師： 3 表示什麼？ 9 表示什麼？ 27 表示什麼？

生： 3 是這一組的積木有 3 個， 9 是有 9 組， 27 是總共 27 個積木。

師：哪一個數字表示被乘數？是 3 ？還是 9 ？為什麼？

生： 3 表示被乘數，因為現在是 3 個一組，有 9 個一樣的。

師：除了這種排列可以算出全部的積木？還有沒有其他方法可以算出！

生：可以用 $9 \times 3 = 27$ ！

師：說說看你的方法！

生：我把積木拆掉後，同樣顏色的組在一起，這裡有 3 種顏色，每種都一樣多，這是 9 個，

所示是 $9 \times 3 = 27$ 。

師：很好！大家把積木組成這種樣子（ 9×3 ）！看一看，剛才的 3×9 和 9×3 有一樣嗎？

生：直的看是 9×3 ，橫的看是 3×9 。

師：他們一樣嗎？

生：這樣看（直）有 3 種顏色（每種有 9 個），這樣看（橫）是 1 組（ 9 組），都是 27 個。

生：這樣是 $9 \times 3 = 27$ ，這樣是 $3 \times 9 = 27$ 。

師：這樣（指直的排列）是 9×3 ，從這樣看是 3×9 ， $9 \times 3 = 3 \times 9$ ，這表示從不同的位置看，

但數目都是 27 個。

從上述師生對話內容，可知學生透過觀察和實作可以藉由物件的特徵組合成集聚單位，並從「倍」的觀念，列出乘法等式，說明被乘數、乘數與積所表示集聚單位的意義，在單位量的轉換表現是成功的，且透過物件的排列、比對乘法記錄，而得到乘法交換律的概念。接著進行活動二的操作，大多數學生（ 21 人）能正確的觀察出 5 個物件可以組成 1 組（重複），列出 $5 \times 4 = 20$ ，但有 5 位學生無法辨識出重複物件的特質，並利用非乘法方式得到正確答案，經教師解說後，此 5 位學生於下次練習時可利用樣式的觀察而獲得正確答案。一般化的概念可以協助學生發現物件相同的特質，組成集聚單位，順利利用乘法等式解題。

活動三：

從本活動歷程，可發現學生能正確的將集聚單位用於乘法記錄的被乘數與乘數位置上(如圖1所示)，並適切的解釋其意義。且經教師將學生的乘法等式依照被乘數之大小排列，要求觀察比對後，有些學生發現：同樣的數量(積)，其組合的集聚單位越大(單位量)，那麼分配的組數會越小(乘數)；亦即積一樣時，被乘數越大，乘數越小的概念。

師：根據學習單的圖形，說說看， 4×6 和 6×4 有什麼不同？

生： 4×6 是把4個圈起來，總共有6個， 6×4 是把6個圈起來，有4個。

師：那麼 4×6 和 6×4 有什麼地方一樣？

生：都是24個！

師：都是24個，為什麼可以 4×6 、 6×4 、 3×8 、 8×3 ？

生：因為他們圈起來的圈圈不一樣，有的有4組，有的有8組。

生：我也可以2個2個圈起來，就有12組。

師：我把24個圈圈可以呈現的等式寫在黑板($2 \times 12 = 24$ ， $3 \times 8 = 24$ ， $4 \times 6 = 24$ ，...)你們發現什麼？

生：被乘數越來越大！

師：還有呢？

生：乘數越來越小。



圖1：學生乘法表現

二、單元二：百格板學乘法

(一)教學目標

1. 明瞭可將乘法記錄之被乘數、乘數與積，透過百格板方式予以表徵。
2. 透過百格板的表徵瞭解不同乘法等式之間的關係。
3. 透過百格板的表徵瞭解乘法具有加法結合律的關係。

(二)內容

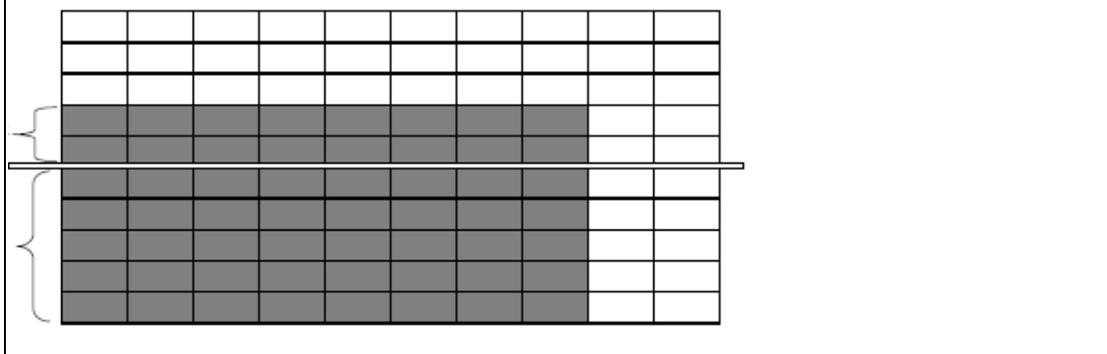
活動一、

在百格板上畫出 9×7 的範圍，想想看，總共有幾個方格？

1. 畫出 $8 \times 8 = ()$ ，總共有幾個方格？
2. 畫出 $6 \times 9 = ()$ ，總共有幾個方格？
3. 畫出 $4 \times 9 = ()$ ，總共有幾個方格？
4. 畫出 $9 \times 9 = ()$ ，總共有幾個方格？

活動二、

觀察百格板，臆測 8×7 比 8×6 多了幾個8？ 8×7 比 8×8 少了幾個8？



活動三、

觀察百格板，臆測 8×7 可否由 8×5 和 8×2 組成？

(三)實施方式

教師在黑板上呈現百格板，示範被乘數、乘數與積如何透過百格版橫、縱座標的數字顯示出積的關係，透過百格板表徵，明白 8×7 比 8×6 多1個8或 8×7 比 8×8 少1個8等數字的關係，且藉有百格板分割與組合的表徵，瞭解 $8 \times 7 = 8 \times (5 + 2)$ 結合律的概念。

(四)學生表現分析

活動一：

百格板表徵的方式可協助學生透過視覺方式，思考多元的解題策略，對於乘法推理具有正面的意義(如圖2所示)。

師：你把 4×9 用百格板畫出後，除了數數外，你想到還可以用什麼方法算出答案？

生：我把這一個地方(第四列)移到這個地方(將1格移到第一列讓其變成10)，這個再移到這裡(將1格移到第二列讓其變成10)，這個再移到這裡(將1格移到第三列讓其變成10)，這裡就剩下6個(指第四列)，這裡有3個10，有36個。

師：那麼 4×9 就是36了喔！還有沒有其他方法！

生：這4列都是9，比10少1、1、1、1(指10的位置)，所以40減4就是36。

師：這方法真好，可以把他想成是10，但要減1，這裡總共有40，要減掉4，就變成36了。

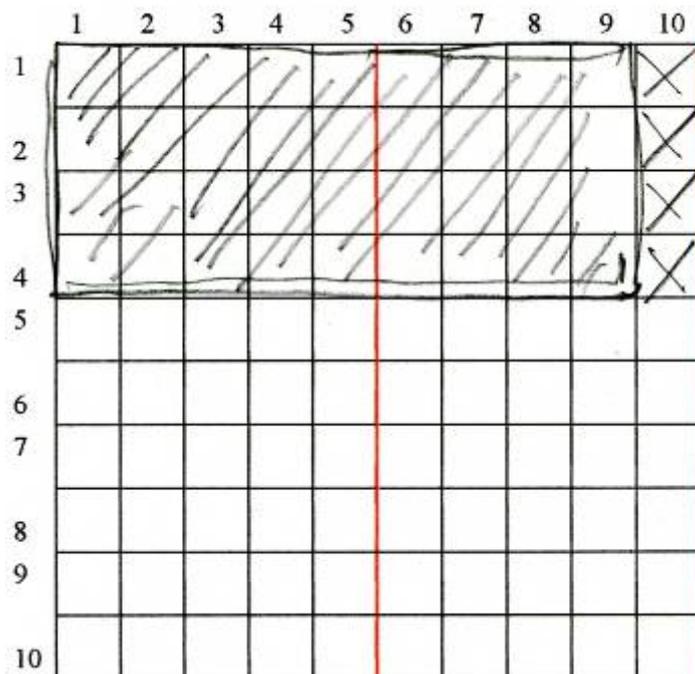


圖2：學生對於 4×9 之解題方法

活動二：

百格板呈現之表徵可讓學生透過視覺的比對與臆測，明白數字之間的關係。

師： 8×7 比 8×6 多幾個8？

生：多1個8，因為 8×8 比 8×7 多了這一個(指一列)，所以多1個8。

師：這個指一列(指示)，那麼 8×6 和 8×9 有什麼關係？

生： 8×6 比 8×9 少3個8(指著百格板)。

師：少3個8是少多少呢？

生：少24。

師：對！ 8×6 比 8×9 少3個8，也就是少24。

活動三：(如圖3所示)

師： 8×7 可否由 8×5 和 8×2 組成？

生：可以的！

師：說說看！你怎麼做！

生：8x5畫這樣！8x2畫這樣！

師：這樣畫和8x7的圖一樣嗎？

生：一樣啊！

師：你們看喔！這裡的7是不是分成5和2啊！這一塊是不是8x5？這一塊是不是8x2？可不可以！

生：可以！

師：那麼8x7裡的7可不可以寫成(5+2)？

生：可以！

師：那麼8x5和8x2合起來(指著百格板)和8x7一樣嗎？

生：一樣！

師：我們可以把8x7寫成8x(5+2)，(5+2)是代表那個數字？

生：是7

師：8x7和8x(5+2)一樣嗎

生：一樣。

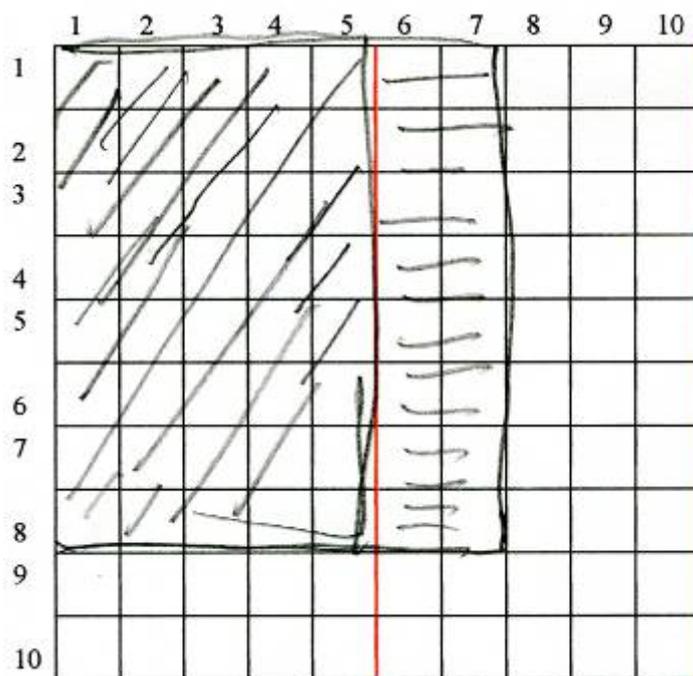


圖3：學生 $8 \times 7 = 8 \times (5 + 2)$ 之表現

本單元透過百格板之表徵，提供學生視覺比對與臆測推理的線索，順利協助學生理解乘法等式數字的關係，並激發出多元解題策略，可培養出學生彈性的乘法解題技巧，且透過引導，讓學生理解乘法之加法結合律的意義。

三、單元三：雙手萬能

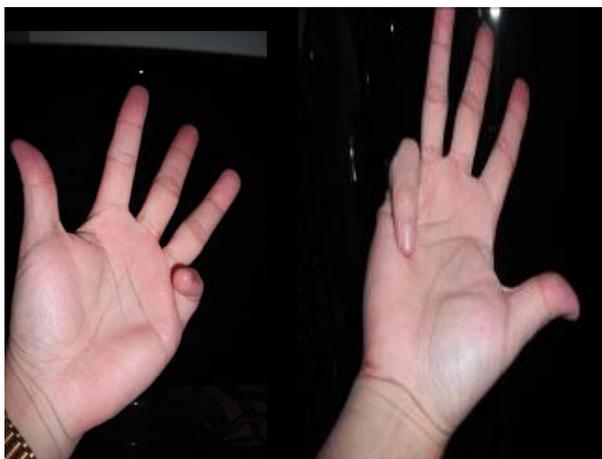
(一)教學目標

1. 利用雙手手指姿勢連結九九乘法的學習。

(二)內容

活動一、
利用兩手的手指，找出 4×9 是多少？

活動二、
利用兩手的手指，找出 9×9 是多少？



這個手勢可以寫成 () \times ()= $()$

(三)實施方式

1. 教師提供範例先說明 5×9 以內之手指遊戲(如圖4所示)：兩手張開有10隻手指，彎曲1指就成為9，但左手彎曲的手指代表不同的數字，彎左手大拇指表示 $1 \times 9 = 9$ (總計9個指頭)，彎左手食指表示 $2 \times 9 = 18$ ，左手大拇指代表10，另外左右手有8隻手指，所以表示18；彎左手中指表示 $3 \times 9 = 27$ ，左手拇指與食指表示20，另有7隻手指，所以為27；彎左手無名指時，表示 $4 \times 9 = 36$ ，因左手之拇指、食指與中指表示30，另有6隻手指，

所以是36；彎左手小指時，表示 $5 \times 9 = 45$ ，因左手張開拇指、食指、中指與無名指表示40，另右手有5隻手指，所以是45。學童瞭解姿勢規則後，教師出題提供學生示範。



圖4： $3 \times 9 = 27$ 之手指姿勢示範動作

2. 其次提供範例說明兩手姿勢學習九九乘法的規則(如圖5、6所示)：伸出大拇指、彎其他4指表示6；伸出大拇指、食指，彎其他3指表示7；伸出大拇指、食指與中指，彎其他2指表示8；伸出大拇指、食指、中指與無名指，彎小指表示9； 7×8 即左手伸出大拇指與食指，彎另3指；右手伸出大拇指、食指與中指，彎另2指；此時將伸出的手指視為10的數目，總計伸出5個手指，代表50；而彎曲的手指相乘， $3 \times 2 = 6$ ，所以總計為56。



圖5：手指姿勢表示6、7、8、9等數字之示範動作

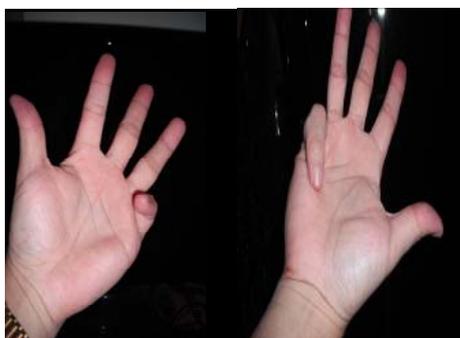


圖6： $9 \times 9 = 81$ 之示範動作

(四)學生表現分析

本單元活動由於透過學童自身的感官進行操作，學生興趣高昂，參與學習動機高，從操作歷程得知學習亦可透過身體動作而完成知識的習得，莫不驚奇與興奮(如圖7所示)。經過遊戲規則理解與動作熟練後，學童對於九九乘法表數字正確的展示，提供另一種表徵，配合記憶背誦，更容易正確解題。



圖7：學生利用手指姿勢學習九九乘法情形

四、單元四：建構乘法表

(一)教學目標

1. 熟記九九乘法表。
2. 瞭解被乘數、乘數與積之間數字的關係。

(二)內容

活動一、

將百格板空白的地方，填入適當的數字？

紅色空格是 ()×()=()

黃色空格是 ()×()=()

藍色空格是 ()×()=()

綠色空格是 ()×()=()

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

活動二、

找找看！百格板中的數字 24，可由那兩個數字相乘獲得答案？

()×()=(24)

()×()=(24)

()×()=(24)

(三)實施方式

教師提供橫、縱座標列有從1至10順序之百格板，說明與九九乘法表之間的關係後，鼓勵學生將適當的積填入對應的空格，以完成百格板中之數字。並藉由尋找相同之積，理解可由不同的被乘數與乘數相乘獲得。

(四)學生表現分析

透過本單元活動，學生可將理解乘法概念之各式表徵整合運用，正確的解題，且透過百格板對應位置數字的連結，深入理解等號代表兩邊具同樣運算結果的意義，並明白乘法具有交換律的關係。

師：紅色空格是多少？

生：7×8是56(並將兩手手指呈現7與8的姿勢)，沒錯是56！50+6=56。

師：從百格板裡找一找24可以由哪2個數字相乘獲得？

生： 3×8 、 4×6 、 6×4 和 8×3

師：可以寫成 $3 \times 8 = 6 \times 4$ ？

生：可以！乘起來都是24！

師：還可以怎麼寫？

生：也可以寫成 $3 \times 8 = 4 \times 6$ ， $8 \times 3 = 6 \times 4 \dots 3 \times 8 = 8 \times 3$

師： $3 \times 8 = 8 \times 3$ 就是乘法的交換律。

伍、結論

本文從一般化理念設計活動執行的表現，可以發現學童乘法概念學習成效頗佳，不僅參與的動機高昂，透過活動精巧的設計，更可激發產生乘法多元解題的策略，協助學生在推理與解題表現更加流暢。推理、臆測、概念理解與解釋要從教室的情境予以引發，並非是件易事，除非可為學生提供參與產出意義的機會，為學生設計富挑戰性的非例行性問題，最重要的是需要創造學生可分享其利用口語或寫作表達解題策略的環境，協助學生將這些文字與符號的策略予以連結。本研究設計提升學童數量推理的問題，協助他們練習探索乘法數字有意義的關係，如Thompson、Philipp、Thompson與Boyd (1994)等人提示的：學生需要明白解題過程中呈現的數字，問題與解題的技巧這過程是非常重要的。本研究結果是足以提供教師問題設計的參考範例，亦可鼓勵教師透過活動的參與，激發與促動學生有效解題策略的產出。

參考文獻

- 教育部(2003)。國民中小學九年一貫課程綱要：數學學習領域。台北：教育部。
- 陳竹村(1997)。數與計算教材設計對於乘法算則的一些看法。台灣省國民學校教師研習會主編：國民小學數學科新課程概說(中年級)－協助兒童認知發展的數學課程，95－118。台北縣：台灣省國民學校教師研習會。
- 陳嘉皇(2010)。國小四年級學生對乘法算則理解之研究。教育科學研究期刊，55(2)，207-231。
- 國立編譯館(1993)。國民小學數學教學指引第四冊。改編本初版。
- 甯自強(1994)。新課程對乘法啟蒙教材的處理。台灣省國民學校教師研習會主編：國民小學數學科新課程概說(低年級)－協助兒童認知發展的數學課程，77－85。台北縣：台灣省國民學校教師研習會。
- Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. W. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth: Heinemann.
- Dreyfus, T. (1991). On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th International Conference for Psychology of Mathematics Education*. (Vol. 1, pp. 33-48). Genova, Italy.
- Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, 8(1), 139-151.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical concepts: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1),

191-228.

Thompson, A. G., Philipp, R. A., Thompson, P. W., & Boyd, B. A. (1994). Computational and conceptual orientations in teaching mathematics. In *Professional development for teachers of mathematics*(pp. 79-92). Reston, VA: NCTM.