

李英、林原宏（2021）。

幾何操作探索課程對幼童幾何概念提昇之研究。

臺灣數學教師，42（1），29-47

doi: 10.6610/TJMT.202104_42(1).0003

幾何操作探索課程對幼童幾何概念提昇之研究

李英¹ 林原宏²

¹ 國立臺中教育大學數學教育學系

² 國立臺中教育大學數學教育學系

本研究旨在探討幾何操作探索課程對於幼童幾何概念的提昇效益，幾何概念有四個向度能力，包括「辨識三角形的能力」、「辨識四邊形的能力」、「辨識經平移、旋轉、翻面後的平面幾何圖形能力」、「利用三角形及四邊形，透過平移、旋轉或翻面方式，拼組出六邊形的能力」等四個向度。本研究以臺中市某公立幼兒園的大班生兩班為研究對象，採不等組前後測準實驗設計，實驗組接受幾何操作探索課程及教具自由探索的處理，控制組只接受教具自由探索的處理。研究結果發現：（一）實驗進行前，所有幼童在「辨識經平移、旋轉、翻面後的平面幾何圖形能力」向度表現稍佳，在「利用三角形及四邊形，透過平移、旋轉或翻面方式，拼組出六邊形的能力」向度表現稍差；（二）實驗處理後，實驗組幼童在四個向度能力均有顯著提昇，而控制組只有在「辨識經平移、旋轉、翻面後的平面幾何圖形能力」此一向度能力有顯著提昇；（三）單因子共變數變異數分析結果顯示，實驗組幼童在四個向度能力的提升均顯著高於控制組幼童。本研究結果顯示，幼童透過幾何操作的探索課程，能顯著提升其幾何概念。本研究結果可提供教師進行幾何操作教學活動之參考，本研究亦提出幾何教學及未來研究上的相關建議。

關鍵詞：幼童、教具、幾何概念

壹、緒論

一、研究背景與動機

「幾何」(geometry) 是人類非常早接觸的數學元素，嬰兒一出生所看到母親、醫護人員的臉是屬於拓樸幾何，當躺著或是被抱著時和周圍環境互動是一種投影幾何，乃至於入學後所學習歐氏幾何，都是源自人類的感官知覺和環境互動的產物 (Piaget & Inhelder, 2002; Piaget, Inhelder & Szeminska, 1999)。幾何學在生活的應用很廣泛，所以在數學發展史上，也佔有極為重要的地位；而各國數學教育的課程中，幾何內容也佔有一定的比率 (教育部，2008、2016、2018；NCTM, 2000; Finnish National Board of Education, 2004, 2010; Van den Heuvel-Panhuizen, 2000)，由此可見幾何在數學教育的重要性。

綜觀有關學生的幾何概念之相關研究文獻可知，仍有不少學生在幾何的學習表現上卻不盡理想，實證研究指出學生未具備應有的幾何概念或存在幾何迷思概念 (張英傑，2001；謝貞秀、張英傑，2003；Usiskin, 1982)。例如：以視覺或觸覺察看特徵來進行圖形分類活動時，無法全部說出必要充分的相關屬性。Piaget and Inhelder (2002) 和 Piaget 等人 (1999) 指出個體會隨著年齡，其幾何概念會有階段性發展。而 Clements (2003)、Crowley (1987)、van Hiele (1984, 1999) 的文獻則認為需要透過適當的教學介入 (intervention)，才可以引領學生進入幾何概念各階段的發展，而且指出幾何學習需要有具體物操作的經驗，才能提升幾何概念。有關學生的幾何概念研究，其研究對象多為國小或中學生 (何森豪，2001；梁勇能、左台益，2001；Ma, Lee, Lin, & Wu, 2015)，針對學齡前的幼童為對象的研究較少，且以瞭解簡單幾何圖形的認知表現為主 (洪文東、沈宴竹，2012)，較少探討教學介入對幼童幾何概念的提昇效益。

本研究擬採準實驗研究法探討不同實驗處理對於幼童的幾何概念提升效益，控制組採「幾何教具自由探索」，實驗組為「遊戲式操作性探索課程合併幾何教具自由探索」。且研究者透過文獻的歸納整理，在幼童階段的操作探索與教學介入，歸納出對幼童的幾何概念影響的四個向度，包括「辨識三角形的能力」、「辨識四邊形的能力」、「辨識經平移、旋轉、翻面後的平面幾何圖形能力」、「利用三角形及四邊形，透過平移、旋轉或翻面方式，拼組出六邊形的能力」等四個向度。所以，本研究以幼兒園大班幼童為研究對象，針對幾何概念設計幾何操作探索課程，採準實驗研究設計，探討幼童的幾何概念表現情形以及操作探索課程對前述四個向度能力的幾何概念提昇效益。

二、研究目的

基於前述研究背景與動機，本研究目的如下：

- (一)分析實驗處理前幼童在前述四個向度的幾何概念表現。
- (二)探討控制組和實驗組的實驗處理，對幼童在前述四個向度的幾何概念提升效益。
- (三)比較控制組和實驗組的實驗處理，對幼童在前述四個向度的幾何概念提升之差異。

貳、文獻探討

一、幼童幾何概念發展的理論

(一) J. Piaget 的幼童幾何認知發展理論

J. Piaget 藉由對幼童的觀察發現，指出幼童對於幾何及空間的理解，不是知覺性的產出，而是與環境中的圖形或物體互動內化後，形成內部表徵而建構出來的，且幼童的幾何概念發展順序先是理解拓樸幾何關係 (topological relations)，如連接性、封閉性、內外、上下或左右等關係；其後是投影幾何關係 (projective relations) 及歐氏幾何關係 (euclidean relations)，如投影線段、影子的投射、簡單的透視、直線、長度、角度、幾何量等，以上發展與人類幾何史發展的順序不同 (周筱亭、黃敏晃, 2006; Piaget & Inhelder, 2002; Piaget et al., 1999)。但後續也有相關文獻指出不同看法，認為 J. Piaget 對於幼童的幾何概念發展解釋過於簡略，且拓樸幾何並不是最先發展的幾何概念 (Rosser, Campbell, & Horan, 1986)。

(二) van Hiele 幾何認知思考模式

J. Piaget 認為幾何概念的發展，生物成熟度的重要性大於學習過程的重要性，但 van Hiele (1986) 認為學習過程比生物成熟更重要。van Hiele (1984, 1999) 提出 van Hiele 幾何思考模式，認為幾何的思考可分為五個層次，分別是層次一，視覺層次 (visualization)，能依整體輪廓辨認圖形，並以「像什麼一樣」來描述幾何圖形；層次二，分析層次 (analysis)，能依組成要素、屬性或特徵來描述圖形；層次三，非形式演繹層次 (informal deduction)，能建構不同幾何圖形間的包含關係；層次四，形式演繹層次 (formal deduction)，能嚴謹的證明定理；層次五，嚴密層次 (rigor)，能分析比較不同幾何系統，甚或創建新的幾何系統。

van Hiele 幾何思考模式具有一些重要特性，1.連續性 (sequential)，每個層次有依序

發展的次序。2.進展性 (advancement)，由某層次進展到下一層次，非因年齡成熟因素，主要是透過教學而進展。3.內因性 (intrinsic) 與外因性 (extrinsic)，學生會將之前所有層次的思考方式內化，進而形成新的概念。在這過程中，會因視覺外觀和內化而有不同概念。例如：學生會因長方形和正方形的視覺外觀而認為是不同圖形，此即為外因性；其後透過演繹認為正方形是長方形的一種，內化形成新的概念，此即為內因性。4.語言性 (linguistics)，每一層次均有自己的語言符號及系統，但到了下一層次，語言可能必需修正。例如：國小階段正方形和長方形初始是不同概念，但國中階段的矩形則包含的正方形和長方形。5.不配合性 (mismatch)，教師進行幾何教學時，必須採用該層次的語言，若採用較高層次的語言，學生可能完全無法理解 (Crowley, 1987)。

二、幼童幾何概念的課程內容

幾何正式納入課程始於國小教育階段，國小低年級階段幼童的幾何操作，是以感官進行形體辨識、描繪、仿製、複製、拼貼、堆疊等活動。有關針對幼兒園的幼童所設計的幾何課程實證研究較少，我國在《幼兒園教保活動課程大綱》內的認知領域「生活環境中的數學」學習面向中，列出兩個學習指標，分別是「覺知物體的形狀會因觀察角度的不同而不同」，以及「以自己為定點，辨識物體與自己位置的上下、前後、左右的關係」(教育部，2016)。我國頒布「幼兒園教保活動課程暫行大綱」中的施行通則第四項，特別提到幼兒自由遊戲及在遊戲中學習的重要價值，建議設計讓幼兒有興趣的活動，透過遊戲的方式，引發幼兒主動探索、試驗與發現，常保學習樂趣(教育部，2016)。九年一貫課程數學綱要國小低年級幾何主題之能力指標則包括：能由物體的外觀，辨認、描述與非累簡單幾何形體；能描繪或仿製簡單幾何形體；能認識周遭物體中的角、直線和平面；能認識周遭生活中平行與垂直的現象(教育部，2008)，而十二年國教數學綱要國小低年級的幾何表現類別之學習表現則為「從操作活動，初步認識物體與常見幾何形體的幾何特徵」(教育部，2018)。

美國 Common Core State Standards Initiative (CCSI, 2010) 所出版的《美國各州數學共同核心標準》(CCSSM) 中的課程標準，針對幼兒園大班是「辨認及描述形狀(正方形、圓形、三角形、長方形、六邊形、方塊、角、圓柱體及球體，分析、比較、製作及組合形狀)」；小學一、二年級是「形狀與其屬性的推理」，教導以屬性來辨別幾何形狀，例如三角形是封閉的且有三個邊。NCTM (2000) 所出版的 Principles and Standards for School Mathematics 《學校數學教學原則與標準》中，指出從幼兒園到小學二年級，應教

導探索及預測平面形狀與立體形體經組合或分割後的結果，能理解及應用平移、旋轉及翻面的能力。另外，芬蘭及荷蘭的教育研究報告指出，針對大班到小二的幼童的幾何課程內容，除了對圖形及形體的辨識、命名及描述等外，應著重幾何在生活上的實務應用及問題解決（Finnish National Board of Education, 2004, 2010; Heuvel-Panhuizen, 2000）。

參考以上各國針對幼兒園大班到小二幼童的幾何課程內容，研究者將本研究幼童的幾何概念研究範圍界定在幾何概念部分的四個向度，包括「辨識三角形的能力」、「辨識四邊形的能力」、「辨識經平移、旋轉、翻面後的平面幾何圖形能力」、「利用三角形及四邊形，透過平移、旋轉或翻面方式，拼組出六邊形的能力」等四個向度。

三、幼童幾何概念的教與學

(一) van Hiele 的五階段學習模式

van Hiele（1984）對幾何學習提出五個教學階段，教師透過教學可以幫助學生進展至較高的幾何思考層次，此五個教學階段分別是：階段一：詢問（inquiry），教師應藉由詢問學生問題，請學生經由觀察、討論及透過探索相關的教材教具，了解學習新思考層次的相關語詞或結構，在準備探索活動之前，教師須了解針對某主題學生所具備的前置經驗、學生應學的內容等。階段二：直接引導（directed orientation），教師準備符合主題的教材教具及活動，讓學生充分探索並完成所設計的活動，相關活動須能顯示該思考層次架構的特徵。階段三：解釋（explication），根據前面的經驗，學生透過討論將觀察到的彼此表達觀點，教師須注意學生在表達時，是否有正確使用此思考層次慣用的語言。階段四：自由探索（free orientation），經過充分的探索，學生已掌握主要概念，有能力可完成教師交付之任務或作業，甚至可採多種不同方式來完成任務。階段五：統整（integration），此階段學生已充分探索完成，教師做最後的整體總覽，幫助學生將所學習到的形成綜合概念（Crowley, 1987; van Hiele, 1999）。已有中小學的相關實證研究文獻支持 van Hiele 的五階段學習模式，本研究設計依據該學習模式理念，設計「幼童遊戲式操作性探索課程」。

(二) Clements 的幾何教與學

Clements（1998）是幼童幾何教育的著名研究者，對於 J. Piaget 幾何認知發展與教學無關的觀點並不認同，Clements and Battista（1992）也認為 van Hiele 的幾何思考發展模式理論，並不完全適合來描述幼童的幾何概念的發展，但同樣主張為協助幼童建立

幾何概念或提昇思考層次，操作教具是不可或缺的，例如幾何相關的圖形或圖片，而可操作性的教具更是扮演最重要的角色 (Clements, 1998, 2003; Clements & Battista, 1992)。基於前述 D. H. Clements 的主張，本研究在操作探索課程中，使用大量的操作性教具，以及幾何相關圖形及圖片。

參、研究方法

一、研究設計

本研究採用不等組前後測準實驗設計 (nonequivalent pretest-posttest experimental design)，實驗設計如表 1 所示。

表 1
不等組前後測準實驗設計

組別	前測	自變項	後測
實驗組	O1	X1+X2	O2
控制組	O3	X2	O4

註：X1 為進行「幼童遊戲式操作性探索課程」的教學介入
 X2 為施行「幼童幾何教具自由探索」的實驗處理
 O1 為實驗組的前測分數 O2 為實驗組的後測分數
 O3 為控制組的前測分數 O4 為控制組的後測分數

二、研究設計

研究者自編之「幼童幾何主題測驗」對實驗組及控制組施行前測，實驗組需要教學介入，所以由研究者以自編之「幼童遊戲式操作性探索課程」進行兩週 3 堂課，每堂 60 分鐘的實驗教學，同時搭配四週的幾何教具自由探索。控制組則只有四週的幾何教具自由探索，無進行實驗教學。最後對兩組以研究者自編之「幼童幾何主題測驗」施行後測。

三、研究對象

本研究以立意取樣方式，選取臺中市一所公立幼兒園的大班幼童兩班，共計 41 人。一班為實驗組，接受「幼童遊戲式操作性探索課程」的教學介入及實施「幼童幾何教具自由探索」，並由研究者擔任教學；另一班則為控制組，只實施「幼童幾何教具自由探索」。各班人數與有效受測人數，如表 2 所示。

表 2
研究樣本人數統計表

組別	人數	前測有效樣本	後測有效樣本
實驗組	22	22	20
控制組	19	19	19
合計	41	41	39

四、研究工具

本研究使用之研究工具為研究者自編的「幼童幾何主題測驗」，包含測驗一至測驗四，分別評量「辨識三角形的能力」、「辨識四邊形的能力」、「辨識經平移、旋轉、翻面後的平面幾何圖形能力」、「利用三角形及四邊形，透過平移、旋轉或翻面方式，拼組出六邊形的能力」等四個向度的幾何概念。其中包含紙筆評量（看圖圈選）及操作評量（兩張積木擺放卡），分別是測驗一「圈出所有的三角形」；測驗二「圈出所有的四邊形」；測驗三「圈出一樣的五方連塊」；以及測驗四「拼房子」。研究工具有 A、B 兩版本，總題數及題目內容相同，唯編排的題號順序不同，目的是避免同桌的兩位幼童彼此觀看而影響作答。前測時，座號單號幼童使用 A 版，座號雙號幼童使用 B 版；後測時，單號幼童使用 B 版，雙號幼童使用 A 版。A 版和 B 版的內部一致性 Cronbach 的 α 信度分別為 0.91 和 0.93，其信度可以接受。「幼童幾何主題測驗」各向度所需的能力，和「幼童遊戲式操作性探索課程」的教學介入與「幼童幾何教具自由探索」活動有相關。

五、教學活動設計

「幼童遊戲式操作性探索課程」設計，每堂課均具有明確的課程目標、遊戲名稱及操作性的活動或任務。教學模式主要採 van Hiele（1986）五階段學習模式，含透過「詢問」的方式，讓幼童觀察或思考教學者所提之問題；以「直接引導」的方式透過操作性活動來探索所提供之教具；透過「解釋」讓幼童學習該層次之慣用語及相關意義；以「自由探索」方式，讓幼童充分探索或試誤的方式解決教學者所提之問題或完成任務；最後，請幼童分享不同的方法後，由教學者來協助「統整」所有的想法，幫助幼童反思並建立概念。實驗組規劃有三堂課，每堂課 60 分鐘，由研究者擔任教學者，其內容如表 3 所示。

表 3

「幼童遊戲式操作性探索課程」中的遊戲名稱、課程目標及活動概述

第一堂課「三角形與四邊形」		
遊戲活動名稱	課程目標	活動概述與幼童操作方式
1-1 『三角形的身體圈叉遊戲』	能分辨三角形且能說出原因	1.白板介紹「頂點」、「線」、「直線」、「邊」、「角」、「封閉圖形」 2.教幼童判斷三角形的條件：封閉圖形 + 三個直線邊 + 三個角 3.給圖卡，請幼童判斷後以手臂比出圈叉來作答 4.請幼童說出是三角形的原因，或不是三角形的原因
1-2 『四邊形的身體圈叉遊戲』	能分辨四邊形且能說出原因	似前項操作方式，只是將三角形改為四邊形
1-3 『變出三角形』	能用幾何扣條製作三角形	1.老師先介紹扣條，讓幼童看到直線的「邊」 2.兩根扣條扣在一起，讓幼童看到「角」 3.讓幼童操作，選三根扣條變出三角形 4.全班分享各組不同的三角形(教師引導，觀察比較分析各種不同的三角形)，並示範哪三根扣條不能變出三角形
1-4 『變出四邊形』	能用幾何扣條製作四邊形	似前項操作方式，將扣條數量改為四根並變出四邊形

第二堂課「五方連塊變變變」

遊戲活動名稱	課程目標	活動概述與幼童操作方式
2-1 『幫忙取名字』	與生活連結後，講出長得像或相似的物體名稱，此舉將對 12 個特殊造型產生感覺	1.依序將 12 種五方連塊舉高，以旋轉、翻面、移動，不斷變換朝向，展示給幼童看，請幼童說出此片積木長得像什麼?(協助記憶) 2.鼓勵幼童講出不同的物品名稱
2-2 『五個方片連一起』	能用五個正方形分別拼出 12 種造型的連塊	五方連塊積木片吸附在白板上，一個樣式兩片，以不同方位呈現，讓幼童一次拼出同樣式的兩片，(原型與翻面+旋轉)

表 3(續)

2-3 『五方連塊請出來』	能辨識 12 種造型五方連塊	<ol style="list-style-type: none"> 1.每桌放上混和五組不同色的五方連塊，共 60 片 2.每位幼童一個夾鏈袋，並選定一個顏色 3.老師舉起某一五方連塊，幼童須從桌上找出是自己顏色又與老師同形狀的積木片，舉起給老師檢查，成功者放入夾鏈袋內
2-4 『合作拼大圖』	能用出平移、旋轉、翻面的能力，以對應方式拼組出特定圖案	<ol style="list-style-type: none"> 1.每桌發一組 12 片的五方連塊 2.一大張造型圖卡，整組合作將 12 片五方連塊依圖示擺入對應之位置

第三堂課「拼房子」

遊戲活動名稱	課程目標	活動概述與幼童操作方式
3-1 『眼睛看、頭腦想、出來拼』	能說出 6 種積木的形狀名稱且能做出基本型的拼組	<ol style="list-style-type: none"> 1.將六種形狀卡吸在白板上，問幼童每種形狀的名字 2.依序放上，詢問可否由其他形狀組合拼出?可以的請舉手?請到白板來拼拼看 3.讓所有幼童看到形狀間的關係
3-2 『幫蜜蜂及精靈拼房子』	<ol style="list-style-type: none"> a. 能用試誤法的方式，拼組出六邊形(正六邊形及特定六邊形)，能有切割組合的能力 b. 能判斷整個圖形經平移、旋轉或翻面後是否相同 	發拼房子操作卡及積木，幼童自行探索，完成任務(亦即解決問題)

六、幾何教具自由探索

實驗組及控制組兩班幼童於前測結束後，當日即放置五種幾何教具（如表 4 所示）於教室內的積木角落的木櫃中，採開放式陳列並鼓勵幼童自由探索。幼童可以在每日早上入園後晨間點心前的時間、角落時間、自由時間及下午家長接回前的等待時間進行自由探索操作。

表 4
自由探索的幼童幾何教具介紹

教具名稱	特徵說明	提供目的
幾何扣條 	5cm,7.07cm,8.66cm,10cm,12.24cm,14.14cm 各 12 條，共 72 條(紅、黃、藍、綠、橘、紫六色)	體驗的三角形及四邊形的重要屬性，例如：直線邊、角及封閉圖形等。
方形透明片 	邊長為 2.5 公分的正方形有色透明塑膠片(紅、黃、藍、綠，共四色)	利用五片正方形，以邊接連邊的方式練習組合出 12 種五方連塊(等積異形積木片)。
五方連塊 	由五正方形組合成的等積異形積木片，每組 12 片(紅、黃、藍、綠、橘，共五色)	體驗平移、旋轉、翻面(鏡射)等的空間能力。
六形六色積木 	六邊形(黃)、梯形(紅)、菱形(藍)、正方形(橘)、三角形(綠)、細長菱形(木)	體驗平面圖形的分割與組合能力。

七、資料分析

(一) 資料處理

測驗一至測驗三的作答為圈選方式舉例如圖 1 所示，每一小題或小圖均有分數，答對得 1 分，答錯得 0 分，亦即該圈而有圈或不該圈而未圈得 1 分；反之，該圈而未圈或不該圈而圈得 0 分。測驗四是利用限定的六種幾何圖形，拼組出特定的六邊形圖案，共兩張，每張均有九種不同組合方法，每一種方法得 1 分，經平移、旋轉、翻面後不得相同。利用以上計分方式，將所有得到的原始答題資料轉換成 0、1 二元值。

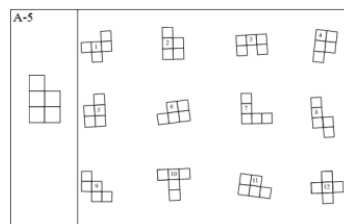


圖 1 圈出一樣的五方連塊試題範例

(二) 資料分析

根據研究目的，本研究利用 IBM SPSS 20.0 的統計軟體進行三種檢定如下：

1. 以「實驗組」及「控制組」為自變項，進行獨立樣本 t 檢定，分析四個向度的幾何概念表現和差異性。
2. 針對「實驗組」及「控制組」的前後測分數，分別進行相依樣本 t 檢定，分對幼童在前述四個向度的幾何概念提升效益。
3. 以前測分數為共變項，後測分數為依變項，進行單因子共變數分析，比較實驗組和控制組對幼童在前述四個向度的幾何概念提升之差異。

肆、結果與討論

本研究「幼童幾何主題測驗」包含測驗一至測驗四，分別評量「辨識三角形的能力」、「辨識四邊形的能力」、「辨識經平移、旋轉、翻面後的平面幾何圖形能力」、「利用三角形及四邊形，透過平移、旋轉或翻面方式，拼組出六邊形的能力」等四個向度的幾何概念。結果分析如下：

一、幼童在幾何概念的表現情形

為瞭解幼童在面幾何概念的表現情形，針對實驗處理前的前測分數，進行描述性分析和獨立樣本 t 檢定。

(一) 所有實驗樣本的前測表現

全部樣本在四個向度的幾何概念表現如表 5 所示，其中表現最佳的為測驗三，平均得分率為 86.43%，亦即幼童在「辨識經平移、旋轉、翻面後的平面幾何圖形能力」表現最佳；表現最差的為測驗四，平均得分率為 33.74%，亦即幼童在「利用三角形及四邊形，透過平移、旋轉或翻面方式，拼組出六邊形的能力」表現最差。

表 5
全部樣本的前測平均數、標準差及得分率統計表

向度	人數	平均數	標準差	總分	平均得分率
測驗一	41	10.88	2.11	20	54.39%
測驗二	25	11.04	2.39	20	55.20%
測驗三	41	124.46	14.84	144	86.43%
測驗四	41	6.07	2.82	18	33.74%

註 1：「得分率」為每位幼童在該測驗的得分除以該測驗的總分。

註 2：「平均得分率」為該測驗的每位幼童「得分率」加總後除以被施測的人數；

註 3：測驗二的人數為 25 人（非 41 人），是因為測驗前，詢問所有幼童「知道什麼是四邊形的小朋友，請舉手」。只針對有舉手的小朋友（25 人）施以測驗。

(二) 實驗組與控制組的前測成績差異情形

實驗組與控制組的前測分數如表 6 所示，從得分率可知，控制組在測驗一、測驗二、測驗四的表現上均微幅高於實驗組；只有在測驗三的表現上，是實驗組微幅高於控制組。

表 6

實驗組與控制組的前測平均數、標準差及得分率統計表

向度	實驗組		控制組	
	人數	得分率	人數	得分率
測驗一	22	52.50%	19	56.58%
測驗二	15	53.00%	10	58.50%
測驗三	22	86.90%	19	85.89%
測驗四	22	32.32%	19	35.38%

獨立樣本 t 檢定的結果如表 7 所示，該表中顯示兩組幼童前測分數的四個向度之幾何概念表現是無顯著差異。

表 7

前測獨立樣本 t 檢定

向度	t 檢定	
	t	顯著性
測驗一	-1.242	.222
測驗二	-1.135	.268
測驗三	.309	.759
測驗四	-.618	.540

二、實驗處理對兩組幼童在幾何概念的提昇效益

(一) 實驗組幼童在幾何概念的提昇效益

實驗組進行「幼童遊戲式操作性探索課程」的教學介入，並同時施行「幼童幾何教具自由探索」。以前後測分數進行成對樣本 t 檢定（paired-sample t Test），結果如表 8 所示。實驗組幼童在四個向度的幾何概念的後測與前測成績均達顯著差異，且後測成績均

高於前測成績。整體而言，教學介入與教具自由探索對本研究的四個向度之幾何概念有顯著提升影響。

表 8
實驗組幼童在四個向度的幾何概念成對樣本 t 檢定

向度	前測	後測	t
	平均數 (標準差)	平均數 (標準差)	
測驗一	10.60 (2.28)	13.75 (2.61)	3.83**
測驗二	10.57 (2.82)	15.21 (2.12)	4.96***
測驗三	124.80 (16.09)	137.40 (8.55)	4.80***
測驗四	5.75 (3.19)	9.80 (3.75)	7.06***

** $p < .01$ *** $p < .001$

(二) 控制組幼童在幾何概念的提昇效益

控制組只進行「幼童幾何教具自由探索」，以前後測分數成進行成對樣本 t 檢定，結果如表 9 所示。由表 9 得知，只有測驗三的前後測分數有達顯著差異，且後測分數平均高於前測分數，表示教具自由探索對「辨識經平移、旋轉、翻面後的平面幾何圖形能力」有顯著提昇影響，亦即「五方連塊」讓幼童探索可使其幾何概念有所提昇。在其他向度（測驗一、二、四）主要是有關角、邊、直線、封閉圖形等幾何專有名詞，以及利用三角形及四邊形，透過平移、旋轉或翻面方式，拼組出六邊形。顯示在這些的幾何概念，需要教學介入才能獲得概念提升。

表 9
控制組幼童在四個向度的幾何概念成對樣本 t 檢定

向度	前測	後測	t
	平均數 (標準差)	平均數 (標準差)	
測驗一	11.32 (1.97)	12.21 (1.55)	1.69
測驗二	12.14 (1.46)	11.71 (2.36)	-0.42
測驗三	123.68 (14.46)	129.74 (17.24)	2.14*
測驗四	6.37 (2.31)	7.21 (3.24)	1.78

* $p < .05$

三、「幼童遊戲式操作性探索課程」對幼童幾何概念的提昇效益

本研究採用不等組前後測準實驗設計，為瞭解分析「幼童遊戲式操作性探索課程」的教學介入對幼童幾何概念的提升效益，分別以各個向度的幾何概念前測分數為共變項，後測分數為依變項，進行單因子共變數分析，分析結果如下：

(一) 辨識三角形的能力

以測驗一「圈出所有的三角形」的前測分數為共變項，其後測分數為依變項。迴歸係數具同質性 ($F = .599, p = .444$)，單因子共變數分析如表 10 所示，顯示在排除前測分數的影響後，實驗處理效果有顯著差異 ($F = 4.54, p = .04$)，且實驗組 ($M' = 13.74$) 高於控制組 ($M' = 12.22$)，亦即教學介入對「辨識三角形的能力」有顯著提昇影響。

表 10
辨識三角形能力共變數分析摘要表

變異來源	離均差平方和	自由度	均方	F	事後比較
共變數 (前側一)	0.16	1	0.16		
組間 (教學)	21.78	1	21.78	4.54*	實驗組 > 控制組
組內 (誤差)	172.74	36	4.80		

* $p < .05$

(二) 辨識四邊形的能力

以測驗二「圈出所有的四邊形」的前測分數為共變項，其後測分數為依變項。因迴歸係數具同質性 ($F = .016, p = .900$)，單因子共變數分析如表 11 所示，顯示在排除前測成分數的影響後，實驗處理效果有顯著差異 ($F = 10.41, p = .005$)，且實驗組 ($M' = 15.23$) 高於控制組 ($M' = 11.69$)，亦即教學介入對「辨識四邊形的能力」有顯著提昇影響。

表 11
辨識四邊形能力共變數分析摘要表

變異來源	離均差平方和	自由度	均方	F	事後比較
共變數 (前測二)	0.06	1	0.06		
組間 (教學)	53.05	1	53.05	10.41**	實驗組 > 控制組
組內 (誤差)	91.73	18	5.10		

** $p < .01$

(三) 辨識經平移、旋轉、翻面的平面幾何圖形能力

以測驗三「圈出一樣的五方連塊」的前測分數為共變項，其後測分數為依變項。迴歸係數具同質性 ($F = 3.400, p = .074$)，單因子共變數分析如表 12 所示，顯示在排除前

測分數的影響後，實驗處理效果有顯著差異($F=4.26, p=.046$)，且實驗組($M'=137.10$)高於控制組($M'=130.05$)，亦即教學介入對「辨識經平移、旋轉、翻面的平面幾何圖形能力」有顯著提昇影響。

表 12
辨識經平移、旋轉、翻面的幾何圖形能力共變數分析摘要表

變異來源	離均差平方和	自由度	均方	F	事後比較
共變數 (前測三)	2658.92	1	2658.92		
組間 (教學)	483.02	1	483.02	4.26*	實驗組 > 控制組
組內 (誤差)	4079.56	36	113.32		

* $p < .05$

(四) 實驗組與控制組的前測成績差異情形

以測驗四「拼房子」的前測分數為共變項，其後測分數為依變項。迴歸係數具同質性($F=.537, p=.468$)，單因子共變數分析如如表 13 所示，顯示在排除前測成績的分數後，實驗處理效果有顯著差異($F=17.37, p<.001$)，且實驗組($M'=10.08$)高於控制組($M'=6.91$)，亦即教學介入對「利用三角形及四邊形，透過平移、旋轉或翻面方式，拼組出六邊形的能力」有顯著提昇影響。

表 13
利用三角形及四邊形，透過平移、旋轉或翻面方式，拼組出六邊形的能力
共變數分析摘要表

變異來源	離均差平方和	自由度	均方	F	事後比較
共變數 (前測四)	255.96	1	255.96		
組間 (教學)	96.69	1	96.69	17.37***	實驗組 > 控制組
組內 (誤差)	200.40	36	5.57		

*** $p < .001$

伍、結論與建議

一、結論

依據前面的研究結果與分析，本研究提出以下結論：

(一) 實驗處理前幼童的幾何概念表現不盡相同。

實驗前，全部幼童在四個向度的幾何概念中，以「辨識經平移、旋轉、翻面後的平面幾何圖形能力」的表現最佳；「利用三角形及四邊形，透過平移、旋轉或翻面方式，拼

組出六邊形的能力」的表現最差。相關文獻上也指出，利用多個形體的平移、旋轉或翻面來組成一個形體，是幼童較難完成的任務，因為此任務需要推理與操作經驗，本研究結果也呼應此觀點（Rosser et al., 1986）。

(二) 實驗處理前實驗組與控制組幼童的幾何概念表現無顯著差異。

根據兩組的前測平均得分率，以獨立樣本 t 檢定，可得知實驗組與控制組兩組幼童在各向度分數無顯著差異。

(三) 實驗組幼童在所有四個幾何概念向度上均有顯著提昇成效。

接受「幼童遊戲式操作性探索課程」加上「幼童幾何教具自由探索」實驗處理的實驗組幼童，在四個向度的幾何概念表現上均有顯著的正面提昇成效。

(四) 控制組幼童在一個幾何概念向度上有顯著提昇成效。

僅有「幼童幾何教具自由探索」實驗處理的控制組幼童，只有在「辨識經平移、旋轉、翻面後的平面幾何圖形能力」的表現上有顯著提昇。

(五) 操作性探索課程教學介入，對幼童在四個向度的幾何概念均有顯著的提昇效果。

針對實驗組與控制組幼童，分別以各個向度的前測分數為共變項，後測分數為依變項，進行單因子共變數分析。顯示實驗組的所使用的「幼童遊戲式操作性探索課程」對幼童幾何概念的提昇均有顯著效果，顯示設計適當的教學課程，對幼童的幾何概念是能有正向效益的。

二、建議

本研究發現「遊戲式操作性探索課程」的教學介入對幼童幾何概念提昇有顯著提升效果，如果僅有「幾何教具的自由探索」，對幼童幾何概念只有部分提昇效果。根據研究結果，提出以下建議。

(一) 工具編製建議

本研究的教學工具與施測工具均是可行的，教學工具包含各種可操作的幾何教具及圖卡；施測工具中的試題，主要以視覺化呈現，其作答方式簡單易懂，例如：把答案圈起來，均是幼童容易執行的方式。建議未來相關研究的工具編製，可參考此方法進行。

(二) 教學建議

本研究「遊戲式操作性探索課程」，是透過「想」和「玩」的幼童天性來促進幾何思維。教師在教學中以提問來促進「想」的能力和習慣，以幾何教具滿足「玩」的探索和操作。讓幼童主動探索及不斷嘗試，教師引導幼童思考方向，可成為幼童幾何有效教學的參考。

(三)後續研究建議

1.研究對象部分

本研究研究對象為一所台中市公立幼兒園大班幼童，建議可擴大研究樣本或以國小低年級的學生為對象，進行遊戲式操作性探索課程的教學介入探究。

2.研究方法部分

本研究為準實驗研究設計，研究分析以量性為主，建議未來研究可在增加一個控制組，採無教學介入且無提供幾何教具自由探索的實驗處理，來比較在不同的實驗處理下的提昇效益。此外，未來研究可增加質性探討的部分，可以透過晤談方法來瞭解幼童的幾何探索思維、自由探索的動機和時間等，將有助於瞭解幼童內心更真實的想法。

參考文獻

- 何森豪(2001)。van Hiele 幾何發展水準之量化模式--以國小中高年級學生在四邊形概念之表現為例。測驗統計年刊，9，81-129。 doi: 10.6773/JRMS.200112.0081
- 周筱亭、黃敏晃(2006)。國小數學教材分析。新北市：國立教育研究院。
- 洪文東、沈宴竹(2012)。幼兒幾何圖形測驗編製與施測。幼兒保育學刊，9，61-75。 doi: 10.6433/JCC.201203.0062
- 張英傑(2001)。兒童幾何形體概念之初步探究。國立台北師範學院學報，14，491-528。
- 教育部(2008)。國民中小學九年一貫課程綱要。臺北市：教育部。
- 教育部(2016)。幼兒園教保活動課程大綱。臺北市：教育部。
- 教育部(2018)。十二年國民基本教育課程綱要。臺北市：教育部。
- 梁勇能、左台益（2001）。國二學生空間能力與 van Hiele 幾何思考層次相關性研究。師大學報：科學教育類，46(1&2)，1-20。 doi: 10.6300/JNTNU.2001.46.01

- 謝貞秀、張英傑(2003)。國小三四年級平面圖形概念之探究。國立台北師範學院學報：數理科技教育類，16(2)，97-133。
- Clements, D. H. (1998). *Geometric and Spatial Thinking in Young Children*. National Science Foundation. VA: Arlington.
- Clements, D. H. (2003). Teaching and learning geometry. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A Research Companion to Principle and Standards for School Mathematics* (pp. 151-178). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 420–464). New York: Macmillan.
- Common Core State Standards Initiative. (2010). *Common Core State Standards for Mathematics (CCSSM)*. Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers.
- Crowley, M. L. (1987). The van Hiele model of the development of geometric thought. In M. M. Lindquist (Eds), *Learning and Teaching Geometry, K-12*, Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (pp.1-16). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Finnish National Board of Education (2004). *National Core Curriculum for Basic Education 2004.*, 2020. 12. 24 retrieval from http://www.oph.fi/english/curricula_and_qualifications/basic_education.
- Finnish National Board of Education (2010). *National Core Curriculum for Basic Education 2010.*, 2021. 01. 03 retrieval from http://www.oph.fi/english/curricula_and_qualifications/pre-primary%20education.
- Heuvel-Panhuizen, M. (2000). *Mathematics education in the Netherlands: A guided tour*. Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9. Utrecht: Utrecht University.
- Ma, H. L., Lee, D. C., Lin, S. H., & Wu, D. B. (2015). A Study of van Hiele of geometric thinkink among 1st through 6th Graders, *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 11(5), 1181-1196. doi: 10.12973/eurasia.2015.1412a

- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Piaget, J., & Inhelder, B.(2002). *The child's conception of space* (F. J. Langdon & J. L. Lunzer, Trans.). London, England: Routledge. (First published 1948)
- Piaget, J., Inhelder, B., & Szeminska, A. (1999). *The child's conception of geometry* (E. A. Lunzer, Trans.). London, England: Routledge. (First published 1960)
- Rosser, R. A., Campbell, K. P., & Horan, P. F. (1986). The differential salience of spatial information features in the geometric reproductions of young children. *The Journal of Genetic Psychology*, 147, 447-455. doi: 10.1080/00221325.1986.9914521
- Usiskin, Z. (1982). *van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry*. CDASSG Project.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2000). *Mathematics education in the Netherlands: A guided tour*. Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9. Utrecht: Utrecht University.
- van Hiele, P.M. (1984). *The child's thought and geometry*. In Fuys, Geddes, & Tischler (Eds. & Trans.), *English Translation of Selected Writings of Dina van Hiele Geldorf and Pierre M.van Hiele*, 243-252.(First published 1959)
- van Hiele, P.M. (1986). *Structure and Insight: A theory of Mathematics Education*. Orlando, FL: Academic Press.
- van Hiele, P.M. (1999). Developing geometry thinking through activities that begin with play. *Teaching Children Mathematics*, 5(6), 310-316. doi: 10.5951/TCM.5.6.0310