林勇吉（2021）。
數學與肢體運動：應用「體現認知」於數學教學。
臺灣數學教師，**42**（1），17-28
doi: 10.6610/TJMT.202104_42(1).0002

數學與肢體運動：應用「體現認知」於數學教學

林勇吉
國立清華大學數理教育研究所

應用「體現認知」（embodied cognition）的數學教學意味學生透過肢體的運動來學習數學，例如，透過手指臨摹幾何圖形，或是在地上的數線跳躍，過去文獻已證實這是有效的數學學習方式。本文主要目的在介紹體現認知的數學教學，並透過回顧文獻，分別從數學教育與心理學的角度提出理論支持，最後提供三個文獻上具體的教學教案，期待數學教師能透過閱讀本文，瞭解體現認知應用於數學教學的理念，並且進一步設計與實施體現認知取向的數學教學活動，最終受惠於學生的數學學習。

關鍵詞：手勢、具象化、肢體運動、體現認知

通訊作者：林勇吉，e-mail：yungchi.lin1227@gmail.com
收稿：2021 年 3 月 22 日；接受刊登：2021 年 4 月 14 日。

壹、前言

應用「體現認知」（或稱體感認知，embodied cognition）於數學教學，意味允許學生運用整個身體的移動或肢體動作來學習數學（Dackermann, Fischer, Nuerk, Cress, & Moeller, 2017）。舉例而言，當某人問你這個星期三到下個星期一總共經過幾天時，我們很容易不自覺就會使用手指頭來幫助計數，雖然也可以單純的把這個行為當作一種計數的策略，但更深層的來說，這是一個典型利用身體動作來學習抽象數學概念的例子（Moeller et al., 2012）。除此之外，研究也發現肢體、手勢不僅能夠促進概念理解，更能降低學習者的認知負荷（連宥鈞、吳昭容，2020）、提高學生的參與度與動機（Riley et al., 2017），因此對於低成就或是對數學沒有興趣的學生，透過肢體動作來學習數學，更有意義。

圖 1 是應用體現認知（身體動作）於課堂學習數學的兩個具體例子，左圖引自（Rosenfeld, 2017, p.52），在此活動中，學生們被任意指定到一個位置，他們必須透過身體移動，證明所在位置是否在中點上，同時他們也會討論在格子（梯子）的中點上有何特性（例如左右對稱，格子數相同等）。右圖引自（https://mathandmovement.com/about/）活動內容是讓學生透過跳格子，找出百數表上的規律，例如那些是數字都相差 10，那些數字是 9 的倍數（對角線）等，透過肢體的移動幫助理解數學概念。

圖 1 運用全身移動來學習數學的兩個範例（左圖引自“Math on the move: Engaging students in whole body learning,” M. Rosenfeld, 2017, p.52, Portsmouth, NH: Heinemann.、右圖引自 https://mathandmovement.com/about/）

儘管體現認知並不是新的理論，但是我們對於如何應用體現認知於數學教學與學習的瞭解仍然相對貧乏（Flood, Shvarts, & Abrahamson, 2020)，有鑒於此本文將透過回顧文獻說明應用體現認知於數學教學的內涵，並且介紹其具體教學範例，期待能透過本文幫助現場教師瞭解與實施體現認知取向的數學教學，最終受惠學生的數學學習。

貳、 體現認知的相關理論

體現認知（運用身體來學習數學），並不是一個憑空的想法，它的立論是基於學者們所提出的：「**思考並非與肢體動作相互分離，相反的，思考深受大腦、肢體與環境互動的影響**」（Glenberg et al., 2013, p.573）。這意味個體對數學進行認知時不是只有大腦的運作，同時也包括身體的動作的影響（Wilson, 2002）。根據身體動作幅度的大小，肢體動作可以區分成巨觀與微觀，所謂巨觀是指例如跳躍、跑步等大動作、微觀指的是細微的，例如手指頭點數、手指向某個方向、擺頭等較細微的動作。

一、體現認知的定義

體現認知是認知心理學的一支，它主要探討個體和環境之間的互動，其中的的環境，包括了社會環境、物理環境、和教學環境等三種不同類別的環境（Sriraman & Wu, 2014）。由此可知，體現認知定義的環境是寬廣的，並不侷限在「物理環境」，它廣泛的包含了文化、情境、情意面向的環境（Núñez et al., 1999），舉例而言，從數學史的角度，印度佛教文化強調虛無這個概念，特別容易發展數學上 0 的概念。有別於早期學者將「動作」與「認知」區分成兩個獨立的系統，體現認知將這兩個向度視為互相影響的系統，身體動作反應認知的結果、認知的發展也可透過身體動作促進（Sriraman & Wu, 2014）。

體現認知可以定義為知覺與動作的循環，這意味個體經由動作來回應外在的物理環境與心理內在環境的改變，接著知覺系統感受到這個改變，接著繼續進行下一步的行為。簡而言之，知覺與動作互相不可分割，交互影響（Tran, Smith, Buschkuehl, 2017）。

二、數學教育的觀點

數學教育文獻看待「體現認知」主要聚焦於「數學概念從何發展而來？」、「人們是如何學習與獲得數學概念？」，在此前提下，文獻認為：數學是人類活動（activities）的產物，它是人類與生俱來的能力，藉由我們日常生活中與環境互動，我們逐漸發展出符號化、抽象化的數學，並且相反的，在學習數學概念的過程中，也會將數學概念類比為具體的生活經驗，幫助我們思考與學習數學（Sriraman & Wu, 2020）。

上述的觀點比較貼近「認知科學」（探討知識如何獲得、心智如何運作）的觀點，在此觀點下，數學的具象化（embodiment）不是單純跟環境互動的經驗而已（如第一次開車的經驗），也沒有一定需要實際的操作教具（Núñez et al., 1999），相反的，具體化提供

我們對於人類的心智思考的深層了解，並且瞭解這些生活中的經驗所引發的概念是如何組織在我們的概念系統中。Núñez 等提供一個簡單的例子：「平衡」。平衡是我們在年紀很小時，就有的概念，透過行走、肢體活動我們擁有許多平衡的生活經驗，隨著語言發展，逐漸發展出「覺得口太乾」、「手不夠暖」、「色彩不協調」、從這種日常生活中「足夠」與「不足」這種經驗，最後才逐漸抽象化推理變成數學概念，例如代數算則中的等量公理（等式的兩邊需要平衡）。

以數學教育的觀點，個體與環境的互動的結果，最終都會形成抽象的數學概念或符號化（Tall, 2004），例如手指計數的行為，形成抽象數字符號與數字的意義；測量的行為，形成測量的數學概念（如單位、比較面積大小等）。基於上述數學是人類生活下的自然產物（Freudenthal, 1973），因此 Freudenthal 認為幾何知識的發展是基於人類的生活經驗，Bazzini（2001）、Lakoff 和 Núñez（2000）進一步解釋其他數學領域，例如算數、座標系統、函數、微積分也都能夠與日常生活的活動（行為）有良好的連結。它們強調數學知識的建立，就是人類與自然世界互動下的產物。

基於體現認知理論，三位學者 Lakoff、Johnson 和 Nunez（Bazzini, 2001）致力於建立「數學教育」專屬的認知科學（cognitive science）。其中，最核心的假設就是數學不是抽象與心智無關的（mind-free），是由我們的心智、肢體與環境共同建構而成，例如很小的小孩（出生僅三、四天）就具備有分辨 2 個一組或 3 個一組的能力（Sriraman & Wu, 2020），這意謂小孩一出生就具備有基礎的數學心智能力。更進一步，三位學者的數學教育認知科學，有三個主要的假設：（1）心智的具象化（embodiment of mind）：身體與大腦的結構影響了數學概念的架構，這意味身體與環境的互動、接收外界刺激後如何形成知覺（perception），造就了我們對於數學概念的理解。（2）無意識的認知（cognitive unconscious)：絕大多數的思考都沒有辦法簡單的得知或被瞭解，這通常需要藉由工具的檢測，換句話說，我們多在無意識的情況下，逐漸形成我們的認知。（3）隱喻的思考（metaphorical thought）：我們對於抽象概念的瞭解，通常要藉由具體的事實、物件來瞭解，這些隱喻幫助我們透過具體的物件（特別是身體的行為）來進行推理，例如我們可以把數字看作數線上的點來進行思考。

情境學習是另一個可以用來支持體現認知應用於數學教育的論點。從情境學習的角度來看，學習數學與社會、文化、歷史和情境脈絡（context）息息相關，因此真正的數學學習不是刻意去學習抽象的數學知識，而是在日常生活的情境下，學生早就累積許多無意識、豐富的數學思考，我們應該鼓勵學生利用這些情境下自然發生的思考，去了解

與獲得數學概念（Lave, 1988）。這意味日常生活的經驗（行為），可作為抽象數學概念學習良好的基礎，例如前述生活中平衡的概念可以發展成代數的運算規則。

三、心理學的觀點

由 Gallese 與 Lakoff （2005）的觀點來看，體現認知是一種「知覺動作」的活動（perceptuo-motor activity），這意味知識是透過知覺動作系統所建立的，知覺動作系統提供了一個架構，讓我們能夠從將外界所接受到的資訊建立成知識，同時這個知識也影響了我們如何行動。事實上，這是一個互相影響的過程，知覺影響我們的動作、動作之後，反過來也影響了我們的知覺（Tran et al., 2017）。腦神經科學的研究，替上述主張提供證據支持，例如芭蕾舞者看跳舞影片時腦神經活化，但非芭蕾舞者沒有，這意味動作不僅僅是動作，它會過渡到非動作的認知行為上（看跳舞影片並不需要有肢體動作）。簡單的說，認知是基於知覺（perceptions）和行為（actions），並且即使缺乏實際的具體環境刺激，認知仍然可以發生，例如我們透過心智圖像（mental imagery）或閱讀理解（reading comprehension）發展認知（Alibali & Nathan, 2012）。

認知負荷理論也是心理學中常被用來支持身體應用於認知的理論（連宥鈞、吳昭容，2020；Tran et al., 2017）。藉由動作可以降低大腦的能量或是認知負荷，幫助大腦進行更多的認知程序，因此進而幫助解題能力的發展。例如透過歪頭來閱讀歪斜的文字或是透過手指頭來幫忙計算（連宥鈞、吳昭容，2020）。另外心理學家發現，動作結合其他行為（例如看和聽）可以強化記憶，透過動作，幫助學習者日後更容易提取這個記憶，並且也可以幫助這些記憶應用在其他類似的情境中，而不是同一個情境（Tran et al., 2017）。

四、數學教育中應用體現認知的常見類型

數學教育中常見的應用體現認知的教學有三種類型：1.「教具」、2.「手勢」（gesture）、3.「全身的肢體運動」（Tran et al., 2017）。首先，教具的使用在數學教學中很常見，所謂操作教具通常代表學習者可以操弄、滑動、翻轉一個三維空間的物件。操作教具對學習者至少有三個好處（Carbonneau, Marley & Selig, 2013; Tran et al., 2017），其一，促進學生的抽象思考，這尤其對於 7-11 歲的學生特別顯著。其二，促進抽象符號與具體表徵間的連結，我們應該不難理解透過操作教具來理解數學概念的學生，能夠同時理解符號與具體表徵的意義，例如同時了解符號 3+5 的意義，也能夠使用教具來表徵 3+5。最後，幫助學生自主探索數學概念，透過具體教具的操作，學生有機會自己去探索數學概念，

而不需要全部依賴教師的講述。

「手勢」在數學教學中有不同的應用方式（Alibali & Nathan, 2012），例如：（1）指向一個目標，用來表示這個物件，如教師用手指向柱體或椎體的教具，用此柱體來解釋幾何概念。（2）模擬圖形，如在空中模擬四邊形的軌跡來表徵四邊形。（3）表徵的工具，例如用手指頭來表徵數字或物件（點數時）。儘管手勢有不同的使用方式，但手勢的使用已被證實能夠促進學生的學習，其中最大的原因是學者認為這能夠幫助降低認知負荷，進而促進學生概念的學習（連宥鈞、吳昭容，2020）。

「全身肢體的運動」，如同前述，肢體運動可以做為輔助我們認知發展的一部分，儘管這部分的研究比較少，但是這些研究結果均呈現正向的支持。例如 Fischer, Moeller, Bientzle, Cress & Nuerk（2011）的研究將學生分為兩組，其中一組必須藉由整個身體的移動去比較數字的大小：先給一個數字，而後電腦出現的數字，比較小向左踏一步、比較大向右踏一步，控制組則是在電腦上用觸控螢幕進行此任務，結果發現身體移動組在其後的數線估算活動表現較佳。

參、 應用體現認知於數學教學的範例

有鑑於「全身肢體的運動」較少被使用在數學教育上，我們特別整理文獻三個範例教學方式，作為教師在教學或設計活動上的參考。

一、繩索多邊形（參考 http://www.malkerosenfeld.com/lesson-plans.html）

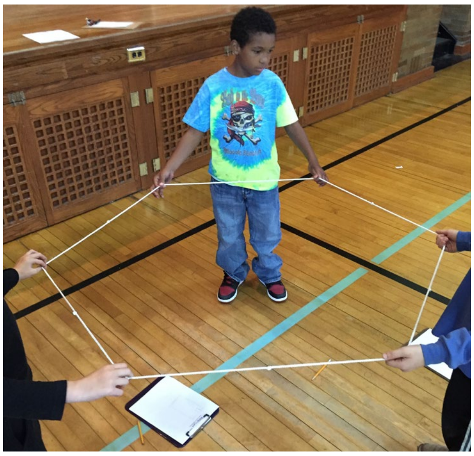

圖 2　繩索多邊形範例（引自 http://www.malkerosenfeld.com/lesson-plans.html）

1. **簡介**：3-5 個學生一組，小組利用已標示出 12 個繩結的童軍繩（每個結代表 1 英

呎，繩長 12 英呎，可幫助學生測量邊長）、運用他們的身體去探索與建構多邊形。

2. **對象**：國小至高中，可根據不同年級調整創作圖形的難易程度。

3. **目標**：學生通常在紙上創作或觀察多邊形，透過身體的應用與真實的生活情境，學生需要在新的情境下（有別與紙筆）去探索與了解多邊形的幾何性質，例如「在不用紙筆的狀況下，他們要如何去判斷或建立直角？」、「給定的繩長可以建構出最大的正多邊形為何？」「如何測量？」

4. **教學流程範例**

(1) 要求學生探索他們的繩子，然後小組分享他們的觀察與疑問。

(2) 要求學生用繩子與身體創造至少一個正多邊形（如圖 2）。

(3) 教師巡視各小組的工作，了解它們如何將在紙本上學習到的多邊形知識應用到此情境上。

(4) 已完成任務的組別，教師詢問：「你們是否已窮盡所有可能的圖形？」「可以創造出多少不同的正方形？」「不同的菱形？」「探討相似三角形邊長的放大比例與周長的關係。」。

(5) 教師可以要求完成任務的組別創作不同的多邊形，例如任意的多邊形、凹多邊形等。

(6) 教師可以要求學生旋轉、翻轉這個圖形；教師可以要求連續動態一系列作出三個不同的幾何圖形，例如正方形、長方形、平行四邊形。

(7) 全班總結：要求學生畫出或展示他們創造的圖形，並說明他們的心得和反思。

(8) 注意：上述除了畫出也可以用教具（例如扣條、幾何釘板）精確表示出此幾何圖形，並精確的探討這些圖形的幾何性質（例如點、線面）。

二、百格版跳躍（參考 Koontz, 2010）

圖 3 跳躍百格板範例（引自“Math and movement training manual for elementary grades,” S. Koontz, 2010, p.136）

1. **簡介：**製作大型百格板或數線，學生可在上跳躍（圖 3）。
2. **對象：**加法、減法、乘法可適用於 1-2 年級；負數運算（如加上負數）、開根號可適用於 7 年級。
3. **目標：**有別於在紙上使用百格板或數線，透過身體在百格板或數線上跳躍，發展對於運算(加、減、乘、除)的知識，加深對於運算的印象，並增加趣味性。
4. **教學策略範例**
   (1) 數字散步：將一堆五元硬幣錢幣放在紙杯中，不同的紙杯有不同的數量，請學生任取一個紙杯，計算出錢幣的總和，從百格板的 1 出發依序走到答案的位置，其他同學透過最終位置判斷答案的正確性。
   (2) 數字跳躍：每 4 個一數（可任意調整幾個一數），從 1 出發，跳躍所有百格板上 4 個一數的數字，作為 4 的乘法教學的前置概念。
   (3) 偶數跳躍：跳躍百格板上所有的偶數。
   (4) 數字加減：製作不同的數字加減牌卡，透過抽牌卡，以走動的方式進行加減運算，例如先抽一數字 12，接著抽加法，再抽 25，請同學行走，學生可以先向下走兩行到達 32，再向右走 5 格到達 37 的位置；也可以直接從 12 出發依序走 25 格到達 37。
   (5) 指令控制：上述數字加減或行走規則也可以由其他同學控制，類似「老師說」的遊戲，例如台下的一位同學可以規定遊戲者先走到 5 的倍數的位置，接著另外一位台下同學說加 10，在百格板上的同學(遊戲者)就必須依照指令走到相對應的數字上。
   (6) 完全平方數：要求同學用黑色紙覆蓋百格板上所有完全平方數的數字上(1, 4, 9…)，也可以反過來要求找 4, 9, 81 的根號
   (7) 丟骰子：數字的行走也可以透過丟骰子來進行，例如丟兩個骰子，走到相對應位置。
   (8) 走到 100：兩位學生互相競賽，一個骰骰子先出發，根據骰子數值走相對應的步數，例如骰到 5 可以走 5 步，但是不一定要依序前進（1, 2, 3…），例如可以從 1 走到 10 接著再走 4 步到達 14，先走的 100 的人獲勝，但是被追到的人要退回起點（同一位置），例如兩人同在 52 上，先到者要退回起點。此活動可訓練學生觀察百格板數字間的關係，例如往下一行都是加 10、往右都是加 1。

(9) 總結活動：學生完成任務後，可以與同學探討身體的移動，與所採用的思考或計算策略間的關係（即是與數學思考、數學概念間的連結），例如在 12+25 的活動中，可以和學生 12 向下走一格變成 22，是加了 10 的意思，在向下走一格是在多 10 的意思，向右走 5 格是加 5 的意思。

三、**身體幾何**（參考 Belcastro & Schaffer, 2011）

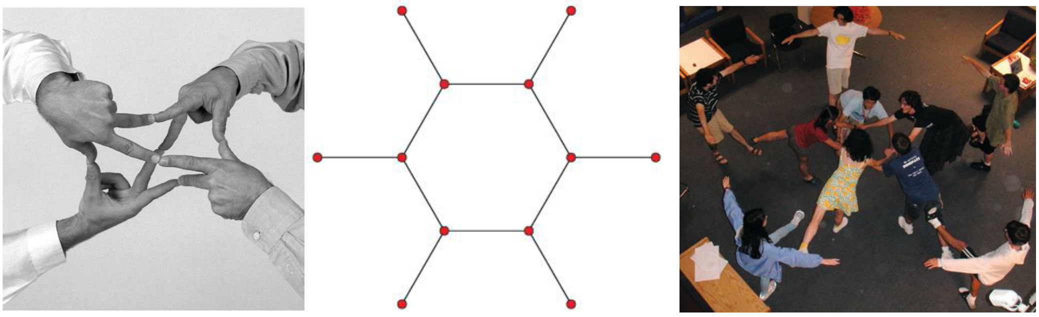

圖 4 身體幾何範例（引自“Dancing mathematics and the mathematics of dance,” S.-M. Belcastro & K. Schaffer, 2011, *Math Horizons, 18*(3), pp.18-19）

1. **簡介**：使用手指或身體排列立體圖形（圖 4）。
2. **對象**：國小至高中，可設計不同難度的圖形。
3. **目標**：透過手指或身體排列出立體圖形，例如正立方體，此過程中學生需要探索立體或平面圖形的幾何性質。
4. **教學策略範例**

(1) 小組合作，要求學生用手指排出立體圖形，例如正立方體、長方體或正四面體等（圖 4，最左邊）。

(2) 小組合作，給出指定的圖形，要求學生用身體排出，如給定上圖 4 的正六邊形（中間），學生排出如圖 4 最右邊的圖。

(3) 要求同學在紙上，描繪剛剛用手指或身體所排列出立體圖形(描繪成標準幾何圖形)或使用立體圖形教具（頂點珠、造型棒）複製剛剛所排出的幾何圖形或形體，再進一步與學生共同探討其幾何性質或概念，例如哪裡是圖形的邊、哪裡是圖形的角、不同形體或圖形有何幾何性質？

肆、 結論

綜合上述，應用「體現認知」於數學教學已經被認為是有效且具有完善理論支持的教學策略，然而目前的教學現場中，似乎較聚焦在「教具」的使用，但對於同樣應用體現認知的「手勢」和「肢體運動」較為忽略，因此，我們期待透過本文，啟發數學教師對於後面兩種類型活動的重視，進一步能開發更多可行且有意義的教案，如此真正能落實文獻中「思考與肢體活動不可分割」的觀念，幫助學生能同時使用大腦與身體來學習。我們相信這樣的教學策略對於數學弱勢的學生尤其特別重要，例如低年級或學習扶助的學生，透過此方式將有機會發展更好的學習。

參考文獻

連宥鈞、吳昭容. (2020)。手勢融入範例對低能力學生運算與幾何學習的影響. 臺灣數學教育期刊，7(2)，45-70。doi: 10.6278/tjme.202010_7(2).003

Alibali, M. W., & Nathan, M. J. (2012). Embodiment in mathematics teaching and learning: Evidence from learners' and teachers' gestures. Journal of the Learning Sciences, 21(2), 247-286. https://doi.org/10.1080/10508406.2011.611446

Bazzini, L. (2001). From grounding metaphors to technical devices: a call for legitimacy in school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 47*, 259–271. doi: 10.1023/A:1015143318759

Belcastro, S.-M., & Schaffer, K. (2011). Dancing mathematics and the mathematics of dance. Math Horizons, 18(3), 16-20. https://doi.org/10.4169/194762111X12954578042939

Carbonneau, K. J., Marley, S. C., & Selig, J. P. (2013). A meta-analysis of the efficacyof teaching mathematics with concrete manipulatives. Journal of Educational Psychology, 105(2), 380–400. http://doi.org/10.1037/a0031084

Dackermann, T., Fischer, U., Nuerk, H.-C., Cress, U., & Moeller, K. (2017). Applying embodied cognition: from useful interventions and their theoretical underpinnings to practical applications. ZDM, 49(4), 545-557. doi:10.1007/s11858-017-0850-z

Fischer, U., Moeller, K., Bientzle, M., Cress, U., & Nuerk, H.-C. (2011). Sensori-motor spatial training of number magnitude representation. Psychonomic Bulletin & Review, 18(1), 177–183. doi:10.3758/s13423-010-0031-3.

Flood, V. J., Shvarts, A., & Abrahamson, D. (2020). Teaching with embodied learning technologies for mathematics: responsive teaching for embodied learning. ZDM., 52, 1381–1396. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01165-7

Freudenthal, H. (1973). Mathematics as an educational task. Reidel: Dordrecht.

Gallese, V., & Lakoff, G. (2005). The brain's concepts: The role of the sensory-motor system in conceptual knowledge. Cognitive Neuropsychology, 22, 455–479. doi: 10.1080/02643290442000310

Glenberg, A. M., Witt, J. K., & Metcalfe, J. (2013). From the revolution to embodiment: 25 years of cognitive psychology. Perspectives on Psychological Science, 8(5), 573-585. doi:10.1177/1745691613498098

Koontz, S. (2010). Math and movement training manual for elementary grades. Retrieved from https://mathmadefun.com/product/math-movement-training/

Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being (Vol. 6). New York: Basic Books.

Lave, J. (1988). Cognition in practice: mind, mathematics and culture in everyday life. Cambridge: Cambridge University Press

Moeller, K., Fischer, U., Link, T., Wasner, M., Huber, S., Cress, U., & Nuerk, H.-C. (2012). Learning and development of embodied numerosity. Cognitive Processing, 13, Suppl, 1, 271–274. doi:10.1007/s10339-012-0457-9.

Núñez, R. E., Edwards, L. D., & Filipe Matos, J. (1999). Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education. Educational Studies in Mathematics, 39(1), 45-65. https://doi.org/10.1023/A:1003759711966

Rosenfeld, M. (2017). Math on the move: Engaging students in whole body learning. Portsmouth, NH: Heinemann.

Riley, N., Lubans, D., Holmes, K., Hansen, V., Gore, J., & Morgan, P. (2017). Movement-based mathematics: Enjoyment and engagement without compromising learning through the EASY Minds Program. EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 13(6), 1653-1673. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.00690a

Sriraman, B., & Wu, K. (2014). Embodied cognition. In S. Lerman (Ed.), Encyclopedia of Mathematics Education (pp. 207-209). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_179

Sriraman, B., & Wu, K. (2020). Embodied cognition. In S. Lerman (Ed.), Encyclopedia of Mathematics Education (pp. 266-268). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_179

Tall, D. (2004). Building theories: The three worlds of mathematics. For the Learning of Mathematics, 24(1), 29-32. http://www.jstor.org/stable/40248444

Tran, C., Smith, B., & Buschkuehl, M. (2017). Support of mathematical thinking through embodied cognition: Nondigital and digital approaches. Cognitive Research: Principles and Implications, 2(1), 16. https://doi.org/10.1186/s41235-017-0053-8

Wilson, M. (2002). Six views of embodied cognition. Psychonomic Bulletin & Review, 9(4), 625-636. doi: 10.3758/BF03196322