ISSN 2312-7716
DOI 10.6610/TJMT

第 42 卷第 1 期
二 O 二一年四月
VOL. 42 NO. 1
April 2021

臺灣數學教師

Taiwan Journal of Mathematics Teachers

國立臺灣師範大學數學系
Department of Mathematics,
National Taiwan Normal University

台灣數學教育學會
Taiwan Association
for Mathematics Education

臺灣數學教師　第 42 卷第 1 期　2021 年 4 月

發行單位	國立臺灣師範大學數學系 台灣數學教育學會

地址	臺北市汀州路四段 88 號國立臺灣師範大學數學系 《臺灣數學教師》
電話	886-2-7734-6576
傳真	886-2-2933-2342
電子郵件	tjmtedit@gmail.com
網址	http://tame.tw/news/news.php?class=204

附　啟

1. 本期刊自 2014 年 35 卷起每年出版二期。
2. 本期刊原名《台灣數學教師(電子)期刊》，自 2014 年 35 卷第 2 期起改名為《臺灣數學教師》。
3. 本期刊電子郵件由自 2015 年 36 卷第 1 期起改為 tjmtedit@gmail.com。

主編的話

本期計刊登三篇論文，分別是單維章與陳玉芬教授撰寫的「符號語言學作為數學的教學進路初探—以負數的概念模型譬喻為例」；其次是林勇吉教授之「數學與肢體運動：應用「體現認知」於數學教學。」；再者是李英和林原宏教授之「幾何操作探索課程對幼童幾何概念提昇之研究」。單維章教授與陳玉芬教授在第一篇文中參照符號語言「在組合關係與聚合關係中強調脈絡關連性」的學習特性，發現負數的符號表徵與符號語言有著思維上的類比性，並認為藉由結構性的「概念模型」譬喻，可作為從直觀數學到形式數學的過渡橋樑，促進學習者建立數學結構與形式意義之間的關連性，進而讓學習者能夠具體理解負數。第二篇論文，林勇吉教授介紹體現認知的數學教學，並透過回顧文獻，分別從數學教育與心理學的角度提出理論支持，提供三個文獻上具體的教學教案，期待數學教師能透過閱讀本文，瞭解體現認知應用於數學教學的理念，並且進一步設計與實施體現認知取向的數學教學活動，促進學生的數學學習。最後，李英老師和林原宏教授以臺中市某公立幼兒園的大班生兩班為研究對象，進行幾何操作探索課程及教具自由探索的處理，研究結果發現：幼童在「辨識經平移、旋轉、翻面後的平面幾何圖形能力」向度表現稍佳，在「利用三角形及四邊形，透過平移、旋轉或翻面方式，拼組出六邊形的能力」向度表現稍差；實驗組幼童在四個向度能力的提升均顯著高於控制組幼童，研究結果可提供教師進行幾何操作教學活動之參考。

本期刊登之論文研究對象與內容包含了自幼兒至國高中生學習之數學議題，讀者閱讀後可加以應用並擴展，以提升數學課室內有效教學，並提升學生對數學學習感覺和動機。

《臺灣數學教師》主編

陳嘉皇 謹誌

臺灣數學教師

第 42 卷　第 1 期

2005 年 3 月創刊　　2021 年 4 月出刊

目錄

Taiwan Journal of Mathematics Teachers

Vol. 42 No. 1

First Issue: March 2005 Current Issue: April 2021

CONTENTS

陳玉芬、單維彰（2021）。
符號語言學作為數學的教學進路初探—以負數的概念模型譬喻為例。
臺灣數學教師，**42**（1），1-16
doi: 10.6610/TJMT.202104_42(1).0001

符號語言學作為數學的教學進路初探—以負數的概念模型譬喻為例

陳玉芬[1]　　單維彰[2]
[1]國立中央大學學習與教學研究所
[2]國立中央大學師資培育中心

符號語言學（semiotics）對負數的學習相當具有可借鑑之處。就像「快樂樂音」與「$3-(-2)$」都有著讀音與意義上的困擾；又像語言的學習常使用重覆性替換，以習得語彙的意義，對照於負數的學習常進行程序性操作，以強化概念的習得；或者像語言學習者須觀察單字在前後文脈絡中的位置，以解讀該字的適當意義，對照於負數加減的初學者必須從算式中解讀「$-$」號的正確意涵，以執行正確的程序。此外，負數在生活情境中提出的「正反」或「上下」等比喻，常忽略了負數本身的符號特質，如「負號」的單元運算意涵，相對於「減號」的二元運算意涵，是兩種本質不同的概念。本文參照符號語言「在組合關係與聚合關係中強調脈絡關連性」的學習特性，發現負數的符號表徵與符號語言有著思維上的類比性，並認為藉由結構性的「概念模型」譬喻，可作為從直觀數學到形式數學的過渡橋樑，促進學習者建立數學結構與形式意義之間的關連性，進而讓學習者能夠具體理解負數。這是一項探索性研究（exploratory research），意圖闡明負數在數學思維中的複雜性和概念的豐富性，同時藉由「概念模型」譬喻分析負數相關的教與學。

關鍵詞：負數、符號語言學、概念模型、譬喻

通訊作者：單維彰，e-mail：shann@math.ncu.edu.tw
收稿：2020 年 11 月 27 日；接受刊登：2021 年 2 月 17 日。

壹、前言

語言溝通是每個人皆具備的生活能力。以英語為例，它是一種國際上通用的自然語言，而數學是一種精確描述數量形的人造語言。雖然二者都可「視」為一種語言，但它們卻是二種完全不同的學科語言（Leshem & Markovits, 2013）。前者是自然語言，它會因為國家、地域、種族的不同而有所不同，但學習者只要身處其境，有著相同社會脈絡，就能自然地習得該種語言（Li & Wang, 2013）。後者是人造語言，它是由人類刻意發展出來的，因為要與跨文化的他人溝通，而且還有特定的功能目的，所以它強調形式、邏輯與精準。這些特質使得數學語言相對濃縮與精練，甚至每一組符號句式都有更深層的意義。這就是數學本身給予的數學語言障礙，也是造成部分數學學習者的學習障礙。顯然在數學這門 「語言」上，許多人是較無法與生俱備「語感」又能與他人溝通無礙的。縱然如此，英語、數學二者之間仍存在著語言、文化、思維等不同形式的直接關係（Li & Wang, 2013; Whorf, 1956），例如 Whorf 認為語言不是只有字詞和發音的集合，它可透過字詞的字尾組合關係，歸納不同形式的發音模式；類似地，算式中的「$-$」號，隨著位置不同，其讀音與運算的意義亦皆不同，如「$-2-3$」。Li 與 Wang 也指出人類大腦探索這二種語言之間的傳遞方式，其關鍵在於兩種語言的思維模式（thinking pattern）具有相似性，也就是說這兩種語言皆使用概念結構來處理所接收的語言訊息。

自然語言的特徵之一，就是經過時間長河的蘊釀，它們都是在所處的社會環境脈絡與不同時空交織所發展出來的語言。有其特定性，比方說，英語、法語、華語等。但縱然語言有所不同，瑞士語言學家索緒爾（Ferdinand de Saussure, 1857-1913）認為各種語言系統內的各個元素彼此的關連性是相通的。他以橫向的組合關係（syntagmatic relation）與縱向的聚合關係（paradigmatic relation）說明語言學習的關連性。所謂橫向的組合關係是指對語意的了解，可從前後語境（co-text）確立語感的正確度，另一個縱向的聚合關係可以用來確認語法使用的正確度。索緒爾認為語言的學習在某種程度上是從一起出現的元素中覺察其產生的意義。就好像一個交通號誌紅燈亮起，所有的用路人都知道要停下，這時紅燈不只是一個符號的形式，同時更賦予了要停下的意義。所以索緒爾認為，要理解一種語言，不僅僅是把它視為一種形式，更要能捕捉那形式與意義之間的關連。

若用語言理論來理解數學語言，則它的語言是符號、概念、定義以及定理，我們可以說它是一種世界的共同語言。正因為是共通的語言，所以它需要有著大家可以共同遵循的規範或共同認可的表達方式，因此它需要刻意學習。Hiebert 與 Carpenter（1992）

認為：理解數學就是理解數學脈絡下所使用的數學符號語言。而維高斯基（Vygotsky, 1896-1934）的符號學習理論，其核心思想正是符號語言學（semiotics）與中介（mediation）的概念，Albert、Corea 與 Macadino（2012）更認為維高斯基的符號學習理論非常適用於詮釋數學的學習情境，因為數學的概念形成過程不可或缺的一部分就是涉及符號（symbol）的使用，如數學符號 $x, f(x)$ ，它們都是傳達概念的符號。理解數學知識就是能夠獲得這些知識的內在表徵，而這些有結構性的內在表徵需要透過外部表徵連結而習得。所以不論語言學習或數學學習，所強調的就是概念本身的關連性，才能讓習得的概念根深蒂固。

「負數」是學生邁入國中學習階段遇到的第一個新檻（Fuadiah, Suryadi & Turmudi, 2017），負號亦是七年級階段要學習的新符號。國內教科書中負數教學順序通常是：認識負數在生活上的應用，諸如氣溫、方向或進退等二分法概念；然後有相反數、數線概念進入數的大小比較；接著就是正、負數的四則運算（洪有情，2020；陳宜良、單維彰、洪萬生、袁媛，2005）。負數教學研究也有很多都是嘗試將負數歸因於某種有意義性的行為，以解決負數的合理性問題（Altiparmak & Özdoan, 2010）。然而學生在學習負數時，還需要調適由自然數擴充到含負整數、負分數、負小數等更大範圍的數的概念學習（林保平，2005；Altiparmak & Özdoan, 2010）。「$-$」號本身同時具備兩種概念，即「負號」的單元運算（unary operation）概念，以及「減號」的二元運算（binary operation）概念（Vlassis, 2004; Vlassis, 2008; Bofferding, 2014）。例如「-2」讀作負二，此時的「$-$」號是負號，它指涉的是-2的屬性：包括它小於 0，在數線的位置落於原點的左側二單位長處；負號也是單元運算符號，表達-2與 2 的「相反義」，此概念具有幾種心相（亦即「譬喻」的方式），包括它們在數線上彼此對稱於原點（symmetry），或者它們彼此是對原點的鏡射（indication of inversion）。相對而言，「$2-3$」讀作二減三，此時的「$-$」號是減號，它指涉的是從第一個運算元 2 扣除（下降）第二個運算元 3。

本文的目的即在於透過對「符號語言」學習的理解與掌握，運用「符號語言」學習中的聚合關係與組合關係的脈絡關連性，連結負數的多元性概念，並以「概念模型」譬喻進行負數的策略性教學，提出學習「負數」時相關的概念思維，以及一個可以呈現學習者對於負數概念具體理解的方法。

貳、 文獻探討

一、符號語言學

衛友賢（Wible, 2005）對於瑞士語言學家索緒爾（Ferdinand de Saussure, 1857-1913）將語言視為一種關連性的系統，有著完整的描述，茲引用於下（Wible, 2005, p. 29／陳玉芬、單維彰譯）：

> 索緒爾以其深刻的想法，給幽微難解的抽象化語言概念—朗格（langue）—提供一套可理解的說明。朗格不將語言視為字詞和發音的集合，而將它視為關係的系統。朗格是結構主義的語言觀點，此觀點認為語言是一個系統，在此系統中，每個元素只能透過它與包含它的更大結構內之其他元素的關係而獲得理解。索緒爾主張這個範圍更廣闊的符號系統理應成為獨立的研究對象，而他稱此研究領域為符號學（semiology）。他隨後認為語言學（linguistics）作為一種特殊符號系統的研究，理應被視為符號學的一個次領域。

這說明索緒爾認為語言是一種結構系統，在人們意識深處的語言結構，共通於所有人類使用的語言，不管他所用的是哪一種語言。在語言系統之中，各個符號指示（sign）是相互關連並具有意義，而意義必須要有共識，這就是一種認知層面。Wible（2005）認為索緒爾的符號不是指某事或某物，它是形式（form）與意義（meaning）之間的一種關係。索緒爾將符號分成二個概念：符號具（signifier）以及符號徵（signified），如圖 1。圖 1 的上層是具體的，或是可聽到、可看到的信號，又稱為所指物（signifier），例如字符「犬」或它語音；圖 1 的下層是所指物的心靈意象或意義（signified），而這是一個抽象的概念，例如「狗」的意象或概念。所謂的「符號指示」正是這二者之間的一種關連性，一旦產生聯結就不會分開了。這樣的關係強調的是語言的學習著重在符號與抽象之間的「關連性」。即應辨識此符號指示所具備的意義，而此意義要形成共識才能交流，也才能繼續學習進而提升認知層面，這是語言本身具有的結構性。

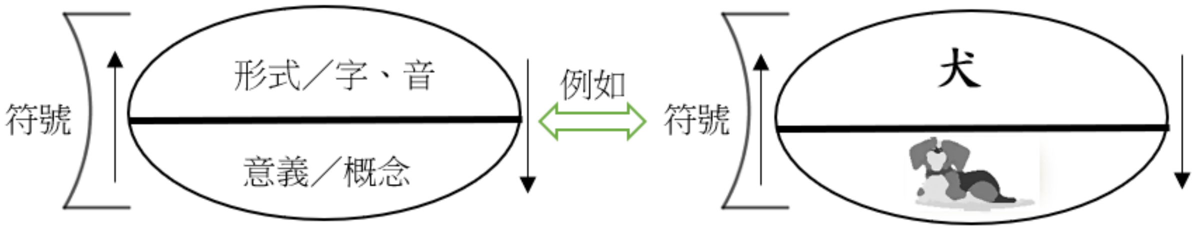


圖 1　符號（sign）的形式與意義關連性

接著，索緒爾提出應該如何學習一種語言的方法。他認為語言中抽象層次的概念學習是極其複雜的，他以二種具體的面向，分別是橫向的組合關係，與縱向的聚合關係來做說明（林信華，1999）。所謂橫向的組合關係是指對語意的了解，可以從前後語境（co-text）確立語感的正確度。因為索緒爾認為一個單詞的意義，在某種程度上是從與單詞一起出現的元素中衍生出來的，它們可以靠著彼此的出現覺察其產生的意義；也就是說這符號的排列順序是有意義的，或者說這符號的意義是與其他相關符號的前後關連所產生的。例如，僅看「－」符號並不能決定它的意義，但是將它放在「3－2」或「−2」的排列裡，就有明確的意義了。Cruse（1986）也提到，一個詞彙的意義都應在適當的脈絡且符合語法的語義情境中來解讀。對應到負數的學習過程，小學剛畢業的學生看到「3－2」就像「狗吠火車」那樣地自然，可是「2－3」就像「火車吠狗」那樣地唐突。

索緒爾提出的另一個面向則是縱向的聚合關係，它可以用來確認語法的正確度。例如將「3－（－2）」的第一個符號「－」換成「＋、×、÷」都是合法的，可是第二個符號「－」卻只能換成「＋」而不能換成「×、÷」。而語言學習即在於語言特質上尋找符號或樣式之間關連性，在學習策略上強調語境（橫向脈絡）及語法（縱向脈絡）的雙向脈絡。

此外 Whorf（1956）亦認為在英語的字彙學習中，應透過觀察 cat、lip 或 pig、lamb 或 noise、horse 等這些字尾發音是有聲或無聲，進而去理解為何字尾加上 s 後的讀音會轉成不同的 s 或 z 或 iz，甚至像 leaf、wife 字尾加上 s 要變形。此即所謂的「樣式符號表示式（pattern-symbolic expressions）」，說明語言的學習，也是要透過觀察、分析與演繹。對應到負數的學習，就是提倡以觀察實境中的大量的例子當作學習的起點，而不鼓勵以定義和規則、公式當作學習的進路。

除此之外，索緒爾亦認為符號具有「任意性」（arbitrary），就好比「玫瑰不叫玫瑰，依然芬芳」。同樣地，在我們約定俗成地學習使用一個「－」號代表數學上的負號時，它只是作為溝通的符號，然而當我們使用「負號」或「減號」來指稱某個概念意義時，它是具有一些我們能指認的必要特性。

總結而言，語言符號雖然不等於數學，但的確與數學的學習方式有相似之處，值得用來作為數學教學進路的參照。

二、數學的符號語言學習

維高斯基（1962）認為符號語言學就是「符號指示」或其他工具在溝通過程中的一

種研究。Albert 等人（2012）亦指出，整合一個概念形成的過程，包含許多「符號指示」的使用，其目的就是為了模擬人類內在思維的行為，然後形成人腦中一個新的對應聯結（Ghassemzadeh, 2005）。其具體陳述如下（Albert et al., 2012, p.7／陳玉芬、單維彰譯）：

> 人們藉由「符號指示」導引與控制其思維運作的大方向，並藉此引出問題的解決方案。一開始，符號的角色僅是與其他人產生外在社會聯結的媒介，也就是作用於人與人之間的心理互動。然而，到了後來「符號指示」成為影響自我思維活動的媒介。

也就是說我們可以透過「符號指示」的譬喻，理解內在的思維，甚至形成不可逆的抽象概念，也就是維高斯基所指產生質變功能。

維高斯基認為人類心智在學習過程中的改變，是可以觀察的。Albert 等人（2012）即以此理論對照於數學的學習，並舉幼童學習為例：即使幼童已能數數 1、2、3、…、10，這樣的行為表現也許是透過模仿，並不表示他們已學會「數」的概念；但是當他們對著某些對象能夠依序數數並正確回答數量時，則顯示他們理解了數的有序性與量的概念，也就表示習得「數」的關係性了，此時才表示他們學會了「數」的概念。就好像在負數的學習過程中，學習者總能將「負負得正」琅琅上口，此表現也許源自於模仿，未必表示真正理解負號的關係性，所以才會發生類似 $(-3)+(-5)=(+8)$ 的謬誤。

這也正是使用「符號指示」表徵來彰顯智能發展樣貌的契機：因為我們無法控制或看見個人的智能，所以透過這些譬喻的表徵，讓思維被看見。維高斯基（Vygotsky, 1978）認為當個人使用推論的工具傳達他自己的內在想法時，其「符號指示」是有所譬喻的，他認為透過具體的工具表徵所傳達的意義，可以映射其內心的思維。這與索緒爾認為如何理解一種語言的理論是不謀而合的，兩者皆認為概念的形成不能僅僅被視為一種形式，更要能捕捉那形式與意義之間的關連。亦如 Skemp（1976）在闡述的形式與意義之間的關連性中，引入「關係性理解」此術語。他認為關係性理解就是一種質性觀察，它是可以促進自我成長的有機體，就像一棵延伸其根的樹木，可以探索新的領域並尋找營養。

借用語言之類比的數學學習理論，還有 Hiebert 與 Lefevre（1986）認為數學知識可分為程序性知識（procedural knowledge）與概念性知識（conceptual knowledge），且「概念知識的每一個單位，絕不可能是孤立的資訊片段」（洪萬生，2003）。此論述與 Skemp（1976）闡述的形式與意義之間的關連性亦是不謀而合的，說明數學概念的學習實應著重於概念間的關連性。

綜合上述，透過對語言的認識，再對照於數學自身精簡語言的特質，可以理解在數學學習時，不論是為了表達從學習活動中發展出的新概念而引進的新符號，或是擴充舊符號的意義使其延伸至新的概念，或是為舊符號釐清過去不需分辨的概念差異，識別文本脈絡及發展適當概念的連結譬喻，都有助於對此數學主題的理解。

三、「概念模型」譬喻表徵

「模型」（model）是數學教育中常常使用的一個術語，它被荷蘭的真實數學教育（realistic mathematics eduction，簡稱 RME）詮釋為：「模型在真實或可想像之真實、非形式理解、系統性的形式理解之間，扮演橋樑的角色」（van den Heuvel-Panhuizen, 2003, p.13／陳玉芬、單維彰譯）。本文所指的「概念模型」是作為抽象數學概念之表徵的具體物或可想像的物件。例如直尺是正數的概念模型，數線是將正數與負數整合在一起的概念模型。而「譬喻」（metaphor）則是在模型上對應抽象概念所做的具體描述（Ernest, 2010）。此外，當我們在數線上標示負數時，數線僅為概念模型，但是當我們使用數線上的移動作為加減運算的譬喻時，或者當我們使用 3 與 −3 在數線上對稱於 0 的關係作為「相反數」之譬喻時，數線本身也成為一種譬喻。

Lakoff 與 Núñez（2000）認為譬喻涉及兩個領域：「來源域」（source domain）和「目標域」（target domain），如圖 2。Lakoff 與 Johnson（2003／周世箴譯，2006）認為在符號語言學習中，隱喻就是一種思維現象，是指通過一個事物來理解和體驗另一個事物，是一個從來源域到目標域的映射，亦即在原有意義的基礎上通過隱喻思維獲取不同的擴展意義。也可以說譬喻是詮釋一種符號或模型與概念之間的相關性，使之與個人內在無法看見的思維做連結。

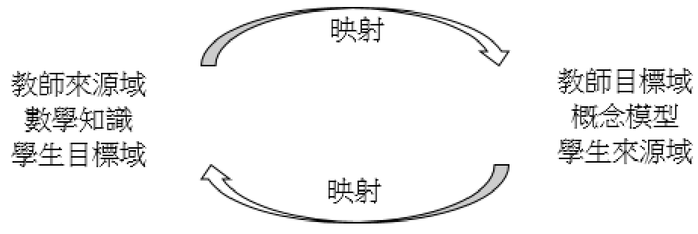


圖 2　教師與學生運用譬喻的相對性

以「$2-(-3)$」的算式為例來說明，因為教師已經具備負數運算的知識，所以「$2-(-3)=2+3=5$」即為教師的數學知識來源域；當她／他企圖為此運算設計一套譬喻，

用來幫助學生理解此運算程序，這套譬喻就是她／他的目標域。假設教師的設計是將「$2-(-3)$」譬喻為「從數線上 2 的位置朝箭頭的反方向（即向左）後退 3 格」，則此譬喻式的行動規則，成為學生所接收的訊息，而它成為學生學習負數運算的來源域。根據此來源域，學生得知運算結果是 5，但是學習的目標並非習得那一套譬喻，而是透過譬喻而最終理解「$2-(-3)=2+3=5$」，所以它就是學生的目標域。值得注意的是，學生透過譬喻之來源域獲致的理解（也就是學生的目標域），未必等同於教師的來源域（假設那是正確知識）。所以教師要設計活動，讓學生有機會再透過譬喻而作更多往返映射的表達；如此的循環表徵，即可檢視其教學譬喻是否有效。Kilhamn（2011）認為，如果來源域與目標域之間的映射關係無法形成，譬喻就不存在。

Damerow（2007）亦提出透過「來源域」和「目標域」的譬喻教學，可以讓思維看得見，並將此種譬喻表徵分成二個不同層次，第一層次就是操作一種藉由符號或是轉換規則組成的模型的具體物件，使之可作為表徵真實的抽象物件行為。最基本的形式就是具體物的識別（identification），比如透過使用詞彙或符號指示進行命名活動，甚至做分類。又如在「數數」方面，是可以利用具體物與實際的真實數字概念作一一對映。像伸出手指數到 5（符號或文字），那麼手指就是具體的真實物件，它對應到 5 這個表徵的抽象物件。亦即他們用數數到 5（真實的動作）與手指（真實物件）將 5（抽象的物件）連結了。再來觀察 $5+2=7$ 此式子，因為仍只是將手指數相加，所以它仍屬於第一層次表徵，將之對照於負數教學，在數線上做前進或後退的動作，相當於以具體物與負數的加減法做譬喻，所以負數的加或減的概念屬於第一層次表徵。或是 $-(3)=-3$、$-(-3)=3$、$+(-3)=-3$ 或 $-(+3)=-3$ 等的反轉指示，都可透過數線操作（真實動作）及「負即相反」口訣完成負號化簡的性質，都屬於第一層的表徵理解後的抽象物件。

第二層次（或更高階）則是以「心智模型」（mental models）的譬喻來表徵。它們也是由符號或由符號和轉換規則組成的模型所組成，然而此「心智模型」則是透過自己的想法並針對真實物件作抽象思考後，表徵出個人的反思抽象思維。舉例來說，針對 5 這個數字本身的特質描述，比方說：$\sqrt{5}$、5^2、-5 等，則屬於後設認知本質的抽象物件（$\sqrt{5}$、5^2、-5）與抽象物件 5 的連結，因為此時的 5 並未具有數手指的意義，所以說已經從另一個數學物件及想法中抽離而建立新的知識概念結構，此為具有第二層次表徵能力。同樣的以負號「$-$」為例，$2-(-3)=2+3=5$ 的減法運算，若是仍在數線上操作，則仍為第一層次表達，若是建立在內心思維的運作而不是數線上的操作，則屬於第二層後設認知的抽象物件連結，而$-(a)=-a$、$-(-a)=a$ 的抽象操作亦然。

也就是說，第一層次與第二層次表徵的最大不同，在於模型譬喻表徵的不同。前者利用具體物表徵內在的抽象思維，後者則利用抽象模型表徵所對應的後設認知的抽象思維。所以，一個物件若是透過具體物操作，進而連結至抽象概念屬於第一層次表徵；若是透過比較、對應、組合與重覆的反思動作所建構，或數學的證明、數學的結構以及形式化邏輯數學概念都屬於第二層次的後設認知抽象物件。

參、 負數之「概念模型」譬喻舉例

本文指涉的「概念模型」即為一種表徵，也是溝通工具，用來作為由具體物轉化至抽象概念間的橋樑。在此模型上執行的活動，以及活動後獲致的理解，若與學習目標知識有所關連或對應，則是一組譬喻。以負數的教學為例，本文欲以數線上（相對於原點）的對稱關係，以及數線上的前後移動，並搭配「負」與「相反」在詞語經驗上的類比性，作為初學者建立負數及其運算知識的一組「概念模型」譬喻。前文已經在圖 2 之後略述此概念模型，此處將其整理於表 1。

表 1

負數知識與概念模型之「譬喻」舉例對照表

教師來源域（數學知識）／學生目標域	教師目標域（概念模型）／學生來源域
加（+）號	二元運算／朝數線箭頭方向前進或後退
減（−）號	二元運算／朝數線箭頭相反方向前進或後退
正（+）號／性質符號可省略	性質符號（正的）／前進（順指示方向）
負（−）號	性質符號（負的）／後退(逆指示方向)
「朝向數線箭頭方向前進」	加一正數，如：$2+3=5$
「朝向數線箭頭方向後退」	加一負數，如：$2+(-3)=-1$
「朝向數線箭頭相反方向前進」	減一正數，如：$2-3=-1$
「朝向數線箭頭相反方向後退」	減一負數，如：$2-(-3)=5$
「負」非「減」	單元運算與二元運算之間概念的差異。 如：$-2-3$可以正確讀出「負 2 減 3」
「負」就是「相反」	能理解有反轉的指示，如：$-(-3)=3$
「減」是「加相反」	完成二元運算的化簡， 如：$2-(-3)=2+3=5$

在學習負數概念時，對於「負」的詮釋是學生重要的認知發展。在我國課程中，初學負數的 7 年級學生，抽象思維能力尚未強健，但日常語言經驗已經相當豐富，因此本研究試圖以語言的類比作為設計譬喻的主要方法。例如「『負』即『相反』」就是一種話語的譬喻，用來提醒學生，當「−」號的讀音是「負」時，它就具有將某種性質做「相反」或「反轉」的功能。

最基本的譬喻式教學例子是負數在數線上的位置，此處強調的是學習者可以應用既有的「相反」經驗，以類比的方式理解一個新概念，如圖 3。

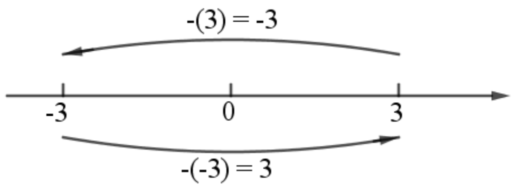


圖 3　說明「負」就是「相反」的概念譬喻

借鑑於符號語言的抽象概念學習方式，可應用橫向的「組合關係」與縱向的「聚合關係」，作為負數教學的策略。舉例而言，運用縱向語法結構的替換進行程序性操作，如圖 4，可確認新概念的習得，並藉由觀察歸納進行負號化簡。

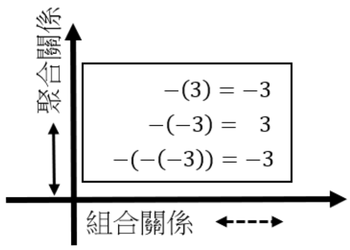


圖 4　負號單元運算的聚合關係舉例

此外在負數教學中，「−」號也具有二元運算的概念，如同符號語言中的多義詞必須透過語境中的脈絡與形式連結。比方說，「$3-(-2)$」其讀音的不同，即連結著「−」號概念上的差異。如圖 5 中的 ① 式讀作三減負二，但是 ② 式卻讀作負三減二，透過這樣的語境察覺「−」號的不同意義，它不僅是一種書寫的語言，也是溝通的語言。當書寫的「−」號讀作「負」時，它是性質符號，讀作「減」時，即轉換為運算符號，因此有「『負』非『減』」的提示語，即用來提示這兩種不同的概念。透過橫向的語境脈絡組合關係，說明在符號語言的學習中可作為提供另一類型的脈絡學習。

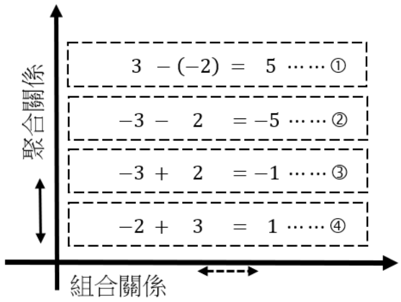


圖 5　負號二元運算的組合關係舉例

接著，圖 5 中 ③ 式的 $-3+2$ 與 ④ 式的 $-2+3$ ，雖然數字互換，非但其值不同，同時牽涉有號數的交換律。正如同前文所提「狗吠火車」與「火車吠狗」其情境脈絡上的合理或荒謬性。像這些的橫向組合（聚合關係）不僅呼應其自然情境脈絡，而這些「概念模型」譬喻，更是維高斯基提出的「中介概念」，他認為「中介概念」是形成概念的不可或缺的過程。

數學語言之所以複雜，部份原因是因為除了在符號閱讀上造成障礙之外，數學本身的性質，亦有其特殊性（Larsen, 2012）。在本研究中，將「減」譬喻為朝向數線箭頭的相反方向（參見表 1），「正」譬喻為前進，「負」譬喻為倒退。例如 $-1-2$ 就是從 -1 的位置開始，朝向數線箭頭的相反方向前進 2 格，到達 -3 的位置，連結$-1-2=-3$ 的抽象概念，如圖 6（左）；而 $-3-(-3)$ 則是從 -3 的位置，朝向數線箭頭的相反方向後退 3 格，到達 0 的位置，連結 $-3-(-3)=0$ 的抽象概念，如圖 6（右）。

圖 6　「減」與「正」、「負」在數線上移動的譬喻

正如同 Usiskin（2015）所指出知識理解概念是一種多元性維度的理解，當負數的二元運算表徵為 $3-(-2)$ 時，除了在數線上的譬喻之外，它必須發展某種字詞（word）或話語（discourse）或物件來描述「負數」的複雜關係，以進行抽象代數的運算。此時使用「『減』是『加相反』」的譬喻，使得$3-(-2)=3+2=5$，使其同化至舊經驗上，進而讓這些字詞可以影響他們對「負數」理解的變化。

而這樣的概念模型譬喻，在負數教學過程中亦可透過數線觀察，提供學習者反思「比

0 還小的數」的存在性，而圖 7 的數線模式可作為一種進階表徵，代表了正負數是由左至右有序的遞增，且自起點 0 開始分割為正數與負數，這也恰當表徵了 0 作為中性數的特性。

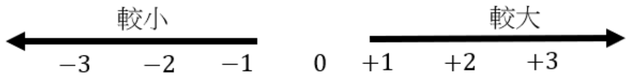


圖 7　連續數線及中性數 0 的說明

此外，在這樣的譬喻中，可以提出對於 0 的二種數學結構關連性。其一，0 是絕對的，因為在 0 以下的數絕對是負的；其二，0 是相對的，因為可以數線任一點做為起點 0，且具有二個相反的方向。而透過 $0-(-3)$ ，觀察學習者是否可以理解就是 $0+3=+3$，這可以說明學習者是否已從具體操作（減相反數就是加），提升至抽象思維進而理解 0 的存在與負數之間的大小關係。這些教學策略都是可運用樣式規律的觀察理解其間的關連性。

肆、 結論

負數學習不僅針對其負號情境描述學習，學生若仍未意識負數與自然數間的差異，或是未理解負數已是一種擴張的／人為的觀念與工具，那麼其思考層次仍將停留在自然數的概念。概念性的高層次思考是有必要教學的，本文的探討焦點即在符號語言的認識下，強調負數的知識關連性概念。

以負數為例，可以討論的關連性有三。其一是單元運算符號的概念，即「負號」代表的是此數字本身的性質符號，含有相反的意義，例如 $-(-3)=3$ 不過就是「相反再相反就還原」，亦好像「以 0 為中心，從 3 的位置鏡射再鏡射」就又回到原來的位置。

其二是透過「『負』非『減』」的提示語，強化二元運算符號的概念，即加是朝向數線箭頭方向前進或後退，而減是朝向數線箭頭相反方向前進或後退，此二者概念是奠基於正數加減法的舊經驗上。而數的正負屬性（性質符號）則透過正負對稱性指示進入整數的擴張，因此在負數的算式化簡時，則以「『減』是『加相反』」的譬喻，讓學習者開始進行抽象性連結的運算學習。

其三是「負的相反義（反轉指示）」，亦即任一個負號的數都在該數的相反位置，在此關連概念中，更能在數線上具體理解比 0 小的數存在性；亦能將 0 為中性數的性質

概念化，甚至可以抽象至任何一個點皆可做為一個起始點，並找出任一數的相對位置。這樣的數學結構性概念一旦形成，它就如許多建構數學思想的積木（block）一樣可以堆疊而上，那麼當我們形成這樣的瞬間跳躍時，就表示已從操作性概念遷移到結構性概念，而這樣的跳躍一旦形成，即代表知識已往上積累，而且可望長期保留。

本研究旨在運用譬喻層次的學習即話語（discourse）的轉化，說明善用符號語言的特性，讓負數性質對應自然語言（中文）的譬喻，作為從直觀數學到形式數學的過渡，並提供學習者以話語表達數學概念的學習情境。透過概念模型的譬喻，期望協助學習者理解並內化數學的結構，以此提供負數教學的另一種策略，也作為未來進行實徵研究之理論基礎。

誌謝

感謝兩位審查委員的建設性意見，使本文大幅聚焦。本研究受科技部 109 年度專題研究計畫「數學識讀文本研究—以發展七年級的閱讀文本策略為例」補助（MOST 109-2511-H-008-002）。

參考文獻

洪有情編（2020）。**國中數學第一冊**。臺北市：康軒。

林保平（2005）。正負數的概念及其加減運算。**科學教育月刊**，第 277 期，頁 10-22。 doi: 10.6216/SEM.200504_(277).0002

林信華（1999）。**符號與社會**。臺北市：唐山。

洪萬生（2003）。數學與文化的交流與程序性知識。收入李弘祺（編），**理性、學術與道德的知識傳統**（頁 1-48）。臺北市：喜馬拉雅研究發展基金會。

陳宜良、單維彰、洪萬生、袁媛（2005）。中小學數學科課程綱要評估與發展研究。臺北市：教育部

Lakoff, G. (2006)。**我們賴以生存的譬喻**（*Metaphors We Live By*; 周世箴譯）。臺北市：聯經。（原著出版於 2003 年）

Albert, L. R., Corea, D., & Macadino, V. (2012). *Rhetorical ways of thinking: Vygotskian theory and mathematical learning*. Dordrecht: Springer.

Altiparmak, K. & Özdoan, E. (2010). A study on the teaching of the concept of negative numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(1), 31-47. doi: 10.1080/00207390903189179

Bofferding, L. (2014). Negative integer understanding: Characterizing first graders' mental models. *Journal for Research in Mathematics Education*, 45(2), 194-245. doi:10.5951/jresematheduc.45.2.0194

Cruse, D. A. (Ed.) (1986). *Lexical semantics*. Cambridge: Cambridge University Press. doi: 10.1017/S0022226700011622

Damerow, P. (2007). The material culture of calculation. In U. Gellert & E. Jablonka (Eds.), *Mathematisation and dematematisation: Social, political and philosophical ramifications* (pp. 19-56). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers. doi: 10.1163/9789460911439_003

Ernest, P. (2010). Mathematics and metaphor. *Complicity*, 7(1), 98–104. doi: 10.29173/cmplct8844.

Fuadiah, N. F., Suryadi, D., & Turmudi, T. (2017). Some difficulties in understanding negative numbers faced by students: A qualitative study applied at secondary schools in Indonesia. *International Education Studies*, 10(1), 24–38. doi:10.5539/ies.v10n1p24

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Hingham, Massachusetts: Kluwer.

Ghassemzadeh, H. (2005). Vygotsky’s mediational psychology: A new conceptualization of culture, signification and metaphor. *Language Sciences,* 27, 281–300. doi: 10.1016/j.langsci.2004.04.003

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Hiebert, J. & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). New York: Macmillian.

Kilhamn, C. (2011). *Making sense of negative numbers*. Unpublished Ph.D. Dissertation, University of Gothenburg, Gothenburg, Sweden. Retrieved from https://www.researchgate.net/publication/305033448_Making_Sense_of_Negative_Numbers on Oct 12, 2020.

Lakoff, G. & Johnson, M. (2003). *Metaphors we live by*. Chicago: University of Chicago Press.

Lakoff, G. & Núñez, R. E. (2000). *Where mathematics comes from.* New York: Basic Books.

Larsen, J. (2012). Epistemological obstacles of negative numbers. *Vector: The Official Journal of the BC Association of Mathematics Teachers*, 53(2), 56–60.

Leshem, S. & Markovits, Z. (2013). Mathematics and English, two languages: Teachers' views. *Journal of Education and Learning*, 2(1), 211-221. doi: 10.5539/jel.v2n1p211

Li, F. & Wang, L. (2013). The study of comparison between English language and mathematical language. *Journal of Studies in Social Sciences,* 4(2), 213-234.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20-26. doi: 10.4324/9780203403891-6

Usiskin, Z. (2015). What does it mean to understand some mathematics? In S. J. Cho (Ed.), *Selected regular lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 821-841). Switzerland: Springer. doi: 10.1007/978-3-319-17187-6_46

Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics* 54, 9–35 . doi: 10.1023/B:EDUC.0000005212.03219.dc

Vygotsky, L. S. (1962). *Thought and language* (E. Hanfmann & G. Vakar, Eds. and Trans.). Cambridge: MIT Press.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society: Development of Higher Psychological Processes* (M. Cole, V. Jolm-Steiner, S. Scribner, & E. Souberman, Eds.). Cambridge: Harvard University Press.

Vlassis, J. (2004). Making sense of the minus sign or becoming flexible in `negativity´. *Learning and Instruction*, 14(5), 469-484. doi: 10.1016/j.learninstruc.2004.06.012

Vlassis, J. (2008). The role of mathematical symbols in the development of number conceptualization: The case of the minus sign. *Philosophical Psychology*, 21(4), 555-570. doi: 10.1080/09515080802285552

Whorf, B. L. (1956). *Language, thought, and reality: selected writings*. Cambridge: MIT Press.

Wible, D. (2005). *Language learning and language technology*. Taipei: Crane Publishing.

林勇吉（2021）。
數學與肢體運動：應用「體現認知」於數學教學。
臺灣數學教師，**42**（1），17-28
doi: 10.6610/TJMT.202104_42(1).0002

數學與肢體運動：應用「體現認知」於數學教學

林勇吉
國立清華大學數理教育研究所

應用「體現認知」（embodied cognition）的數學教學意味學生透過肢體的運動來學習數學，例如，透過手指臨摹幾何圖形，或是在地上的數線跳躍，過去文獻已證實這是有效的數學學習方式。本文主要目的在介紹體現認知的數學教學，並透過回顧文獻，分別從數學教育與心理學的角度提出理論支持，最後提供三個文獻上具體的教學教案，期待數學教師能透過閱讀本文，瞭解體現認知應用於數學教學的理念，並且進一步設計與實施體現認知取向的數學教學活動，最終受惠於學生的數學學習。

關鍵詞：手勢、具象化、肢體運動、體現認知

通訊作者：林勇吉，e-mail：yungchi.lin1227@gmail.com
收稿：2021 年 3 月 22 日；接受刊登：2021 年 4 月 14 日。

壹、前言

應用「體現認知」(或稱體感認知，embodied cognition)於數學教學，意味允許學生運用整個身體的移動或肢體動作來學習數學（Dackermann, Fischer, Nuerk, Cress, & Moeller, 2017)。舉例而言，當某人問你這個星期三到下個星期一總共經過幾天時，我們很容易不自覺就會使用手指頭來幫助計數，雖然也可以單純的把這個行為當作一種計數的策略，但更深層的來說，這是一個典型利用身體動作來學習抽象數學概念的例子（Moeller et al., 2012)。除此之外，研究也發現肢體、手勢不僅能夠促進概念理解，更能降低學習者的認知負荷（連宥鈞、吳昭容，2020)、提高學生的參與度與動機（Riley et al., 2017)，因此對於低成就或是對數學沒有興趣的學生，透過肢體動作來學習數學，更有意義。

圖 1 是應用體現認知（身體動作）於課堂學習數學的兩個具體例子，左圖引自（Rosenfeld, 2017, p.52），在此活動中，學生們被任意指定到一個位置，他們必須透過身體移動，證明所在位置是否在中點上，同時他們也會討論在格子（梯子）的中點上有何特性(例如左右對稱，格子數相同等)。右圖引自(https://mathandmovement.com/about/)活動內容是讓學生透過跳格子，找出百數表上的規律，例如那些是數字都相差 10，那些數字是 9 的倍數（對角線）等，透過肢體的移動幫助理解數學概念。

圖 1 運用全身移動來學習數學的兩個範例（左圖引自“Math on the move: Engaging students in whole body learning,” M. Rosenfeld, 2017, p.52, Portsmouth, NH: Heinemann.、右圖引自 https://mathandmovement.com/about/）

儘管體現認知並不是新的理論，但是我們對於如何應用體現認知於數學教學與學習的瞭解仍然相對貧乏（Flood, Shvarts, & Abrahamson, 2020)，有鑒於此本文將透過回顧文獻說明應用體現認知於數學教學的內涵，並且介紹其具體教學範例，期待能透過本文幫助現場教師瞭解與實施體現認知取向的數學教學，最終受惠學生的數學學習。

貳、 體現認知的相關理論

體現認知（運用身體來學習數學），並不是一個憑空的想法，它的立論是基於學者們所提出的：「思考並非與肢體動作相互分離，相反的，思考深受大腦、肢體與環境互動的影響」（Glenberg et al., 2013, p.573）。這意味個體對數學進行認知時不是只有大腦的運作，同時也包括身體的動作的影響（Wilson, 2002）。根據身體動作幅度的大小，肢體動作可以區分成巨觀與微觀，所謂巨觀是指例如跳躍、跑步等大動作、微觀指的是細微的，例如手指頭點數、手指向某個方向、擺頭等較細微的動作。

一、體現認知的定義

體現認知是認知心理學的一支，它主要探討個體和環境之間的互動，其中的的環境，包括了社會環境、物理環境、和教學環境等三種不同類別的環境（Sriraman & Wu, 2014）。由此可知，體現認知定義的環境是寬廣的，並不侷限在「物理環境」，它廣泛的包含了文化、情境、情意面向的環境（Núñez et al., 1999），舉例而言，從數學史的角度，印度佛教文化強調虛無這個概念，特別容易發展數學上 0 的概念。有別於早期學者將「動作」與「認知」區分成兩個獨立的系統，體現認知將這兩個向度視為互相影響的系統，身體動作反應認知的結果、認知的發展也可透過身體動作促進（Sriraman & Wu, 2014）。

體現認知可以定義為知覺與動作的循環，這意味個體經由動作來回應外在的物理環境與心理內在環境的改變，接著知覺系統感受到這個改變，接著繼續進行下一步的行為。簡而言之，知覺與動作互相不可分割，交互影響（Tran, Smith, Buschkuehl, 2017）。

二、數學教育的觀點

數學教育文獻看待「體現認知」主要聚焦於「數學概念從何發展而來？」、「人們是如何學習與獲得數學概念？」，在此前提下，文獻認為：數學是人類活動（activities）的產物，它是人類與生俱來的能力，藉由我們日常生活中與環境互動，我們逐漸發展出符號化、抽象化的數學，並且相反的，在學習數學概念的過程中，也會將數學概念類比為具體的生活經驗，幫助我們思考與學習數學（Sriraman & Wu, 2020）。

上述的觀點比較貼近「認知科學」（探討知識如何獲得、心智如何運作）的觀點，在此觀點下，數學的具象化（embodiment）不是單純跟環境互動的經驗而已（如第一次開車的經驗），也沒有一定需要實際的操作教具（Núñez et al., 1999），相反的，具體化提供

我們對於人類的心智思考的深層了解，並且瞭解這些生活中的經驗所引發的概念是如何組織在我們的概念系統中。Núñez 等提供一個簡單的例子：「平衡」。平衡是我們在年紀很小時，就有的概念，透過行走、肢體活動我們擁有許多平衡的生活經驗，隨著語言發展，逐漸發展出「覺得口太乾」、「手不夠暖」、「色彩不協調」、從這種日常生活中「足夠」與「不足」這種經驗，最後才逐漸抽象化推理變成數學概念，例如代數算則中的等量公理（等式的兩邊需要平衡）。

以數學教育的觀點，個體與環境的互動的結果，最終都會形成抽象的數學概念或符號化（Tall, 2004），例如手指計數的行為，形成抽象數字符號與數字的意義；測量的行為，形成測量的數學概念（如單位、比較面積大小等）。基於上述數學是人類生活下的自然產物（Freudenthal, 1973），因此 Freudenthal 認為幾何知識的發展是基於人類的生活經驗，Bazzini（2001）、Lakoff 和 Núñez（2000）進一步解釋其他數學領域，例如算數、座標系統、函數、微積分也都能夠與日常生活的活動（行為）有良好的連結。它們強調數學知識的建立，就是人類與自然世界互動下的產物。

基於體現認知理論，三位學者 Lakoff、Johnson 和 Nunez（Bazzini, 2001）致力於建立「數學教育」專屬的認知科學（cognitive science）。其中，最核心的假設就是數學不是抽象與心智無關的（mind-free），是由我們的心智、肢體與環境共同建構而成，例如很小的小孩（出生僅三、四天）就具備有分辨 2 個一組或 3 個一組的能力（Sriraman & Wu, 2020），這意謂小孩一出生就具備有基礎的數學心智能力。更進一步，三位學者的數學教育認知科學，有三個主要的假設：（1）心智的具象化（embodiment of mind）：身體與大腦的結構影響了數學概念的架構，這意味身體與環境的互動、接收外界刺激後如何形成知覺（perception），造就了我們對於數學概念的理解。（2）無意識的認知（cognitive unconscious)：絕大多數的思考都沒有辦法簡單的得知或被瞭解，這通常需要藉由工具的檢測，換句話說，我們多在無意識的情況下，逐漸形成我們的認知。（3）隱喻的思考（metaphorical thought）：我們對於抽象概念的瞭解，通常要藉由具體的事實、物件來瞭解，這些隱喻幫助我們透過具體的物件（特別是身體的行為）來進行推理，例如我們可以把數字看作數線上的點來進行思考。

情境學習是另一個可以用來支持體現認知應用於數學教育的論點。從情境學習的角度來看，學習數學與社會、文化、歷史和情境脈絡（context）息息相關，因此真正的數學學習不是刻意去學習抽象的數學知識，而是在日常生活的情境下，學生早就累積許多無意識、豐富的數學思考，我們應該鼓勵學生利用這些情境下自然發生的思考，去了解

與獲得數學概念（Lave, 1988）。這意味日常生活的經驗（行為），可作為抽象數學概念學習良好的基礎，例如前述生活中平衡的概念可以發展成代數的運算規則。

三、心理學的觀點

由 Gallese 與 Lakoff （2005）的觀點來看，體現認知是一種「知覺動作」的活動（perceptuo-motor activity），這意味知識是透過知覺動作系統所建立的，知覺動作系統提供了一個架構，讓我們能夠從將外界所接受到的資訊建立成知識，同時這個知識也影響了我們如何行動。事實上，這是一個互相影響的過程，知覺影響我們的動作、動作之後，反過來也影響了我們的知覺（Tran et al., 2017）。腦神經科學的研究，替上述主張提供證據支持，例如芭蕾舞者看跳舞影片時腦神經活化，但非芭蕾舞者沒有，這意味動作不僅僅是動作，它會過渡到非動作的認知行為上（看跳舞影片並不需要有肢體動作）。簡單的說，認知是基於知覺（perceptions）和行為（actions），並且即使缺乏實際的具體環境刺激，認知仍然可以發生，例如我們透過心智圖像（mental imagery）或閱讀理解（reading comprehension）發展認知（Alibali & Nathan, 2012）。

認知負荷理論也是心理學中常被用來支持身體應用於認知的理論（連宥鈞、吳昭容，2020；Tran et al., 2017）。藉由動作可以降低大腦的能量或是認知負荷，幫助大腦進行更多的認知程序，因此進而幫助解題能力的發展。例如透過歪頭來閱讀歪斜的文字或是透過手指頭來幫忙計算（連宥鈞、吳昭容，2020）。另外心理學家發現，動作結合其他行為（例如看和聽）可以強化記憶，透過動作，幫助學習者日後更容易提取這個記憶，並且也可以幫助這些記憶應用在其他類似的情境中，而不是同一個情境（Tran et al., 2017）。

四、數學教育中應用體現認知的常見類型

數學教育中常見的應用體現認知的教學有三種類型：1.「教具」、2.「手勢」（gesture）、3.「全身的肢體運動」（Tran et al., 2017）。首先，教具的使用在數學教學中很常見，所謂操作教具通常代表學習者可以操弄、滑動、翻轉一個三維空間的物件。操作教具對學習者至少有三個好處（Carbonneau, Marley & Selig, 2013; Tran et al., 2017），其一，促進學生的抽象思考，這尤其對於 7-11 歲的學生特別顯著。其二，促進抽象符號與具體表徵間的連結，我們應該不難理解透過操作教具來理解數學概念的學生，能夠同時理解符號與具體表徵的意義，例如同時了解符號 3+5 的意義，也能夠使用教具來表徵 3+5。最後，幫助學生自主探索數學概念，透過具體教具的操作，學生有機會自己去探索數學概念，

而不需要全部依賴教師的講述。

「手勢」在數學教學中有不同的應用方式（Alibali & Nathan, 2012），例如：（1）指向一個目標，用來表示這個物件，如教師用手指向柱體或椎體的教具，用此柱體來解釋幾何概念。（2）模擬圖形，如在空中模擬四邊形的軌跡來表徵四邊形。（3）表徵的工具，例如用手指頭來表徵數字或物件（點數時）。儘管手勢有不同的使用方式，但手勢的使用已被證實能夠促進學生的學習，其中最大的原因是學者認為這能夠幫助降低認知負荷，進而促進學生概念的學習（連宥鈞、吳昭容，2020）。

「全身肢體的運動」，如同前述，肢體運動可以做為輔助我們認知發展的一部分，儘管這部分的研究比較少，但是這些研究結果均呈現正向的支持。例如 Fischer, Moeller, Bientzle, Cress & Nuerk（2011）的研究將學生分為兩組，其中一組必須藉由整個身體的移動去比較數字的大小：先給一個數字，而後電腦出現的數字，比較小向左踏一步、比較大向右踏一步，控制組則是在電腦上用觸控螢幕進行此任務，結果發現身體移動組在其後的數線估算活動表現較佳。

參、 應用體現認知於數學教學的範例

有鑑於「全身肢體的運動」較少被使用在數學教育上，我們特別整理文獻三個範例教學方式，作為教師在教學或設計活動上的參考。

一、繩索多邊形（參考 http://www.malkerosenfeld.com/lesson-plans.html）

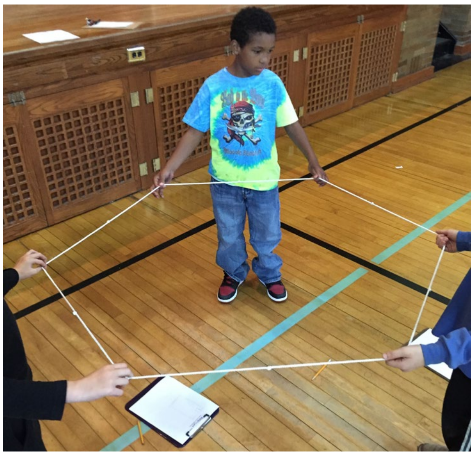


圖 2 繩索多邊形範例（引自 http://www.malkerosenfeld.com/lesson-plans.html）

1. **簡介**：3-5 個學生一組，小組利用已標示出 12 個繩結的童軍繩（每個結代表 1 英

呎，繩長 12 英呎，可幫助學生測量邊長）、運用他們的身體去探索與建構多邊形。

2. 對象：國小至高中，可根據不同年級調整創作圖形的難易程度。

3. 目標：學生通常在紙上創作或觀察多邊形，透過身體的應用與真實的生活情境，學生需要在新的情境下（有別與紙筆）去探索與了解多邊形的幾何性質，例如「在不用紙筆的狀況下，他們要如何去判斷或建立直角？」、「給定的繩長可以建構出最大的正多邊形為何？」「如何測量？」

4. 教學流程範例

(1) 要求學生探索他們的繩子，然後小組分享他們的觀察與疑問。

(2) 要求學生用繩子與身體創造至少一個正多邊形（如圖 2）。

(3) 教師巡視各小組的工作，了解它們如何將在紙本上學習到的多邊形知識應用到此情境上。

(4) 已完成任務的組別，教師詢問：「你們是否已窮盡所有可能的圖形？」「可以創造出多少不同的正方形？」「不同的菱形？」「探討相似三角形邊長的放大比例與周長的關係。」。

(5) 教師可以要求完成任務的組別創作不同的多邊形，例如任意的多邊形、凹多邊形等。

(6) 教師可以要求學生旋轉、翻轉這個圖形；教師可以要求連續動態一系列作出三個不同的幾何圖形，例如正方形、長方形、平行四邊形。

(7) 全班總結：要求學生畫出或展示他們創造的圖形，並說明他們的心得和反思。

(8) 注意：上述除了畫出也可以用教具（例如扣條、幾何釘板）精確表示出此幾何圖形，並精確的探討這些圖形的幾何性質（例如點、線面）。

二、百格版跳躍（參考 Koontz, 2010）

圖 3 跳躍百格板範例（引自“Math and movement training manual for elementary grades,” S. Koontz, 2010, p.136）

1. **簡介：**製作大型百格板或數線，學生可在上跳躍（圖 3）。
2. **對象：**加法、減法、乘法可適用於 1-2 年級；負數運算（如加上負數）、開根號可適用於 7 年級。
3. **目標：**有別於在紙上使用百格板或數線，透過身體在百格板或數線上跳躍，發展對於運算(加、減、乘、除)的知識，加深對於運算的印象，並增加趣味性。
4. **教學策略範例**

   (1) 數字散步：將一堆五元硬幣錢幣放在紙杯中，不同的紙杯有不同的數量，請學生任取一個紙杯，計算出錢幣的總和，從百格板的 1 出發依序走到答案的位置，其他同學透過最終位置判斷答案的正確性。

   (2) 數字跳躍：每 4 個一數（可任意調整幾個一數），從 1 出發，跳躍所有百格板上 4 個一數的數字，作為 4 的乘法教學的前置概念。

   (3) 偶數跳躍：跳躍百格板上所有的偶數。

   (4) 數字加減：製作不同的數字加減牌卡，透過抽牌卡，以走動的方式進行加減運算，例如先抽一數字 12，接著抽加法，再抽 25，請同學行走，學生可以先向下走兩行到達 32，再向右走 5 格到達 37 的位置；也可以直接從 12 出發依序走 25 格到達 37。

   (5) 指令控制：上述數字加減或行走規則也可以由其他同學控制，類似「老師說」的遊戲，例如台下的一位同學可以規定遊戲者先走到 5 的倍數的位置，接著另外一位台下同學說加 10，在百格板上的同學(遊戲者)就必須依照指令走到相對應的數字上。

   (6) 完全平方數：要求同學用黑色紙覆蓋百格板上所有完全平方數的數字上(1, 4, 9…)，也可以反過來要求找 4, 9, 81 的根號

   (7) 丟骰子：數字的行走也可以透過丟骰子來進行，例如丟兩個骰子，走到相對應位置。

   (8) 走到 100：兩位學生互相競賽，一個骰骰子先出發，根據骰子數值走相對應的步數，例如骰到 5 可以走 5 步，但是不一定要依序前進（1, 2, 3…），例如可以從 1 走到 10 接著再走 4 步到達 14，先走的 100 的人獲勝，但是被追到的人要退回起點（同一位置），例如兩人同在 52 上，先到者要退回起點。此活動可訓練學生觀察百格板數字間的關係，例如往下一行都是加 10、往右都是加 1。

(9) 總結活動：學生完成任務後，可以與同學探討身體的移動，與所採用的思考或計算策略間的關係（即是與數學思考、數學概念間的連結），例如在 12+25 的活動中，可以和學生 12 向下走一格變成 22，是加了 10 的意思，在向下走一格是在多 10 的意思，向右走 5 格是加 5 的意思。

三、**身體幾何**（參考 Belcastro & Schaffer, 2011）

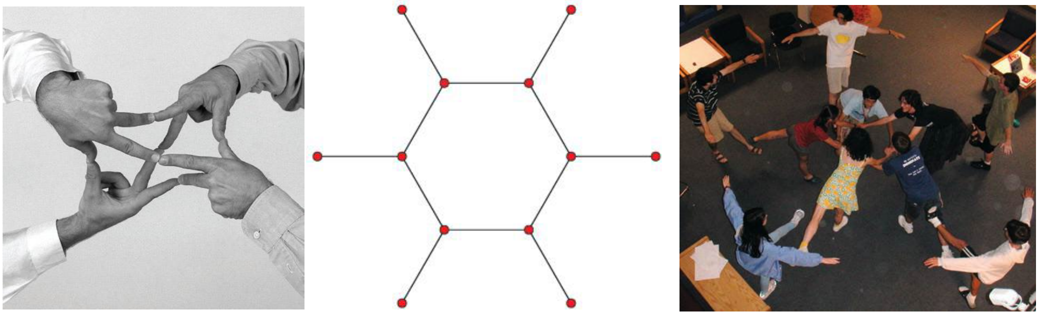


圖 4 身體幾何範例（引自“Dancing mathematics and the mathematics of dance,” S.-M. Belcastro & K. Schaffer, 2011, *Math Horizons, 18*(3), pp.18-19）

1. **簡介**：使用手指或身體排列立體圖形（圖 4）。
2. **對象**：國小至高中，可設計不同難度的圖形。
3. **目標**：透過手指或身體排列出立體圖形，例如正立方體，此過程中學生需要探索立體或平面圖形的幾何性質。
4. **教學策略範例**

(1) 小組合作，要求學生用手指排出立體圖形，例如正立方體、長方體或正四面體等（圖 4，最左邊）。

(2) 小組合作，給出指定的圖形，要求學生用身體排出，如給定上圖 4 的正六邊形（中間），學生排出如圖 4 最右邊的圖。

(3) 要求同學在紙上，描繪剛剛用手指或身體所排列出立體圖形(描繪成標準幾何圖形)或使用立體圖形教具（頂點珠、造型棒）複製剛剛所排出的幾何圖形或形體，再進一步與學生共同探討其幾何性質或概念，例如哪裡是圖形的邊、哪裡是圖形的角、不同形體或圖形有何幾何性質？

肆、 結論

綜合上述，應用「體現認知」於數學教學已經被認為是有效且具有完善理論支持的教學策略，然而目前的教學現場中，似乎較聚焦在「教具」的使用，但對於同樣應用體現認知的「手勢」和「肢體運動」較為忽略，因此，我們期待透過本文，啟發數學教師對於後面兩種類型活動的重視，進一步能開發更多可行且有意義的教案，如此真正能落實文獻中「思考與肢體活動不可分割」的觀念，幫助學生能同時使用大腦與身體來學習。我們相信這樣的教學策略對於數學弱勢的學生尤其特別重要，例如低年級或學習扶助的學生，透過此方式將有機會發展更好的學習。

參考文獻

連宥鈞、吳昭容. (2020)。手勢融入範例對低能力學生運算與幾何學習的影響. 臺灣數學教育期刊，7(2)，45-70。doi: 10.6278/tjme.202010_7(2).003

Alibali, M. W., & Nathan, M. J. (2012). Embodiment in mathematics teaching and learning: Evidence from learners' and teachers' gestures. Journal of the Learning Sciences, 21(2), 247-286. https://doi.org/10.1080/10508406.2011.611446

Bazzini, L. (2001). From grounding metaphors to technical devices: a call for legitimacy in school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 47*, 259–271. doi: 10.1023/A:1015143318759

Belcastro, S.-M., & Schaffer, K. (2011). Dancing mathematics and the mathematics of dance. Math Horizons, 18(3), 16-20. https://doi.org/10.4169/194762111X12954578042939

Carbonneau, K. J., Marley, S. C., & Selig, J. P. (2013). A meta-analysis of the efficacyof teaching mathematics with concrete manipulatives. Journal of Educational Psychology, 105(2), 380–400. http://doi.org/10.1037/a0031084

Dackermann, T., Fischer, U., Nuerk, H.-C., Cress, U., & Moeller, K. (2017). Applying embodied cognition: from useful interventions and their theoretical underpinnings to practical applications. ZDM, 49(4), 545-557. doi:10.1007/s11858-017-0850-z

Fischer, U., Moeller, K., Bientzle, M., Cress, U., & Nuerk, H.-C. (2011). Sensori-motor spatial training of number magnitude representation. Psychonomic Bulletin & Review, 18(1), 177–183. doi:10.3758/s13423-010-0031-3.

Flood, V. J., Shvarts, A., & Abrahamson, D. (2020). Teaching with embodied learning technologies for mathematics: responsive teaching for embodied learning. ZDM., 52, 1381–1396. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01165-7

Freudenthal, H. (1973). Mathematics as an educational task. Reidel: Dordrecht.

Gallese, V., & Lakoff, G. (2005). The brain’s concepts: The role of the sensory-motor system in conceptual knowledge. Cognitive Neuropsychology, 22, 455–479. doi: 10.1080/02643290442000310

Glenberg, A. M., Witt, J. K., & Metcalfe, J. (2013). From the revolution to embodiment: 25 years of cognitive psychology. Perspectives on Psychological Science, 8(5), 573-585. doi:10.1177/1745691613498098

Koontz, S. (2010). Math and movement training manual for elementary grades. Retrieved from https://mathmadefun.com/product/math-movement-training/

Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being (Vol. 6). New York: Basic Books.

Lave, J. (1988). Cognition in practice: mind, mathematics and culture in everyday life. Cambridge: Cambridge University Press

Moeller, K., Fischer, U., Link, T., Wasner, M., Huber, S., Cress, U., & Nuerk, H.-C. (2012). Learning and development of embodied numerosity. Cognitive Processing, 13, Suppl, 1, 271–274. doi:10.1007/s10339-012-0457-9.

Núñez, R. E., Edwards, L. D., & Filipe Matos, J. (1999). Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education. Educational Studies in Mathematics, 39(1), 45-65. https://doi.org/10.1023/A:1003759711966

Rosenfeld, M. (2017). Math on the move: Engaging students in whole body learning. Portsmouth, NH: Heinemann.

Riley, N., Lubans, D., Holmes, K., Hansen, V., Gore, J., & Morgan, P. (2017). Movement-based mathematics: Enjoyment and engagement without compromising learning through the EASY Minds Program. EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 13(6), 1653-1673. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.00690a

Sriraman, B., & Wu, K. (2014). Embodied cognition. In S. Lerman (Ed.), Encyclopedia of Mathematics Education (pp. 207-209). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_179

Sriraman, B., & Wu, K. (2020). Embodied cognition. In S. Lerman (Ed.), Encyclopedia of Mathematics Education (pp. 266-268). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_179

Tall, D. (2004). Building theories: The three worlds of mathematics. For the Learning of Mathematics, 24(1), 29-32. http://www.jstor.org/stable/40248444

Tran, C., Smith, B., & Buschkuehl, M. (2017). Support of mathematical thinking through embodied cognition: Nondigital and digital approaches. Cognitive Research: Principles and Implications, 2(1), 16. https://doi.org/10.1186/s41235-017-0053-8

Wilson, M. (2002). Six views of embodied cognition. Psychonomic Bulletin & Review, 9(4), 625-636. doi: 10.3758/BF03196322

李英、林原宏（2021）。
幾何操作探索課程對幼童幾何概念提昇之研究。
臺灣數學教師，**42**（1），29-47
doi: 10.6610/TJMT.202104_42(1).0003

幾何操作探索課程對幼童幾何概念提昇之研究

李英[1]　林原宏[2]
[1]國立臺中教育大學數學教育學系
[2]國立臺中教育大學數學教育學系

本研究旨在探討幾何操作探索課程對於幼童幾何概念的提升效益，幾何概念有四個向度能力，包括「辨識三角形的能力」、「辨識四邊形的能力」、「辨識經平移、旋轉、翻面後的平面幾何圖形能力」、「利用三角形及四邊形，透過平移、旋轉或翻面方式，拼組出六邊形的能力」等四個向度。本研究以臺中市某公立幼兒園的大班生兩班為研究對象，採不等組前後測準實驗設計，實驗組接受幾何操作探索課程及教具自由探索的處理，控制組只接受教具自由探索的處理。研究結果發現：（一）實驗進行前，所有幼童在「辨識經平移、旋轉、翻面後的平面幾何圖形能力」向度表現稍佳，在「利用三角形及四邊形，透過平移、旋轉或翻面方式，拼組出六邊形的能力」向度表現稍差；（二）實驗處理後，實驗組幼童在四個向度能力均有顯著提昇，而控制組只有在「辨識經平移、旋轉、翻面後的平面幾何圖形能力」此一向度能力有顯著提昇；（三）單因子共變數變異數分析結果顯示，實驗組幼童在四個向度能力的提升均顯著高於控制組幼童。本研究結果顯示，幼童透過幾何操作的探索課程，能顯著提升其幾何概念。本研究結果可提供教師進行幾何操作教學活動之參考，本研究亦提出幾何教學及未來研究上的相關建議。

關鍵詞：幼童、教具、幾何概念

通訊作者：林原宏，e-mail：lyh@mail.ntcu.edu.tw
收稿：2021 年 4 月 5 日；接受刊登：2021 年 4 月 19 日。

壹、緒論

一、研究背景與動機

「幾何」(geometry)是人類非常早接觸的數學元素，嬰兒一出生所看到母親、醫護人員的臉是屬於拓樸幾何，當躺著或是被抱著時和周圍環境互動是一種投影幾何，乃至於入學後所學習歐氏幾何，都是源自人類的感官知覺和環境互動的產物(Piaget & Inhelder, 2002; Piaget, Inhelder & Szeminska, 1999)。幾何學在生活的應用很廣泛，所以在數學發展史上，也佔有極為重要的地位；而各國數學教育的課程中，幾何內容也佔有一定的比率(教育部，2008、2016、2018；NCTM, 2000; Finnish National Board of Education, 2004, 2010; Van den Heuvel-Panhuizen, 2000)，由此可見幾何在數學教育的重要性。

綜觀有關學生的幾何概念之相關研究文獻可知，仍有不少學生在幾何的學習表現上卻不盡理想，實證研究指出學生未具備應有的幾何概念或存在幾何迷思概念(張英傑，2001；謝貞秀、張英傑，2003；Usiskin, 1982)。例如：以視覺或觸覺察看特徵來進行圖形分類活動時，無法全部說出必要充分的相關屬性。Piaget and Inhelder(2002)和 Piaget 等人(1999)指出個體會隨著年齡，其幾何概念會有階段性發展。而 Clements(2003)、Crowley(1987)、van Hiele(1984, 1999)的文獻則認為需要透過適當的教學介入(intervention)，才可以引領學生進入幾何概念各階段的發展，而且指出幾何學習需要有具體物操作的經驗，才能提升幾何概念。有關學生的幾何概念研究，其研究對象多為國小或中學生(何森豪，2001；梁勇能、左台益，2001；Ma, Lee, Lin, & Wu, 2015)，針對學齡前的幼童為對象的研究較少，且以瞭解簡單幾何圖形的認知表現為主(洪文東、沈宴竹，2012)，較少探討教學介入對幼童幾何概念的提昇效益。

本研究擬採準實驗研究法探討不同實驗處理對於幼童的幾何概念提升效益，控制組採「幾何教具自由探索」，實驗組為「遊戲式操作性探索課程合併幾何教具自由探索」。且研究者透過文獻的歸納整理，在幼童階段的操作探索與教學介入，歸納出對幼童的幾何概念影響的四個向度，包括「辨識三角形的能力」、「辨識四邊形的能力」、「辨識經平移、旋轉、翻面後的平面幾何圖形能力」、「利用三角形及四邊形，透過平移、旋轉或翻面方式，拼組出六邊形的能力」等四個向度。所以，本研究者以幼兒園大班幼童為研究對象，針對幾何概念設計幾何操作探索課程，採準實驗研究設計，探討幼童的幾何概念表現情形以及操作探索課程對前述四個向度能力的幾何概念提昇效益。

二、研究目的

基於前述研究背景與動機，本研究目的如下：

(一)分析實驗處理前幼童在前述四個向度的幾何概念表現。

(二)探討控制組和實驗組的實驗處理，對幼童在前述四個向度的幾何概念提升效益。

(三)比較控制組和實驗組的實驗處理，對幼童在前述四個向度的幾何概念提升之差異。

貳、文獻探討

一、幼童幾何概念發展的理論

(一) J. Piaget 的幼童幾何認知發展理論

J. Piage 藉由對幼童的觀察發現，指出幼童對於幾何及空間的理解，不是知覺性的產出，而是與環境中的圖形或物體互動內化後，形成內部表徵而建構出來的，且幼童的幾何概念發展順序先是理解拓樸幾何關係（topological relations），如連接性、封閉性、內外、上下或左右等關係；其後是投影幾何關係（projective relations）及歐氏幾何關係（euclidean relations），如投影線段、影子的投射、簡單的透視、直線、長度、角度、幾何量等，以上發展與人類幾何史發展的順序不同（周筱亭、黃敏晃，2006； Piaget & Inhelder, 2002; Piaget et al., 1999）。但後續也有相關文獻指出不同看法，認為 J. Piaget 對於幼童的幾何概念發展解釋過於簡略，且拓樸幾何並不是最先發展的幾何概念（Rosser, Campbell, & Horan, 1986）。

(二) van Hiele 幾何認知思考模式

J. Piaget 認為幾何概念的發展，生物成熟度的重要性大於學習過程的重要性，但 van Hiele（1986）認為學習過程比生物成熟更重要。van Hiele （1984, 1999）提出 van Hiele 幾何思考模式，認為幾何的思考可分為五個層次，分別是層次一，視覺層次（visualization），能依整體輪廓辨認圖形，並以「像什麼一樣」來描述幾何圖形；層次二，分析層次（analysis），能依組成要素、屬性或特徵來描述圖形；層次三，非形式演繹層次（informal deduction），能建構不同幾何圖形間的包含關係；層次四，形式演繹層次（formal deduction），能嚴謹的證明定理；層次五，嚴密層次（rigor），能分析比較不同幾何系統，甚或創建新的幾何系統。

van Hiele 幾何思考模式具有一些重要特性，1.連續性（sequential），每個層次有依序

發展的次序。2.進展性（advancement），由某層次進展到下一層次，非因年齡成熟因素，主要是透過教學而進展。3.內因性（intrinsic）與外因性（extrinsic），學生會將之前所有層次的思考方式內化，進而形成新的概念。在這過程中，會因視覺外觀和內化而有不同概念。例如：學生會因長方形和正方形的視覺外觀而認為是不同圖形，此即為外因性；其後透過演繹認為正方形是長方形的一種，內化形成新的概念，此即為內因性。4.語言性（linguistics），每一層次均有自己的語言符號及系統，但到了下一層次，語言可能必需修正。例如：國小階段正方形和長方形初始是不同概念，但國中階段的矩形則包含的正方形和長方形。5.不配合性（mismatch），教師進行幾何教學時，必須採用該層次的語言，若採用較高層次的語言，學生可能完全無法理解（Crowley, 1987）。

二、幼童幾何概念的課程內容

幾何正式納入課程始於國小教育階段，國小低年級階段幼童的幾何操作，是以感官進行形體辨識、描繪、仿製、複製、拼貼、堆疊等活動。有關針對幼兒園的幼童所設計的幾何課程實證研究較少，我國在《幼兒園教保活動課程大綱》內的認知領域「生活環境中的數學」學習面向中，列出兩個學習指標，分別是「覺知物體的形狀會因觀察角度的不同而不同」，以及「以自己為定點，辨識物體與自己位置的上下、前後、左右的關係」（教育部，2016）。我國頒布「幼兒園教保活動課程暫行大綱」中的施行通則第四項，特別提到幼兒自由遊戲及在遊戲中學習的重要價值，建議設計讓幼兒有興趣的活動，透過遊戲的方式，引發幼兒主動探索、試驗與發現，常保學習樂趣（教育部，2016）。九年一貫課程數學綱要國小低年級幾何主題之能力指標則包括：能由物體的外觀，辨認、描述與非累簡單幾何形體；能描繪或仿製簡單幾何形體；能認識周遭物體中的角、直線和平面；能認識周遭生活中平行與垂直的現象（教育部，2008），而十二年國教數學綱要國小低年級的幾何表現類別之學習表現則為「從操作活動，初步認識物體與常見幾何形體的幾何特徵」（教育部，2018）。

美國 Common Core State Standards Initiative（CCSI, 2010） 所出版的《美國各州數學共同核心標準》（CCSSM）中的課程標準，針對幼兒園大班是「辨認及描述形狀(正方形、圓形、三角形、長方形、六邊形、方塊、角、圓柱體及球體，分析、比較、製作及組合形狀)」；小學一、二年級是「形狀與其屬性的推理」，教導以屬性來辨別幾何形狀，例如三角形是封閉的且有三個邊。NCTM（2000）所出版的 Principles and Standards for School Mathematics《學校數學教學原則與標準》中，指出從幼兒園到小學二年級，應教

導探索及預測平面形狀與立體形體經組合或分割後的結果，能理解及應用平移、旋轉及翻面的能力。另外，芬蘭及荷蘭的教育研究報告指出，針對大班到小二的幼童的幾何課程內容，除了對圖形及形體的辨識、命名及描述等外，應著重幾何在生活上的實務應用及問題解決（Finnish National Board of Education, 2004, 2010; Heuvel-Panhuizen, 2000）。

參考以上各國針對幼兒園大班到小二幼童的幾何課程內容，研究者將本研究幼童的幾何概念研究範圍界定在幾何概念部分的四個向度，包括「辨識三角形的能力」、「辨識四邊形的能力」、「辨識經平移、旋轉、翻面後的平面幾何圖形能力」、「利用三角形及四邊形，透過平移、旋轉或翻面方式，拼組出六邊形的能力」等四個向度。

三、幼童幾何概念的教與學

(一) van Hiele 的五階段學習模式

van Hiele（1984）對幾何學習提出五個教學階段，教師透過教學可以幫助學生進展至較高的幾何思考層次，此五個教學階段分別是：階段一：詢問（inquiry），教師應藉由詢問學生問題，請學生經由觀察、討論及透過探索相關的教材教具，了解學習新思考層次的相關語詞或結構，在準備探索活動之前，教師須了解針對某主題學生所具備的前置經驗、學生應學的內容等。階段二：直接引導（directed orientation），教師準備符合主題的教材教具及活動，讓學生充分探索並完成所設計的活動，相關活動須能顯示該思考層次架構的特徵。階段三：解釋（explication），根據前面的經驗，學生透過討論將觀察到的彼此表達觀點，教師須注意學生在表達時，是否有正確使用此思考層次慣用的語言。階段四：自由探索（free orientation），經過充分的探索，學生已掌握主要概念，有能力可完成教師交付之任務或作業，甚至可採多種不同方式來完成任務。階段五：統整（integration），此階段學生已充分探索完成，教師做最後的整體總覽，幫助學生將所學習到的形成綜合概念（Crowley, 1987; van Hiele, 1999）。已有中小學的相關實證研究文獻支持 van Hilele 的五階段學習模式，本研究設計依據該學習模式理念，設計「幼童遊戲式操作性探索課程」。

(二) Clements 的幾何教與學

Clements（1998）是幼童幾何教育的著名研究者，對於 J. Piaget 幾何認知發展與教學無關的觀點並不認同，Clements and Battista （1992）也認為 van Hiele 的幾何思考發展模式理論，並不完全適合來描述幼童的幾何概念的發展，但同樣主張為協助幼童建立

幾何概念或提昇思考層次，操作教具是不可或缺的，例如幾何相關的圖形或圖片，而可操作性的教具更是扮演最重要的角色（Clements, 1998, 2003; Clements & Battista, 1992）。基於前述 D. H. Clements 的主張，本研究在操作探索課程中，使用大量的操作性教具，以及幾何相關圖形及圖片。

參、研究方法

一、研究設計

本研究採用不等組前後測準實驗設計（nonequivalent pretest-posttest experimental design），實驗設計如表 1 所示。

表 1
不等組前後測準實驗設計

組別	前測	自變項	後測
實驗組	O1	X1+X2	O2
控制組	O3	X2	O4

註：X1 為進行「幼童遊戲式操作性探索課程」的教學介入
X2 為施行「幼童幾何教具自由探索」的實驗處理
O1 為實驗組的前測分數　O2 為實驗組的後測分數
O3 為控制組的前測分數　O4 為控制組的後測分數

二、研究設計

研究者自編之「幼童幾何主題測驗」對實驗組及控制組施行前測，實驗組需要教學介入，所以由研究者以自編之「幼童遊戲式操作性探索課程」進行兩週 3 堂課，每堂 60 分鐘的實驗教學，同時搭配四週的幾何教具自由探索。控制組則只有四週的幾何教具自由探索，無進行實驗教學。最後對兩組以研究者自編之「幼童幾何主題測驗」施行後測。

三、研究對象

本研究以立意取樣方式，選取臺中市一所公立幼兒園的大班幼童兩班，共計 41 人。一班為實驗組，接受「幼童遊戲式操作性探索課程」的教學介入及實施「幼童幾何教具自由探索」，並由研究者擔任教學；另一班則為控制組，只實施「幼童幾何教具自由探索」。各班人數與有效受測人數，如表 2 所示。

表 2
研究樣本人數統計表

組別	人數	前測有效樣本	後測有效樣本
實驗組	22	22	20
控制組	19	19	19
合計	41	41	39

四、研究工具

本研究使用之研究工具為研究者自編的「幼童幾何主題測驗」，包含測驗一至測驗四，分別評量「辨識三角形的能力」、「辨識四邊形的能力」、「辨識經平移、旋轉、翻面後的平面幾何圖形能力」、「利用三角形及四邊形，透過平移、旋轉或翻面方式，拼組出六邊形的能力」等四個向度的幾何概念。其中包含紙筆評量（看圖圈選）及操作評量（兩張積木擺放卡），分別是測驗一「圈出所有的三角形」；測驗二「圈出所有的四邊形」；測驗三「圈出一樣的五方連塊」；以及測驗四「拼房子」。研究工具有 A、B 兩版本，總題數及題目內容相同，唯編排的題號順序不同，目的是避免同桌的兩位幼童彼此觀看而影響作答。前測時，座號單號幼童使用 A 版，座號雙號幼童使用 B 版；後測時，單號幼童使用 B 版，雙號幼童使用 A 版。A 版和 B 版的內部一致性 Cronbach 的 α 信度分別為 0.91 和 0.93，其信度可以接受。「幼童幾何主題測驗」各向度所需的能力，和「幼童遊戲式操作性探索課程」的教學介入與「幼童幾何教具自由探索」活動有相關。

五、教學活動設計

「幼童遊戲式操作性探索課程」設計，每堂課均具有明確的課程目標、遊戲名稱及操作性的活動或任務。教學模式主要採 van Hiele（1986）五階段學習模式，含透過「詢問」的方式，讓幼童觀察或思考教學者所提之問題；以「直接引導」的方式透過操作性活動來探索所提供之教具；透過「解釋」讓幼童學習該層次之慣用語言及相關意義；以「自由探索」方式，讓幼童充分探索或試誤的方式解決教學者所提之問題或完成任務；最後，請幼童分享不同的方法後，由交學者來協助「統整」所有的想法，幫助幼童反思並建立概念。實驗組規劃有三堂課，每堂課 60 分鐘，由研究者擔任教學者，其內容如表 3 所示。

表 3

「幼童遊戲式操作性探索課程」中的遊戲名稱、課程目標及活動概述

第一堂課「三角形與四邊形」

遊戲活動名稱	課程目標	活動概述與幼童操作方式
1-1『三角形的身體圈叉遊戲』	能分辨三角形且能說出原因	1.白板介紹「頂點」、「線」、「直線」、「邊」、「角」、「封閉圖形」 2.教幼童判斷三角形的條件：封閉圖形 + 三個直線邊 + 三個角 3.給圖卡，請幼童判斷後以手臂比出圈叉來作答 4.請幼童說出是三角形的原因，或不是三角形的原因
1-2『四邊形的身體圈叉遊戲』	能分辨四邊形且能說出原因	似前項操作方式，只是將三角形改為四邊形
1-3『變出三角形』	能用幾何扣條製作三角形	1.老師先介紹扣條，讓幼童看到直線的「邊」 2.兩根扣條扣在一起，讓幼童看到「角」 3.讓幼童操作，選三根扣條變出三角形 4.全班分享各組不同的三角形(教師引導，觀察比較分析各種不同的三角形)，並示範哪三根扣條不能變出三角形
1-4『變出四邊形』	能用幾何扣條製作四邊形	似前項操作方式，將扣條數量改為四根並變出四邊形

第二堂課「五方連塊變變變」

遊戲活動名稱	課程目標	活動概述與幼童操作方式
2-1『幫忙取名字』	與生活連結後，講出長得像或相似的物體名稱，此舉將對 12 個特殊造型產生感覺	1.依序將 12 種五方連塊舉高，以旋轉、翻面、移動，不斷變換朝向，展示給幼童看，請幼童說出此片積木長得像什麼?(協助記憶) 2.鼓勵幼童講出不同的物品名稱
2-2『五個方片連一起』	能用五個正方形分別拼出 12 種造型的連塊	五方連塊積木片吸附在白板上，一個樣式兩片，以不同方位呈現，讓幼童一次拼出同樣式的兩片，原型與翻面+旋轉)

表 3(續)

2-3『五方連塊請出來』	能辨識 12 種造型五方連塊	1.每桌放上混和五組不同色的五方連塊，共 60 片 2.每位幼童一個夾鏈袋，並選定一個顏色 3.老師舉起某一五方連塊，幼童須從桌上找出是自己顏色又與老師同形狀的積木片，舉起給老師檢查，成功者放入夾鏈袋內
2-4『合作拼大圖』	能用出平移、旋轉、翻面的能力，以對應方式拼組出特定圖案	1.每桌發一組 12 片的五方連塊 2.一大張造型圖卡，整組合作將 12 片五方連塊依圖示擺入對應之位置

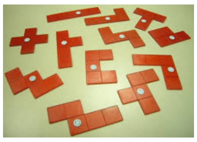
第三堂課「拼房子」

遊戲活動名稱	課程目標	活動概述與幼童操作方式
3-1『眼睛看、頭腦想、出來拼』	能說出 6 種積木的形狀名稱且能做出基本型的拼組	1.將六種形狀卡吸在白板上，問幼童每種形狀的名字 2.依序放上，詢問可否由其他形狀組合拼出?可以的請舉手?請到白板來拼拼看 3.讓所有幼童看到形狀間的關係
3-2『幫蜜蜂及精靈拼房子』	a. 能用試誤法的方式，拼組出六邊形(正六邊形及特定六邊形)，能有切割組合的能力 b. 能判斷整個圖形經平移、旋轉或翻面後是否相同	發拼房子操作卡及積木，幼童自行探索，完成任務(亦即解決問題)

六、 幾何教具自由探索

實驗組及控制組兩班幼童於前測結束後，當日即放置五種幾何教具（如表 4 所示）於教室內的積木角落的木櫃中，採開放式陳列並鼓勵幼童自由探索。幼童可以在每日早上入園後晨間點心前的時間、角落時間、自由時間及下午家長接回前的等待時間進行自由探索操作。

表 4
自由探索的幼童幾何教具介紹

教具名稱	特徵說明	提供目的
幾何扣條 	5cm,7.07cm,8.66cm, 10cm,12.24cm,14.14cm 各 12 條，共 72 條(紅、黃、藍、綠、橘、紫六色)	體驗的三角形及四邊形的重要屬性，例如：直線邊、角及封閉圖形等。
方形透明片 	邊長為 2.5 公分的正方形有色透明塑膠片(紅、黃、藍、綠，共四色)	利用五片正方形，以邊接連邊的方式練習組合出 12 種五方連塊(等積異形積木片)。
五方連塊 	由五正方形組合成的等積異形積木片，每組 12 片(紅、黃、藍、綠、橘，共五色)	體驗平移、旋轉、翻面(鏡射)等的空間能力。
六形六色積木 	六邊形(黃)、梯形(紅)、菱形(藍)、正方形(橘)、三角形(綠)、 細長菱形(木)	體驗平面圖形的分割與組合能力。

七、資料分析

(一) 資料處理

測驗一至測驗三的作答為圈選方式舉例如圖 1 所示，每一小題或小圖均有分數，答對得 1 分，答錯得 0 分，亦即該圈而有圈或不該圈而未圈得 1 分；反之，該圈而未圈或不該圈而圈得 0 分。測驗四是利用限定的六種幾何圖形，拼組出特定的六邊形圖案，共兩張，每張均有九種不同組合方法，每一種方法得 1 分，經平移、旋轉、翻面後不得相同。利用以上計分方式，將所有得到的原始答題資料轉換成 0、1 二元值。

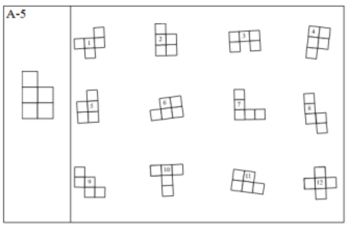


圖 1 圈出一樣的五方連塊試題範例

(二) 資料分析

根據研究目的，本研究利用 IBM SPSS 20.0 的統計軟體進行三種檢定如下：

1. 以「實驗組」及「控制組」為自變項，進行獨立樣本 t 檢定，分析四個向度的幾何概念表現和差異性。
2. 針對「實驗組」及「控制組」的前後測分數，分別進行相依樣本 t 檢定，分對幼童在前述四個向度的幾何概念提升效益。
3. 以前測分數為共變項，後測分數為依變項，進行單因子共變數分析，比較實驗組和控制組對幼童在前述四個向度的幾何概念提升之差異。

肆、結果與討論

本研究「幼童幾何主題測驗」包含測驗一至測驗四，分別評量「辨識三角形的能力」、「辨識四邊形的能力」、「辨識經平移、旋轉、翻面後的平面幾何圖形能力」、「利用三角形及四邊形，透過平移、旋轉或翻面方式，拼組出六邊形的能力」等四個向度的幾何概念。結果分析如下：

一、幼童在幾何概念的表現情形

為瞭解幼童在面幾何概念的表現情形，針對實驗處理前的前測分數，進行描述性分析和獨立樣本 t 檢定。

(一) 所有實驗樣本的前測表現

全部樣本在四個向度的幾何概念表現如表 5 所示，其中表現最佳的為測驗三，平均得分率為 86.43%，亦即幼童在「辨識經平移、旋轉、翻面後的平面幾何圖形能力」表現最佳；表現最差的為測驗四，平均得分率為 33.74%，亦即幼童在「利用三角形及四邊形，透過平移、旋轉或翻面方式，拼組出六邊形的能力」表現最差。

表 5
全部樣本的前測平均數、標準差及得分率統計表

向度	人數	平均數	標準差	總分	平均得分率
測驗一	41	10.88	2.11	20	54.39%
測驗二	25	11.04	2.39	20	55.20%
測驗三	41	124.46	14.84	144	86.43%
測驗四	41	6.07	2.82	18	33.74%

註 1:「得分率」為每位幼童在該測驗的得分除以該測驗的總分。
註 2:「平均得分率」為該測驗的每位幼童「得分率」加總後除以被施測的人數;
註 3:測驗二的人數為 25 人(非 41 人),是因為測驗前,詢問所有幼童「知道什麼是四邊形的小朋友,請舉手」。只針對有舉手的小朋友(25 人)施以測驗。

(二) 實驗組與控制組的前測成績差異情形

實驗組與控制組的前測分數如表 6 所示,從得分率可知,控制組在測驗一、測驗二、測驗四的表現上均微幅高於實驗組;只有在測驗三的表現上,是實驗組微幅高於控制組。

表 6
實驗組與控制組的前測平均數、標準差及得分率統計表

向度	實驗組		控制組	
	人數	得分率	人數	得分率
測驗一	22	52.50%	19	56.58%
測驗二	15	53.00%	10	58.50%
測驗三	22	86.90%	19	85.89%
測驗四	22	32.32%	19	35.38%

獨立樣本 t 檢定的結果如表 7 所示,該表中顯示兩組幼童前測分數的四個向度之幾何概念表現是無顯著差異。

表 7
前測獨立樣本 t 檢定

向度	t 檢定	
	t	顯著性
測驗一	-1.242	.222
測驗二	-1.135	.268
測驗三	.309	.759
測驗四	-.618	.540

二、實驗處理對兩組幼童在幾何概念的提昇效益

(一) 實驗組幼童在幾何概念的提昇效益

實驗組進行「幼童遊戲式操作性探索課程」的教學介入,並同時施行「幼童幾何教具自由探索」。以前後測分數進行成對樣本 t 檢定(paired-sample t Test),結果如表 8 所示。實驗組幼童在四個向度的幾何概念的後測與前測成績均達顯著差異,且後測成績均

高於前測成績。整體而言，教學介入與教具自由探索對本研究的四個向度之幾何概念有顯著提升影響。

表 8
實驗組幼童在四個向度的幾何概念成對樣本 t 檢定

向度	前測	後測	*t*
	平均數（標準差）	平均數（標準差）	
測驗一	10.60（2.28）	13.75（2.61）	3.83**
測驗二	10.57（2.82）	15.21（2.12）	4.96***
測驗三	124.80（16.09）	137.40（8.55）	4.80***
測驗四	5.75（3.19）	9.80（3.75）	7.06***

** $p< .01$ *** $p< .001$

(二) 控制組幼童在幾何概念的提昇效益

控制組只進行「幼童幾何教具自由探索」，以前後測分數成進行成對樣本 t 檢定，結果如表 9 所示。由表 9 得知，只有測驗三的前後測分數有達顯著差異，且後測分數平均高於前測分數，表示教具自由探索對「辨識經平移、旋轉、翻面後的平面幾何圖形能力」有顯著提昇影響，亦即「五方連塊」讓幼童探索可使其幾何概念有所提昇。在其他向度（測驗一、二、四）主要是有關角、邊、直線、封閉圖形等幾何專有名詞，以及利用三角形及四邊形，透過平移、旋轉或翻面方式，拼組出六邊形。顯示在這些的幾何概念，需要教學介入才能獲得概念提升。

表 9
控制組幼童在四個向度的幾何概念成對樣本 t 檢定

向度	前測	後測	*t*
	平均數（標準差）	平均數（標準差）	
測驗一	11.32（1.97）	12.21（1.55）	1.69
測驗二	12.14（1.46）	11.71（2.36）	-0.42
測驗三	123.68（14.46）	129.74（17.24）	2.14*
測驗四	6.37（2.31）	7.21（3.24）	1.78

* $p< .05$

三、「幼童遊戲式操作性探索課程」對幼童幾何概念的提升效益

本研究採用不等組前後測準實驗設計，為瞭解分析「幼童遊戲式操作性探索課程」的教學介入對幼童幾何概念的提升效益，分別以各個向度的幾何概念前測分數為共變項，後測分數為依變項，進行單因子共變數分析，分析結果如下：

(一) 辨識三角形的能力

以測驗一「圈出所有的三角形」的前測分數為共變項，其後測分數為依變項。迴歸係數具同質性（F = .599，p = .444），單因子共變數分析如表 10 所示，顯示在排除前測分數的影響後，實驗處理效果有顯著差異（F = 4.54，p = .04），且實驗組（M' = 13.74）高於控制組（M' =12.22），亦即教學介入對「辨識三角形的能力」有顯著提昇影響。

表 10
辨識三角形能力共變數分析摘要表

變異來源	離均差平方和	自由度	均方	F	事後比較
共變數（前側一）	0.16	1	0.16		
組間（教學）	21.78	1	21.78	4.54*	實驗組 ＞ 控制組
組內（誤差）	172.74	36	4.80		

* p< .05

(二) 辨識四邊形的能力

以測驗二「圈出所有的四邊形」的前測分數為共變項，其後測分數為依變項。因迴歸係數具同質性（F = .016，p = .900），單因子共變數分析如表 11 所示，顯示在排除前測成分數的影響後，實驗處理效果有顯著差異（F = 10.41，p = .005），且實驗組（M' = 15.23）高於控制組（M' = 11.69），亦即教學介入對「辨識四邊形的能力」有顯著提昇影響。

表 11
辨識四邊形能力共變數分析摘要表

變異來源	離均差平方和	自由度	均方	F	事後比較
共變數（前測二）	0.06	1	0.06		
組間（教學）	53.05	1	53.05	10.41**	實驗組 ＞ 控制組
組內（誤差）	91.73	18	5.10		

** p< .01

(三) 辨識經平移、旋轉、翻面的平面幾何圖形能力

以測驗三「圈出一樣的五方連塊」的前測分數為共變項，其後測分數為依變項。迴歸係數具同質性（F = 3.400，p = .074），單因子共變數分析如表 12 所示，顯示在排除前

測分數的影響後，實驗處理效果有顯著差異（$F = 4.26$，$p = .046$），且實驗組（$M' = 137.10$）高於控制組（$M' = 130.05$），亦即教學介入對「辨識經平移、旋轉、翻面的平面幾何圖形能力」有顯著提昇影響。

表 12
辨識經平移、旋轉、翻面的幾何圖形能力共變數分析摘要表

變異來源	離均差平方和	自由度	均方	*F*	事後比較
共變數（前測三）	2658.92	1	2658.92		
組間（教學）	483.02	1	483.02	4.26*	實驗組 ＞ 控制組
組內（誤差）	4079.56	36	113.32		

* $p < .05$

(四) 實驗組與控制組的前測成績差異情形

以測驗四「拼房子」的前測分數為共變項，其後測分數為依變項。迴歸係數具同質性（$F = .537$，$p = .468$），單因子共變數分析如如表 13 所示，顯示在排除前測成績的分數後，實驗處理效果有顯著差異（$F = 17.37$，$p < .001$），且實驗組（$M' = 10.08$）高於控制組（$M' = 6.91$），亦即教學介入對「利用三角形及四邊形，透過平移、旋轉或翻面方式，拼組出六邊形的能力」有顯著提昇影響。

表 13
利用三角形及四邊形，透過平移、旋轉或翻面方式，拼組出六邊形的能力共變數分析摘要表

變異來源	離均差平方和	自由度	均方	*F*	事後比較
共變數（前測四）	255.96	1	255.96		
組間（教學）	96.69	1	96.69	17.37***	實驗組 ＞ 控制組
組內（誤差）	200.40	36	5.57		

*** $p < .001$

伍、結論與建議

一、結論

依據前面的研究結果與分析，本研究提出以下結論：

(一) 實驗處理前幼童的幾何概念表現不盡相同。

實驗前，全部幼童在四個向度的幾何概念中，以「辨識經平移、旋轉、翻面後的平面幾何圖形能力」的表現最佳；「利用三角形及四邊形，透過平移、旋轉或翻面方式，拼

組出六邊形的能力」的表現最差。相關文獻上也指出，利用多個形體的平移、旋轉或翻面來組成一個形體，是幼童較難完成的任務，因為此任務需要推理與操作經驗，本研究結果也呼應此觀點（Rosser et al., 1986）。

(二) 實驗處理前實驗組與控制組幼童的幾何概念表現無顯著差異。

根據兩組的前測平均得分率，以獨立樣本 t 檢定，可得知實驗組與控制組兩組幼童在各向度分數無顯著差異。

(三) 實驗組幼童在所有四個幾何概念向度上均有顯著提昇成效。

接受「幼童遊戲式操作性探索課程」加上「幼童幾何教具自由探索」實驗處理的實驗組幼童，在四個向度的幾何概念表現上均有顯著的正面提昇成效。

(四) 控制組幼童在一個幾何概念向度上有顯著提昇成效。

僅有「幼童幾何教具自由探索」實驗處理的控制組幼童，只有在「辨識經平移、旋轉、翻面後的平面幾何圖形能力」的表現上有顯著提昇。

(五) 操作性探索課程教學介入，對幼童在四個向度的幾何概念均有顯著的提昇效果。

針對實驗組與控制組幼童，分別以各個向度的前測分數為共變項，後測分數為依變項，進行單因子共變數分析。顯示實驗組的所使用的「幼童遊戲式操作性探索課程」對幼童幾何概念的提昇均有顯著效果，顯示設計適當的教學課程，對幼童的幾何概念是能有正向效益的。

二、建議

本研究發現「遊戲式操作性探索課程」的教學介入對幼童幾何概念提昇有顯著提升效果，如果僅有「幾何教具的自由探索」，對幼童幾何概念只有部分提昇效果。根據研究結果，提出以下建議。

(一) 工具編製建議

本研究的教學工具與施測工具均是可行的，教學工具包含各種可操作的幾何教具及圖卡；施測工具中的試題，主要以視覺化呈現，其作答方式簡單易懂，例如：把答案圈起來，均是幼童容易執行的方式。建議未來相關研究的工具編製，可參考此方法進行。

(二)教學建議

本研究「遊戲式操作性探索課程」，是透過「想」和「玩」的幼童天性來促進幾何思維。教師在教學中以提問來促進「想」的能力和習慣，以幾何教具滿足「玩」的探索和操作。讓幼童主動探索及不斷嘗試，教師引導幼童思考方向，可成為幼童幾何有效教學的參考。

(三)後續研究建議

1.研究對象部分

本研究研究對象為一所台中市公立幼兒園大班幼童，建議可擴大研究樣本或以國小低年級的學生為對象，進行遊戲式操作性探索課程的教學介入探究。

2.研究方法部分

本研究為準實驗研究設計，研究分析以量性為主，建議未來研究可在增加一個控制組，採無教學介入且無提供幾何教具自由探索的實驗處理，來比較在不同的實驗處理下的提昇效益。此外，未來研究可增加質性探討的部分，可以透過晤談方法來瞭解幼童的幾何探索思維、自由探索的動機和時間等，將有助於瞭解幼童內心更真實的想法。

參考文獻

何森豪(2001)。van Hiele 幾何發展水準之量化模式--以國小中高年級學生在四邊形概念之表現為例。測驗統計年刊，9，81-129。 doi: 10.6773/JRMS.200112.0081

周筱亭、黃敏晃(2006)。國小數學教材分析。新北市：國立教育研究院。

洪文東、沈宴竹(2012)。幼兒幾何圖形測驗編製與施測。幼兒保育學刊，9，61-75。 doi: 10.6433/JCC.201203.0062

張英傑(2001)。兒童幾何形體概念之初步探究。國立台北師範學院學報，14，491-528。

教育部(2008)。國民中小學九年一貫課程綱要。臺北市：教育部。

教育部(2016)。幼兒園教保活動課程大綱。臺北市：教育部。

教育部(2018)。十二年國民基本教育課程綱要。臺北市：教育部。

梁勇能、左台益（2001）。國二學生空間能力與 van Hiele 幾何思考層次相關性研究。師大學報：科學教育類，46(1&2)，1-20。 doi: 10.6300/JNTNU.2001.46.01

謝貞秀、張英傑(2003)。國小三四年級平面圖形概念之探究。國立台北師範學院學報：數理科技教育類，16(2)，97-133。

Clements, D. H. (1998). Geometric and Spatial Thinking in Young Children. National Science Foundation. VA: Arlington.

Clements, D. H. (2003). Teaching and learning geometry. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), A Research Companion to Principle and Standards for School Mathematics (pp. 151-178). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D.A. Grouws (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 420–464). New York: Macmillan.

Common Core State Standards Initiative. (2010). Common Core State Standards for Mathematics (CCSSM). Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers.

Crowley, M. L. (1987). The van Hiele model of the development of geometric thought. In M. M. Lindquist (Eds), Learning and Teaching Gemretry, K-12, Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (pp.1-16). Reston, VA: National Council of Teachers af Mathematics.

Finnish National Board of Education (2004). Nartional Core Curriculum for Basic Education 2004., 2020. 12. 24 retrieval from http://www.oph.fi/ english/ curricula_and_ qualifications / basic_education.

Finnish National Board of Education (2010). National Core Curriculum for Basic Education 2010., 2021. 01. 03 retrieval from http://www.oph.fi/ english/curricula_ and_qualifications / pre-primary%20_education.

Heuvel-Panhuizen, M. (2000). Mathematics education in the Netherlands: A guided tour. Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9. Utrecht: Utrecht University.

Ma, H. L., Lee, D. C., Lin, S. H., & Wu, D. B. (2015). A Study of van Hiele of geometric thinkink among 1st through 6th Graders, Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 11(5), 1181-1196. doi: 10.12973/eurasia.2015.1412a

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). Principles and Standards for School Mathematics, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Piaget, J., & Inhelder, B.(2002). The child's conception of space (F. J. Langdon & J. L. Lunzer, Trans.). London, England: Routledge. (First published 1948)

Piaget, J., Inhelder, B., & Szeminska, A. (1999). The child's conception of geometry (E. A. Lunzer, Trans.). London, England: Routledge. (First published 1960)

Rosser, R. A., Campbell, K. P., & Horan, P. F. (1986). The differential salience of spatial information features in the geometric reproductions of young children. The Journal of Genetic Psychology, 147, 447-455. doi: 10.1080/00221325.1986.9914521

Usiskin, Z. (1982). van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry. CDASSG Project.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2000). Mathematics education in the Netherlands: A guided tour. Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9. Utrecht: Utrecht University.

van Hiele, P.M. (1984). The child's thought and geometry. In Fuys, Geddes, & Tischler (Eds. & Trans.), English Translation of Selected Writings of Dina van Hiele Geldorf and Pierre M.van Hiele, 243-252.(First published 1959)

van Hiele, P.M. (1986). Structure and Insight: A theory of Mathematics Education. Orlando, FL: Academic Press.

van Hiele, P.M. (1999). Developing geometry thinking through activities that begin with play. Teaching Children Mathematics, 5(6), 310-316. doi: 10.5951/TCM.5.6.0310

《臺灣數學教師》稿約

2013.09.27 編審委員會會議通過
2014.09.04 編審委員會會議修訂通過
2015.05.24 編輯委員會會議修訂通過
2016.05.15 編輯委員會會議修訂通過
2018.05.12 編輯委員會會議修訂通過
2019.05.25 編輯委員會會議修訂通過
2020.05.編輯委員會會議修訂通過
2020.11.14.編輯委員會會議修訂通過

壹、《臺灣數學教師》（原名為《台灣數學教師(電子)期刊》）（Taiwan Journal of Mathematics Teachers）（以下簡稱本刊）是國立臺灣師範大學數學系及台灣數學教育學會共同發行之期刊，內容以出版數學教育領域相關議題的原創性論文為宗旨。本刊徵求符合宗旨之教學實務文稿，內容包含探討數學教學策略、學生迷思概念之教學引導、數學教育課程、教材與教法等實務經驗分享、研究問題評析、數學教育之構想、書評、論文批判、數學教學與應用性研究、數學教育研究趨勢介紹、專題演講講稿、數學學習評量、電子媒材設計、數學教師專業發展及其他數學教育相關議題等內容。本期刊徵稿分為以下兩類：

一、 實徵研究：中文文稿以8000字為原則、英文文稿以4000字為原則。

二、 實務分享：中文文稿以2000~3000字為原則、英文文稿以2000~3000字為原則。

貳、本刊每年發行兩期，分別於四月、十月出刊，並採電子方式發行。全年徵稿，隨收隨審。

參、本刊所刊之文稿須為原創性的教學實務文章，即未曾投遞或以全論文形式刊登於其他期刊、研討會彙編或書籍。若文稿在送審後自行撤稿，或出現一稿多投、修正稿回覆逾期、侵犯著作權等違反學術倫理等情況，將依下列規則處理：

一、來稿一經送審，不得撤稿。因特殊理由而提出撤稿申請者，案送主編決定；非特殊理由而自行撤稿者，一年內將不再接受該作者的投稿。

二、若文稿被發現一稿多投、侵犯著作權或違反學術倫理等情況，除文稿隨即被拒絕刊登外，一切責任由作者自負，且本刊於三年內不接受該作者來稿，並視情節嚴重程度求償。

三、作者應於發出文稿修正通知的二週內回傳修正稿及修正回覆說明書，逾期視同撤稿。若有特殊情況請先與本刊聯絡。

肆、未經本刊同意，已獲本刊接受之文章不得再於他處發表。投遞本刊之文稿須經編審委員會送請專家學者審查通過後予以刊登，被刊登文章之著作財產權歸國立臺灣師範大學數學系及台灣數學教育學會共同擁有，文責由作者自負。

伍、文稿請以中文或英文撰寫。文稿的呈現請使用單行間距之12級字新細明體或Times New Roman字體，以橫書方式於A4規格紙張上，文稿上下左右各留2.5公分空白，並以Microsoft Word 98以上之繁體中文或英文文書軟體處理。

陸、文稿格式請參考《臺灣數學教師》期刊論文撰寫體例的說明或已發行之文稿，若有需要引用英文文獻以及數學符號、公式等請參考APA第六版出版手冊。交遞稿件時需注意下列事項：

一、提交投稿基本資料表

(一) 文稿基本資料。

(二) 通訊作者之姓名、服務單位、職稱、通訊地址、聯絡電話和電子郵件地址。一位以上作者時，非通訊作者只需填寫姓名、服務單位和職稱。

(三) 任職機構及單位：請寫正式名稱，分別就每位作者寫明所屬系所或單位。

(四) 頁首短題（running head）：以不超過15個字為原則。

(五) 作者註（author note）：說明與本篇研究相關的資訊。

二、提交已簽署的《臺灣數學教師》著作財產權讓與同意書。

三、文稿除正文外，還需包含中英文摘要，摘要請獨立一頁呈現，並置於正文之前。摘要頁內容包括論文題目（粗體20級字、置中）、摘要（不分段，限500字以內）、與關鍵詞（以五個為上限，並依筆畫順序由少到多排列）。

四、若為修正稿，遞交修正的文稿上請以色字標示修改處，並需提交「修正回覆說明書」，依審查意見逐項說明修改內容或提出答辯。作者應於發出文稿修正通知的二週內回傳修正稿及修正回覆說明書，若有特殊情況請先與本刊聯絡。

柒、文稿以電子郵件方式投遞，包括作者基本資料表、著作財產權讓與同意書與全文共三份資料。作者應負論文排版完成後的校對之責，編輯委員僅負責格式上之校對。

捌、投稿電子郵箱： tjmtedit@gmail.com

《臺灣數學教師》著作財產權讓與同意書

茲同意投稿至國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會共同發行的《臺灣數學教師》之一文，名稱為：

____

立書人聲明及保證本著作為從未出版之原創性著作，所引用之文字、圖表及照片均符合著作權法及相關學術倫理規範，如果本著作之內容有使用他人以具有著作權之資料，皆已獲得著作權所有者之（書面）同意，並於本著作中註明其來源出處。著作人並擔保本著作未含有毀謗或不法之內容，且絕未侵害他人之智慧財產權，並同意無償授權國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會於本著作通過審查後，以論文集、期刊、網路電子資料庫等各種不同方法形式，不限地域、時間、次數及內容利用本著作，並得進行格式之變更，且得將本著作透過各種公開傳輸方式供公眾檢索、瀏覽、下載、傳輸及列印等各項服務。國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會並得再授權他人行使上述發行之權利。惟著作人保有下列之權利：

1.本著作相關之商標權及專利權。

2.本著作之全部或部份著作人教學用之重製權。

3.出版後，本著作之全部或部份用於著作人之書中或論文集中之使用權。

4.本著作用於著作人受僱機關內部分送之重製權或推銷用之使用權。

5.本著作及其所含資料之公開口述權。

著作人同意上述任何情形下之重製品應註明著作財產權所屬，以及引自《臺灣數學教師》。

如果本著作為二人以上之共同著作，下列簽署之著作人已通知其他共同著作人本同意書之條款，並經各共同著作人全體同意，且獲得授權代為簽署本同意書。如果本著作係著作人於受僱期間為雇用機構所作，而著作權為讓機構所有，則該機構亦同意上述條款，並在下面簽署。

本著作之著作財產權係屬（請勾選一項）

☐ 著作人所有

☐ 著作人之僱用機構所有

立同意書人（著作人或僱用機構代表人）簽章：______________________________

著作人姓名或僱用機構名稱：______________________________

（正楷書寫）

中華民國　　年　　月　　日

Taiwan Journal of Mathematics Teachers Vol. 42, No. 1 April, 2021

Publisher	Department of Mathematics, National Taiwan Normal University Taiwan Association for Mathematics Education

Address	No.88 Sec. 4, Ting-Chou Rd., Taipei City, Taiwan, R.O.C. Department of Mathematics, National Taiwan Normal University "*Taiwan Journal of Mathematics Teachers*"
TEL	886-2-7734-6576
FAX	886-2-2933-2342
E-mail	tjmtedit@gmail.com
Website	http://tame.tw/news/news.php?class=204