

孫荷馨、劉祥通、黃財尉（2021）。
正複本數學試題對等性的考量因素。
臺灣數學教師，42（2），1-11
doi: 10.6610/TJMT.202110_42(2).0001

正複本數學試題對等性的考量因素

孫荷馨¹ 劉祥通² 黃財尉³

¹ 雲林縣立二崙國中

² 國立嘉義大學數理教育所

³ 國立嘉義大學諮商與輔導學系

為了改進教學，探討實驗教學的效果，需要有前測與後測的量表／問卷當作研究工具。有些量表，只有單一的題本；有些雖有正、複本兩種題本，然而有些設計是正、複本題目完全不相關，有些難易度不同。Reed（1987；1999）的研究提出四種不同的試題類型，本文以此四種類型，檢閱國內設計的數學解題量表，從量表中提出例子，並分析與評論。本文發現：有些正、複本量表中的題目是不相關的試題，有些是等價的試題，有些試題屬於類似題，理想上，正複本中的題目應該同構題的關係，也就是問題中故事情境不同，問題結構相同。因為問題中的故事情境不同，所以在解後測試題時，才不會變成是在解例行性問題；因為問題結構相同，所以正、複本的難度才不會差異太大，如此的正複本配對才能真正測出學生的解題能力，才不會誤判了實驗效果。再者，設計者也需要考慮到對稱題的難易度是否相當，更要洞察到問題結構，才能設計出有變化的同構試題。文末提供結語與建議以饗同好。

關鍵詞：同構試題、問題結構、複本試題、數學評量、數學解題能力量表

壹、前言

為了考驗新的教學法的實驗效果，理想上教學實驗設計應有正複本兩種版本，用以評估教學法之成效，但有許多研究是利用自編的工具，卻只有單一版本，如果某一研究使用同一版本試題當作前測試題，也當作後測，如此的研究是無法真正測出實驗教學的成效。

有些數學測驗題，雖有正、複本兩種題本，但正複本的題目完全不相關，即使難度（difficulty）皆介於 0.2 ~ 0.8 之間，但是互相對應的兩個題目，試題的難度仍是有些差距；有些數學試題，問題中的故事題情境、問題結構都相同，只是更換題目中的數據，當學生做完正本之後，有了解題經驗，會影響到複本施測的結果；有些數學試題，問題中的故事題情境相同，但是問題結構不同，也就是難度可能不一樣，導致答對前、後測的答對率不相同；如果正複本試題，雖然問題中的故事題情境不同，只要問題結構相同，難度相近，就能真正考驗學生在教學前後數學解題能力的改變。關於試題的相關性，Reed（1987）的研究中，提出四種不同的試題類型，說明如後：

例題：

※小的管子注滿油箱需要 12 小時，大的管子注滿油箱需要 8 小時。如果同時使用兩個管子注水，需要多久時間？

(一) 不相關試題 (unrelated problem)

兩個問題既不具有相同的故事情境(a story context)，解答程序(a solution procedure)也不相同，我們稱之為不相關試題。

※一架飛機從 A 地到 B 地的速率是每 3 小時可以飛 250 英哩，比從 B 地飛回 A 地 200 英哩所花的時間少，回程需要花多少小時？

(二) 等價試題 (equivalent problem)

兩個問題具有相同的故事情境和相同的解答程序，我們稱之為等價試題。

※小的水管注滿游泳池需要 6 小時，大的水管注滿游泳池需要 3 小時。如果同時使用大、小兩個管子注水，需要多久時間？

(三) 同構試題 (isomorphic problem)

兩個問題具有不同的故事情境但有相同的解答程序，我們稱之為同構試題。

※湯姆開車到比爾家需要 4 小時，比爾開車到湯姆家需要 3 小時。若他們兩人同時離開自己的家，開往對方的家，則他們需要多少時間才能相遇？

(四) 類似試題 (similar problem)

兩個問題具有相同的故事情境，但解答程序並不相同，稱之為類似試題。

※小的水管注滿水箱需要 20 小時，大的水管注滿水箱需要 15 小時。若排水管流空裝滿的水箱，需要 40 小時。如果同時使用大、小兩個水管注滿水箱，需要多少的時間？（假設水箱中有水時，排水管就開始排水）

Reed (1987) 的研究貢獻，在於提出試題對應的類別，尤其是著重於結構性的對應，此文啟發了研究者設計正複本試題應考慮結構性的對應，另外，考慮到解題的意義，研究者也思考：問題中故事情境也應有所不同，才能真正考驗學生的解題能力。

但是研究者認為，即使是相同的題目對於不同的解題者而言，也可能會有不同的解答程序，不相干的題目也可能有相同的解答程序；而同一個解題者面對問題結構相同的二個問題，採取相同的解答程序的機會很高；其次，如果從解答程序來考慮，似乎從結果論來看問題，少了同構性質的本質；再者，根據 Vergnaud (1983) 提出乘法概念域 (Multiplicative Conceptual Field)，研究者解析小學數學的數與量問題，有加減法問題、部分整體問題、周長問題、比較問題、乘除法問題、面積問題、體積問題、速率問題、正比問題、相似問題、比例問題與比例尺問題等等，以上問題又可以大略區分為「加法問題結構」、「乘法問題結構」與「比例問題結構」，以上三種問題結構循序漸進，也由淺入深。因此研究者借用「問題結構 (problem structure)」的字眼，以「問題結構」相同，取代「解答程序」相同，以定義與區辨以上四種試題或許會更貼切。本文列表以說明四種試題的差異 (表一)，並舉例說明之。

表 1

四種試題之故事情境與問題結構對照表

	不相關試題	等價試題	同構試題	類似試題
故事情境 (story context)	不相同	相同	不相同	相同
問題結構 (problem structure)	不相同	相同	相同	不相同

貳、四種對應方式之舉例說明

以上四種試題，Reed (1999) 再以一個大小管子注滿油箱的情境當作參考例子，配合四種對照例子，區別四種試題的不同，提醒教師命題時該注意的環節。為了讓讀者更廣泛的認識這四種試題，研究者從國內文獻中找出有正複量表的解題工具並舉例說明，以提醒研究人員對於研究工具的正複本試題，不是只關心信度與效度而已，既然是正本與複本的對應關係，理想上二者的對應，應該要有更多層的考慮。

劉秋木 (1996) 推出數學解題行為評量表，效度與內部一致性信度都很好，此份量表可說是國內最早的解題量表，兼具解題歷程與結果的數學解題能力量表，以理解題意開始，其次是擬訂計畫、執行計畫，最後是回顧答案。此量表對於數學評量，尤其是數學解題工具的啟迪，可說是居功厥偉。嚴格說來，正複本試題的總體難度也相當，但是正複本中的正、複本試題的題數不同（甲卷 16 題、信度 .8496；乙卷 15 題、信度 .9300），正複本對等係數（.86），但是沒有一對一的對應考量。

陳怡靜 (2012) 設計數學解題能力量表，她根據預試結果分析，選出較適宜的 10 道題目後，編製成「九年級數學解題能力量表」的正複題本，各題本包括：了解題意、擬訂計畫與執行計畫等三子題，正本的 Cronbach's α 值為 .901，複本的 Cronbach's α 值為 .896，複本信度為 .871、達顯著水準 ($p < .001$)。

陳怡靜 (2012) 量表的設計理念，有下列幾點 (陳怡靜、劉祥通, 2013): 1. 強調解題歷程的重要性，2. 著重非例行性問題的設計，3. 題目訊息多元，設計複選題以判斷學生對題意與結構的掌握；4. 避免學生解已熟習的非例行性問題，以對等的同構試題為複本試題；5. 評估「了解題意」與「擬定計畫」對「執行計畫」的重要性。

一、不相關試題的對應

下列題組屬於不相關試題 (劉秋木, 1996)，舉例如下。

表 2

不相關題組的對應表

題目	題目內容
甲卷 第 1 題	※哥哥比弟弟年長 6 歲，父親的年齡是哥哥的兩倍。父親現年是 48 歲，問弟弟今年是幾歲？

表 2 (續)

乙卷	※下面哪一個數符合以下兩個條件？(1)奇數 (2)數字和是 8
第 1 題	(54、68、27、77、26、53、80、25)

我們可以看到，以上兩個問題中的故事題情境完全不同，甲卷是考年齡問題，乙卷是考數字問題，問題結構也不相同，所以屬於不相關試題。

二、等價試題的對應

下列題組屬於等價試題（陳怡靜，2012），舉例如下：

表 3

等價題組的對應表

題目	題目內容
正式題本 第 9 題	※欲得知 A、B 兩個水桶的容量，已知 A、B 兩個水桶半徑比為 1：2，高度比為 3：1，A 桶內有水 35 公升，B 桶內有水 70 公升。如果把 B 桶內的水倒入 A 桶並加滿，則 B 桶內剩下的水是它容量的一半，求 B 桶的容量？
複試題本 的 9 題	※小明想要知道 A、B 兩個圓柱體的容量，已知兩個圓柱體半徑比為 2：3，高度比為 2：1，圓柱體 A 內裝水 42 公升，圓柱體 B 內裝水 60 公升。如果把 B 桶內的水倒入 A 桶並加滿，則 B 桶內剩下的水是它容量的 1/3，求 B 桶的容量？

以上題組的問題結構相同，除了做數據上的更改，問題中的故事題情境也相同，依照 Reed (1999) 的理論，此題組算是一組等價試題。持平來說，以上的問題結構很特殊，要設計不同情境，的確有侷限性，還真是不容易的事。

三、類似試題 (similar problem) 的對應

表 4

類似題組的對應表

題目	題目內容
正式題本 第 6 題	※A、B 兩個袋子分別裝編號 1~10 的各一顆球，每顆球大小、質料均相同，從兩袋各拿出 1 球，這兩球編號的乘積為偶數的機率是多少？

表 4 (續)

複本題本 第 6 題	※A、B 兩個袋子分別裝編號 1~10 的各一顆球，每顆球大小、質料均相同，從兩袋各拿出 1 球，這兩球編號的乘積為 奇數 的機率是多少？
---------------	------------------------------------------------------------------------------

以上題組取自陳怡靜 (2012)，正複本對所應到的問題中的故事題情境敘述上幾乎相同，但是差別在於正本要乘積為偶數的機率，樣本點是 (奇數, 偶數)、(偶數, 奇數) 或 (偶數, 偶數) 的組合，而複本則是要求乘積為奇數的機率，樣本點是 (奇數, 奇數) 的組合。研究者因此認為此題組的問題結構並不相同，難度不一，因此以上正複本的題組應屬類似試題。

四、同構問題的對應

表 5

同構題組的對應表

題目	題目內容
正式題本 第 9 題	※太空人珍妮到了一個行星，那上面的動物若非四隻腳就是三隻腳。有一天他看到了 31 隻腳，她可能看到多少隻動物 (把所有可能的情況都寫出來)？
複試題本 的 9 題	※小英拿了 30 元買糖果，泡泡糖一個 3 元，巧克力一個 2 元。小英把 30 元買光了，他可能買哪些糖果 (把所有可能的買法都寫出來)？

以上題組取自劉秋木 (1996) 的量表，雖然兩個題目乍看之問題中的故事題情境完全不同，正本 (甲卷) 的情境是行星上動物的數量問題，而複本 (乙卷) 則是日常生活中的買賣的數量問題，由於問題結構相同，所以研究者認為此種對應可以算為一組同構試題。

參、同構試題的難度考量、區辨與設計

既然是正複本試題，理想上題數要相等以外、難度要接近，嚴格區辨對等試題是否同構，再者命題者也要洞察題目結構，才能設計出有變化的同構試題。

一、考量試題難度是否相當

理想上在設計複本試題時，我們希望設計出難度相當題目，使得正複本的對等性更

一致。但是些試題雖然看起來問題結構相同，讓老師們誤以為是難度相當的試題，對學生而言，答對率卻是不相同，因此無法鑑別學生的解題能力，也無法真正的反映出實驗效果，這是命題者需要特別注意的地方。以下針對幾個題目來舉例說明。

表 6

由面積求長或高的題組表

題目	題目內容
正本	※一個長方形，寬為 6 公分，面積為 24 平方公分，請問長為多少公分？
複本	※一個三角形，底邊長為 5 公分，面積是 20 平方公分，請問高為多少公分？

以上兩個問題，都利用面積反求長方形的長寬，以及三角形的高，雖然問題結構相同，但這兩道題目對學生而言，難度並不相同，後來的研究也證實正複本難度(.98; .75)，正複本鑑別度(.036; .36)(孫荷馨，2013)，此乃正本(長方形面積問題)試題對於國一學生太容易，以致鑑別度太低，無法區隔出程度的高下；複本(三角形面積)試題，在做逆運算以反求高的時候，學生比較容易出錯。簡言之，以上題組問題結構雖相同，但難度不一，不適合當正複本的對等試題。

二、問題結構雖相同，但外延量與內涵量認知難度有別，設計正複本試題時應考慮難度

表 7

由部分量求出一單位之量之題組表

題目	題目內容
正本	※一塊布的 $\frac{2}{3}$ 是 $\frac{3}{4}$ 公尺，請問這塊布的全長是多少？
複本	※一鐵條的 $\frac{3}{4}$ 公尺是 $\frac{4}{5}$ 公斤，請問一公尺重多少？

根據朱建正(1997)的研究中指出：一再堆積、延長及繼續增加的量，稱為外延量(extensity)，例如，重量、長度、面積與體積，其意即為範圍之量。另一種表是密度、速率、角速率等，為兩外延量的比值，稱為強度量(intensity)，也可以譯為內涵量，其意為劇烈的程度。上述的兩個試題，表面上看似問題結構相同。但是正本的試題是屬於外延量的範圍，複本試題則是屬於強度量的範圍，研究者認為，對學生而言，這個題組的難度並不相同，複本試題是屬於強度量，對於學生的認知比較困難。

三、情境相似的題目，容易被誤認為同構試題

表 8

由周長或面積，求另一邊之長的題組表

題目	題目內容
正本	※一個長方形，寬為 5 公分，周長為 30 平方公分，請問長為多少公分？
複本	※一個長方形，寬 4 為公分，面積 20 是平方公分，請問長為多少公分？

以上題組，雖然都是要求長方形的一個邊，差別在正本試題是周長問題(加法結構)，複本是求面積問題(乘法結構)，構成要素不同，不算是同構試題的對應題組。

四、從不同的故事情境中洞悉題目中的相同的問題結構

表 9

某一部分量是另一部份量之分數(小數)倍題組(第 1 例)表

題目	題目內容
正本	※雲林縣某國中有學生 4160 人，已知男生的人數是女生的 1.08 倍，請問男生女生各有多少人？
複本	※北半球的夏季，晝長夜短，已知白天的時間是晚上 $1\frac{2}{7}$ 倍，請問白天跟晚上各佔了多少小時？

以上題組正本是討論男生與女生的人數問題，複本則是討論白天與晚上所佔的時間，問題中的故事題情境並不相同，但是問題結構是相同的。正本題目敘述：「男生的人數是女生的 1.08 倍」，因此我們可以用女生的人數當作基準量 1，男生的人數當作比較量 1.08。男、女生的人數和又是新的比較量，相當於基準量的 2.08 倍，用總數 4160 除以 2.08 即得女生人數(基準量)，進而求出男生的人數；複本的題目敘述：「白天的時間是晚上時間的 $1\frac{2}{7}$ 倍」，我們可晚上的時間當作基準量，白天的時間當作比較量，一天 24 小時，就相當於基準量的 $(1+1\frac{2}{7})$ 倍，進而求出白天和晚上所佔的時間。因此，我們可以說上述題目是互為同構試題。以下再舉一例說明。

表 10

從比較量找基準量題組(第 2 例)表

題目	題目內容
----	------

表 10 (續)

正本	※國小今年有學生 1920 人，比去年減少 4%，請問去年有多少學生？
複本	※政府規定貨品從國外進口要加 6% 的稅，爸爸在商店買了一件國外進口的商品，花了 350 元，請問未課稅的商品是多少元？

上述題組問題中的故事情境完全不相同，但是問題結構是相同的。正本的題目敘述：「今年比去年減少 4%」，以去年的人數當作母數，減少的部分當作子數，是母數的 4%；今年的人數就是母子差，相當於母數的 $(1-4\%)$ ，進而求出去年的學生人數。複本的題目敘述：「進口要加 6% 的稅」，以未加稅之前的價錢當作母數，加稅的部分當作子數，是母數的 6%，進口後的價錢 350 元，相當於母數的 $(1+6\%)$ ，進而求出未課稅前的商品價格是多少。因此，我們可以說上述題組是同構試題。

肆、結語

根據以上分析，不相關試題當然不適合做為對等試題，有些數學試題，問題中的故事題情境相同，但是問題結構不同（類似題），難度很可能不一樣，導致答對前、後測的答對率不相同，也不適合做為對等試題。何以捨等價試題，而採用同構試題？理由是：問題中的故事情境、問題結構都相同（等價試題），只是更換題目中的數據，當學生做完正本之後，有了解題經驗，會影響到複本施測的解答結果；如果試題雖然問題中的故事題情境不同，但是問題結構相同，難度相近，如此才能考驗學生數學解題能力，較為理想。基於以上，研究者認為以難度相當的一組同構試題來當作正複本試題才是理想。

如何控制試題的難度？前提是基於研究者要擁有數學知識，以及學習者的數學知識，預見學生的可能解法，其次是要做前導試驗，求出正複本試題的難易度與鑑別度，以做為正複本題組的依據。

如何設計好的同構試題？如果命題者只變更題目中的數據，此乃等價試題的設計，此種題組的功能是考驗學習成效的保留度；如果命題者變更問題中的故事情境，就是同構試題的設計，此種題組是考驗學習遷移能力，也就是考驗學生真正的解題能力。但是如何設計好的同構試題，除了洞悉各種題目中的問題結構，再尋找問題結構的關聯性外，更要靠數學教師不斷鞭策自己以精進知能，所謂「日增其所亡，月無忘其所能」。

一份好的正複本試題之對等性對於研究證據的支持著實重要，好的正複本同構試題的編製將考驗研究者的學術能力，其日積月累的知識涵養與實務設計經驗的試煉有其必要，試題設計本身則需考量試題類型、試題難易度及鑑別度作為考量依據，在經歷不斷

專業發展以及教師團隊合作及共同的腦力激盪下，一定可設計出適切且符合學生解題能力表現的測驗試題，期待大家一同努力。

備註：

本文修改自孫荷馨(2013)碩士論文——國中數學文字題量表之編製—正複本試題對等設計的考量；以及孫荷馨、劉祥通與黃財尉(2012)研討會論文——數學正複本試題解題量表試題的對等性探討。2012年10月國立臺中教育大學主辦—2012年第四屆科技與數學教育學術研討會暨數學教學工作坊論文集。

誌謝

感謝二位匿名審查人的洞見問題與明察秋毫，本文得以更好的論述以饗讀者。也感謝國立屏東大學教育系系主任徐偉民教授，百忙抽空提出一些好建議，給研究者反思與成長的機會，也給本文改進的空間。

參考文獻

- 朱建正(1997)。**國小數學課程的數學理論基礎**。1996年度國家科學委員會專案研究計畫：國小數學教師培育級檢定模式研究：子計畫三—國小數學課程的數學理論基礎研究，未出版。
- 劉秋木(1996)。**國小數學科教學研究**。臺北：五南。
- 陳怡靜(2012)。**九年級數學解題能力量表之編製**(未出版之碩士論文)。國立嘉義大學師範學院數學教育研究所，嘉義。
- 陳怡靜、劉祥通(2013)。**國中數學解題能力量表編製之理念**。科學教育月刊，357，29-37頁。
- 孫荷馨(2013)。**國中數學文字題量表之編製-正複本試題對等設計的考量**(未出版之碩士論文)。國立嘉大學師範學院數理教育研究所，嘉義。
- 孫荷馨、劉祥通、黃財尉(2012)。**數學正複本試題解題量表試題的對等性探討**。論文發表於2012年第四屆科技與數學教育學術研討會暨數學教學工作坊論文集。國立臺中教育大學，臺中。
- Reed, S. K. (1987). A structure -mapping model for word problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 7, 102-115.

Reed, S. K. (1999). *Word Problems: Research and Curriculum Reform*. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers Mahwah, New Jersey.

Vergnaud, G. (1983). Multiple structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp.127- 174). New York: Academic Press.