

葉秀玲、徐偉民、張國綱（2021）。

數學探究教學對學生根號求值的概念發展及學習態度的影響。

臺灣數學教師，42（2），56-83

doi: 10.6610/TJMT.202110\_42(2).0004

# 數學探究教學對學生根號求值的概念發展及 學習態度的影響

葉秀玲<sup>1</sup> 徐偉民<sup>2</sup> 張國綱<sup>3</sup>

<sup>1</sup>屏東縣立萬巒國中

<sup>2</sup>國立屏東大學教育學系

<sup>3</sup>國立屏東大學應用數學系

本研究採個案研究法，以國中八年級學生 11 人為對象，針對根號求值的主題進行數學探究教學，探討數學探究教學實施的歷程，以及對學生數學學習的影響。教學過程學生採合作學習，教學策略以操作圖像、探究學習為主。本研究蒐集認知測驗及態度量表等量化資料，以及學習單、錄音錄影、訪談等質性資料，經過分析之後發現，探究教學學習保留效果良好，能有助於學生建構正確數學概念，且對學生學習態度有正向影響。

**關鍵詞：**個案研究、數學探究教學、學習態度影響

## 壹、緒論

### 一、研究動機與背景

相信很多人回憶起國中時期的數學，成績是慘澹的，搞不懂  $XY$  方程式、根號怎麼算，學了好像也不知道哪裡用得到。現代因為科技發達、知識爆炸，學校教育迫不及待想給學生大量整理好的知識，希望學生能有系統的快速吸收，卻忽略了這些知識都是經年累月由許多學者研究探索得來的，數學知識在被世人發現時當下的雀躍，現在學生卻是常無法理解而抱怨。而現今教師的教學受限於時間與進度，無法讓學生用太多時間去思考探究這些數學原理，死記硬背的結果是，學生搞不清楚數學公式、規則從何而來，常寫錯或是不完整，也常分不清楚這些公式應在哪些情境使用。

人從自然界中看到的數寫成自然數，要擴展數的領域方法是通過納入新的符號，之所以能延伸出新的數像  $0$ ， $-2$ ， $3/4$ ，是以抽象的符號為形式創造出來的，今日我們處理這樣的數有如家常便飯，很難相信一直到十七世紀，這些數還沒有被普遍認為跟正整數具有同樣的合理性，而一旦需要派上用場時，人們總是時常懷疑與不安。看來人類依戀「有形的東西」，如同通過自然數來作例證這種天生的傾向，難怪從自然數擴展到有理數要如此耗費多時 (Richard, Herbert & Ian, 1941 / 引自容士毅譯, 2010)。我們可以想像一般的國中學生，當要從有理數要擴展至根號的無理數，具體數量要進展到抽象代數形式，在只有講述、沒有其他方式幫助思考理解的情況下，學習歷程應是艱辛又漫長。目前中學教材讓學生從文字敘述學習數學概念，學生缺乏提出假設、設計實驗、驗證等批判思考能力的訓練，而這些探究能力是各先進國家視為非常重要的能力，如何在教育現場中融入探究能力的培養，無疑是數學教學急待解決的問題。

最近幾年教育會考數學成績的呈現，顯示將近三成國中生數學學習需要加強，學生在教學現場展現的學習動機不高，有些學生很早就有放棄數學的心態，目前以講述為主的教學無法改善學生學業表現不佳的現況，教育理念應重新定位為引發學生「主動學習」，老師的角色不只是提供知識，而是擔任學生主動探索與建構知識過程中的嚮導與諮詢者。因此，研究者希望以提升學習興趣、引發學生思考討論的探究教學，設計實施教學活動並檢驗其對學生數學學習的影響。

在現今所使用的數學教材中，根號求值的部分一向不被重視，學生遇到無理數的根號值時，只是把根號寫下來，並不清楚它的意義與數字大小，不會想要把根號值求出來，這不利於後面學習根號的運算。如果是十分逼近法求無理數的根號值達三個位值的題

目來說，一題要花五、六分鐘以上的時間，對於現今學生只是解決考試題目，不是於現實中必須求得根號實際值的情況，會認為求幾位數的根號近似值，計算很麻煩且花太多時間，如果真有需要時學生會直接拿計算機來按。根號值如果是有理數就會以因數分解來作計算，但是學生如何判斷根號值是有理數或無理數？我們是否能找到一種計算根號值的方法，無論是根號值是有理數或無理數都能適用，不需要事先判斷，只是按照同一個計算模式就能得出結果。

## 二、研究目的

基於上述，本研究預計發展利用和的平方公式的原理，找出根號求近似值計算規則之數學探究活動，並探討以下的目的：

- (一) 根號求值探究教學實施的歷程。
- (二) 根號求值探究教學的實施對學生數學學習的影響。

## 貳、文獻探討

### 一、根號求值的相關概念

距今四千年前的巴比倫人運用表格來計算開平方，類似查表法的方式，古希臘西翁（Theon，公元四世紀）的著作中提到開平方法，但就方法的完整性而言，不及我國公元一世紀九章算術提到的開方術。長久以來，代數被認為是進入較高階數學的門檻，學生具備這基本能力才能邁向未知數的世界，根號是一元二次方程式求解、畢氏定理不可或缺的元素，但國中生在方根的意義與運算的學習成效不彰，在學習方根時，對於新的符號、概念常容易發生錯誤，且學生所表現的數學態度傾向於負面（蘇慧娟，1998）。所以如何讓學生了解方根的意義，進而幫助其根式的運算，使學生數學態度有所轉變，是本研究想達成的教學目標。

Bruner（1966）從人類運思的觀點，認為表徵是指人經由認知表徵的過程中獲得知識，將表徵分為三種類型：

- (一) 動作表徵（enactive representation）—指個人藉由動手操作來理解獲得知識。
- (二) 圖像表徵（iconic representation）—指個人利用對物體影像留在記憶中的心像來獲得知識，當具體物件消失時，仍能依照腦中實物的心像，來進行內在的運思活動。
- (三) 符號表徵（symbolic representation）—指個人運用符號、語言文字為依據去認知

理解外界事物。

根據 Bruner 的研究發現，認知表徵是隨著年齡逐漸發展，其發展的順序依次為動作表徵、圖像表徵、符號表徵。本研究嘗試設計讓學生操作紙片黏貼出正方形面積，讓學生由實際操作認知根號的概念，根號不再只是計算麻煩的數字，再引導學生從拼貼正方形過程的圖像，去思考探究其中面積與邊長的數學規律，將計算步驟整理簡化，最後能寫出根號計算的模式。

## 二、數學探究的意涵

在 1900 年之前大多數教育學者將科學視為是知識的組體，學生經由教師講述式教學來學習知識。Dewey 對科學教學太過於強調訊息的累積提出批判，他認為學生學習科學不只是學習知識而已，同時也應學習求知過程或推理方法（洪振方，2003）。之前探究教學大多運用在自然科學教學上，數學探究教學是近來數學教育的潮流，如洪振方（2003）於其探究教學研究中整合發展出「創造性探究模式」（簡稱 CIM），「創造性探究模式」其核心為「探索」、「解釋」、「交流」、「評價」，其內容如下：

### (一) 探索成份

1. 形成問題與假說：觀察並使用先前的探究結果及理論產生有效的問題、發展假說、進而做臆測。
2. 設計研究和產生數據：給予定義和控制變因、選擇適當的方法、進行實驗或調查研究、及蒐集數據。

### (二) 解釋成份

1. 詮釋數據：處理和分析數據、辨識型態、和做推論。
2. 建立論證：實驗結果連結到假說或理論架構以建立解釋、提出新的預測、以及形成通則。

### (三) 交流成份

1. 說服：說服同儕接受探究發現的結果和重要性。
2. 辯護：用批判的方法做判斷、經由比較來評價、以及為知識主張做辯護。

### (四) 評價成份

1. 時時評價「探索」、「解釋」、「交流」等工作及計畫之可行性。

## 2. 回顧與評估在「探索」、「解釋」、「交流」、及「評價」過程中學到什麼及如何習得。

之前探究教學大多運用在自然科學教學上，數學探究教學是近來數學教育的潮流，在國教院（2019）公布之《十二年國教課程綱要總綱》中提到「過去以學習知識為目的，未來要求學生不僅學知識還要能將知識運用和實踐於生活當中。目的在於培養終身學習者，能自主選擇適合的學習方式，並且對於日常生活遇到的問題，能夠進行系統性思考和判斷。」文中指出培養學生核心素養的「策略一為調整教學方式，依循核心素養此主軸，老師們在教學上應深入學習知識，並且強調實作、探究能力。素養導向教學原則包括…重視學習歷程，了解學生在學習過程中所遇到的問題、觀點等，進一步協助學生可以找到更適宜的學習方法，並提高學生主動探究延伸內容的意願」。在強調學生主動學習、培養素養的教育策略改革方向上，探究教學成為未來教育的新趨勢。

Whitin (2006) 提出數學探究教學六個重要特徵 (key feature): (一) 細心觀察 (二) 採用多元的觀點 (三) 引起 (raising) 論題 (四) 提供臆測 (五) 設計與執行計畫 (六) 反思探究結論。探究教學活動進行時，教師透過包含明確目的、精心設計的學習任務安排，提供學生參與數學思考與數學創造的機會，引導學生去發現關鍵的數學想法，讓學生享受另類的數學課堂模式，建立個人的數學經驗，願意主動嘗試並建立對自己常理思考的信心，進而達到數學概念的理解。探究教學能讓師生間的溝通更加順暢，使數學成為可參與的活動，而不是被灌輸的知識 (黃家鳴, 2005)。

真正的數學活動會有複雜多元想法這樣的特色，會使用典型的數學推理原則，包括臆測猜想、推論解釋、定義，與以記憶背誦為基礎的活動對比之下，數學活動有許多思考運作的程序。在進行學習任務的同時，教師在一旁關注並適時給予提點，要求學生反思其他人提出的想法，這做法能支持學生取得進展。探究教學裡師生共同分擔發展數學理念的責任，學生提出的想法或許不夠完整，教師要教導學生如何用語言和符號去紀錄他們的想法，這對於他們把自身的想法推論形式化非常有幫助 (Kuster, Johnson, Keene, & Andrew-Larson, 2017)。

在許多研究成果發現，探索活動是種促進學生心理運作與外界環境互動的活動，提供檢測學生知識或意義網絡的環境，學生在這樣的環境下許多概念或關係的連結鍵容易浮現 (謝佳叡、唐書志, 2017)。在一份有 1034 位隨機抽樣的台灣中學生的研究調查發現，超過八成的中學生認為一個理想數學教師應提供讓學生探索或動手做的活動讓學生欣賞數學 (謝豐瑞、唐書志、宋玉如、王婷瑩, 2008)。這些研究結果顯示數學教學使用

探究教學法有助於提升學生數學學習。

本研究從文獻探討中得到啟發，首先從學生生活常見的披薩設計非例行性問題，以如何確定吃到飽披薩面積是原本披薩的兩倍大引起學習動機後，臆測給定面積的正方形邊長為何，是否可從之前學過的乘法公式中尋找解決方法，讓學生利用操作圖像去探究數學原理，學生經由師生問答及互相討論交流想法，教師提供線索讓學生去思考歸納，找出根號求值的計算規則，應用和的平方、乘法對加法的分配律整理算式，並對直接開方法提出評價。

### 三、合作學習模式

我們求學過程都是在傳統講述法下度過，傳統講述法因為簡單方便、經濟快速、省時省事及可以應付考試的這些優點，使它普遍被教師所採用（蔡文榮，2007）。根據美國的全國訓練實驗室（National Training Labs in Bethel, Maine）所提出的「學習金字塔」的理論，以學習後的保留比率（retention rate）來比較，聆聽式的學習保留效果僅有 5%，小組討論式有 50%，實作演練式有 75%，教給別人或立即應用則高達 90%（引自蔡文榮，2007），無怪乎學校老師們上課講解很多，但留在學生的腦袋裡的只有少許。

講述教學模式為學生自己聽懂老師的講述，碰到聽不懂的部分只能放棄，合作學習則強調透過小組成員的合作來學習課程，學生可以跟同組組員請教不懂的部分，彼此交流各自觀點、互相學習。十九世紀末時 Slavin (1999) 和 Johnson David 與 Johnson Robert (1999) 等人提出理論並倡導合作學習，根據美國的一項國家調查發現，教師十分支持課堂中使用合作學習策略，其中最顯著的是大多數學生反映出熱愛學習的態度，並獲得具體的學習成效，合作學習已有十分豐碩的成果及影響力，被公認為教育改革中最成功的項目之一（Slavin, 1999）。在下文中僅就本研究參考的合作學習模式稍加說明，「小組遊戲競賽法」(Team Games Tournaments, 簡稱 TGT), 「共同學習法」(Learning Together, 簡稱 LT)。

共同學習法為組員兼採階段性任務合作，學生按照分配的工作執行，完成任務並統整成該組作業。小組遊戲競賽法是同組成員共同完成教師指派的學習單，單元學習完成驗收成果時舉行小組的競賽遊戲。求根號的近似值的探究教學，因使用紙片操作剪貼後要觀察討論，需要多人分工合作、提供想法，使用「共同學習法」，希望學生與同組組員互相學習，熟悉討論分享的合作學習模式，檢視本身的概念與思考模式，藉由彼此交換想法開啟不同觀點，學生有各自的幹部任務，大家共同分工合作完成學習單。在探究教

學活動最後驗收學習成果時，使用「小組遊戲競賽法」，研究者希望學生運用剛學得的觀念技巧，立刻用在競賽上獲得成就以加深印象。

## 參、研究設計與實施

本研究採用個案研究法進行資料蒐集與分析，選取屏東縣某國中八年級兩組學生參與研究。本研究將個案在實施數學探究教學時，探究思考的過程與解題表現，蒐集其測驗、問卷、訪談、學習單、錄音錄影，分析學生數學學習的成效。

因此本研究設計與實施將以個案研究、研究對象、研究工具、資料來源與分析等四小段作如下說明：

### 一、個案研究

個案研究為質性研究的一種，在自然情境下蒐集多種資料，對某種現象進行整體性探究，透過與研究對象互動對其行為和意義建構獲得解釋性理解的活動(陳向明, 2002)。

本研究蒐集個案在實施數學探究教學時，根號求值其數學概念探究思考的過程與解題表現，從其測驗、問卷、訪談、學習單、錄音錄影，分析學生數學學習的成效及影響。質性研究本身帶有研究者主觀的看法，常面臨實證主義對其信效度的質疑，所以本研究以三角校正來確保研究結果的可信度。

### 二、研究對象

本研究選取屏東縣某國中八年級兩組學生，於八年級升九年級暑假課業輔導課程實施教學研究，第一組學生有五人，三位男生兩位女生，第二組學生有六人，三位男生三位女生，從認知測驗前測平均數來看，第一組學生平均數 39.8 分略高於第二組 36.8 分，兩組學生數學程度差異不大。

### 三、研究工具

#### (一) 認知測驗

在教學實施前，以前測試題了解學生在根號求值的學習狀況及起點行為，依據九年一貫國中八年級數學能力指標項目表及雙向細目表進行分析。研究者將根號求值數學認知層次分為認知、理解、分析、應用，編製前測試題。預試試題施測對象為本校九年級

學生97位，預試試題鑑別度分析均達0.2以上鑑別水準，試題具有鑑別度，難易度平均值為0.39。採用預試試題6題選擇題，加入1題計算題，形成7題的正式測驗，總分為46分。後測及延後測採用相同類題更改數字，於2019年7月9日施行前測、7月24日施行後測、10月17日施行延後測，前測、後測及延後測試題及認知測驗試題難易度及鑑別度見附錄，認知測驗數學能力指標項目表及雙向細目表如表1。

表 1

認知測驗八年級數學能力指標項目表及雙向細目表

| 題數 | 數學能力指標            | 認知 | 理解 | 分析 | 應用 |
|----|-------------------|----|----|----|----|
| 3  | 8-n-01 能理解二次方根的意義 | 1  | 0  | 1  | 1  |
| 4  | 8-n-02 能求二次方根的近似值 | 0  | 2  | 1  | 1  |
| 合計 | 7                 | 1  | 2  | 2  | 2  |

### (二)數學學習態度量表

本研究欲探討實施數學探究教學後對學生數學學習態度的影響，採用同樣針對國中生的數學學習，由林星秀（2001）所編訂的「數學學習態度量表」，於探究教學之前、之後各施測一次、以態度量表得分來檢視學生情意方面的影響。問卷共有 30 題，分成四個目標向度：學習慾望、學習過程、學習方法、數學信念。問卷採五點李克氏計分法，信度分析採 Cronbach  $\alpha$  係數，四個向度的內部一致性分別為 0.89、0.84、0.72、0.81，量表的總信度為 0.93。

### (三)教學錄影錄音

教學活動實施時需教學錄影及錄音，研究者請學生家長簽署同意書，取得資料蒐集的授權。藉由教學錄影及活動錄音，研究者能了解師生互動及學生分組探究過程，並將記錄轉錄成逐字稿，作為分析學生學習歷程的依據。

### (四)學習單

根號值這類無理數既沒有規則又計算繁瑣，導致學生對計算根號值興致缺缺，研究者設計學習單任務，請學生操作限定邊長單位（十進位）的紙片拼出指定面積的正方形，讓學生從操作中觀察思考，從操作經驗中體認根號值代表正方形邊長，操作看得到的實物，逐步找出邊長（即根號值）為何數。學生剪紙拼圖後，再讓學生觀察拼正方形過程



歸納出計算形式，將原本和的平方公式形式整理，使用乘法對加法的分配律改寫為每次排出面積所分配的邊長值乘積。學習單一所求根號值為有理數，先讓學生操作可以全部排完的面積數字，學習單二及三所求根號值則為無理數，讓學生由觀察前面操作有理數根號值的規則，應用在無理數根號求值的計算，根號求值分組學習單三張的內容，如表 2。

表 2

根號求值分組學習單表

|                                 |                                 |                           |                         |
|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------|-------------------------|
| <b>學習單一</b>                     |                                 |                           |                         |
| 1.求 $\sqrt{169}$ 的值             | 2.求 $\sqrt{225}$ 的值             | 3.求 $\sqrt{576}$ 的值       | 4.求 $\sqrt{1444}$ 的值    |
| 5.求 $\sqrt{15376}$ 的值           | 6.求 $\sqrt{121104}$ 的值          | 7.求 $\sqrt{2034.01}$ 的值   | 8.求 $\sqrt{3552.16}$ 的值 |
| <b>學習單二</b>                     |                                 |                           |                         |
| 1.求 $\sqrt{40}$ 的近似值到個位         | 2.求 $\sqrt{76}$ 的近似值到個位         | 3.求 $\sqrt{200}$ 的近似值到個位  |                         |
| 4.求 $\sqrt{700}$ 的近似值到個位        | 5.求 $\sqrt{540}$ 的近似值到個位        | 6.求 $\sqrt{4496}$ 的近似值到個位 |                         |
| 7.求 $\sqrt{92416}$ 的近似值到個位      | 8.求 $\sqrt{183184}$ 的近似值到個位     |                           |                         |
| <b>學習單三</b>                     |                                 |                           |                         |
| 1.求 $\sqrt{423}$ 的近似值到小數點後第二位   | 2.求 $\sqrt{789}$ 的近似值到小數點後第二位   |                           |                         |
| 3.求 $\sqrt{521}$ 的近似值到小數點後第二位   | 4.求 $\sqrt{1234}$ 的近似值到小數點後第二位  |                           |                         |
| 5.求 $\sqrt{2706}$ 的近似值到小數點後第二位  | 6.求 $\sqrt{8617}$ 的近似值到小數點後第二位  |                           |                         |
| 7.求 $\sqrt{27845}$ 的近似值到小數點後第二位 | 8.求 $\sqrt{60479}$ 的近似值到小數點後第二位 |                           |                         |

### (五)半結構式的訪談大綱

訪談問題由研究者與數理教育專家討論後自行編製，訪談問題大綱分為四個向度，如表 3，分別為探究學習能提高學習興趣／意願、有助於了解數學原理、有助於訓練思考、能提升學生自信及成就感，訪談時進行錄音，藉以了解分析學生經歷探究教學後，對數學學習態度的轉變。

表 3

訪談問題大綱表

| 向度              | 訪談問題  |
|-----------------|---|
| 探究學習能提高學習興趣／意願  | <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 之前有使用探究的方法來學習數學嗎？有令你印象深刻或覺得有趣嗎？</li> <li>2. 探究學習能提升你學習的興趣嗎？</li> <li>3. 你以後學習上會不會試著去探究新知識背後的原因？</li> <li>4. 如果有其他探究學習的活動，你有興趣要參加嗎？</li> <li>5. 對於不了解的事物你會試著用探究的方法去找尋答案嗎？</li> </ol> |
| 探究學習有助於了解數學原理   | <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 你喜歡吸收新知並探究其原理嗎？</li> <li>2. 你對之前學習過的數學方法、公式及定理，了解它的原理嗎？</li> <li>3. 探究學習是否有助於讓你了解數學的原理？</li> </ol>  |
| 探究學習有助於訓練思考     | <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 探究問題時你想要先試著自己想想？還是直接向別人詢問？</li> <li>2. 在進行探究的過程中你遇到哪些困難？此時你希望老師提供什麼幫助？</li> <li>3. 老師上課所提供的提示及線索，是否幫助你思考出解決辦法？</li> </ol>   |
| 探究學習能提升學生自信及成就感 | <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 你對你的數學學習狀況感到滿意嗎？</li> <li>2. 探究學習之後，你有覺得自己數學好像變得厲害一點嗎？</li> <li>3. 算出難題的答案有讓你獲得成就感嗎？</li> </ol>   |

## 四、資料蒐集與分析

### (一)資料的蒐集

本研究所蒐集的資料有上課錄影、活動錄音、學習單、問卷、認知測驗、訪談，作為分析學生學習狀況資料的依據，了解學生數學探究教學的認知學習成果及情意方面的影響。

### (二)資料分析

本研究的目的是在探討數學探究教學對學生數學學習的影響，前述的資料進行蒐集整理後，資料分析分為使用質性資料及量化分析。質性資料包括活動錄音、教學錄影、訪談、學習單、認知測驗計算題。量化資料包括問卷、認知測驗選擇題。本研究將蒐集的

資料轉錄成文字及圖檔後進行資料編碼，資料編碼規則說明如下，資料編碼採日期（月日）－對象（研究者：R、學生：SN、小組：GN）－事件（活動錄音：VO、錄影：VD、訪談：INV）的格式，如 0716－S2－INV 代表資料是 7 月 16 日學生編號 2 的訪談。

### 1. 量化分析

本研究量化資料包括問卷、認知測驗。學習態度問卷量表得分與三次認知測驗的平均得分，使用 SPSS 統計軟體以無母數分析的 Wilcoxon 檢定做量化分析，顯著水準為 0.05，判斷分析探究教學對學生數學認知方面的學習及學習態度是否有顯著差異。

### 2. 質性分析

蒐集教學錄影錄音、學習單、訪談、及前測、後測、延後測的計算題來進行質性分析。所蒐集的質性資料採用三角校正的方式，將探討的主題在同一情境中，從不同對象的觀點論述（學生、教師）及多樣的資料來源（學習單、錄音、訪談...），來交叉驗證同一現象的真實性，以減低研究者一方的偏見，增進研究結果分析判讀的正確性。

## 肆、研究結果與討論

### 一、根號求值探究教學實施的歷程

根號求值探究教學共設計 6 節課，讓學生先從圖像操作出發，讓學生觀察紙片拼正方形活動過程、教師提供線索引導學生思考、分組互相討論後共同完成根號求值學習單。學習單一的任務是請學生將  $10 \times 10$ 、 $1 \times 1$  單位的紙片剪貼成指定面積的正方形。研究者在任務提示學生先將  $10 \times 10$  單位的紙片先拼出最大正方形，再將剩餘面積以  $1 \times 1$  單位在正方形外圍拚成 L 形，學生將正方形、L 形按照不同邊長單位整理面積算式，計算至小數一位時要求學生畫圖表示。學習單二的任務是請學生思考無理數的根號值，以拼紙片的步驟如何逐位去計算，再將想法算式進行精煉整合，練習求出兩位到三位的根號值。學習單三的任務是請學生將無理數的根號值的計算形式建模，將從每一層面積如何計算得到邊長的原則逐步釐清，並將其寫成完整算式，並於活動後寫下學習心得，學生練習求出四位到五位的無理數根號值，根號求值的探究教學活動實施歷程見表 4。

表 4

探究教學活動實施歷程表

| 學習任務 | 任務指示                             | 學生活動  | 教學目標                                      | 教學時間  |
|------|----------------------------------|---|---|-------|
| 學習單一 | 以十進位邊長單位的紙片，剪貼拼出指定面積的正方形，得到正方形邊長 | 將 $10 \times 10$ 單位的紙片先拼出最大正方形，再將剩餘面積以 $1 \times 1$ 單位拼在正方形外圍 | 學生透過實物操作、觀察、分組討論進行圖形操作、探究計算根號值的規則         | 90 分  |
| 學習單二 | 以圖形拼貼規則計算兩位到三位根號值，並將計算形式化        | 學生思考、解釋拼紙片的步驟，處理分析數據、釐清、形式化逐位去計算無理數根號值的步驟，並歸納出計算模式            | 透過教師提問及問題討論，引導學生思考判斷、交流說服、精煉想法，將計算形式寫出並統整 | 110 分 |
| 學習單三 | 將求無理數根號值的計算形式化，計算四位到五位的無理數根號值    | 學生將思考探索得到根號求值的計算形式加以應用、驗證、評估                                  | 將探究教學得到的結論應用並評估                           | 45 分  |
| 小組競賽 | 計算根號近似值                          | 小組成員上台計時競賽  | 透過小組競賽，檢視學習成果、經驗交流                        | 35 分  |

進行學習任務一，根號求值的題目是有理數，研究者觀察到學生剛開始會從教師曾示範的方法如因數分解，計算出根號值再去剪紙，有些學生開始會去思考根號值如何得到。計算根號 1444 時，S3 跟 S2 嘗試用因數分解，以  $2\sqrt{361}$  計算根號 1444 得到 38，S3 計算出根號值後又去思考 38 裡 30 是怎麼得到的，「30 要怎麼來？」(0712-G1-VO)。將研究者以教具引導說明紙片操作求  $\sqrt{1444}$  的過程敘述如下，1444 先從 14 張  $10 \times 10$  的紙片先排出最大正方形，研究者問學生「要用掉幾張  $10 \times 10$  的紙片？你們找 14 以內的最大平方數」，學生回答「9」(0716-G1-VO)，兩邊各排 3 張共拿出 9 張，所以邊長十位是 3，14 張 100 用掉 9 張 100 剩 5 張，5 張 100 加上 44 成 544，在  $30 \times 30$  正方形兩側將 544 張  $1 \times 1$  的紙片再排在外圍，每排  $t$  兩側就需要  $t \times (2 \times 30 + t)$ ，544 要排出兩個長 30 寬  $t$  的長方形與一個邊長  $t$  的正方形，R：「因長方形面積較大，所以將

544 除以六十幾來計算，所以邊長個位是多少？」，學生回答 9，研究者提醒學生  $60 \times 9 = 540$ ，但  $9 \times 9$  會進位得到  $9 \times 69 = 621$  超過 544，所以 t 值改為 8 可排成 L 形面積為  $8 \times (2 \times 30 + 8) = 8 \times 68 = 544$ ，邊長個位是 8，求得面積 1444 的正方形邊長為 38，寫出  $\sqrt{1444} = 38$  後，研究者問學生「之前寫 3 後來寫 6 是為什麼？」(0716-G1-VO)，例如圖 1。

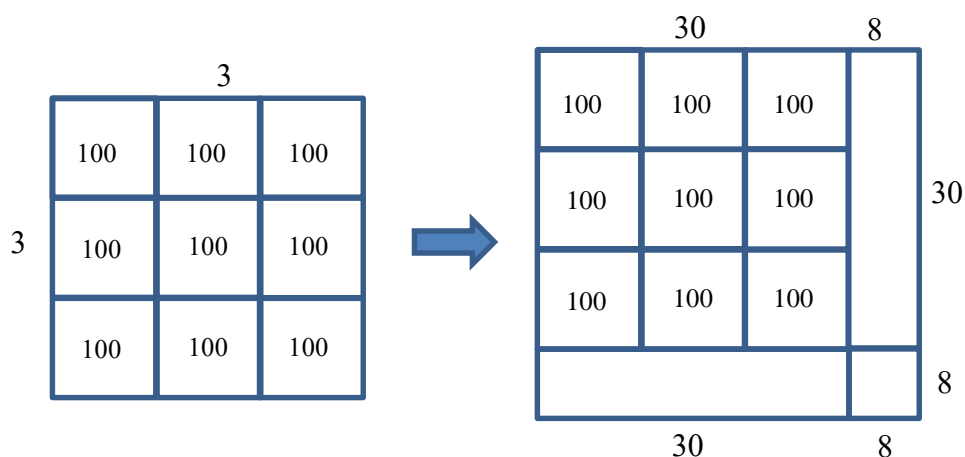


圖 1 紙片操作 $\sqrt{1444}$ 求值過程說明

我們請學生將拼貼好的正方形紙片浮貼在學習單上，並在旁寫出計算式子說明整理算式的過程，例如圖 2。以學習單一的 $\sqrt{169}$ 為例，學生要拼出面積 169 的正方形找出邊長 $\sqrt{169}$ ，先用 1 張  $10 \times 10$  紙片拼出小正方形，再將 69 排在小正方形外圍成 L 形，將它拼成大正方形 169。過程中學生觀察到大正方形 169，外圍 L 形紙片需要兩倍小正方形邊長 10 再加上 L 形紙片寬 3 的規則，並引導學生將大正方形面積寫成小正方形面積與 L 形面積分別加起來，將十位邊長與個位邊長與大正方形面積寫出關係式。前面先寫小正方形面積  $10^2$ ，將 L 形面積中 2 塊  $3 \times 10$  及 1 塊  $3 \times 3$ ，以乘法對加法的分配律整理寫出算式，將根號求值算式整理寫成  $169 = (10 + 3)^2 = 10^2 + 2 \times 10 \times 3 + 3^2 = 10^2 + 3 \times (20 + 3)$ ，得 $\sqrt{169} = 13$ ，例如圖 3。

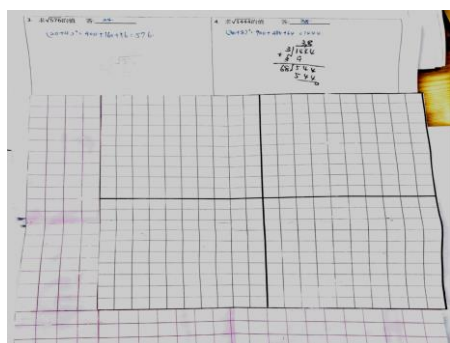


圖 2 G2 學習單一圖片拼貼

$$\begin{aligned}
 169 &= (10+3)^2 \\
 &= 10^2 + 2 \times 10 \times 3 + 3^2 \\
 &= 10^2 + 3(20+3)
 \end{aligned}$$

圖 3 G1 學習單一根號算式整理過程

研究者常示範到某一階段就停止，例如  $\sqrt{2034.01}$ 、 $\sqrt{3552.16}$  第三層小數部分的根號值，研究者只示範引導說明  $\sqrt{1444}$  前兩層，例如圖 4。研究者要求學生自己依照規則去思考第三層要怎麼擺，但是學生反應太難了想不到，研究者才在下一節課示範引導說明，將  $\sqrt{183184}$  正方形拼到第三層，研究者將教具外圍按照邊長單位貼上不同顏色膠帶，方便學生辨識，例如圖 5。



圖 4 上課教具示範情形一

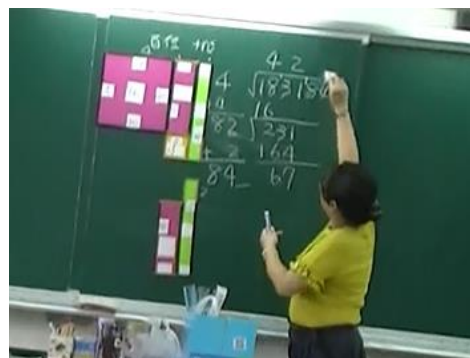


圖 5 上課教具示範情形二

學習單二的任務根號值是无理數，請學生將根號的計算形式建模，學生有的一層一層分開寫，有的整理成一個式子，以  $\sqrt{540}$  為例，540 中先從面積的百位算起，5 個 100 排成正方形需要每邊排 2 個  $10 \times 10$ ，上面的 2 是紀錄十位邊長。 $2 \times 2 = 4$ ，540 已排 400 剩下 140，140 再排上邊長 20 的正方形兩邊，個位排  $t$  就需要 2 個 20 加  $t$ ，一次需要  $40 + t$ ，140 可以分配到 3 個 43 所以個位寫 3。個位用掉 43 乘 3，140 用掉 129 剩 11，往下計算十分位，邊長 23 的正方形兩邊，十分位排  $t$  就需要 2 個 230 加  $t$ ，一次需要  $460 + t$ ，1100 可以分到 2 個 462，1100 用掉 924 剩 176，例如圖 6。學生算出十位數字 2 之後，將算出的邊長個位數字 3 寫在底下的算式，學生把 140 除以 43 得到 3 寫在之前 4 的旁邊，寫出  $\sqrt{540}$  近似值 23，例如圖 7。相較於兩種計算模式，圖 7 學生將商 3 與之

前的餘數 4 擺在一起容易造成混淆，因此研究者建議學生將 3 寫在同樣是商 2 的旁邊，在學習單二學生開始要建立根號的計算模式，學生必須自己將計算模式作統整合併，去蕪存菁後成為清楚簡明的固定形式。

求 $\sqrt{540}$ 的近似值到個位 答: 23

圖 6 學生的計算模式一

的近似值到個位 答: 23

圖 7 學生的計算模式二

學生在學習新概念時會從舊有的經驗出發，比如會將除法運算中從最前面開始計算，或者被除數已計算完要繼續往後算時只補 1 個 0，把除法計算模式帶到根號值的計算裡，教師須讓學生理解數學算式背後的原理，學生才能轉換並接受新概念。研究者發現第一組學生 $\sqrt{92416}$ 面積切割的方式不正確，學生從最前面往後切割成 92 個 1000、41 個 10，1000 與 10 都不是完全平方數，例如圖 8，研究者說：「邊長的位值是從後面往前面數個位十位，面積也是從後面往前面數。你們從前面切的時候是 92 個一千，一千不能寫成平方數，9 萬的萬才能寫成平方數」(0717-R-VO)。第二組雖然練習寫直接開方法的計算，40 先拼出邊長 6 的正方形，40 減 36 剩下 4，接著要算小數一位，學生忘記面積位置要補兩個 0，只補一個 0，例如圖 9，研究者跟學生以圖形概念說明：「邊長平方得到面積，所以邊長進一位時面積要進兩位，個位 1 乘 1 得到 1，但下一位十位 10 乘 10 得 100，100 和 1 相差兩位」(0717-R-VO)。

求 $\sqrt{92416}$ 的近似值到個位 答: 304

圖 8 G1 學習單一

求 $\sqrt{40}$ 的近似值到個位答: 7

圖 9 G2 學習單二

小組競賽採計時賽，學生無不卯足全力比賽，加油打氣聲音不斷，有不少學生如 S10、S11、S3、S4，一兩分鐘就求出根號值到小數後第三位，之前學生寫同類型題目平均需花上 5 到 7 分鐘以上的時間。第一組所花時間平均 2 分 16 秒，例如圖 10。第二組所花時間平均 2 分 54 秒，例如圖 11。

組員平均完成時間：2 分 16 秒

| 組員名字 | 完成時間  | 題目及答案                  |
|------|-------|------------------------|
|      | 2分08秒 | $\sqrt{76} = 8.71$     |
|      | 2分02秒 | $\sqrt{72} = 8.49$     |
|      | 1分36秒 | $\sqrt{19} = 4.36$     |
|      | 3分55秒 | $\sqrt{56} = 7.48$     |
|      | 1分30秒 | $\sqrt{52} = 7.21$     |
|      | 分 秒   | $\sqrt{\quad} = \quad$ |

圖 10 G1 小組競賽紀錄

組員平均完成時間：2 分 54 秒

| 組員名字 | 完成時間  | 題目及答案              |
|------|-------|--------------------|
|      | 2分56秒 | $\sqrt{49} = 6.88$ |
|      | 2分5秒  | $\sqrt{12} = 3.46$ |
|      | 1分8秒  | $\sqrt{35} = 5.92$ |
|      | 2分50秒 | $\sqrt{74} = 8.61$ |
|      | 1分30秒 | $\sqrt{43} = 6.56$ |
|      | 1分26秒 | $\sqrt{75} = 8.66$ |

圖 11 G2 小組競賽紀錄

學生之前學習用十分逼近法來計算根號近似值，把披薩面積增為兩倍大，雖然是生活中會碰到的情境，但是因為十分逼近法需要計算很多次的多位數的乘法，對根號求值有概念的學生還會因為計算錯誤且非常耗時，不喜歡這類計算根號值的題目。我們將學生生活經驗中喜愛的披薩設計根號求值應用題，讓學生換成直接開方法來計算，題目如下：

答樂拉新推出方形吃超飽披薩，廣告宣傳中吃超飽披薩面積是原本披薩的 2 倍大，阿蘭想搞清楚廣告是否屬實，所以她去買了吃超飽披薩和原本披薩各一份，原本披薩是邊長 28 公分的正方形，如果店家廣告屬實，則阿蘭量到吃超飽披薩的邊長應該是幾公分（取到整數位）？

吃超飽披薩需要 2 倍  $28 \times 28$  所以面積為 1568，求出面積 1568 的正方形邊長，先分成 15 個  $10 \times 10$  及 68 個  $1 \times 1$ ，15 個  $10 \times 10$  兩邊先各排 3 個拼成正方形，用掉 9 個  $10 \times 10$ ，剩下 6 再補兩位 68 總共 668，再將 668 排到邊長 30 的正方形兩側圍成 L 形，所以將 668 除以六十幾得 9， $9 \times 69$  得 621，668 減去 621 得 47，補兩個 0 再以 4700 除以七百八十幾得 5，因  $6 \times 786 = 4716$  超過 4700， $5 \times 785 = 3925$ ，算出面積 1568 的正方形邊長為 39.5，兩組同學依據題目要求將披薩邊長求到整數，學生使用直接開方法解決生活情境根號值的應用題，例如圖 12、圖 13。探究教學希望利用紙片操作，讓學生理解以和的平方公式形式從最大位值逐層計算根號值，以解決生活情境中根號值經常為無理數，但是無法用紙筆快速計算，只能用計算機來求根號值的問題。



Handwritten student work for Figure 12. It shows a division problem  $\frac{119}{784}$  and a square root calculation  $\sqrt{1178}$ . A red box highlights the result  $789$ , with an arrow pointing to the text "教師訂正" (Teacher correction). Other calculations include  $779 \times 2 = 1568$  and  $37.5 \approx 40$ .

圖 12 G1 應用題解題紀錄

Handwritten student work for Figure 13. It shows a division problem  $\frac{119}{784}$  and a square root calculation  $\sqrt{1178}$ . The text "波薩的邊長應該是幾公分(取到整數位)? 40cm" is written above the work. Other calculations include  $779 \times 2 = 1568$  and  $39.8$ .

圖 13 G2 應用題解題紀錄

## 二、根號求值探究教學學習成效

### (一) 探究教學學習保留效果良好

首先從認知測驗統計資料來看，認知測驗共 6 題選擇每題 6 分，1 題計算題 10 分，總分為 46 分，因 S11 前測時請假未施測，所以將 10 位學生的三次認知測驗得分，使用 SPSS 軟體進行描述性統計分析，得知後測平均得分 40.80 高於前測 39.10，在將近間隔三個月實施的延後測，平均得分 41.20 略高於後測 40.80，延後測與後測平均相當接近，例如表 5。延後測與後測間隔時間相當長，平均得分還能略高於後測，顯示探究教學學習保留效果良好。

表 5

認知測驗前測後測延後測得分平均描述性統計摘要表

| 認知測驗 | 人數 | 最小值 | 最大值 | 得分平均  | 標準差   |
|------|----|-----|-----|-------|-------|
| 前測   | 10 | 24  | 46  | 39.10 | 7.894 |
| 後測   | 10 | 28  | 46  | 40.80 | 6.408 |
| 延後測  | 10 | 33  | 46  | 41.20 | 5.116 |

將三次認知測驗得分以 SPSS 軟體作 Wilcoxon 符號等級檢定，信賴區間 95%，後測與延後測得分 Z 值為  $-0.135$ ，顯著性  $p$  值  $> .05$ ，表示後測與延後測得分沒有顯著差異，這顯示探究教學對學生數學學習的保留效果良好，例如表 6。

表 6

認知測驗前測後測延後測得分 Wilcoxon 符號等級檢定摘要表

| Wilcoxon 符號等級檢定  | Z 檢定                | 漸近顯著性 (雙尾) |
|------------------|---------------------|------------|
| 認知測驗延後測 - 認知測驗後測 | - .135 <sup>a</sup> | .893       |

註：以負等級為基礎；Wilcoxon 符號等級檢定。

其次從學生的認知測驗的解題紀錄來看，S3 在前測以十分逼近法計算 $\sqrt{15} \approx 3.87$ ，例如圖 14。後測計算題以直接開方法求出 $\sqrt{47} \approx 6.86$ ，例如圖 15、在經過三個月後的延後測中 S3、S7 以直接開方法求出 $\sqrt{73} \approx 8.54$ ，例如圖 16、圖 17。我們從學生解題紀錄發現，學生對探究學習得到的方法印象深刻，學習保留效果良好。

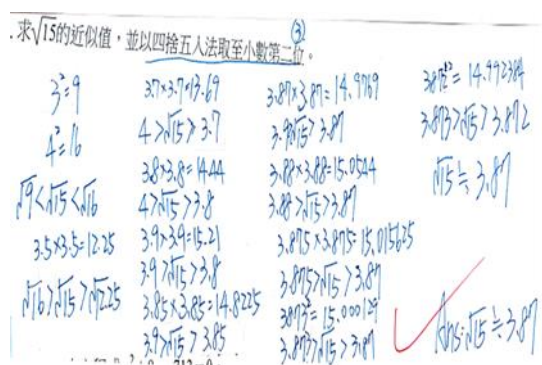


圖 14 S3 前測解題紀錄

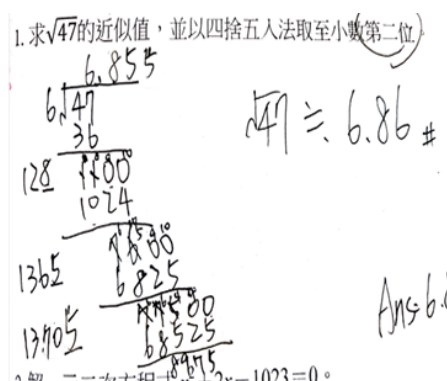


圖 15 S3 後測解題紀錄

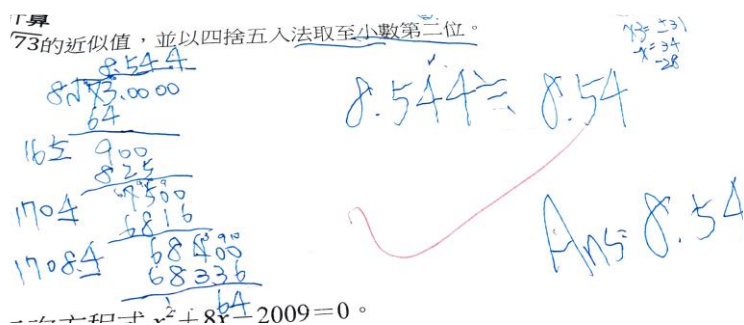


圖 16 S3 延後測解題紀錄

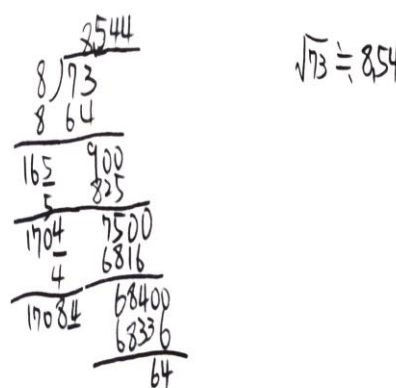


圖 17 S7 延後測解題紀錄

從訪談資料來看，經由探究教學中的提示跟線索了解後，學生學習保留的效果良好。S3：「今天教的那個先加一個正方形，然後再求出它的邊，然後再加一個 L 形，這樣速

度變好快。」R：「你們覺得這樣學了這個方法之後你們可以記很久嗎？」S3：「我覺得會，我應該可以記蠻久的。」(0718-S3-INV)。「知道它是怎麼來的，就不會死死的背，容易記得起來、記得長久。」(0717-S2-INV)。

從認知測驗統計資料、學生解題紀錄，加上學生訪談資料顯示，探究教學對於學生數學學習的保留效果良好。

## (二)探究教學有助於學生建構正確數學概念

首先從認知測驗解題紀錄與錄影資料來對照，S8 在前測以十分逼近法計算 $\sqrt{15}$  得出近似值 3.91，經多次計算後仍與正確值 3.87 有差距，例如圖 18。在進行紙片操作根號值後，研究者請學生在有畫上 1 公分格線的白板上畫出 $\sqrt{3}$  的長度，學生已有根號代表正方形邊長的概念，S8 在畫出正方形邊長來表示 $\sqrt{3}$  時，會留意評估所畫正方形面積大小是否為 3，所以畫出的 $\sqrt{3}$  接近 1.7，例如圖 19。

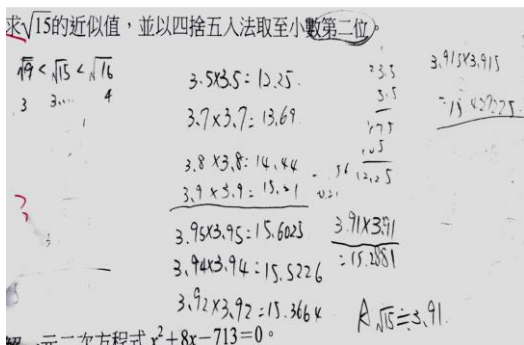


圖 18 S8 前測解題紀錄



圖 19 S8 上課情況一

S10 原本畫出的 $\sqrt{3}$  長度只有 1.5 不到 1.7，面積不到 3，例如圖 20，S10 看到同學畫的 $\sqrt{3}$ ，覺得自己畫的正方形面積太小不到 3，S10 擦掉正方形重新調整邊長，例如圖 21。



圖 20 S10 上課情況一



圖 21 S10 上課情況二

其次從教學錄音中發現，學生小組競賽經驗中，看到學生體驗、觀察、思考、比較、統整後修正概念，S11 發覺到同樣位數的數字其大小並不會影響根號求值計算的難易度，「數字大小應該沒有關係。」(0719-S11-VO)。S6 則從競賽過程觀察出根號求值容易計算的題目類型。S11 在小組競賽中抽到計算根號 12，被同學抗議「哪有那麼簡單的？欸...欸...」(0719-S4-VO)，S11 在比賽前以為抽到小數字比較容易算，「我就運氣好嘛！」(0719-S11-VO)，藉由小組競賽的經驗，他明白數字小的根號並沒有比較容易計算，「其實 12 也不是很好算，數字不是越小越好算，因為你算到後面...」(0719-S11-VO)。S6 回應 S11 在討論數字小的根號值好不好算，S6 看到其他同學先計算出根號 50 的近似值 7.01，他發現根號求值題目當根號值「答案後面是 1 或 0」會比較簡單(0719-S6-VO)。學生藉由觀察別人及自身的計算經驗，不是透過背誦或教師反覆講述來得到數學概念。

探究教學以學生為學習主體，讓學生有問題就提問，教師提供線索引導，學生解決心中的疑慮才能肯定接納新的概念。因為直接開方法算式裡，商和除數的個位數字相同，是需要學生估算的，除數的個位數字未定，並不是像學生之前計算已知大小的常數，S3 在嘗試估算時須判斷寫出的商數字大小是否是最大，S3：「我們怎麼樣知道我的數字寫太小？」，R：「剩下的數字比除數大就是剩太多，這跟除法一樣，把數字弄大一點，一直到剩下的餘數比除數小。」(0717-S3-VO)。

我們應該重新檢視傳統的教學思維，只以講述來教學，教學生背誦公式、大量練習、仿效教師解題，學生學習數學只是因為是考試科目，如果沒有考試就不想去算數學，學生搞不懂數學，大多數人對於數學的感覺如同在經典廣告詞裡「數學不會就是不會」。數學教學應重視學生數學概念的建構，透過多個面向的思考探究，唯有真正的理解數學才能活用，如此學生才能領略學習數學的快樂。在前導研究中，學生在寫給研究者的卡片中，學生利用數字開根號讓研究者猜字謎，我們見到學生透過探究教學不僅僅是了解學習內容，而是樂在其中，探究教學使學生得以窺見數學的奧妙與趣味，例如圖 22。

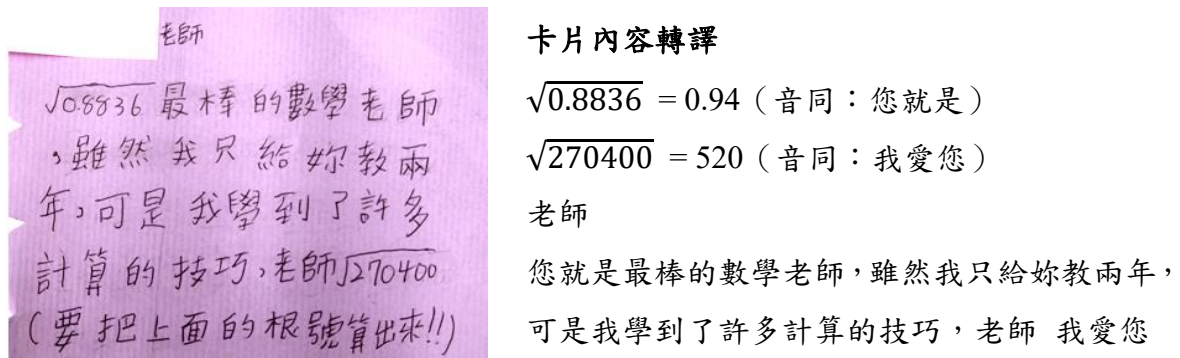


圖 22 學生卡片一

### (三)探究教學對學生學習態度有正向影響

首先從數學學習態度量表描述性統計資料來看，態度量表前測得分平均 109.91 分，後測得分平均 114.64 分，例如表 7。

表 7

態度量表前測後測得分描述性統計摘要表

| 態度量表 | 個數 | 最小值 | 最大值 | 平均數    | 標準差    |
|------|----|-----|-----|--------|--------|
| 前測   | 11 | 93  | 133 | 109.91 | 12.153 |
| 後測   | 11 | 87  | 127 | 114.64 | 12.667 |

將數學學習態度量表前測與後測得分以 SPSS 軟體作 Wilcoxon 符號等級檢定，信賴區間 95%，前測與後測得分 Z 值為 -1.841，顯著性  $p$  值  $> .05$ ，表示學習態度前測與後測得分沒有顯著差異，效果量 .12 也屬於低效果量，例如表 8。

表 8

數學學習態度量表前測與後測得之 Wilcoxon 符號等級檢定摘要表

| 數學學習態度量表得分      | Z 檢定                | 漸近顯著性 (雙尾) | 效果量 |
|-----------------|---------------------|------------|-----|
| 學習態度前測 - 學習態度後測 | -1.841 <sup>a</sup> | .066       | .12 |

註：以負等級為基礎；Wilcoxon 符號等級檢定。

數學學習態度量表題目分析項目分為學習慾望、學習過程、學習方法及數學信念四個分量，從量表其中各分量前測與後測得分之描述性統計資料來看，學習慾望、學習過程、學習方法、數學信念後測得分平均皆高於前測得分平均，如表 9。

表 9

數學學習態度量表前測與後測各分量之描述性統計摘要表

|    | 態度量表 | 個數 | 最小值 | 最大值 | 平均數   | 標準差   |
|----|------|----|-----|-----|-------|-------|
| 前測 | 學習慾望 | 11 | 44  | 67  | 52.55 | 6.773 |
|    | 學習過程 | 11 | 21  | 31  | 26.00 | 3.130 |
|    | 學習方法 | 11 | 10  | 18  | 13.18 | 2.562 |
|    | 數學信念 | 11 | 15  | 22  | 18.18 | 2.401 |
| 後測 | 學習慾望 | 11 | 40  | 66  | 53.73 | 7.072 |
|    | 學習過程 | 11 | 19  | 30  | 27.36 | 3.472 |
|    | 學習方法 | 11 | 12  | 18  | 15.00 | 2.000 |
|    | 數學信念 | 11 | 16  | 22  | 18.55 | 2.162 |

將數學學習態度量表各分量前測與後測得分，以統計軟體 SPSS 作 Wilcoxon 符號等級檢定，學習慾望、學習過程、數學信念三個分析項目顯著性  $p$  值  $> .05$ ，表示探究教學前後數學學習態度中學生的學習慾望、學習過程、數學信念沒有顯著差異，且效果量分別為  $-.02$ 、 $.11$ 、 $.05$  屬於低效果量。在學習方法此分析項目之顯著性  $p < .05$ ，且效果量  $.51$  屬於中效果量，這表示探究教學前後數學學習態度中學生的學習方法有顯著差異，例如表 10。

表 10

數學學習態度量表前測與後測各分量之 Wilcoxon 符號等級檢定摘要表

| 數學學習態度量表各分量 | Z 檢定   | 漸近顯著性(雙尾) | 效果量  |
|-------------|--------|-----------|------|
| 學習慾望        | -1.033 | .301      | -.02 |
| 學習過程        | -1.745 | .081      | .11  |
| 學習方法        | -2.160 | .031*     | .51  |
| 數學信念        | -.539  | .590      | .05  |

\* $p < .05$  表示有顯著差異。

其次從錄音資料來看，探究教學引起學生的求知慾，解出數學題目令他們獲得成就感，促使學生學習態度有正向改變。S6 搞不清楚 3552.16 根號值第三個數字小數部分如何計算，問 S11 他也不知道，這時打鐘了學生不下課，S6 繼續問研究者，S6：「老師，



第三個要怎麼搞？第三層也是要乘以 2 嗎？」，R：「第三層，我們一開始是多少？」，S6：「挑戰高難度的。」R：「這邊寫 5，所以你這邊要寫多少？…」，S6：「寫 10。」R：「… 109 這裡還要再加一次 9。」，S6：「...所以是 118，6 乘 1186，耶！我算出來了。」(0716-S6-VO)。探究教學讓學生有機會去思考了解算式的原理，學生建構數學概念並接受新方法。S3 想理解求根號值計算式中面積的切割原則，S3 問：「為什麼一定要從後面兩位兩位數過來？不能從前面往後數兩位嗎？」(0717-S3-VO)。探究教學提升學生數學學習慾望，解題成功使學生得到成就感，S2 覺得根號值「研究它很好玩，把它解出來很有成就感」(0717-S2-INV)。

在 S3 寫的感想裡，她喜歡探究教學上課的方式，大家沉浸在「真正」學習數學下，了解這個章節敘說內容以及章節之間彼此的關聯性，探究教學讓她放鬆享受於學習數學，與同學互相討論更能理解題目、找出不同解法，例如圖 23。

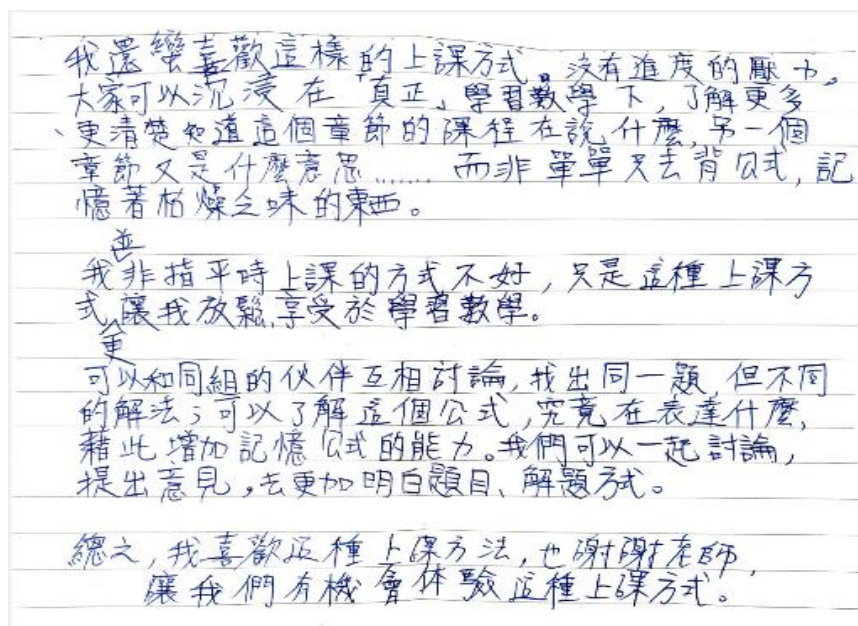


圖 23 學生卡片二

在學習心得中，學生認為用直接開方法快多了，考試時有時間去算其他題目，數學探究教學後了解數學公式的原理而不是死背，學生十分愛用，學到求根號值的方法不只十分逼近法，而這拼圖的方法讓他們學得很快樂，例如圖 24。

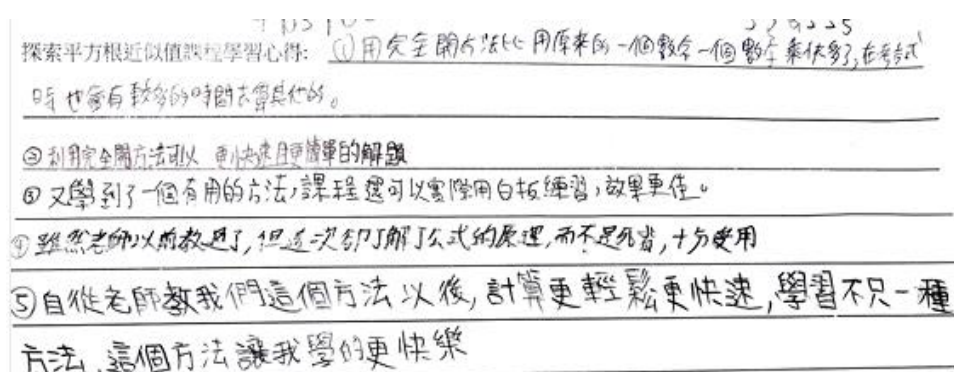


圖 24 G2 學習單三心得

探究學習讓學生操作易於理解的圖形而不是反覆計算數字、死背公式規則，學生不會覺得數學枯燥乏味，能降低學生對數學畏懼排斥的心態，學生與同學分組討論探究數學知識，合作學習、彼此激勵得到樂趣及成就感，使學生的數學學習態度有正向的提升。

## 伍、結論與建議

### 一、結論

本研究針對根號求值的單元，採用數學探究教學的方法，讓學生在動手操作中，來觀察思考尋找計算根號的規則，並將根號的計算形式化，結果發現透過數學探究教學雖然未能提升學生在根號求值上的認知學習表現，但是學習保留效果良好，學生的數學學習態度雖然沒有顯著的整體提升，但能提升學生的學習方法。數學探究教學著重理解數學算式中的原理、建構好數學概念後，學生不需仿效教師解法或反覆練習背誦，也能清楚掌握學習內容並且印象深刻持久。探究教學鼓勵學生思考研究數學，從中獲得樂趣及成就感。

### 二、建議

本研究發現探究教學雖然在學生認知學習表現沒有明顯的提升，但可以提升學生數學學習態度，建議探究稍微複雜的學習主題時，增加教學的時間，要多留一些時間讓學生觀察、思考、歸納，數學探究並非短期就能看到成效，需要長時間的浸潤培養。



## 參考文獻

- 林星秀 (2001)。高雄市國二函數課程GSP輔助教學成效之研究 (未出版之碩士論文)。  
高雄師範大學，高雄市。
- 洪振方 (2003)。探究式教學的歷史回顧與創造性探究模式的初探 (pp.647-648, 657)。  
高雄師大學報，15，641-662。
- 容士毅 (譯) (2010)。數學是什麼？ (原作者:Richard, C., Herbert, R. & Ian, S.)。台北市：左岸文化。(pp. 98-99)
- 國教院 (2019)。十二年國教課程綱要總綱。台北：教育部。
- 張春興 (1994)。教育心理學。台北市：東華。
- 陳向明 (2002)。社會科學質的研究。台北：五南。
- 黃家鳴 (2005)。數學探究的意義和實施。取自[http://nspm.ilonman.com/news/ppt/ws4/WS\\$ \\_WONG.ppt](http://nspm.ilonman.com/news/ppt/ws4/WS$ _WONG.ppt)。
- 蔡文榮 (2007)。活化教學的錦囊妙計—第二版。台北：學富文化。
- 謝佳叡、唐書志 (2017)。探究九年級生推論形式之邏輯結構的建構與轉化。臺灣數學教育期刊，4(2)，1-32。doi: 10.6278/tjme.20170914.001
- 謝豐瑞、唐書志、宋玉如、王婷瑩 (2008)。國中理想數學教師類型探討。中華民國第二十四屆科學教育學術研討會發表之論文，國立彰化師範大學。
- 蘇慧娟 (1998)。高雄地區國二學生方根概念及運算錯誤類型之分析研究 (未出版之碩士論文)。高雄師範大學，高雄市。
- Bruner, J. S.(1966).*Toward a theory of instruction*. Cambridge, MA:Harvard University Press.
- Johnson, D. Johnson, R.(1999). *Learning together and alone : Cooperative , competitive, and individualistic learning*. Boston: Allyn and Bacon.
- Kuster, G., Johnson, E., Keene, K.,& Andrew - Larson, C.(2017). Inquiry-oriented instruction : A conceptualization of instructional principles.*PRIMUS*,0(0),1-18.doi: 10.1080/10511970.2017.1338807
- Slavin, R. E.(1999).Comprehensive approaches to cooperative learning. *Theory into practice*, 38(2),74-79. doi: 10.1080/00405849909543835
- Whitin. P.(2006).Meeting the challenges of negotiated mathematical inquiry. *Teaching &*

*Learning: The Journal of Natural Inquiry and Reflective Practice*, 21(1), 59-83

## 附錄

## 壹、前測試卷

## 一、選擇

- ( ) 如果有一正方形面積為 441，那麼它的邊長應是多少？  
(A) 14 (B) 21 (C) 29 (D) 41
- ( ) 一正方形其面積為 45 平方公分，而邊長為  $a$  公分，則有關  $a$  的範圍，下列哪一個是正確的？  
(A)  $6.7 < a < 6.8$  (B)  $6.6 < a < 6.7$  (C)  $6.6 < a < 6.5$  (D)  $6.5 < a < 6.4$
- ( ) 數線上哪個數最接近 3.3？  
(A)  $\sqrt{9}$  (B)  $\sqrt{10}$  (C)  $\sqrt{11}$  (D)  $\sqrt{12}$
- ( ) 144 的平方根是多少？  
(A) 72 (B) 12 (C)  $\pm 72$  (D)  $\pm 12$
- ( )  $\sqrt{40}$ 、 $\sqrt{50}$ 、 $\sqrt{60}$ 、 $\sqrt{70}$ 、 $\sqrt{80}$ 、 $\sqrt{90}$ ，以上六個數中，介於 7 與 9 之間的數共有幾個？  
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6
- ( ) 下列哪一選項的值介於 0.2 與 0.3 之間？  
(A)  $\sqrt{0.484}$  (B)  $\sqrt{0.848}$  (C)  $\sqrt{0.0484}$  (D)  $\sqrt{0.00484}$

## 二、計算

- 求  $\sqrt{15}$  的近似值，並以四捨五入法取至小數第二位。

## 貳、後測試卷

## 一、選擇

- ( ) 如果有一正方形面積為 729，那麼它的邊長應是多少？  
(A) 9 (B) 13 (C) 23 (D) 27
- ( ) 一正方形其面積為 75 平方公分，而邊長為  $a$  公分，則有關  $a$  的範圍，下列哪一個是正確的？  
(A)  $8.7 < a < 8.8$  (B)  $8.6 < a < 8.7$  (C)  $8.6 < a < 8.5$  (D)  $8.5 < a < 8.4$
- ( ) 數線上哪個數最接近 7.3？  
(A)  $\sqrt{53}$  (B)  $\sqrt{55}$  (C)  $\sqrt{57}$  (D)  $\sqrt{59}$
- ( ) 289 的平方根是多少？  
(A) 53 (B) 17 (C)  $\pm 27$  (D)  $\pm 17$
- ( )  $\sqrt{110}$ 、 $\sqrt{120}$ 、 $\sqrt{130}$ 、 $\sqrt{140}$ 、 $\sqrt{150}$ 、 $\sqrt{160}$ 、 $\sqrt{170}$ ，以上各數中，介於 11 與 13 之間的數共有幾個？  
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7
- ( ) 下列哪一選項的值介於 0.6 與 0.7 之間？  
(A)  $\sqrt{4.848}$  (B)  $\sqrt{0.848}$  (C)  $\sqrt{0.484}$  (D)  $\sqrt{0.00484}$

## 二、計算

- 求  $\sqrt{47}$  的近似值，並以四捨五入法取至小數第二位。

## 參、延後測試卷

## 一、選擇

- ( ) 如果有一正方形面積為 1444，那麼它的邊長應是多少？  
(A) 122 (B) 72 (C) 38 (D) 24
- ( ) 一正方形其面積為 89 平方公分，而邊長為 a 公分，則有關 a 的範圍，下列哪一個是正確的？  
(A)  $9.4 < a < 9.5$  (B)  $9.5 < a < 9.6$  (C)  $9.6 < a < 9.7$  (D)  $9.7 < a < 9.8$
- ( ) 數線上哪個數最接近 6.4？  
(A)  $\sqrt{39}$  (B)  $\sqrt{41}$  (C)  $\sqrt{43}$  (D)  $\sqrt{45}$
- ( ) 2809 的平方根是多少？  
(A) 53 (B) 57 (C)  $\pm 53$  (D)  $\pm 57$
- ( )  $\sqrt{310}$ 、 $\sqrt{320}$ 、 $\sqrt{330}$ 、 $\sqrt{340}$ 、 $\sqrt{350}$ 、 $\sqrt{360}$ 、 $\sqrt{370}$ ，以上各數中，介於 18 與 19 之間的數共有幾個？  
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7
- ( ) 下列哪一選項的值介於 2.9 與 3 之間？  
(A)  $\sqrt{4.84}$  (B)  $\sqrt{48.4}$  (C)  $\sqrt{8.48}$  (D)  $\sqrt{84.8}$

## 二、計算

- 求  $\sqrt{73}$  的近似值，並以四捨五入法取至小數第二位。

## 肆、認知測驗-預試試題選擇題鑑別度及難易度

| 題號  | P：難易度 | D：鑑別度 |
|-----|-------|-------|
| 1   | 0.33  | 0.58  |
| 2   | 0.38  | 0.49  |
| 3   | 0.68  | 0.48  |
| 4   | 0.54  | 0.91  |
| 5   | 0.44  | 0.62  |
| 6   | 0.36  | 0.20  |
|     |       |       |
| 最大值 | 0.68  | 0.91  |
| 最小值 | 0.33  | 0.20  |
| 平均值 | 0.46  | 0.55  |