

ISSN 2312-7716  
DOI 10.6610/TJMT

第 42 卷第 2 期  
二〇二一年十月  
VOL. 42 NO. 2  
October 2021

# 臺灣數學教師

Taiwan Journal of Mathematics Teachers



國立臺灣師範大學數學系  
Department of Mathematics,  
National Taiwan Normal University



台灣數學教育學會  
Taiwan Association  
for Mathematics Education

**發行單位** | 國立臺灣師範大學數學系  
台灣數學教育學會

## 編輯委員會

主編	陳嘉皇	國立臺中教育大學數學教育學系
副主編	林原宏	國立臺中教育大學數學教育學系
	李源順	臺北市立大學數學系
編輯委員	林勇吉	國立清華大學數理教育研究所
(依姓氏筆劃排序)	林素微	國立臺南大學教育學系
	徐偉民	國立屏東大學教育學系
	秦爾聰	國立彰化師範大學科學教育研究所
	張淑怡	國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系
	張煥泉	苗栗縣頭份鎮信德國民小學
	許慧玉	國立清華大學數理教育研究所
	楊凱琳	國立臺灣師範大學數學系
	劉建成	桃園市平鎮區平鎮國民中學
	鄭章華	國立彰化師範大學科學教育研究所
	謝佳叡	國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系
國際編輯委員	林承瑤	美國南伊利諾大學課程與教學學系

---

<b>地址</b>	臺北市汀州路四段 88 號國立臺灣師範大學數學系 《臺灣數學教師》
<b>電話</b>	886-2-7734-6576
<b>傳真</b>	886-2-2933-2342
<b>電子郵件</b>	tjmtedit@gmail.com
<b>網址</b>	<a href="http://tame.tw/news/news.php?class=204">http://tame.tw/news/news.php?class=204</a>

---

## 附 啟

1. 本期刊自 2014 年 35 卷起每年出版二期。
2. 本期刊原名《台灣數學教師(電子)期刊》，自 2014 年 35 卷第 2 期起改名為《臺灣數學教師》。
3. 本期刊電子郵件由自 2015 年 36 卷第 1 期起改為 tjmtedit@gmail.com。

---

版權所有，轉載刊登本刊文章需先獲得本刊同意，翻印必究

## 主編的話

---

本期總計收錄四篇論文，涵蓋了數學評量、科技融入數學學習、數學繪本的教學影響與資優生數學概念發展及其學習態度的探討，層面包含了數學認知、情意與科技技能的運用，讀者可從內文了解到師培生、國中小學學生參與數學學習的發展和應用，也可透過資訊應用和評量試題的編擬提升數學有效教學和知能的促進。第一篇「正複本數學試題對等性的考量因素」是由孫荷馨、劉祥通與黃財尉三位學者所撰寫，作者以 Reed (1987; 1999) 的研究提出四種不同的試題類型，檢閱國內設計的數學解題量表，從量表中提出例子，並分析與評論。本文發現：正、複本量表中的題目是不相關的試題，有些是等價的試題，有些試題屬於類似題，建議設計者需要考慮到對稱題的難易度是否相當，更要洞察到問題結構，才能設計出有變化的同構試題。第二篇是由楊晉民與魏士軒撰寫之「Geogebra 融入師資生普通數學學習探究」，本研究以動態數學軟體 Geogebra (簡稱 GGB) 配合師資培育課程中之普通數學課程教學，設計可讓學生操作之線上學習教材，並存放於遠端主機，讓學生課後透過網路或載具進行自我學習，期能輔助其普通數學學習，建構數學物件的知識，並探究學生對於 GGB 融入學習教材之態度。第三篇則是由香港學者陳茗茵、張僑平兩位協作的「數學繪本教學對一年級小學生數學學習的影響：一項探索性研究」，研究旨在探索利用數學繪本進行課堂教學對低年級小學生數學學習的影響，對象是 73 名香港某官立小學一年級學生，透過問卷調查、課堂觀察及學生訪談。研究發現數學繪本教學能提高一年級學生對數學概念的掌握程度，提升學生課堂專注力，還能夠提升學生的數學學習興趣，讓學生對數學課堂有所期待。最後安排了葉秀玲、徐偉民與張國綱三位合著之「數學探究教學對學生根號求值的概念發展及學習態度的影響」，研究採個案研究法，以國中八年級學生 11 人為對象，針對根號求值的主題進行數學探究教學，探討數學探究教學實施的歷程，及對學生數學學習的影響。

本期內容豐富，實證性研究之成果和發現，除展現出學者對數學教育的投入和付出，獲得深入的理解外，其提出的見解與論點可提升數學教育實務的應用，促進學生最佳化的學習。本期論文集如期付梓出版，再次感謝上述學者的支持與付出。

《臺灣數學教師》主編

陳嘉皇 謹誌

# 臺灣數學教師

第 42 卷 第 2 期

2005 年 3 月創刊

2021 年 10 月出刊

---

## 目錄

- |  |    |
|--|----|
| 正複本數學試題對等性的考量因素<br>／孫荷馨、劉祥通、黃財尉              | 1  |
| Geogebra 融入師資生普通數學學習探究<br>／楊晉民、魏士軒           | 12 |
| 數學繪本教學對一年級小學生數學學習的影響：一項探索性<br>研究<br>／陳茗茵、張僑平 | 31 |
| 數學探究教學對學生根號求值的概念發展及學習態度的影響<br>／葉秀玲、徐偉民、張國綱   | 56 |



# Taiwan Journal of Mathematics Teachers

Vol. 42 No. 2

First Issue: March 2005

Current Issue: October 2021

---

## CONTENTS

- Factors for Consideration of Equivalence of Mathematics Test Questions 1  
/ He-Xin Sun 、 Shiang-Tung Liu 、 Tsai-Wei Huang
- Research on the Integration of Geogebra Virtual Manipulatives into General Mathematics Learning for Pre-Service Teachers 12  
/ Jinn-Min Yang 、 Shih-Hsuan Wei
- The Effect of Using Picture Book to Teach Mathematics for First Grade Students: An Exploratory Study 31  
/ Chan Ming Yan Anna 、 Zhang Qiaoping
- The Influence of Mathematical Inquiry Instruction of Students' Concept Development and Learning Attitude of Finding Square Roots 56  
/ Shiu-Ling Yeh 、 Wei-Min Hsu 、 Alex Chang

孫荷馨、劉祥通、黃財尉（2021）。  
正複本數學試題對等性的考量因素。  
**臺灣數學教師**，42（2），1-11  
doi: 10.6610/TJMT.202110\_42(2).0001

## 正複本數學試題對等性的考量因素

孫荷馨<sup>1</sup> 劉祥通<sup>2</sup> 黃財尉<sup>3</sup>

<sup>1</sup>雲林縣立二崙國中

<sup>2</sup>國立嘉義大學數理教育所

<sup>3</sup>國立嘉義大學諮商與輔導學系

為了改進教學，探討實驗教學的效果，需要有前測與後測的量表／問卷當作研究工具。有些量表，只有單一的題本；有些雖有正、複本兩種題本，然而有些設計是正、複本題目完全不相關，有些難易度不同。Reed（1987；1999）的研究提出四種不同的試題類型，本文以此四種類型，檢閱國內設計的數學解題量表，從量表中提出例子，並分析與評論。本文發現：有些正、複本量表中的題目是不相關的試題，有些是等價的試題，有些試題屬於類似題，理想上，正複本中的題目應該同構題的關係，也就是問題中故事情境不同，問題結構相同。因為問題中的故事情境不同，所以在解後測試題時，才不會變成是在解例行性問題；因為問題結構相同，所以正、複本的難度才不會差異太大，如此的正複本配對才能真正測出學生的解題能力，才不會誤判了實驗效果。再者，設計者也需要考慮到對稱題的難易度是否相當，更要洞察到問題結構，才能設計出有變化的同構試題。文末提供結語與建議以饗同好。

**關鍵詞：**同構試題、問題結構、複本試題、數學評量、數學解題能力量表

## 壹、前言

為了考驗新的教學法的實驗效果，理想上教學實驗設計應有正複本兩種版本，用以評估教學法之成效，但有許多研究是利用自編的工具，卻只有單一版本，如果某一研究使用同一版本試題當作前測試題，也當作後測，如此的研究是無法真正測出實驗教學的成效。

有些數學測驗題，雖有正、複本兩種題本，但正複本的題目完全不相關，即使難度（difficulty）皆介於 0.2 ~ 0.8 之間，但是互相對應的兩個題目，試題的難度仍是有些差距；有些數學試題，問題中的故事題情境、問題結構都相同，只是更換題目中的數據，當學生做完正本之後，有了解題經驗，會影響到複本施測的結果；有些數學試題，問題中的故事題情境相同，但是問題結構不同，也就是難度可能不一樣，導致答對前、後測的答對率不相同；如果正複本試題，雖然問題中的故事題情境不同，只要問題結構相同，難度相近，就能真正考驗學生在教學前後數學解題能力的改變。關於試題的相關性，Reed（1987）的研究中，提出四種不同的試題類型，說明如後：

例題：

※小的管子注滿油箱需要 12 小時，大的管子注滿油箱需要 8 小時。如果同時使用兩個管子注水，需要多久時間？

### (一) 不相關試題（unrelated problem）

兩個問題既不具有相同的故事情境（a story context），解答程序（a solution procedure）也不相同，我們稱之為不相關試題。

※一架飛機從 A 地到 B 地的速率是每 3 小時可以飛 250 英哩，比從 B 地飛回 A 地 200 英哩所花的時間少，回程需要花多少小時？

### (二) 等價試題（equivalent problem）

兩個問題具有相同的故事情境和相同的解答程序，我們稱之為等價試題。

※小的水管注滿游泳池需要 6 小時，大的水管注滿游泳池需要 3 小時。如果同時使用大、小兩個管子注水，需要多久時間？

### (三) 同構試題（isomorphic problem）

兩個問題具有不同的故事情境但有相同的解答程序，我們稱之為同構試題。

※湯姆開車到比爾家需要 4 小時，比爾開車到湯姆家需要 3 小時。若他們兩人同時離開自己的家，開往對方的家，則他們需要多少時間才能相遇？

#### (四) 類似試題 (similar problem)

兩個問題具有相同的故事情境，但解答程序並不相同，稱之為類似試題。

※小的水管注滿水箱需要 20 小時，大的水管注滿水箱需要 15 小時。若排水管流空裝滿的水箱，需要 40 小時。如果同時使用大、小兩個水管注滿水箱，需要多少的時間？（假設水箱中有水時，排水管就開始排水）

Reed (1987) 的研究貢獻，在於提出試題對應的類別，尤其是著重於結構性的對應，此文啟發了研究者設計正複本試題應考慮結構性的對應，另外，考慮到解題的意義，研究者也思考：問題中故事情境也應有所不同，才能真正考驗學生的解題能力。

但是研究者認為，即使是相同的題目對於不同的解題者而言，也可能會有不同的解答程序，不相干的題目也可能有相同的解答程序；而同一個解題者面對問題結構相同的二個問題，採取相同的解答程序的機會很高；其次，如果從解答程序來考慮，似乎從結果論來看問題，少了同構性質的本質；再者，根據 Vergnaud (1983) 提出乘法概念域 (Multiplicative Conceptual Field)，研究者解析小學數學的數與量問題，有加減法問題、部分整體問題、周長問題、比較問題、乘除法問題、面積問題、體積問題、速率問題、正比問題、相似問題、比例問題與比例尺問題等等，以上問題又可以大略區分為「加法問題結構」、「乘法問題結構」與「比例問題結構」，以上三種問題結構循序漸進，也由淺入深。因此研究者借用「問題結構 (problem structure)」的字眼，以「問題結構」相同，取代「解答程序」相同，以定義與區辨以上四種試題或許會更貼切。本文列表以說明四種試題的差異 (表一)，並舉例說明之。

表 1

四種試題之故事情境與問題結構對照表

	不相關試題	等價試題	同構試題	類似試題
故事情境 (story context)	不相同	相同	不相同	相同
問題結構 (problem structure)	不相同	相同	相同	不相同

## 貳、四種對應方式之舉例說明

以上四種試題，Reed (1999) 再以一個大小管子注滿油箱的情境當作參考例子，配合四種對照例子，區別四種試題的不同，提醒教師命題時該注意的環節。為了讓讀者更廣泛的認識這四種試題，研究者從國內文獻中找出有正複量表的解題工具並舉例說明，以提醒研究人員對於研究工具的正複本試題，不是只關心信度與效度而已，既然是正本與複本的對應關係，理想上二者的對應，應該要有更多層的考慮。

劉秋木 (1996) 推出數學解題行為評量表，效度與內部一致性信度都很好，此份量表可說是國內最早的解題量表，兼具解題歷程與結果的數學解題能力量表，以理解題意開始，其次是擬訂計畫、執行計畫，最後是回顧答案。此量表對於數學評量，尤其是數學解題工具的啟迪，可說是居功厥偉。嚴格說來，正複本試題的總體難度也相當，但是正複本中的正、複本試題的題數不同（甲卷 16 題、信度 .8496；乙卷 15 題、信度 .9300），正複本對等係數（.86），但是沒有一對一的對應考量。

陳怡靜 (2012) 設計數學解題能力量表，她根據預試結果分析，選出較適宜的 10 道題目後，編製成「九年級數學解題能力量表」的正複題本，各題本包括：了解題意、擬訂計畫與執行計畫等三子題，正本的 Cronbach's  $\alpha$  值為 .901，複本的 Cronbach's  $\alpha$  值為 .896，複本信度為 .871、達顯著水準 ( $p < .001$ )。

陳怡靜 (2012) 量表的設計理念，有下列幾點 (陳怡靜、劉祥通, 2013): 1. 強調解題歷程的重要性，2. 著重非例行性問題的設計，3. 題目訊息多元，設計複選題以判斷學生對題意與結構的掌握；4. 避免學生解已熟習的非例行性問題，以對等的同構試題為複本試題；5. 評估「了解題意」與「擬定計畫」對「執行計畫」的重要性。

### 一、不相關試題的對應

下列題組屬於不相關試題 (劉秋木, 1996)，舉例如下。

表 2

不相關題組的對應表

題目	題目內容
甲卷 第 1 題	※哥哥比弟弟年長 6 歲，父親的年齡是哥哥的兩倍。父親現年是 48 歲，問弟弟今年是幾歲？

表 2 (續)

乙卷	※下面哪一個數符合以下兩個條件？(1)奇數 (2)數字和是 8
第 1 題	(54、68、27、77、26、53、80、25)

我們可以看到，以上兩個問題中的故事題情境完全不同，甲卷是考年齡問題，乙卷是考數字問題，問題結構也不相同，所以屬於不相關試題。

## 二、等價試題的對應

下列題組屬於等價試題（陳怡靜，2012），舉例如下：

表 3

等價題組的對應表

題目	題目內容
正式題本 第 9 題	※欲得知 A、B 兩個水桶的容量，已知 A、B 兩個水桶半徑比為 1：2，高度比為 3：1，A 桶內有水 35 公升，B 桶內有水 70 公升。如果把 B 桶內的水倒入 A 桶並加滿，則 B 桶內剩下的水是它容量的一半，求 B 桶的容量？
複試題本 的 9 題	※小明想要知道 A、B 兩個圓柱體的容量，已知兩個圓柱體半徑比為 2：3，高度比為 2：1，圓柱體 A 內裝水 42 公升，圓柱體 B 內裝水 60 公升。如果把 B 桶內的水倒入 A 桶並加滿，則 B 桶內剩下的水是它容量的 1/3，求 B 桶的容量？

以上題組的問題結構相同，除了做數據上的更改，問題中的故事題情境也相同，依照 Reed (1999) 的理論，此題組算是一組等價試題。持平來說，以上的問題結構很特殊，要設計不同情境，的確有侷限性，還真是不容易的事。

## 三、類似試題 (similar problem) 的對應

表 4

類似題組的對應表

題目	題目內容
正式題本 第 6 題	※A、B 兩個袋子分別裝編號 1~10 的各一顆球，每顆球大小、質料均相同，從兩袋各拿出 1 球，這兩球編號的乘積為偶數的機率是多少？

表 4 (續)

複本題本 第 6 題	※A、B 兩個袋子分別裝編號 1~10 的各一顆球，每顆球大小、質料均相同，從兩袋各拿出 1 球，這兩球編號的乘積為 <b>奇數</b> 的機率是多少？
---------------	--

以上題組取自陳怡靜 (2012)，正複本對所應到的問題中的故事題情境敘述上幾乎相同，但是差別在於正本要乘積為偶數的機率，樣本點是 (奇數, 偶數)、(偶數, 奇數) 或 (偶數, 偶數) 的組合，而複本則是要求乘積為奇數的機率，樣本點是 (奇數, 奇數) 的組合。研究者因此認為此題組的問題結構並不相同，難度不一，因此以上正複本的題組應屬類似試題。

#### 四、同構問題的對應

表 5

同構題組的對應表

題目	題目內容
正式題本 第 9 題	※太空人珍妮到了一個行星，那上面的動物若非四隻腳就是三隻腳。有一天他看到了 31 隻腳，她可能看到多少隻動物 (把所有可能的情況都寫出來)？
複試題本 的 9 題	※小英拿了 30 元買糖果，泡泡糖一個 3 元，巧克力一個 2 元。小英把 30 元買光了，他可能買哪些糖果 (把所有可能的買法都寫出來)？

以上題組取自劉秋木 (1996) 的量表，雖然兩個題目乍看之問題中的故事題情境完全不同，正本 (甲卷) 的情境是行星上動物的數量問題，而複本 (乙卷) 則是日常生活中的買賣的數量問題，由於問題結構相同，所以研究者認為此種對應可以算為一組同構試題。

### 參、同構試題的難度考量、區辨與設計

既然是正複本試題，理想上題數要相等以外、難度要接近，嚴格區辨對等試題是否同構，再者命題者也要洞察題目結構，才能設計出有變化的同構試題。

#### 一、考量試題難度是否相當

理想上在設計複本試題時，我們希望設計出難度相當題目，使得正複本的對等性更



一致。但是些試題雖然看起來問題結構相同，讓老師們誤以為是難度相當的試題，對學生而言，答對率卻是不相同，因此無法鑑別學生的解題能力，也無法真正的反映出實驗效果，這是命題者需要特別注意的地方。以下針對幾個題目來舉例說明。

表 6

由面積求長或高的題組表

題目	題目內容
正本	※一個長方形，寬為 6 公分，面積為 24 平方公分，請問長為多少公分？
複本	※一個三角形，底邊長為 5 公分，面積是 20 平方公分，請問高為多少公分？

以上兩個問題，都利用面積反求長方形的長寬，以及三角形的高，雖然問題結構相同，但這兩道題目對學生而言，難度並不相同，後來的研究也證實正複本難度( .98; .75)，正複本鑑別度( .036; .36)(孫荷馨，2013)，此乃正本(長方形面積問題)試題對於國一學生太容易，以致鑑別度太低，無法區隔出程度的高下；複本(三角形面積)試題，在做逆運算以反求高的時候，學生比較容易出錯。簡言之，以上題組問題結構雖相同，但難度不一，不適合當正複本的對等試題。

## 二、問題結構雖相同，但外延量與內涵量認知難度有別，設計正複本試題時應考慮難度

表 7

由部分量求出一單位之量之題組表

題目	題目內容
正本	※一塊布的 $\frac{2}{3}$ 是 $\frac{3}{4}$ 公尺，請問這塊布的全長是多少？
複本	※一鐵條的 $\frac{3}{4}$ 公尺是 $\frac{4}{5}$ 公斤，請問一公尺重多少？

根據朱建正(1997)的研究中指出：一再堆積、延長及繼續增加的量，稱為外延量(extensity)，例如，重量、長度、面積與體積，其意即為範圍之量。另一種表是密度、速率、角速率等，為兩外延量的比值，稱為強度量(intensity)，也可以譯為內涵量，其意為劇烈的程度。上述的兩個試題，表面上看似問題結構相同。但是正本的試題是屬於外延量的範圍，複本試題則是屬於強度量的範圍，研究者認為，對學生而言，這個題組的難度並不相同，複本試題是屬於強度量，對於學生的認知比較困難。

### 三、情境相似的題目，容易被誤認為同構試題

表 8

由周長或面積，求另一邊之長的題組表

題目	題目內容
正本	※一個長方形，寬為 5 公分，周長為 30 平方公分，請問長為多少公分？
複本	※一個長方形，寬 4 為公分，面積 20 是平方公分，請問長為多少公分？

以上題組，雖然都是要求長方形的一個邊，差別在正本試題是周長問題(加法結構)，複本是求面積問題(乘法結構)，構成要素不同，不算是同構試題的對應題組。

### 四、從不同的故事情境中洞悉題目中的相同的問題結構

表 9

某一部分量是另一部份量之分數(小數)倍題組(第 1 例)表

題目	題目內容
正本	※雲林縣某國中有學生 4160 人，已知男生的人數是女生的 1.08 倍，請問男生女生各有多少人？
複本	※北半球的夏季，晝長夜短，已知白天的時間是晚上 $1\frac{2}{7}$ 倍，請問白天跟晚上各佔了多少小時？

以上題組正本是討論男生與女生的人數問題，複本則是討論白天與晚上所佔的時間，問題中的故事題情境並不相同，但是問題結構是相同的。正本題目敘述：「男生的人數是女生的 1.08 倍」，因此我們可以用女生的人數當作基準量 1，男生的人數當作比較量 1.08。男、女生的人數和又是新的比較量，相當於基準量的 2.08 倍，用總數 4160 除以 2.08 即得女生人數(基準量)，進而求出男生的人數；複本的題目敘述：「白天的時間是晚上時間的  $1\frac{2}{7}$  倍」，我們可晚上的時間當作基準量，白天的時間當作比較量，一天 24 小時，就相當於基準量的  $(1+1\frac{2}{7})$  倍，進而求出白天和晚上所佔的時間。因此，我們可以說上述題目是互為同構試題。以下再舉一例說明。

表 10

從比較量找基準量題組(第 2 例)表

題目	題目內容
----	------

表 10 (續)

正本	※國小今年有學生 1920 人，比去年減少 4%，請問去年有多少學生？
複本	※政府規定貨品從國外進口要加 6% 的稅，爸爸在商店買了一件國外進口的商品，花了 350 元，請問未課稅的商品是多少元？

上述題組問題中的故事情境完全不相同，但是問題結構是相同的。正本的題目敘述：「今年比去年減少 4%」，以去年的人數當作母數，減少的部分當作子數，是母數的 4%；今年的人數就是母子差，相當於母數的  $(1-4\%)$ ，進而求出去年的學生人數。複本的題目敘述：「進口要加 6% 的稅」，以未加稅之前的價錢當作母數，加稅的部分當作子數，是母數的 6%，進口後的價錢 350 元，相當於母數的  $(1+6\%)$ ，進而求出未課稅前的商品價格是多少。因此，我們可以說上述題組是同構試題。

## 肆、結語

根據以上分析，不相關試題當然不適合做為對等試題，有些數學試題，問題中的故事題情境相同，但是問題結構不同（類似題），難度很可能不一樣，導致答對前、後測的答對率不相同，也不適合做為對等試題。何以捨等價試題，而採用同構試題？理由是：問題中的故事情境、問題結構都相同（等價試題），只是更換題目中的數據，當學生做完正本之後，有了解題經驗，會影響到複本施測的解答結果；如果試題雖然問題中的故事題情境不同，但是問題結構相同，難度相近，如此才能考驗學生數學解題能力，較為理想。基於以上，研究者認為以難度相當的一組同構試題來當作正複本試題才是理想。

如何控制試題的難度？前提是基於研究者要擁有數學知識，以及學習者的數學知識，預見學生的可能解法，其次是要做前導試驗，求出正複本試題的難易度與鑑別度，以做為正複本題組的依據。

如何設計好的同構試題？如果命題者只變更題目中的數據，此乃等價試題的設計，此種題組的功能是考驗學習成效的保留度；如果命題者變更問題中的故事情境，就是同構試題的設計，此種題組是考驗學習遷移能力，也就是考驗學生真正的解題能力。但是如何設計好的同構試題，除了洞悉各種題目中的問題結構，再尋找問題結構的關聯性外，更要靠數學教師不斷鞭策自己以精進知能，所謂「日增其所亡，月無忘其所能」。

一份好的正複本試題之對等性對於研究證據的支持著實重要，好的正複本同構試題的編製將考驗研究者的學術能力，其日積月累的知識涵養與實務設計經驗的試煉有其必要，試題設計本身則需考量試題類型、試題難易度及鑑別度作為考量依據，在經歷不斷

專業發展以及教師團隊合作及共同的腦力激盪下，一定可設計出適切且符合學生解題能力表現的測驗試題，期待大家一同努力。

備註：

本文修改自孫荷馨(2013)碩士論文——國中數學文字題量表之編製—正複本試題對等設計的考量；以及孫荷馨、劉祥通與黃財尉(2012)研討會論文——數學正複本試題解題量表試題的對等性探討。2012年10月國立臺中教育大學主辦—2012年第四屆科技與數學教育學術研討會暨數學教學工作坊論文集。

## 誌謝

感謝二位匿名審查人的洞見問題與明察秋毫，本文得以更好的論述以饗讀者。也感謝國立屏東大學教育系系主任徐偉民教授，百忙抽空提出一些好建議，給研究者反思與成長的機會，也給本文改進的空間。

## 參考文獻

- 朱建正(1997)。**國小數學課程的數學理論基礎**。1996年度國家科學委員會專案研究計畫：國小數學教師培育級檢定模式研究：子計畫三—國小數學課程的數學理論基礎研究，未出版。
- 劉秋木(1996)。**國小數學科教學研究**。臺北：五南。
- 陳怡靜(2012)。**九年級數學解題能力量表之編製**(未出版之碩士論文)。國立嘉義大學師範學院數學教育研究所，嘉義。
- 陳怡靜、劉祥通(2013)。**國中數學解題能力量表編製之理念**。科學教育月刊，357，29-37頁。
- 孫荷馨(2013)。**國中數學文字題量表之編製-正複本試題對等設計的考量**(未出版之碩士論文)。國立嘉大學師範學院數理教育研究所，嘉義。
- 孫荷馨、劉祥通、黃財尉(2012)。**數學正複本試題解題量表試題的對等性探討**。論文發表於2012年第四屆科技與數學教育學術研討會暨數學教學工作坊論文集。國立臺中教育大學，臺中。
- Reed, S. K. (1987). A structure -mapping model for word problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 7, 102-115.

Reed, S. K. (1999). *Word Problems: Research and Curriculum Reform*. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers Mahwah, New Jersey.

Vergnaud, G. (1983). Multiple structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp.127- 174). New York: Academic Press.

楊晉民、魏士軒（2021）。  
Geogebra 融入師資生普通數學學習探究。  
臺灣數學教師，42（2），12-30  
doi: 10.6610/TJMT.202110\_42(2).0002

## Geogebra 融入師資生普通數學學習探究

楊晉民<sup>1</sup> 魏士軒<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 國立臺中教育大學 數學教育學系

<sup>2</sup> 國立臺中教育大學 數學教育學系

普通數學是成為國民小學教師學程課程之必修科目，也是未來教師檢定考試的重點科目之一。有鑑於資通訊科技的進步，師資生習慣使用 ICT 來學習數學已是必然趨勢，因此，本研究以動態數學軟體 Geogebra（簡稱 GGB）配合師資培育課程中之普通數學課程教學，設計可讓學生操作之線上學習教材，並存放於遠端主機，讓學生課後透過網路或載具進行自我學習，期能輔助其普通數學學習，建構數學物件的知識，並探究學生對於 GGB 融入學習教材之態度。目前師資生接觸和使用 GGB 的機會比較少，本研究希望提供認識和使用 GGB 的機會，未來他們成為正式教師時，有機會可以使用 GGB 來協助其學生學習。當然，也提供有興趣或是有意導入 GGB 於教學之教師對 GGB 學習教材設計之參考。本研究線上教材設計融入多媒體學習理論（cognitive theory of multimedia learning）和 GGB 之互動、可操作元件，提供師資生作為課後作為自我學習之補充教材。本研究採用問卷研究法，調查樣本數 103 人。研究結果顯示，師資生對於 GGB 融入數學學習態度相當正向，對編製之教材也覺得對其學習有益，也願意未來擔任教師時有機會可以融入自己的數學科教學。

**關鍵詞：**Geogebra、多媒體學習理論、師資生、動態數學、普通數學

## 壹、前言

21 世紀教師需具備能夠支持學生技能發展的教學實力 (Voogt, Erstad, Dede, & Mishra, 2013)，Fraillon, Ainley, Schulz., Friedman, & Gebhardt (2014) 也列出教師必須能夠整合 21 世紀技能到教學中，其中資通訊科技素養 (information and communication technology [ICT] literacy) 就是其中之一 (Teo & van Schaik, 2012; Voogt & Roblin, 2012)，可知 ICT 融入教學已然是職前 (pre-service) 和現職 (in-service) 教師必備的能力之一。教師是人才培育的關鍵 (教育部，2013)，為提供更好的教學內容與品質，教學者需時常更新教材內容並不斷提升自我技能 (羅良慧，2018)。

接受師資職前教育課程的學生 (簡稱師資生) 是影響國家未來希望的種子，因此，讓未來有志成為教師的師資生，對於 ICT 融入學習一事，應該讓其在校時就習慣、接受並瞭解各種課程融入 ICT 的核心內涵，才能讓他們在未來真的可以導入相關的教學工作，以輔助學生的學習。因為，他們必須知道不是使用 ICT 就可以提升學生學習，而是必須仔細評估與設計才能達成促進學生學習的目標。有鑑於此，教學者本身對於數學科技導入學習的相關觀念是否能夠與時俱進，是否合宜，對於未來數學科技導入學習扮演非常重要的關鍵。羅良慧 (2018) 指出對於教學者的支援和培訓，使其從理解、會用到會教，必定需要挹注更多的資源來支持師資養成和培訓。美國數學教師協會 (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]) 指出科技在教師教學與學生學習數學上是必要的，它影響著教師的教學以及學生的學習 (NCTM, 2000)。

研究者在教學過程中時常發現，師資生在普通數學學習的觀念，基本上會認為以可以計算相關數學問題為主，對於數學基本概念的理解、現象、使用和限制通常不以為意，以致於在面對問題時，無法使用正確解題。換句話說，「許多學習者對於數學學習和運用時，通常是沒有解題對應的畫面」。然，數學是對現實世界問題的抽象化描述和建模工具，學生對於數學模式若能充分理解不僅可以讓所學成為解題基模，也可以降低學習時的認知負荷。研究者認為讓數學模式成為基模的方式不只在於算的過程，而在於對於所運用數學模式的對應心像 (image)，也就是「當看到數學結構，能否產生運作畫面」。因此，本研究希望藉由優良表徵工具實作出優良的數位互動線上教材，輔助學生產生數學結構心像，以利未來解題。以直線方程式  $y = ax + b$  為例，有學生看到方程式瞭解它是「直線方程式」、「二元一次方程式」，但我們更希望學生看到方程式應該瞭解其組成與特性是「是斜率控制直線的方向，是控制直線平移的量，而且  $x$  和  $y$  分別是資料輸入和結果輸出，且一條直線可以切割出兩個平面，只要有  $a$  和  $b$  就可以知道直線的



位置、走向（上升或下降）與陡峭程度」。這樣的認知，在今日 ICT 發達的世界尤其重要，換句話說，大部份的學生可能並不知道原來電腦中只要儲存係數  $a$  和  $b$  就可以判定輸入的  $x$  和  $y$  是否落在直線上。研究者相信，有不少師資生會認為電腦真的存了一個直線方程式在其中。

資通訊科技（information and communication technology, ICT）的進步讓虛擬教具的設計越來越普及，讓數學教學由多重表徵(multiple representation)達到動態表徵(dynamic representation)，又透過觸控載具的可操作性營造更互動學習情境。動態幾何軟體 Geogebra 就是適合用來發展數學動態表徵的免費軟體。

Geogebra（簡稱 GGB），是一個在 GPL 協議下發布的動態數學軟體，由 Markus Hohenwarter 於 2001 年在奧地利薩爾茨堡大學創建，GGB 由程式語言 Java 寫成，因此可以跨平台使用。GGB 的繪圖基本元素主要是幾何和代數元素，包括點、直線、線段、多邊形、向量、圓錐曲線和函數等。同時，GGB 提供許多互動、可操作的元件，讓設計者可以直接模擬真實情況，因此，很適合用來發展互動可操作之線上教材或是電腦化可操作之評量試題，例如：均一教育平台已經利用 GGB 設計電腦化可操作之評量試題，提供學生可以直接利用操作來解題，讓幾何思考能力較弱的學生可以藉由操作來作答，以降低其解題負荷。GGB 目前已經發展得相當成熟，然目前師資生接觸和使用 GGB 的機會比較少，本研究希望提供認識和使用 GGB 的機會，以瞭解他們對於這樣教材之態度，希冀未來他們成為正式教師時，有機會可以使用 GGB 來協助其學生學習。當然，也提供有興趣或是有意導入 GGB 進行教學教師之參考。

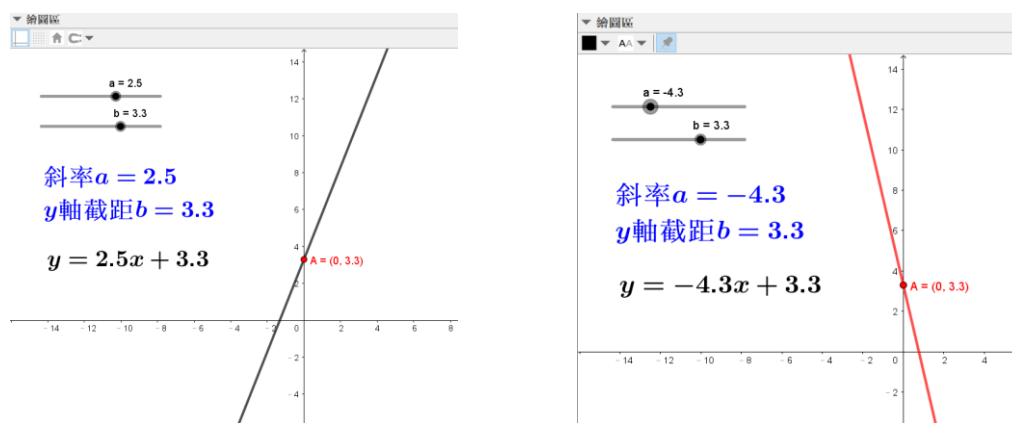


圖 1 直線方程式  $y = ax + b$  示例

綜合以上所述，本研究嘗試以動態幾何軟體 Geogebra 融入普通數學課程，設計對應課程之線上學習教材，讓一般只使用文字、圖形和符號表徵的數學物件，變成動態可

操作的數學物件，提供師資生建構數學知識的線上學習教材，再探究師資生對於 GGB 融入課程的態度。本研究之研究目的茲分述如下：

- 一、探究 Geogebra 融入普通數學教學教材的適切性。
- 二、分析師資生對於 Geogebra 融入普通數學學習的態度。

## 貳、文獻探討

### 一、動態數學軟體 Geogebra

動態數學軟體 Geogebra (<https://www.geogebra.org/>)，簡稱 GGB，是由 Markus Hohenwarter 於 2001 年在奧地利薩爾茨堡大學創建的一個免費軟體。GGB 由程式語言 Java 寫成，因此可以跨平台使用。GGB 繪圖的基本元素主要是幾何和代數元素，包括點、直線、線段、多邊形、向量、圓錐曲線和函數等。近年來，已有許多針對 GGB 運用在數學領域的研究產生(Arbain & Shukor, 2015; Fatahillah, Puspitasari, & Hussien, 2020; Korenova, 2017; Kusumah, Kustiawati, & Herman, 2020; Manganyana, van Putten, & Rauscher, 2020; Mthethwa, Bayaga, Bossé, & Williams, 2020; Olsson, 2019; Richardson & Koyunkaya, 2017; Övez & Kiyici, 2018)。另外，因為它有自己的程式語法 GeoGebraScript，提供許多可控制或是產生物件的指令函數，例如：內建 Circle(<Point>, <Radius Number>) 指令可以讓使用者直接輸入圓心 (<Point>) 和半徑 (<Radius Number>) 來做一個圓，當然也可以直接利用提供的工具利用滑鼠來拖曳產生。此外，GGB 也可以用網頁語言 JavaScript 進行進階設計所需之程式，讓使用者得以自由地使用、組合或設計屬於自己的數學物件。

GGB 很適合用來發展互動可操作之線上教材、虛擬教具或是可操作之評量試題，尤其是幾何試題往往需要學生使用大腦進行運思，對於幾何學習較慢的學生，通常成績較差，若能將紙筆測驗試題改為線上可操作的試題，相信可以提高學生解題表現。大家熟知的均一教育平台目前已有導入 GGB 設計部份試題，讓學生測驗時可以直接進行線上操作解題。GGB 的互動或可操作元件有數值滑桿、按鈕、勾選欄、輸入欄等，讓教師很容易設計互動式動態教學虛擬教具，因此 GGB 也適合發展在小學階段互動式教學媒體，或是考試時的精準作圖。重要的是，設計完成的 GGB 教具還內建播放鍵，讓數學動態表徵可以直接呈現。下圖 2 為例，研究者針對小學教材開發可引導學生藉由操作數值滑桿來產生不同等分割，以觀察分割數越多，則單位分數越小，以及等值分數的概念。近幾年，GGB 更可以順暢地在平板和手機使用 2D、3D 作圖和展示，讓學生可以

直接使用可攜式載具來學習。圖 3 是 GGB 的 3D 作圖和動態展示，不僅可以直接作出各類常見的 3D 圖形，在角錐、角柱、長方體、正立方體等可以直接產出展開圖，並進行點、線、面的塗色和計算。更重要的是，學生可以藉由數位載具上直接進行旋轉、平移等動作，減少學習的認知負荷 (cognitive load)。為了更容易傳播，只要註冊登入 Geogebra 網站 (<https://www.geogebra.org/?lang=zh-TW>) 並將設計元件上傳，即可讓他人藉由網路存取，也可以轉為網頁 html 格式，方便傳遞與他人使用。這些特質都有助於師資生提升 ICT 融入教學的素養。因此，本研究將利用 GGB 來研發對應之普通數學互動虛擬可操作教具，提供一個讓師資生瞭解 GGB，並於未來教學時有機會可以使用它來輔助教學。

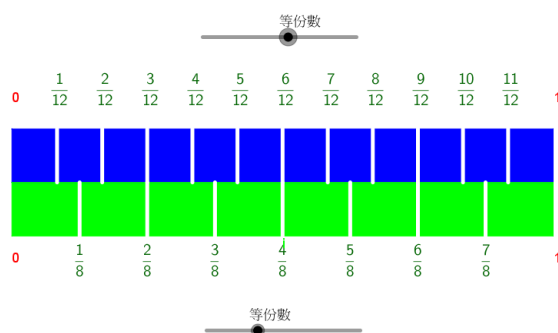


圖 2 Geogebra 動態表徵不同等份的分數概念

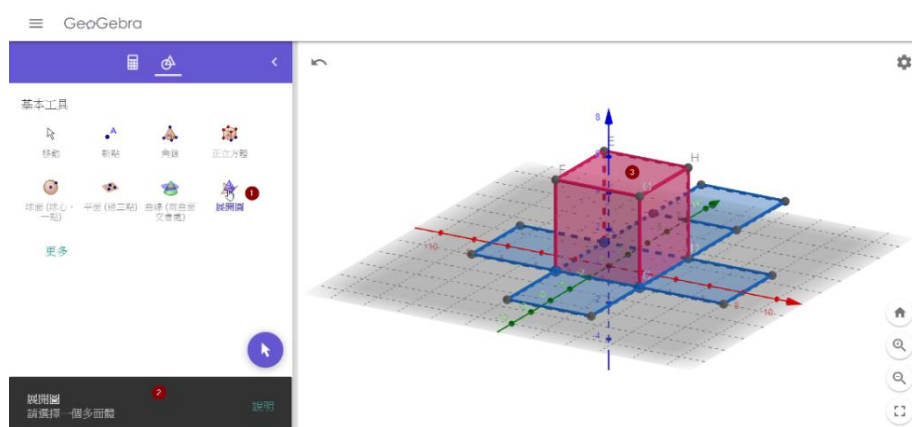


圖 3 在手機或平板上使用 Geogebra 動態表徵正立方體和其展開圖

## 二、多媒體學習理論

本研究將設計可互動之虛擬可操作 GGB 教具，設計時以多媒體學習理論原則進行虛擬教具之設計。在資訊發達的時代，多媒體的使用有助於學習，圖文並茂的教材可以

讓學習者學習得更好 Mayer (2001)。Paivio (1986) 提出雙碼理論 (dual coding theory, DCT), 假設人類訊息處理以視覺 (visual) 和語文 (verbal information) 兩個通道 (Clark & Paivio, 1991)。Mayer (2001) 根據 Paivio (1986) 所提出的雙通道理論、Baddeley (1992) 提出的工作記憶體理論和 Wittrock (1989) 的生成學習理論 (generative-learning theory), 以及自己所提出的選擇－組織－整合之主動學習理論提出多媒體學習認知理論 (cognitive theory of multimedia learning, CTML) 的三個基礎假設：

- (一) 人類可以藉由視覺與聽覺等雙通道接收訊息；
- (二) 在處理視覺與聽覺資訊時，所使用的記憶體容量都是有限的；
- (三) 在學習時，必須於視覺與聽覺雙通道中進行大量的認知處理。

透過以上的假設，近年來的研究提出不少多媒體設計原則，讓使用多媒體教學的教師有依據的準則，以製作良善的多媒體教材，2014 年出版之 *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning* 一書中整理出許多學者提出的多媒體學習原則，就已經高達 22 個原則 (*The Cambridge Handbook of Multimedia Learning, 2014*)，以下僅列出部分與本研究相關性較高之多媒體設計原則：

- (一) 多媒體原則 (multimedia principle)：使用圖文並茂的多媒體教材的學習效果會比單獨使用文字學習的效果更佳。
- (二) 空間接近原則 (spatial contiguity principle)：設計多媒體教材時，相關的文字與圖形需靠近，可增加交互參照機會，降低認知負荷，產生較佳的學習效果。
- (三) 時間接近原則 (temporal contiguity principle)：相關之文字、圖例和語音呈現的時間愈近，愈能幫助學習者建立其彼此之間交互參照，提升學習效率。
- (四) 切割原則 (segmentation principle)：將教材內容切割為若干片段，進行訊息適度呈現，可讓學習者更有效的使用和分配認知資源。
- (五) 訊號原則 (signaling principle)：設計多媒體教材時，可利用文字顏色、彈出說明等輔助信號，可提升學習者對課程內容的理解。
- (六) 引導發現原則 (guided-discovery principle)：以發現為基礎的多媒體學習環境中，若有適當的引導可提升學習效果。
- (七) 精緻範例原則 (worked-out example principle)：在學習新技能時，提供學習者好的範例作為學習樣版，可以獲致較佳學習效果。

### 三、數學表徵

表徵 (representation) 是一種能夠外顯個人內在認知的工具或象徵，或是為外顯某

些明確實體或資訊類型的形式系統，同時能夠提供該系統如何運作的詳細資訊 (Marr, 2010)。Bruner (1966) 由運思觀點提出動作 (enactive)、圖像 (iconic)、符號 (symbolic) 三種表徵系統，三種表徵系統的相互作用是認知發展與成長的核心，其中動作表徵指稱兒童運思時需借由操弄具體物的實際活動來達成；圖像表徵是兒童能夠依據腦中實物的影像，亦即心像 (mental image)，進行內在的運思活動；符號表徵是兒童能以數學符號進行抽象的數學活動運思。

Lesh, Post & Behr (1987) 認為表徵是指建模 (modeling) 時所使用的工具，由溝通觀點並提出數學學習五類數學表徵：語言 (spoken language)、符號 (written symbol)、圖形 (static picture)、具體物 (real scripts) 與教具模型 (manipulative models)，如下圖 4 所示。Lesh 等人指出當學生能夠將相同數概念在五個表徵間進行轉譯 (translation)，表示學生已經具備該數概念。因此，若學生的數概念尚未精熟，在不同表徵轉譯時容易出現錯誤，可以診斷學生盲點所在。數學表徵提供學習者有效的解題工具，可以幫助孩子達成數學知識的理解、和他人溝通以及推理的目的 (Greeno & Roger, 1997)。NTCM (2000) 年數學課程原則與標準 (principles of standards) 提到，表徵是數學學習過程中很重要的一部分，是理解與應用數學的基礎，它可以支持兒童瞭解數學概念與關係，與自己或別人溝通數學觀念，協助瞭解數學概念之間的關係，以及協助解決生活中的數學問題。動態表徵 (dynamic representation) 是隨時間變化之數學物件的視覺描述 (Roschelle, 2018)，在 ICT 蓬勃發展的時代，利用動態數學軟體來展示動態表徵，讓虛擬可操作的數學物件可以被存取、操作和記錄，對於數學知識的增進，確有其效益 (Mudaly & Uddin, 2016; Mukamba & Makamure, 2020; Roschelle, 2018)。

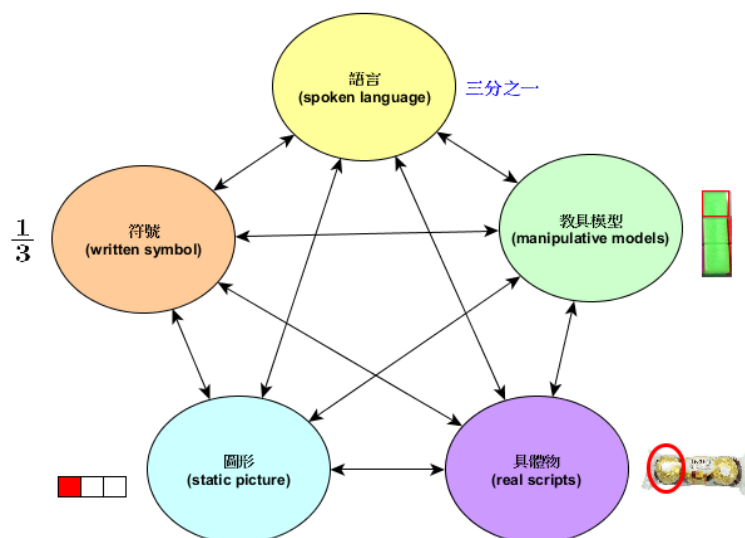


圖 4 數學表徵關係圖 資料來源：修改自 Representations and Translations among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving by Lesh, R., Post, T., & Behr, M., 1987, *Problems of Representations in the Teaching and Learning of Mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

## 參、研究方法

### 一、參與者

本研究參與者為修習普通數學科目的師資生，有效樣本計 103 件，其基礎資料如表 1 所示。

表 1

接受問卷調查者基本資料分析表

類別	項目	人數	百分比
性別	男	41	39.8%
	女	62	60.2%
學歷	大學部	72	69.9%
	碩士班	31	30.1%
學院	非理學院	66	64.1%
	理學院	37	35.9%

### 二、研究工具

#### (一) GGB 普通數學動態表徵線上學習教材

本研究由研究者設計直線方程式和一元二次函數兩個線上教材，提供師資生輔助其學習，礙於篇幅限制，本處僅提供直線方程式數學概念設計說明。

#### 1. 直線方程式數學概念

##### (1) 斜率

斜率是用來描述一條直線方程式陡峭程度的特徵，通常以  $m$  表示，且其值唯一。斜率的數概念是用來描述一條直線每水平位移 1 單位，上升或下降的鉛直位移量，若假設直線  $L$  上任兩點為  $A(x_1, y_1)$  到  $B(x_2, y_2)$ ，則：

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ 其中 } x_1 \neq x_2$$

由上式可以發現：

- A. 若  $x_1 = x_2$ ，直線  $L$  為一條鉛直線，斜率沒有定義，且其實它的傾斜程度已知，因此不定義它的傾斜程度。
- B. 若  $y_1 = y_2$ ，斜率  $m = 0$ ，直線  $L$  是水平線。
- C. 若  $x_1 \neq x_2$ ，且  $y_1 \neq y_2$ ，由下方圖 5 左圖發現當直線是左下到右上的上升直線，其斜率  $m > 0$ ，下方圖 5 右圖發現當直線是左上到右下的下降直線，其斜率  $m < 0$ 。

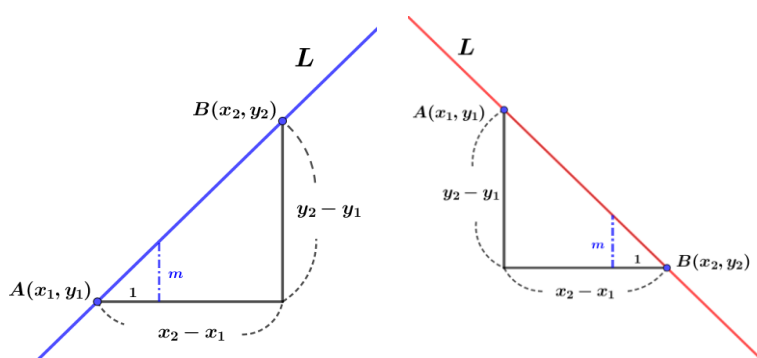


圖 5 直線方程式斜率示意圖

- D. 斜率  $m$  並不會因為選取的點不同而改變。
- E. 當  $|m|$  值越大，表示分子和分母的比值越大，表示上升或是下降的速度越快，直線也就越陡峭。

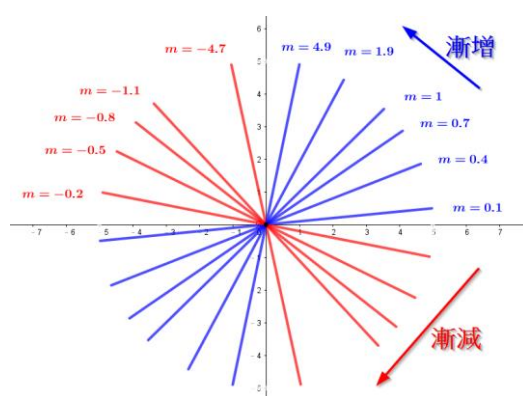


圖 6 直線斜率變化示意圖

## (2) 直線方程式

斜截式是當斜率  $m$  和其對  $y$  軸之截距  $b$  已知時，直線方程式即為  $y = mx + b$ 。



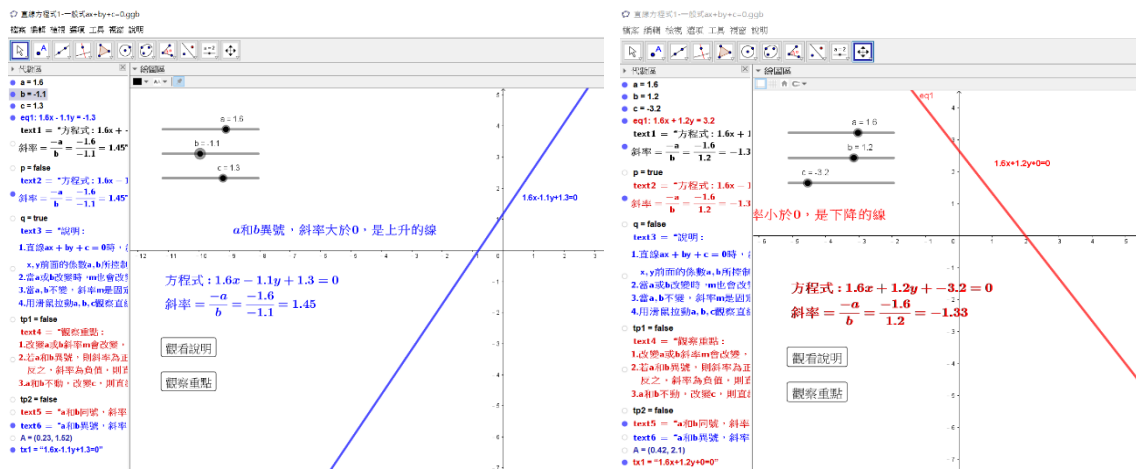
對直角坐標平面的任一直線  $L$  而言，經整理後都可以化成一個二元一次方程式  $ax + by + c = 0$  的形式，我們稱此形式為直線的一般式，其中  $a, b, c$  為實數，且  $a, b$  不全為 0。由一般式可知：

- A. 若  $a = 0$ ，則  $y = -\frac{c}{b}$ ，圖形為水平線（斜率為 0）。
- B. 若  $b = 0$ ，則  $x = -\frac{c}{a}$ ，圖形為鉛直線（斜率無）。
- C. 若  $a \neq 0, b \neq 0$ ，方程式可化成  $y = -\frac{a}{b}x + (-\frac{c}{b})$ ，（由斜截式知  $m = -\frac{a}{b}$ ）

## 2. 融入多媒體學習原則之直線方程式 GGB 設計

下圖為 GGB 之直線方程一般式  $ax + by + c = 0$  設計，學習者可以藉由操作係數  $a$ 、 $b$  和  $c$  的值來觀察直線的變化。從一般式中可知斜率  $m$  受係數  $a, b$  影響，操作  $a$  或  $b$  會改變直線的走向，且若  $a$  和  $b$  同號，則斜率為負，反之，若是異號，則斜率為正。單獨操作  $c$  時，表示斜率固定，則會讓直線進行平移。 $a$ 、 $b$  和  $c$  的值採用數值滑桿設計，讓學生可以操作改變其數值來觀察圖形的變化。另外，互動按鈕「隱藏（或顯示）說明」、「隱藏（或顯示）觀察重點」可以讓學生一邊觀察一邊學習重點，並與提供的重點進行交互參照。

本 GGB 線上學習教材設計時融入多媒體學習理論的「多媒體原則（圖文並茂）」和「訊號原則（使用不同的顏色來區隔直線是）」、「引導發現原則（提供適度的學習重點）」、「時間接近原則（圖文呈現的時間靠近增加交互參照機會）」和「空間接近原則（圖文靠近增加交互參照機會）」等，並使用按鈕（觀看／隱藏說明；觀看／隱藏重點）讓學生可以進行互動控制是否顯示操作說明或是觀察的重點，滑桿  $a, b$  和  $c$  更提供可互動操作的元件，有利於學生自行觀察、探究和理解數概念。另外，這些互動是控制除了可供操作和探究數概念之外，還可讓有限的畫面，呈現適量的訊息。



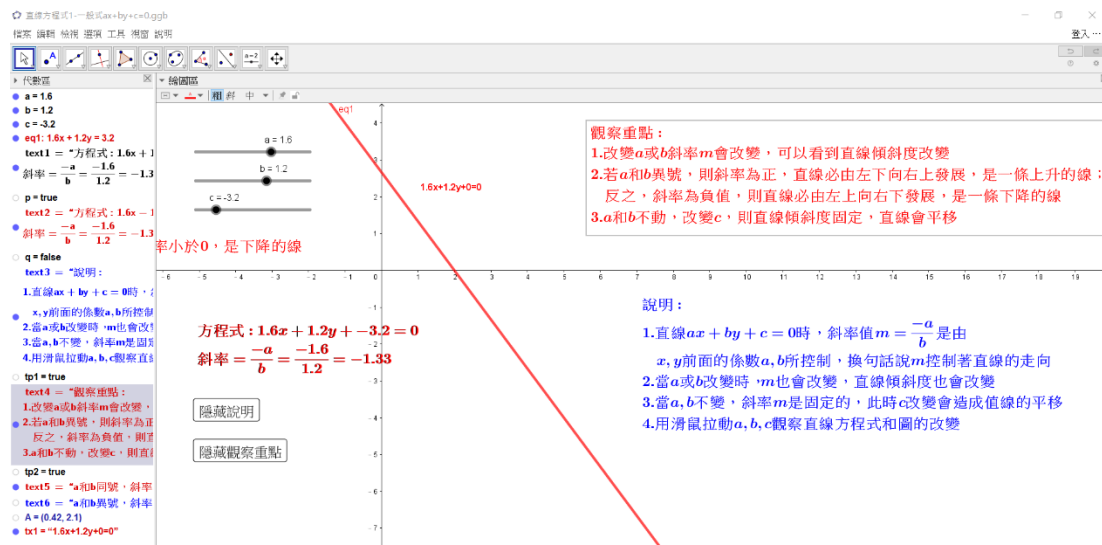


圖 7 直線方程一般式  $ax + by + c = 0$  之 GGB 設計

## (二) 問卷設計

本研究目的旨在探討師資生對 GGB 融入普通數學教學之概念與態度，研究透過文獻整理歸納，並參考 Bu, L., Mumba, F., Henson, H., & Wright, M. (2013) 對 K-8 教師對 GGB 在教師專業發展問卷，Shadaan 和 Leong (2013) 學生利用 GGB 學習圓形概念，以及 Moersch (1995)、Wang & Li (2000) 之資訊科技融入教學內涵等文獻，再自行歸納出符合資訊科技融入數學教學之問卷。待擬定問卷初稿後，邀請國內相關領域專家，針對問卷題目內容進行審查並提供建議，以確立此問卷的構念與專家效度，經由檢視題項描述的合理性後，將直接用於問卷調查。

本問卷調查表分兩部份，第一部份為參與者基本資料部份，內容包括性別、學院、學系、學歷和年級等，第二部份為題目共有 20 題，分為六個面向；「數學態度與能力」、「學生電腦能力」、「GGB 的操作問題」、「GGB 概念呈現的想法」、「GGB 對學習的幫助」與「使用 GGB 於未來教學來輔助學生學習」，詳如表 2。本研究題目採 Likert 五點量表形式作答；由填答者對題目所述情形之看法，在「非常同意」、「同意」、「無意見」、「不同意」、「非常不同意」五項中進行圈選，其記分方式依同意程度由低至高，分別給予 1、2、3、4、5 分。

## (三) 資料蒐集與分析

本研究問卷擬定後，其實施方式是學生在學習課堂講述的數概念後，研究者於課堂上敘述互動元件的操作，請學生課後自行藉由網路進行 GGB 線上教學教材操作後，請

願意協助填寫問卷的同學進行問卷填寫。資料蒐集完成後，進行作答回饋編碼，並以 IBM SPSS Statistics 20 進行分析。

## 肆、研究結果與討論

本研究之效度採專家效度，邀請相關教育領域學者專家，由二位國立大學的教育領域教授與一位在教育界服務之實務專家，協助檢查問卷的內容與格式，針對主題的適切性、內容編排格式等進行審核與修正，評估是否恰當並修改與調整問卷內容，本研究依據專家學者所提供之修正意見加以整理，確立問卷之專家效度。

本研究量表以 Cronbach's  $\alpha$  作為本量表之內部一致性信度分析，經分析後整體問卷 Cronbach's 信度係數達 .942，抽掉各題後信度值 0.936 到 0.946 之間（表 2）。顯示本研究之研究問卷具有良好的內部一致性信度。

表 2

接受問卷調查者基本資料分析表

向度	題目	平均數	標準差	抽掉該題 Cronbach's $\alpha$
學生數學態度 與能力	我喜歡數學	3.40	1.032	.941
	我覺得我的數學能力不錯	2.92	1.152	.942
	我覺得普通數學很容易	2.61	1.078	.942
	學習數學幾何或代數時我自己 能夠建構相關的圖形概念	3.17	.944	.940
	學習數學幾何或代數時我自己 能夠建構相關的動態圖形概念	3.04	.939	.941
學生電腦能力	我覺得我的電腦操作能力還不 錯	3.02	.863	.946
	我曾經接觸過輔助數學學習的 軟體	3.21	1.135	.943
	我希望課堂可以學到輔助數學 學習的軟體	3.70	.802	.940

表 2 (續)

GGB 操作	我覺得操作 GGB 軟體對我來說 不困難	3.27	.910	.938
	GGB 可以讓學習者喜歡自我操 作的設計	3.60	.856	.936
GGB 概念呈現	GGB 的設計可以引起我的學習 興趣	3.54	.789	.938
	GGB 輔助數學學習讓數學學習 變得比較有趣	3.75	.837	.937
	GGB 是提供我更了解數學教材 的軟體	3.65	.848	.937
	GGB 可以更具體呈現代數或幾 何的內容	3.83	.876	.937
GGB 對學習的 幫助	GGB 能夠增加相關數學概念學 習的圖形意義	3.89	.839	.937
	GGB 能夠強化數學圖形和符號 之間的連結，減輕學習負荷	3.82	.849	.937
	使用 GGB 輔助數學學習後增加 我對數學符號和圖形的不同看 法	3.63	.816	.938
GGB 對未來學 習和教學的使 用	未來有機會我想用 GGB 的設計 幫助我解決數學問題	3.72	.868	.937
	未來有機會我想用 GGB 的設計 來幫助我的學生學習	3.79	.946	.936
	未來有機會我想學習 GGB 軟體 的使用和設計	3.74	.939	.936

為更瞭解學生各題表現，下圖 8 是學生各題平均分數表現。由圖中可以發現：(1) 師資生對於自我數學能力（第 1 到第 5 題）尚可接受，但對於普通數學科目的信心稍嫌

不足。有趣的是，學生在第一題的回答卻顯示他們還蠻喜歡數學的，但是自我信心稍嫌不足；(2) 由學生第 6 到第 8 題回饋發現，學生曾操作或接觸過數學軟體，且希望能在課堂上學習輔助數學學習的軟體；(3) 學生覺得 (第 9 到第 10 題) 對於研究者設計的 GGB 互動學習元件並不難，且喜歡操作去學習數概念的設計；(4) 學生 (第 10 到第 14 題) 覺得本研究設計的 GGB 教學元件的操作和使用，可以讓學習者更容易瞭解數學概念；(5) 由第 15 到第 17 題的反應顯示本研究之設計學生可以減低認知負荷，呈現更具體概念，有助形成相關數概念心像；(6) 最後，學生對於使用 GGB 於未來教學來輔助學生學習都抱著正向的態度，自己也願意學習 GGB 的操作與設計。

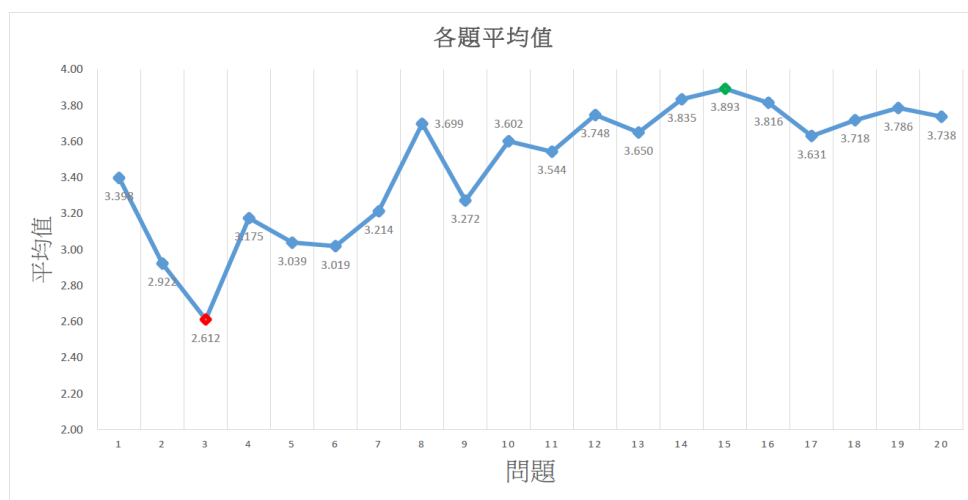


圖 8 GGB 輔助學生普通數學學習問卷各題平均

利用電腦軟體進行教學設計時，因為呈現版面範圍的限制需要考量的比較多，因此，本研究利用軟體本身動態表徵能力，以及多媒體學習理論設計原則融入 GGB 的互動、可操作教材設計，為確定其適切性，針對「GGB 的操作」、「GGB 概念呈現的想法」、「GGB 對學習的幫助」與「使用 GGB 於未來教學來輔助學生學習」等面向進行單樣本平均數  $t$  考驗，檢定值設定為 3，以瞭解學生在這幾個向度上的表現。經過分析各向度之  $p < .001$ ，達  $\alpha = .001$  之水準。由此可知，本研究所呈現的 GGB 教材設計對於師資生在使用上、在 GGB 概念呈現上和對其學習的幫助上顯示本研究設計是適切的，是適合學習的教材。

表 3

GGB 相關面向 t 考驗分析摘要表 (n = 103, 檢定值= 3)

面向	平均數	標準差	t 值 (p 值)
GGB 的操作	3.437	.825	5.378***
GGB 概念呈現	3.694	.756	9.323***
GGB 對學習的幫助	3.760	.785	9.785***
GGB 對未來學習和教學的使用	3.748	.865	8.771***

\*\*\* p &lt; .001

## 伍、結論與建議

教育部認為我國師生在數位學習的應用素養仍有待提升，已要求師資培育大學把資通訊科技 (ICT) 融入師培課程，讓修習師資培育職前教育課程的學生可以進行修習 (馮靖惠，2019)。Google 電腦科學教育策略主管 Chris Stephenson 對於在學校中有效推行電腦科學教育時表示「學校教育首重訓練有素的老師，能夠讓參與課程的學生受到啟發，並積極學習相關技能。再者，也要確認老師和學生都能使用可支援電腦科學教學的工具」 (<https://edu.google.com/intl/zh-TW/latest-news/future-of-the-classroom/>)。因此，讓師資生在接受師資培育的過程瞭解手機、平板、網路、擴充實境和虛擬實境等資通訊科技「該如何融入教學？」、「優、缺點為何？」、「需要的環境和設備為何？」…等問題，是基礎且重要，因此 GGB 是一個很好入門來認識 ICT 導入數學教學的軟體。

Bialik & Fadel (2018) 認為中、小學學習特別側重於在知識和能力方面為所有未來學習奠定基礎，而 K-12 課程為學生學習奠定基礎的最大困難之一就是如何將所知的知識設計成適合其認知程度課程供其學習。NTCM (2000) 在科技原則中特別提及動態數學的重要性，GGB 是一個很容易使用與設計的動態幾何之軟體免費工具。本研究融入多媒體學習理論之原則於 GGB 教學元件設計，希望可讓學習者在操作和探究數概念的過程中可以聚焦、發現和歸納數概念，並在動態表徵的過程中營造數概念的心像，而師資生的反應也顯示所設計的 GGB 教材設計在使用上、在 GGB 概念呈現上和對其學習的幫助等方面顯示本研究設計是適切的，且這樣的學習元件能夠幫助師資生數學學習。另外，他們未來使用 GGB 教學的意願相當高，有這些基礎，研究者未來進行教學時，將

進行更多 GGB 相關的介紹與教學。

使用軟體輔助數學學習是需要經過設計的，因此本研究融入多媒體學習理論、GGB 互動、可操作元件來設計教材，考慮數位載具能夠展現的畫面有限，因此教學元件展示時必須進行適度處理，不能一次呈現太多才能聚焦學習，因此必須善用 GGB 所提供的互動元件，讓使用者可以操作決定呈現的學習元素和內容。目前，因為師資生學程並未有機會學習像 GGB 這樣的軟體和設計來輔助其未來教學，因此，本研究希望提供一個讓師資生接觸和使用 GGB 的經驗，也希望這些未來教師有機會可以嘗試去使用或是利用網路上 GGB 相關資源來協助教學，提供他們的學生一個使用科技學習和探究數學的機會。當然，也提供有興趣或是有意導入 GGB 於教學之教師對 GGB 學習教材設計之參考。

## 參考文獻

教育部 (2013)。教育部人才培育白皮書。取自

<https://ws.moe.edu.tw/001/Upload/3/RelFile/6315/6919/教育部人才培育白皮書.pdf>

馮靖惠 (2019)。數位學習素養不足 教部要求師培大學把 ICT 融入課程。聯合新聞網。

取自 <https://udn.com/news/story/6885/4116434>

羅良慧 (2018)。從未來關鍵能力培養淺談資通訊科技融入教學的影響。取自

<https://portal.stpi.narl.org.tw/index/article/10444>

Arbain, N., & Shukor, N. A. (2015, 01/27/January 2015). The Effects of GeoGebra on Students Achievement. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 172, 208-214. doi: 10.1016/j.sbspro.2015.01.356

Baddeley, A. D. (1992). Working memory. *Science*, 255, 556-559. doi: 10.1126/science.1736359

Bialik, M., Fadel, C., & Center for Curriculum Redesign. (2018). *Knowledge for the age of artificial intelligence : what should students learn?*

Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Cambridge, MA: Harvard University.

Bu, L., Mumba, F., Henson, H., & Wright, M. (2013). GeoGebra in Professional Development: The Experience of Rural Inservice Elementary School (K-8)Teachers. *Mevlana International Journal of Education*, 3(3), 64-76. doi: 10.13054/mije.si.2013.07



- Clark, J. M., & Paivio, A. (1991). Dual Coding Theory and Education. *Educational Psychology Review*, 3(3). doi: 10.1007/BF01320076
- Fatahillah, A., Puspitasari, I. D., & Hussen, S. (2020). The development of Schoology web-based learning media with GeoGebra to improve the ICT literacy on quadratic functions. *Journal of Research and Advances in Mathematics Education*, 5(3), 304-316. <https://doi.org/10.23917/jramathedu.v5i3.10692>
- Fraillon, J., Ainley, J., Schulz, W., Friedman, T., & Gebhardt, E. (2014). *Preparing for Life in a Digital Age: the IEA International Computer and Information Literacy Study International Report*. Retrieved from <https://www.springer.com/gp/book/9783319142210>
- Greeno, J. G., & Roger, B. H. (1997). Practicing Representation: Learning with and about Representational Forms. *Phi Delta Kappan*, 78(5), 361-367.
- Korenova, L. (2017). GeoGebra in Teaching of Primary School Mathematics. *International Journal of Technology in Mathematics Education*, 24(3), 155-160.
- Kusumah, Y. S., Kustiawati, D., & Herman, T. (2020). The Effect of GeoGebra in Three-Dimensional Geometry Learning on Students' Mathematical Communication Ability. *International Journal of Instruction*, 13(2), 895-908. doi: 10.29333/iji.2020.13260a
- Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and Translations among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving *Problems of Representations in the Teaching and Learning of Mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Manganyana, C., van Putten, S., & Rauscher, W. (2020). The Use of GeoGebra in Disadvantaged Rural Geometry Classrooms. *International Journal of Emerging Technologies in Learning(iJET)*, 15(14), 97-108. doi: 10.3991/ijet.v15i14.13739
- Marr, D. (2010). *Vision: A Computational Investigation into the Human Representation and Processing of Visual Information*: The MIT Press.
- Mayer, R. E. (2001). *Introduction to Multimedia Learning*. New York: Cambridge University Press.
- Mayer, R. E. (Ed.). (2014). *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning*. Cambridge

- University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139547369>
- Moersch, C. (1995). Levels of technology implementation: A framework for measuring classroom technology use. *Learning and Leading with Technology*, 23(2), 40-42.
- Moyer-Packenham, P. S., & Bolyard, J. J. (2016). Revisiting the Definition of a Virtual Manipulative. In P. S. Moyer-Packenham (Ed.), *International Perspectives on Teaching and Learning Mathematics with Virtual Manipulatives* (pp. 3-23). Springer Link. doi: 10.1007/978-3-319-32718-1\_1
- Mthethwa, M., Bayaga, A., Bossé, M. J., & Williams, D. (2020). Geogebra for Learning and Teaching: A Parallel Investigation. *South African Journal of Education*, 40(2). doi: 10.15700/saje.v40n2a1669
- Mudaly, V., & Uddin, R. S. (2016). Technology in Mathematics: Use of GeoGebra applets. *International Scientific Researches Journal*, 72(9), 190-212. doi: 10.21506/j.ponte.2016.9.14
- Mukamba, E., & Makamure, C. (2020). Integration of GeoGebra in Teaching and Learning Geometric Transformations at Ordinary Level in Zimbabwe. *Contemporary Mathematics and Science Education*, 1(1), Article ep20001. <https://doi.org/10.30935/conmaths/8431>
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *The principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Olsson, J. (2019). Relations between task design and students' utilization of GeoGebra. *Digital experiences in mathematics education*, 5, 223-251. <https://doi.org/10.1007/s40751-019-00051-6>
- Övez, F. T. D., & Kiyici, O. D. (2018). 6th Grade Students' Views about Mathematical Teaching Based on Technology Integration. *World Journal of Education*, 8, 160-171. doi: 10.5430/wje.v8n5p160
- Paivio, A. (1986). *Mental representations: A dual coding approach*. Oxford: Oxford University Press.
- Richardson, S. E., & Koyunkaya, M. Y. (2017). Fostering Students' Development of the Concept of Angles Using Technology. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 22(1), 13-20.
- Roschelle, J. (2018). Dynamic representations in Mathematics Learning Part 1: It's about time.

- 3-STAR Learning Experiences and Evidence-informed Blog for Learning Professionals*.  
<https://3starlearningexperiences.wordpress.com/2018/10/30/dynamic-representations-in-mathematics-learning-part-1-its-about-time/>
- Shadaan, P., & Leong, K. E. (2013). Effectiveness of Using Geogebra on Students' Understanding in Learning Circles. *The Malaysian Online Journal of Educational Technology*, 1(4), 1-11.
- Teo, T., & van Schaik, P. (2012). Understanding the Intention to Use Technology by Preservice Teachers: An Empirical Test of Competing Theoretical Models. *International Journal of Human - Computer Interaction*, 28(3), 178-188.  
<https://doi.org/10.1080/10447318.2011.581892>
- Voogt, Erstad, O., Dede, C., & Mishra, P. (2013). Challenges to learning and schooling in the digital networked world of the 21st century. *Journal of Computer Assisted Learning*, 29(5), 403-413. <https://doi.org/10.1111/jcal.12029>
- Voogt, & Roblin, N. P. (2012). A Comparative Analysis of International Frameworks for 21st Century Competences: Implications for National Curriculum Policies. *Journal of Curriculum Studies*, 44(3), 299-321. doi: 10.1080/00220272.2012.668938
- Wittrock, M. C. (1989). Generative processes of comprehension. *Educational Psychologist*, 24(2), 345-376. doi: 10.1207/s15326985ep2404\_2
- Wang, C. S. & Li, C. C. (2000). An assessment framework for information technology integrated instruction. Paper presented at ICCE (International Conference on Computers in Education)/ICCAI (International Conference on Computers-Assisted Instruction) 2000. Taipei, Taiwan.

陳茗茵、張僑平 (2021)。

數學繪本教學對一年級小學生數學學習的影響：一項探索性研究。

臺灣數學教師，42 (2)，31-55

doi: 10.6610/TJMT.202110\_42(2).0003

# 數學繪本教學對一年級小學生數學學習的 影響：一項探索性研究

陳茗茵<sup>1</sup> 張僑平<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 筲箕灣官立小學

<sup>2</sup> 香港教育大學數學與資訊科技學系

數學繪本包含故事情節和數學知識，有助於將數學概念與生活情境融合起來。本研究旨在探索利用數學繪本進行課堂教學對低年級小學生數學學習的影響。研究對象是 73 名香港某官立小學一年級學生。透過問卷調查、課堂觀察以及學生訪談，研究發現數學繪本教學能提高一年級學生對數學概念的掌握程度，提升學生課堂專注力，還能夠提升學生的數學學習興趣，讓學生對數學課堂有所期待。研究也指出，實施有效的繪本教學需要考慮繪本內容的選擇、教師對繪本內容的剪裁和設計。

**關鍵詞：**低年級小學生、數學學習、數學學習興趣、數學繪本

---

通訊作者：張僑平，e-mail：[zqiaoping@eduhk.hk](mailto:zqiaoping@eduhk.hk)

收稿：2021 年 6 月 14 日；接受刊登：2021 年 7 月 13 日。

## 壹、前言

### 一、研究背景和動機

協助小學生順利從幼稚園過渡到小學階段的學習，一直是小學教師十分關注的議題。幼稚園的學習和小學學習既有聯繫，又有區別。香港的幼稚園教學以主題式學習為主，學生在同一主題下，打破學習範疇的界限，把相關的內容與生活連結起來（課程發展議會，2017a）。然而，學生升至小學，學習方式便會轉變成分科教學為主的學習架構（如分成英文科、數學科、中文科、常識科等），對幼童來說其實是一個全新的學習模式。另一方面，現實中不少幼稚園在 K3 階段已經滲入一些小一階段的數學學科知識，當幼童升至小學後，常遇到重複學習的情況，乃至對數學產生抗拒。因此，不少小學教師往往想辦法做好幼小銜接，讓小一學生能儘快適應小學的學習模式。以過往不少學校的做法為例，一些科目（如中文或英文科）會接受不同的大專院校的到校支援，開發校本的銜接課程，惟內容仍是較著重語文基礎知識，故事性或生活性的引入較少，小一學生未必能完全投入課堂學習。重視學生已有學系體驗和學生特點的課程或教學銜接仍然是教師面臨的難題。特別自 2019/2020 學年以來，受社會事件及新冠疫情影響，香港學生的學習嚴重受到學校停課影響。在 2020 年 9 月入學的小一學生，基本上在上一個學年只體驗了不足半年的幼稚園生活。換言之，要適應小學的課堂學習，不論是在課堂上應守的規則，抑或是專注力的培養都因此而大打折扣。除了加強課堂規則的指導外，合宜的教學策略相當重要。

香港課程發展議會（2017a）提出，幼小銜接的教學策略應以遊戲和活動形式進行，當中以講故事為例子，建議小學教師配合小一學生的學習特徵以幫助幼兒了解學習內容（頁 72）。引入故事內容於教學設計當中涉及到學生對文本的閱讀，而香港的小一學生在幼稚園階段大多都有一定的閱讀體驗。在學校教學中，借助故事閱讀來協助低年級小學生（主要是一、二年級的小學生）學習數學或是加強幼小銜接的一條可行途徑。事實上，不少針對數學繪本的研究也指出，在教室中與兒童共讀數學繪本故事，有助於提高幼兒的數學學習興趣、避免產生數學焦慮、幫助學習數學詞彙和數學概念以及促進數學交談，進而提升幼兒的數學能力（黃馨慧，2020，頁 28）。

第一位作者自 2005 年起主要在高小階段為五、六年級的學生推廣數學閱讀活動，以推薦數學圖書閱讀和閱讀分享為主（張僑平、陳茗茵，2017）。經過多年在學校的實踐，從學生的數學故事分享和閱讀報告表現中，我們看到，數學閱讀不但能增進學生對數學的認識，對於原本怕數學的學生，將故事與數學結合後，讓他們覺得數學並不枯燥

可怕，甚至重新拾回學習數學的興趣（陳茗茵、莊春霞，2019）。不過，對於如何利用和發揮繪本的優勢，在課堂教學層面促進學生的學習，這樣的討論在小學教育中還不多，只有少許的教學實踐案例（鄧佩玉，2015；楊詠盈、張淑冰、張僑平，2017）。當前，新近修訂的香港數學課程鼓勵學生閱讀與數學相關的書籍，推動在閱讀中學習數學（Reading in mathematics）（課程發展議會，2017b）。考慮到幼小銜接的重要性，在小學階段如何進行數學繪本閱讀和教學實踐還值得我們進行更多的探索。我們從 2018 年起開始在數學課堂中針對個別課題引入繪本教學，檢視對學生學習的成效。本研究介紹的教學亦是其中一次嘗試。基於已有的數學繪本書籍，我們設計了貼近學校數學課程的繪本教學，教師以故事講授的形式，把數學概念與學生的生活關聯，帶領學生從閱讀中學習數學，探討數學繪本教學對小學低年級學生數學學習的影響。具體來說，在本研究中探討的是繪本教學一年級學生在數學學習興趣及數學概念理解的學習成效，相關的研究問題包括：（一）檢視繪數學本教學對一年級學生數學概念理解的成效為何？（二）利用數學繪本對小學一年級「單數和雙數」的學習單元進行教學，能否有助於提升學生的學習興趣？以及（三）數學繪本教學在實施中的遇到的困難和挑戰為何？下面我們首先介紹數學繪本教學的相關背景，對研究問題的研究設計在第三部分再詳細介紹，之後是對研究結果的分析和討論，並為今後進行繪本教學和研究提出了一些建議。

## 貳、文獻探討

### 一、繪本和數學閱讀

兒童大都愛聽故事，繪本作為兒童文學的一種，深受小朋友的喜愛。依據其圖畫和文字的搭配比例不同，繪本有時也稱為圖畫書（picture book）或者故事書（story book）。一般來講，繪本都有簡單的文字、鮮明的圖畫、豐富且便於討論的場景，而且也包含兒童易於感受到的學習經驗，在幼稚園也常作為教師教學和學生主要的閱讀學習材料。人類閱讀文學作品已有很長的歷史，對兒童閱讀的研究也不勝枚舉，大多為涉及兒童閱讀能力和語言學習方面。相比來說，跟數學學科有關聯的兒童數學繪本閱讀，起步並不算早。在上個世紀 90 年代，與數學有關的兒童文學作品才逐漸開始出現。主要的起因是美國一些研究者發現，美國學生在學校的數學課程學習中能掌握一些數學的基本運算，但是當他們面對文字題時困難很大，而且問題解決能力也不強。另外，隨著年級的升高，不少學生對數學和數學學習的態度越來越趨向負面，以致於學生離開學校後，哪怕學到

了一些數學技巧，但是解難能力並不強，而且對數學還沒什麼好感 (Whitin, 1992)。這顯然不是學校數學教育期望有的結果。及後，美國 National Council for Teachers of Mathematics [NCTM] (1989) 出版了《學校數學課程和評價標準》，明確提出學生要「學會認識數學的價值，建立有能力做數學的信心，具備數學問題解決的能力，學會數學地交流和學會數學地推理。」(頁 5-6)。然而，兒童只有在瞭解數學及有信心去瞭解數學時，才會成為自信的數學學習者 (Trafton & Claus, 1994, p. 21)。在這樣的背景之下，數學閱讀開始受到數學教師和教育研究者的重視，同時也湧現出不少有關數學閱讀的書籍，數學繪本作為數學閱讀作品的一種，也引發了不少的教學研究，比如討論如何透過兒童文學作品教數學，以及如何利用數學繪本閱讀提升學生的數學學習成效 (Hong, 1996; Schiro, 1997; Thiessen, Matthias & Smith, 1992; Thiessen, 2004; Whitin D. & Whitin, P. 2004; Ward, 2005)。

## 二、數學繪本的種類

將數學學科知識和兒童文學作品 (如繪本) 結合起來，會結出怎樣的果實呢？數學繪本有簡單的文字和鮮明的圖畫，也有豐富且便於討論的場景、熟悉且易於感受的生活經驗。廣義地講，數學繪本可以是任何能幫助學生進行數學對話和交流的一種文學作品 (Nesmith & Cooper, 2010, p. 280)，並非以數學概念或知識作為主軸編撰而成，但其內容可提供教師用來進行數學教學或啟發學生數學學習；狹義來說，數學繪本則是以數學概念或知識為主軸來編撰圖書的內容。袁媛 (2008) 依據數學繪本中內容呈現方式與數學知識的關聯性，將台灣使用的數學繪本圖書劃分為三大類：(1) 將數學概念融入於故事情境中的圖畫故事書；(2) 故事情境不明顯，但故事書的內容很清楚地表現數學的內容；(3) 有故事情節，但數學概念不明顯地呈現或全文並沒有任何明顯的數學概念呈現。對於這類圖書，主要是數學在實際生活中應用，需要老師利用這本書的故事情節，設計與數學相關的學習活動。依據繪本內數學知識內容的呈現特點，第一和第二類數學繪本圖書也可被認為是外顯的繪本，數學內容很明顯的呈現出來；而第三類屬於內隱的數學繪本，讀者需要從故事的鋪陳中引出數學概念 (陳埤淑, 2020, 頁 5-6)。因為中文為絕大多數香港小學數學科的教學語言，在本研究中我們選擇合適的中文數學繪本為主，而內、外隱藏的數學概念需結合學校課程的要求和科任老師的意見，在研究設計中再介紹。在香港的學校和校外市場上，中文繪本 (包括數學繪本) 以台灣出版居多，甚少有基於香港情境和學校數學課程的繪本書籍，而已有的其中數學繪本大多是翻譯自外國，如比較出名的和系統的由美國數學繪本作家瑪瑞琳·伯恩斯 (Marilyn Burns) 女士創作的《魔

數小子》數學繪本系列圖書，它涵蓋小學數學的不同學習領域，涉及不同的數學概念學習，可選擇的面較廣。

### 三、數學繪本在兒童數學學習中的功能

不少關於數學觀的研究發現，中小學生常常認為數學就是一堆符號、公式和法則，會涉及繁瑣的計算，學習數學往往被看作是記住公式和規則，並進行反覆的操練。形成學生這種狹窄的數學觀與數學老師的教學佈置和課堂環境密切相關（黃毅英、梁貫成、林智中、莫雅慈、黃家鳴，1999；黃毅英、韓繼偉、王倩婷，2005；Zhang & Wong, 2015）。將數學與文學結合，使得數學繪本可以成為具有親和力且較為輕鬆的數學教材，有可能改變學生對數學的看法，拓闊學生的數學觀。伯恩斯（Burns, 2010）就指出，數學圖書具備這樣四個方面的優點：能幫助消除數學是枯燥、缺乏想像力和遙不可及的迷思；能激發孩子的數學想像力，而這是教科書和練習冊做不到的；能幫助那些喜愛閱讀但認為數學不關他們事的學生體驗到數學的美妙；能幫助那些喜愛數學的學生以新的觀點來看待圖書（頁 38）。在 Van de Wall, Karp & Bay-Williams（2016）合寫的數學教材中也提到類似的觀點：我們可以在兒童文學作品中能找到一些數學題材而成為重要的資源，因為兒童的故事可用來反映生活情境中的問題。同時，優良的書籍也能幫助兒童進一步瞭解數學的領域。

很多人認為學習數學等於記公式和計算，然而數學尤其是小學數學大多是很生活化的，具有現實問題情境。若能把故事有意義和有系統地融入教學內，對學生的學習會有一定的幫助。荷蘭數學教育家 Hans Freudenthal 便曾提出現實主義數學教育（Realistic mathematics education, RME）的理念，即著重數學教育以生活情境為核心，讓孩子經由生活世界的活動察覺新的數學關係及規律，從而內化數學概念（黃家鳴，2000）。對幼童而言，他們的生活經驗較少，把數學概念套入他們的實際生活有時候會有點牽強。反之，如果能創設一個有意義的情境，並利用插畫、兒童的用語來編寫成故事，不單能促進兒童利用數學語言進行交流，亦能利用有趣的方法讓兒童學習數學的概念、解難技巧等，從而提升他們的學習興趣和動機（Schiro, 1997）。數學繪本的設計主要是雙線發展：即是在故事情節線的發展內包含數學內容線的發展，其優點在於學生可以利用故事內容幫助學習及建構數學概念。因此，利用數學繪本進行教學有助學生把數學概念與生活情境融合起來，也有助於提升學生的學習動機。例如，古智有、鍾靜（2008）便發現，故事情境較強的數學繪本能提升兒童對數學學習的興趣，在引發孩子學習動機方面有相當的成效。蔡坤桐（2010）也認為透過調整數學課程目標與層次，結合數學史、數學繪本、



數學遊戲等人性化 (Humanizing)、情境化 (Dreamizing) 和趣味化 (Gameable) 的數學活動，去延伸學生的生活經驗和興致，並提升學習動機，便能縮小學生對數學的距離，讓學生覺得數學就在生活當中。

作為一種數學教學的工具，數學繪本可以銜接正式與非正式的幼兒數學教學、引發學生的學習動機和聯結數學學習 (Skoumpourdi & Mpakopoulou, 2011)。在《學校數學課程和評鑑標準》中 NCTM 提出學習數學過程的四項目標：解題、溝通、推理及聯結 (NCTM, 1989)。運用繪本教學提升學生的數學能力，正是回應將數學與生活之間的聯結。這種聯結在 Van den Heuvel-Panhuizen (2000) 看來，可以包括兩種方式，即水平的數學化與垂直的數學化。「水平的數學化」是提供學童在真實生活情境中，幫助其組織和解題的工具，從生活進入至符號的世界；而「垂直的數學化」是在符號的世界內，數學本身自己內部改造之過程，如果個人將數學化置於心中，就可產生不同的理解層次。運用繪本教學就是體現出數學與生活情境結合的一種方法。在總結不同研究者針對數學繪本的發現後，陳埤淑 (2020) 總結了數學繪本在幼兒數學學習中的四種功能：(1) 引導與增加數學學習機會；(2) 提供支持性的學習情境；(3) 擴展數學知識內容；及 (4) 提升數學學習能力和正向的數學態度。

為達致上述數學繪本教學目的，不少學者提出一些運用繪本教學的策略：比如 Welchman-Tischler (1992) 指出，利用繪本故事提供一個數學在生活中實際被使用的情境，預備和發展數學概念或技能，清楚地呈現數學概念，示範創意經驗，提出有趣的問題以及利用故事情境中進行知識重溫等。Thiessen (2004) 也提到應用圖畫故事書教數學的方法，包括直接利用繪本故事書中的故事情節發展數學概念；運用故事書中的圖畫，清楚地呈現數學概念及引起學生學習的動機；以及利用故事書的內容作為教師出題的資源。考慮到繪本的不同類型，黃馨慧 (2020) 建議，可以將外顯的繪本和內隱的繪本搭配使用，比如一開始教師可以選擇內隱數學繪本，從一個有趣的故事開啟討論，連結故事與數學概念，其次再選擇外顯數學繪本延續，讓學生有機會體驗此數學概念多元的面向 (頁 35)。

#### 四、香港數學課程中的數學閱讀

教師利用繪本故事進行數學教學或者學生透過數學繪本進行自學，在東、西方不同的教育環境下都有一些的實踐，也都集中在幼稚園和小學階段 (如鍾靜, 2013; Hong, 1996; Keat & Wilburne, 2009; Van den Heuvel-Panhuizen & Elia, 2013; Welchman-Tischler, 1992)。不過香港小學教育的課堂實踐卻不多。事實上，將文本閱讀的元素融入學與教在

香港教育政策推行已久。香港教育局在 2000 年《基礎教育課程指引》文件中就提出學校教育的其中一個關鍵領域是讓學生「學會閱讀」(課程發展議會, 2001), 至 2014 年學校課程的更新「學會學習 2.0」, 進一步提出在學校推動「從閱讀中學習」, 做為課程發展的關鍵領域之一, 讓學生透過跨學科閱讀學習及鞏固學科知識(課程發展議會, 2014)。最近, 新修訂的數學課程指引(課程發展議會, 2017b) 提出, 「鼓勵學校在推動『從閱讀中學習』的成果上進一步推動學生閱讀主題與數學相關的文本, 以拓闊學生的知識基礎、提升他們的語文能力和處理包含文字、圖表、數學符號和多模式元素(即聲音、圖像、影片)的閱讀材料的能力。」(頁 48) 由此可見, 在數學科進行數學文本閱讀方面的學與教也是課程所倡導的, 旨在「提高學生學習數學的興趣, 發展他們從閱讀中學習的技能和提升讀寫能力。學生通過閱讀吸取數學知識, 了解數學在現實生活中的應用和數學的文化層面, 能令他們對數學有更全面的認識和促進跨課程學習」(課程發展議會, 2015, 頁 10-11)。然而, 課程指引僅僅停留在文件層面, 對於如何在學校推行數學閱讀計劃沒有太多討論, 對於如何在正常的課堂上實踐數學文本閱讀的教學更是缺乏, 這也是本研究要探討的主題。對香港的小學教師來說, 將數學閱讀融入數學教學是一種新的教學策略和嘗試。如能在教學上利用繪本把生活情境與需要學習的數學概念聯結起來, 對低年級小學生來說, 數學課堂也許會變得更生動, 教學方式不會那麼陌生, 數學概念也會更易吸收, 有助於他們從幼稚園到小學學習方式的銜接和過渡。

## 參、研究方法和設計

### 一、研究對象

本探索性研究旨在調查課堂繪本教學對低年級小學生數學學習的影響, 研究對象為 2020 年 9 月入學的小學一年級學生, 有關的研究及教學活動在 2020 年 10 月進行。香港政府學校小學依據學校規模, 一般每一年級開設 4-5 個班別, 擔任本次實驗組的兩班(1A 班和 1B 班)人數分別是 19 人和 18 人, 共 37 人; 充當控制組的兩班(1C 班和 1D 班)學生人數均是 18 人, 共 36 人。擔任教學的四位老師都具備小學教育學士學位。兩個實驗班的課堂教學由第一作者和另一班老師(曾老師)擔任, 教齡分別是 28 年和 7 年。在正式施教之前, 有過協商和討論, 對於教學計劃和材料的使用都取得共識。控制組 C、D 班的兩位老師, 教齡為分別為 24 年和 11 年, 二人均未曾接觸繪本和繪本教學, 以傳統方式按照教科書施教。各班學生入學均是自由分班, 每班學生的平均數學能力相當。

## 二、研究流程

數範疇的學習是初小學生的學習重點之一，也是幼稚園和小學銜接的學習領域。本研究為配合香港新修訂數學課程要求，同時要照顧學生需要，從幼稚園到小學的銜接過渡，本次探索性研究選擇以香港小學一年級的數學課題「單數和雙數」作為教學研究主題。依據新課程的學習要求，學生需要認識 20 以內的單數和雙數，能說出單數和雙數的規律，認識生活中的單、雙數，以及會辨認單數和雙數（課程發展議會，2017b）。在 2020 年 7 月時，兩位作者共同選出合適的數學繪本，並與學校一年級的數學科主任一起審閱所選繪本是否合宜，最後共同決定以瑪瑞琳·伯恩斯的《魔數小子一噏！奇數撞偶數》為基礎繪本，並於 9 月期間結合課程學習目標進行必要的內容修訂及擬定相關的資料蒐集工具，如前、後測的數學知識問題、學生數學學習日記、繪本小冊子等。考慮到授課時間安排，在與小一年級的科任老師商討以後，選定其中 1A 和 1B 作實驗組，1C 和 1D 作控制組，並於 10 月的第一週實施繪本教學研究。同時，在教學研究前後分別蒐集各項數據。最後，11 月至 12 月進行資料分析，在 2021 年初完成研究報告的撰寫。

本研究過程主要分為四個階段（見圖 1）。第一階段為學生對單、雙數概念的前測，主要是透過紙筆評估，了解學生是否認識單、雙數；第二階段是在課堂執行繪本教學；第三階段為後測，同樣是透過紙筆評估，重做與前測類似的題目，同時再加上本次教學的部份重點，測試學生是否已掌握整個單元的學習重點；最後一個階段是針對繪本教學的問卷調查及訪談，作用是了解學生對利用繪本學習數學的想法和感受，以檢視繪本教學對學生數學學習興趣的影響。

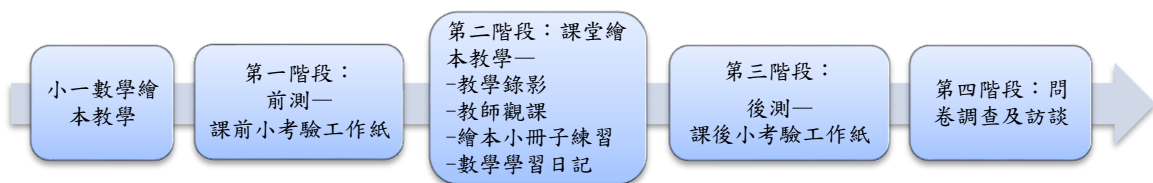


圖 1 研究流程圖

## 三、數學繪本選材與數學繪本教學活動

為配合香港新修訂數學課程要求（課程發展議會 2017b），本研究我們選擇「學習 20 以內的單數和雙數」為研究主題，在市場上的中文繪本中，選擇以魔術小子系列中的《噏！奇數撞偶數！》作藍本，作為教學的主要素材。在翻閱原書內文時，我們發現部份用字

未配合香港的常用語，而且每字旁邊附有注音符號，會干擾學生學習。在進行教學設計時，筆者將內文稍作修正，重新編製，並去掉注音符號，以適合本地小一學生閱讀。同時，把原故事書進行內容剪裁，劃分成三部份，配合設計的學習單，製作成繪本小冊子，讓學生上課時使用，而學生手上的數學教科書則作為輔助閱讀材料，和用作課後鞏固聯繫之用。整體來說，我們採取繪本故事內容為主，教材內容學習為輔的教學模式。兩個實驗組的教學設計分別有三堂課，每堂課 40 分鐘，課堂教學流程及相應的教學重點樣例（節選第一節和第二節）可見下表 1。

表 1

繪本教學課堂活動概述和課程目標表

繪本內容片段	第一課時教學流程	課程目標
<p>片段 1</p> <p>阿偶的房子有兩層樓，他養了 6 隻貓，8 隻小倉鼠和 10 條金魚。</p> 	<p><b>繪本導讀</b>（約 25 分鐘）運用繪本敘述阿偶喜歡雙數，阿奇喜歡單數，從而跟學生一同找出單數和雙數的規律。</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 完成上半部份，跟同學一同數一數圖中動物數量。</li> <li>2. 請同學數一數自己筆袋裏筆的數量，有沒有跟阿偶的動物數量相同的？</li> <li>3. 完成下半部份，跟同學一同數一數圖中麵包和書本的數量。</li> <li>4. 跟同學完成小冊子 p.3。</li> <li>5. 利用小火車，用箭頭表示出雙數的規律。</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 認識 10 以內的單數和雙數；</li> <li>2. 能說出單數和雙數的規律</li> </ol>
<p>片段 2</p> <p>阿偶到麵包店總是說：「我要兩條麵包。」他到郵局買 8 張郵票，到圖書館借 4 本書。</p> <p>阿偶喜歡的一切都成雙成對。鄰居們交頭接耳的說：「在阿偶身上找不到任何奇數。」</p> 	 <ol style="list-style-type: none"> <li>6. 請學生猜一猜阿偶不喜歡的數字，帶出另一主角阿奇。</li> <li>7. 導讀 p.4 後，檢視 p.3 阿偶不喜歡的數字是否猜對。</li> <li>8. 接著導讀 p.5-6，仿照 p.2 的做法，數一數圖中物件的數量，並留意鐘面上的數字。</li> </ol>	

## 表 1 (續)

## 片段 3

這些數字有規律嗎？試從下面的小火車查探這個規律吧！



那麼，你猜猜阿偶不喜歡哪些數字？

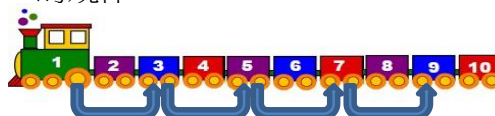
## 片段 4

這些數字有規律嗎？試從下面的小火車查探這個規律吧！



原來，這些有規律的數字，各有一個名稱的。我們現在翻開課本 P.36-37，一同研究一下吧！

9. 跟同學一起完成小冊子 p.7。
10. 利用小火車，用箭頭表示出單數的規律。



**繪本延伸活動** (約 10 分鐘) 完成 p.7 後，可以跟學生一同處理書 p.36-37，或當家課完成。教師進行課堂總結：

1. 1-10 以內單數有：1, 3, 5, 7, 9
2. 1-10 以內的雙數有：2, 4, 6, 8, 10
3. 說一說單雙數的規律
4. 按照單雙數的規律，推想 20 以內的單雙數



繪本內容片段	第二課時教學流程	課程目標
<p>片段 1</p> <p>他們走到一間 Pizza 店，阿偶說：「我要 4 片，2 片洋蔥、兩片橄欖。」</p> <p>「我要 3 片。」阿奇說：「1 片原味，一片超濃芝士，還有一片要通心粉。」阿偶看着表弟的 Pizza，9 條粉紅色的通心粉，很像毛毛蟲。他的臉都綠了。</p> 	<p><b>重溫</b> 運用繪本重溫上一課故事及相關數學知識 (約 5 分鐘)。</p> <p><b>繪本導讀</b> (約 25 分鐘)</p> <p>開始講述繪本小冊子 p.8-9。</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 一邊講述一邊跟同學一同數一數圖中物件數量。</li> <li>2. 請同學說一說自己的生活經驗。</li> <li>3. 在學生介紹過程中可加入德育教育：關心別人的感受、做錯事要誠心道歉、不輕易發怒。</li> <li>4. 完成後做 p.10 的練習，從故事內容選出答案，跟同學討論一下單、雙數。</li> <li>5. 可加入猜想：阿奇會接受雙數的雪糕球嗎？為甚麼？</li> <li>6. 接著導讀 p.11-12，並為故事作簡單總結。</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 認識 20 以內的單數和雙數；</li> <li>2. 辨認單、雙數。</li> </ol>
<p>片段 2</p> <p>阿偶和阿奇走到雪糕店，阿偶要了兩球朱古力味雪糕，上面加上雙份朱古力醬。阿奇要了 3 球堅果奶油朱古力雪糕。</p> <p>阿偶吃了一口雪糕，發覺怪怪的。原來阿奇以為阿偶會喜歡堅果，便放了 11 粒堅果在阿偶的朱古力雪糕上。阿偶氣得臉色發青，耳朵又噴出 4 股熱氣了！</p> 		



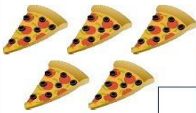





表 1 (續)

片段 3

7. 推想 11-20 的單數和雙數。

讓我們把阿偶和阿奇的食物，列表整理一下：

 阿偶	 阿奇
Pizza 	Pizza 
雪糕 	雪糕 

**繪本延伸活動** (約 5 分鐘) 處理書 p.38，回家親子完成書 p.39。課堂總結：

1. 1-20 以內單數有：1，3，5，7，9，11，13，15，17，19
2. 1-20 以內的雙數有：2，4，6，8，10，12，14，16，18，20
3. 想一想：有甚麼方法辨別單雙數

#### 四、數據收集

考慮到研究對象 2020 年大半年受停課影響，本研究中的數據收集採用問卷調查及課堂觀察為主，並在課後邀請個別學生進行訪談，希望從不同的方面蒐集學生數學繪本學習的體驗和學習成效的證據，以反映課堂繪本教學對學生學習的影響。我們利用 2020 年 10 月 5 日至 10 月 9 日期間進行教學，1A 和 1B 兩個實驗班均利用四節課完成教學及後測和問卷調查。接受訪問的學生由任教老師隨機按照學生學號抽取，訪談以小組焦點訪談的形式進行。兩班老師均有互相觀察對方的授課，但限於觀察拍攝的課堂教學影片，教師在授課時均提及只是常規上課，避免學生產生實驗者效應。

由於本研究對象是小一學生，識字和語言表達能力有限，因此前測、後測及問卷均採用較簡單的題目進行設計。測試的題目由四位授課教師共同審議確定，題目類型和難度是依據過往同一課題授課的內容考查要求設定，前、後測在同類型題目上的難度也是一致的 (詳見附錄一、二)。問題設計的內容和用詞，經過同級老師們內部的兩次討論後確定，以契合小一學生的認知能力。例如刪去要學生用文字描述日常生活中常見的單、雙數例子，改為利用課堂總結時的提問及訪談以獲取相關的資訊；問卷的回答以打圈和勾選為主；學習日記可以繪圖來表達。四個班的學生均完成前測和後測，問卷及訪談只在實驗組進行。由於小一學生識字不多，前測、後測及繪本學習問卷均由老師讀題目讓

學生完成，並在學生有需要時協助學生填寫他們的意見。前測把將要教授的單數、雙數及已學習的順數、倒數交替出題，以測試學生對相關課題的認識。後測利用前測類似的題目，重新測試學生在繪本教學後是否能掌握單數和雙數的概念，同時在丙部加入兩道題目，以測試學生是否能掌握分辨單雙數的方法（見圖 2）。為了解學生在每節課能否對繪本故事線以外的數學知識有所理解，第一作者會檢視學生的繪本小冊子及學習日記。總的來說，為回答本文第一部分提到的研究問題，本研究以前後測數學知識問題、繪本學習問卷、繪本小冊子、學習日記及課後的訪談等多渠道來蒐集數據，也可以對研究結果進行多角度地相互驗證，來檢視這次數學繪本課堂教學的教學效能。前後測、繪本學習問卷以及學習日記等詳細資料可參閱附錄一至四。

### 丙、數一數、圈一圈，辨認單數和雙數

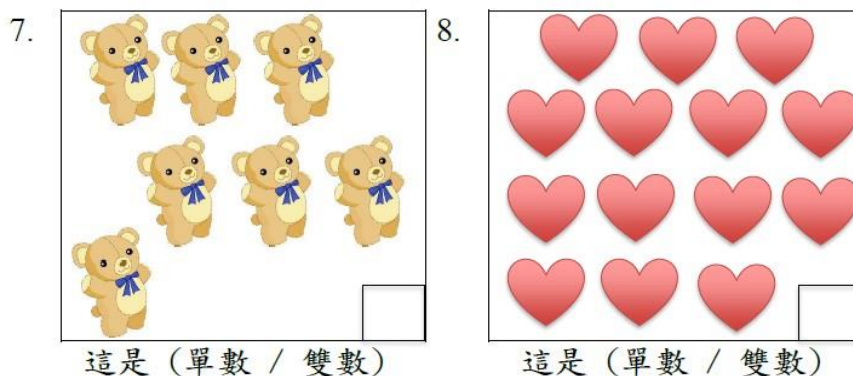


圖 2 後測新增問題樣例

## 肆、研究結果與分析

本次探索性研究的目的是在檢視數學繪本進行課堂教學對低年級學生（本研究聚焦在小學一年級學生）的學習興趣及數學概念理解的影響。由篩選繪本到編製測試題目，研究者均以配合香港教育局課程發展處的課程指引及本校採用的教科書為依歸，並按有關的課程指引及教師共同備課所訂下的學習重點進行教學設計。以下，我們會嘗試透過課堂教學、數學學習日記及訪談的質性分析，以及前測、後測及問卷調查的數據分析綜合分析本研究結果。

### 一、課堂教學、數學學習日記及訪談的質性分析

透過教學錄影、現場觀課與及教師訪談，利用繪本說故事時，學生的表現比平常更集中。以 1A 為例，由於該班較多有特殊學習需要的學生，平日課堂學生很容易便會失

焦，但在繪本教學實施期間，平時專注力較弱的學生，更能集中上課，並會觀察及推測故事的發展；另外，第一作者於整個學習單元均有對 1B 班授課進行觀察。整班學生在課堂上都非常集中聽故事，亦會跟 1A 的學生一樣，在曾老師的提問下細心觀察及推測故事的發展。第一作者透過與 1B 班曾老師的訪談，了解到在繪本教學中，學生比平常上課更安靜也更集中注意力，也會更主動回答老師提問。每當學生討論故事情節過度興奮時，老師只要輕輕的說：「要繼續講故事了。」學生便會馬上安靜下來準備聽故事。由此可見，繪本的故事性對小一學生有相當的吸引力，對提升學生的專注力也有一定的效果。然而，在數學課堂中，學生只是對繪本的故事線感興趣還不夠，我們還需要檢視學生是否能同時掌握繪本內的數學元素，以確定學習是確切地在課堂上發生。

在檢視學生的學習日記時，研究者發現很多學生在第二題「今天，我學會了……」的方格內均能記錄單數、雙數的序列，亦有學生把當天印象最深的故事情節畫出來。例如學生記得兩個主角分別喜歡的數字和喜歡的物件數量，甚至有學生把主角發脾氣的部份畫在日記裡。在第三節課後，對於最後一節課的學習重點，即（1）認識生活中的單、雙數及（2）利用不同方法辨別單、雙數，有少部份學生也能在「今天，我學會了……」的方格內表示出來。例如他們能按主角的喜好推論出他們喜歡居住的樓層，在數數時每兩個一數，有落單的便是單數等等（見圖 3）。



圖 3 數學學習日記學生作品

為了進一步確認學生是否能透過繪本課堂教學掌握有關的教學重點，研究者於 1A 和 1B 每班各抽出三位學生進行了訪問。在訪問中，研究者首先請受訪學生舉例說一說生活中的單、雙數的例子，他們都能說出課堂上所舉的升降機樓層數字的例子，亦有學



生能說出課堂上有關「動物的腳都是雙數」的例子，對於繪本故事中提及的單、雙數例子也都能回憶起來。不過，對於課堂上提及街道號碼的例子，則沒有學生能回想起來。這也表示這類例子對學生來說是較為陌生的。訪談期間，研究者亦有問及學生是否喜歡利用繪本上數學課，學生均全部表示喜歡，希望有更多數學課堂可以用這種形式學習。我們相信，因為故事情節吸引，加上故事角色有個性，讓數學自然地融入生活、進入課堂，拉近了跟學生的距離。第一作者在繪本教學後的數學課上也觀察到，每當問及單數和雙數，學生都能很快聯想到繪本故事的主角（阿奇和阿偶），這顯示出繪本故事的學習給學生留下深刻的印象。而學生亦經常問教師何時會再有數學繪本的課堂。透過這些觀察，不難看出，學生是喜歡將數學和故事關聯起來進行學習。至於數學學習的效果，我們可以由前、後測和問卷調查的結果進行分析。

## 二、前測、後測及問卷調查的數據分析

在實施繪本教學前，前測共 8 題，我們利用甲部 1—4 題涉及「找規律」的題目，其中 1—2 題為熱身問題，3—4 題涉及到單、雙數的概念，乙部 5—6 題為辨別數字序列的題目，測試學生在授課前對單數和雙數的認識，在丙部 7—8 兩題則是了解學生對數學和故事的興趣。前測 1—6 題答對 1 題計 1 分，7—8 題不計分，總分 6 分。依據課程學習目標，透過數學繪本教學，我們設定的學習重點包括發現單數和雙數的規律、辨認 20 以內的單雙數外，還有利用兩個一數的方法，判辨物件數量是單數還是雙數，以及讓學生觀察日常生活中的單、雙數。因此，在後測中，除了原有的甲部「找規律」問題及乙部辨別數字序列的題目外，我們將丙部 7—8 題改為 2 條判辨物件數量是單數還是雙數的題目。後測中 1—8 題均按照答對 1 題計 1 分，總分 8 分。為回答研究問題（一），了解學生透過數學繪本教學的學習成效，本研究考慮的是實驗班和控制班在前後測試題上的整體答對情況，統計每一班在每一題的答對人數，並比較答對率的變化。由於最後一個學習重點（觀察生活中的單雙數）較難利用紙筆為小一學生進行測試，我們改為利用數學學習日記及訪談，去了解學生對有關的學習重點是否掌握。學生在甲、乙部單雙數概念的測試結果表列如表 2：

表 2

繪本教學前後測學生答對人數統計及比較表

班級		甲-3	甲-4	乙-5	乙-6	
實驗組	1A+1B (37 人)	前測	20	20	13	12
		後測	28	28	28	26
		比較	↑21.6%	↑21.6%	↑40.5%	↑37.8%
控制組	1C+1D (36 人)	前測	25	24	19	22
		後測	24	25	25	26
		比較	↓2.8%	↑2.8%	↑16.7%	↑11.1%

表 2 數據顯示，在兩組學生總人數相當的條件下，在前測問題中，總體而言，實驗組學生在甲部和乙部的答對人數均少於控制組。在後測中，實驗組學生的總體表現較好。比較前後測在甲、乙部的測試結果，學生在掌握有關知識的程度，實驗組比控制組要高。甲部是涉及單雙數找規律的 2 題，實驗組和控制組在前後測中都有超過一半的學生答對，但相比前測，實驗組學生答對率上升幅度較大，達到 21.6%；對於乙部份的 2 道辨別數字序列的題目，實驗組的學生在後測較前測表現提升更為明顯，答對率增加近 40%，控制組答對率也有增加但不到 20%。

對於丙部的問題，只是在後測中出現，考查學生是否能掌握分辨單雙數的方法（見圖 2）。控制組（36 人）中答對丙-7 的人數為 33 人，答對率為 91.7%；丙-8 的答對人數為 30 人，答對率為 83.3%；在實驗組（37 人）中，答對這兩個題目的人數分別是 28 人和 26 人，答對率分別為 75.7%和 70.3%。與前面甲部、乙部問題測試結果不同的是，控制組學生在丙部的表現總體上要好過實驗組。在根據圖形分辨單雙數的問題上，儘管兩組學生答對率均超過 70%，實驗組學生表現未見更突出。

從學生的課堂表現來看，在本次數學繪本教學的設計，實驗組學生能夠跟從繪本的故事線，同時獲得繪本內數學線的學習重點。控制組學生主要是遵循教科書的教學內容學習。透過課堂教學觀察及課後再次翻閱教學影片，研究者發現，對於教師借助故事人物或情節來提問單數或雙數的問題，學生很快便能回答；若教師只提問學生單數和雙數的相關問題，實驗組有學生對答案抱有點懷疑的態度，但只要教師提點學生回取故事情節，他們亦能迅速地作出正確的回答。由此，對於小一學生而言，繪本的故事情節有助學生加深對新學的數學知識的記憶。這也是將數學知識和問題情境相互聯結對學生學習的影響。相比而言，控制組學生的課堂表現較為單一，以聽取教師依教科書講授為主，專注力較為不足，在回答單雙數的相關問題時，需要教師多次解釋相關概念，較少能將單雙數問題與實際問題情境聯繫起來。

繪本教學實驗完成後，在研究者與各授課教師進行單元教學檢討時，控制組授課教師表示，由於教學主要是按教科書講授教學重點，所以概念講解所用上的課時較少，因此在相同的單元總課節（共四節）的前提下，有較多時間教授分辨單雙數的方法。相比之下，實驗組利用故事講解單、雙數的概念，所花的時間較長，教授分辨單雙數的方法所用的課節不足一節。因此亦可說明後測結果：概念掌握方面，實驗組表現較理想；分辨單雙數的方法方面，控制組表現較理想。在單元教學檢討會議上，教師認同利用繪本有助學生加深概念建構，並建議額外加一節進行分辨單雙數的技巧方面的教學及鞏固，即建議本單元總課節改為五節。

為回答研究問題（二），就學生對利用繪本學習數學的感受及想法，研究中我們利用繪本學習問卷（附錄三）進行了統計。兩個實驗班（1A 和 1B）一共收回 34 份問卷（回收率 92%）。數據分析如下：

#### 1. 利用繪本學習數學讓數學學習變得更簡單

33 份有效的問卷當中，23 人表示數學是很簡單；8 人覺得有一點點困難；只有 2 人覺得非常困難。數據顯示，69.7%的學生在完成數學繪本學習後覺得單數和雙數這個單元是簡單的。

#### 2. 利用繪本學習變得更喜愛數學

33 份有效的問卷當中，30 人表示很喜歡數學；2 人表示沒有特別感覺；1 人表示討厭數學。數據顯示，90.9%的學生在利用繪本學習後更喜愛數學。

#### 4. 數學課變得有趣

32 份有效的問卷當中，28 人表示這樣的數學課很有趣；1 人表示沒有特別感覺；3 人表示數學課很無聊。數據顯示，87.5%的學生在覺得利用繪本學習數學很有趣。

#### 5. 期望再次利用繪本學習數學

34 份有效的問卷當中，32 人表示希望老師會用這種方法上課，佔 94.1%；只有兩名學生表示不希望用講故事形式上課。數據顯示幾乎所有學生都希望能再次利用繪本學習數學。

#### 6. 掌握單數和雙數的學習重點

34 份有效的問卷當中，33 人分別認為自己已認識 20 以內的單、雙數和能用不同的方法辨別單數和雙數，佔 97.1%的學生；有 32 人認為自己能說出單數和雙數的規律，佔

97.1%的學生；只有 1 人勾選甚麼也沒學到。

整體而言，利用數學繪本進行課堂教學，學生更能專注課堂學習，而學生亦能借助繪本的故事性，把學習重點組織起來，方便記憶及回取，能有效提升學習效能。而透過學習問卷及訪談的結果，大部份一年級的學生都表示喜歡用數學繪本進行學習，亦對數學課有所期待，這也反映數學繪本教學能提升學生的學習興趣。

## 伍、結論與建議

初步跨入小學的小一學生面對學校眾多的分科教學，大多存在一個適應期。有的學生適應得快，有的可能需要較長的時間。做好幼小銜接，教師需要照顧到學生已有的生活經驗，熟悉他們過往學習經歷，以適合的教學材料搭建起幼小過渡的階梯。綜合以上的研究結果，我們發現，利用數學繪本在小一年級進行課堂教學，能有效提升學生的專注力；豐富的故事情境，亦讓學生對課堂有所期待。這說明繪本教學對於提升學生的學習興趣是有幫助的，也能協助一年級小學生從幼稚園到小學的學習過渡。繪本的故事內容讓學生更易投入有趣的生活或故事情境，我們也關心繪本教學是否還能幫助學生達成課堂設定的學習目標。在課堂觀察中，從教師的提問結果以及前、後測問卷調查的結果來看，利用數學繪本進行學習的學生不單能掌握相關的數學概念，其課堂表現亦比傳統數學課堂的學生要好。這也說明適當選取及編修繪本有助學生提升學習數學概念的成效。

儘管在研究中我們發現在數學科利用繪本進行教學對低年級（如研究中的小一年級）學生的數學學習有相當裨益，但我們的研究也遇到一些挑戰和困難。首先，繪本教學的內容選擇需要綜合各種因素，對老師來說是一種挑戰。以本研究為例，研究所選的繪本材料除了包含本單元的數學重點外，亦會因應故事發展而牽涉到已有知識（18 以內的組合），並且按故事發展添加一些情意教育的元素（如第二節課中涉及的德育部分）。然而，繪本中所包含的字詞、句式等是否能配合學生語文學習的教學內容和進度呢？繪本內容中所涉及到的情意教育又是否是該單元的學習重點？如何讓繪本的故事情節能更自然地與數學概念連結起來，以及如何將繪本故事和學生生活經驗聯繫起來，使數學學習變得更有意義？在實驗組學生的訪談中，我們也注意到一個有趣的現象，課堂上教師曾利用升降機及街道號碼解釋單雙數的例子，所有受訪學生能回想起升降機的例子，卻沒有學生能回想起街道號碼的例子來。這也反映出教師在繪本教學選取延伸的生活例子時，或需要更貼近學生的生活經驗，並能夠配合繪本的故事發展情節。凡此種種問題，都需要授課老師在篩選繪本時細心觀察和分析，這些對老師來說並不容易。教師選書的

結果亦可能會影響到教學效果和學生的學習表現。

其次，繪本教學材料的編修也是一項大工程。香港的小學數學教學以中文語言居多。目前絕大多數市場出版的中文繪本均來自台灣及中國大陸的翻譯版，繪本用語未必符合香港本地的實際情況，老師需要進行編修和加工，以適應課堂教學。這是十分費時的大工程。校方亦需要在行政上作出調配，以幫助學科在年級發展和推行繪本教學。另外，使用繪本教學也涉及版權使用的問題。若教師在教學中需要對要使用的繪本進行編修，考慮到成本，學生便不大可能人手一冊去購買原裝繪本，學校要考慮如何避免出現版權問題下進行課堂繪本教學。以本研究為例，教師依據選擇的繪本書籍，對字詞和表達進行編修，結合具體課堂教學目標，製作成教學使用的繪本小書冊，學生可以人手一本在課堂上使用。但如果要在全校範圍內不同年級不同課題使用繪本教學，那麼印刷便成了學校的經濟負擔。這也是推行繪本教學需要考慮的困難。一個折衷的解決方法可以是由授課老師先自行編寫繪本，再印刷成書刊，學生以校本課材的形式購買。要走出這一步，培育編寫繪本的人才便成了學校首要安排的教師專業進修方向之一。事實上，在繪本教學中，授課教師對繪本內容的理解和教學實施至關重要，這無疑是直接影響教學成效。因此，要成功地在學校全面推行繪本教學，可以低年級學段作平台，選擇幾個課題做試點，從小步子開始由編修繪本做起。當老師都能熟悉和認同繪本教學，再在學校內的全面推廣。

本研究在研究設計和方法上也存在一些侷限，我們只是選擇小學一年級兩班學生作為實驗組，樣本數量不多，實驗教學的時間不長，研究的成效未必十分明顯。以後的教學研究，可以增加多一些實驗班級，以及在不同的課題進行教學。在研究成效的分析上，考慮到低年級學生的語文水平，我們對學生學習興趣的調查以質性的數據為主，今後的研究可以使用適合低年級學生（一年級和二年級）的量化工具，有助於整體上了解實驗研究的成效。另外，儘管相比控制組，實驗組的學生在前後測相同的問題中（如甲部和乙部）進步較多，需要注意的是本研究中學生表現的資料是以整體班級的表現來呈現，缺乏進一步統計考驗，今後的研究可以關注每一個學生在每一題項的表現，進行更為細緻和具體的統計分析，有助於對教學實驗結果做出更為客觀的推斷。

不同於教科書上割裂的情境題或應用題，數學繪本教學能令數學在故事情境下呈現出來，讓有關的數學概念扣連上故事情節，更有意思地在課堂逐步呈現。這樣的課堂教學，會讓本身對數學感到害怕的同學，借助由故事引發的好奇心和教學活動帶來的課堂參與，打開他們數學學習的心窗，讓數學學習變得更有意思。此外，自 2020 年新冠疫情以來，香港的學校教學開始出現線上和線下混合的「教學新常態」。能否借助數學繪本的

故事性和生活情境性的特點，提高學生在網課中的投入度，提升混合教學下學生的數學學習成效，是今後值得關注和研究的一個方向。

## 誌謝

感謝香港教育大學博文及社會科學學院研究計畫（FLASS/KTP 04620）的經費補助。

## 參考文獻

- 古智有、鍾靜（2008）。以課程為主軸的數學繪本教學。**國民教育** 48 卷 6 期，42-47。
- 陳茗茵、莊春霞（2019）。在情景中學習，從故事中理解。**當代教育家**，08 期，48-49。
- 陳埤淑（2020）。幼兒數學繪本。載於楊凱琳、左台益（編著）。**閱讀數學：文本、理解與教學**（頁 3-23）。台北：元照出版有限公司。
- 袁媛（2008）。與數學有關的中文圖畫故事書之評鑑及教學策略探究。**東海教育評論**，1，53-71。
- 張僑平、陳茗茵（2017）。從閱讀中學習數學：蛀書蟲計劃的實踐和反思。**香港數理教育學會會刊** 33 期，69-78。
- 黃家鳴（2000）。現實情境作為數學學習的起點：荷蘭經驗。**數學教育** 11 期，34-46。
- 黃毅英、梁貫成、林智中、莫雅慈、黃家鳴（1999）。各界人士對數學課程觀感的分析（教育署委託研究最後報告）。香港：教育署課程發展議會。
- 黃毅英、韓繼偉、王倩婷（2005）。數學觀與數學教育。載黃毅英（編）**迎接新世紀：重新檢視香港數學教育——蕭文強教授榮休文集**（頁 77-99）。香港：香港數學教育學會。
- 黃馨慧（2020）。繪本在早期數學教育的應用。載於楊凱琳、左台益（編著）。**閱讀數學：文本、理解與教學**（頁 25-49）。台北：元照出版有限公司。
- 楊詠盈、張淑冰、張僑平（2017）。數學繪本故事教學：校本的實踐經驗。**香港數理教育學會會刊**，33 期，109-117。
- 鄧佩玉（2015）。淺談如何於初小推行數學閱讀。**數學教育** 38 期，1-5。
- 瑪瑞林·伯恩斯（2015）。**魔數小子—噹！奇數撞偶數**（Even Steven And Odd Todd；冶海孜譯）。臺北：遠流出版事業股份公司。
- 蔡坤桐（2010）。數學繪本的表面與深層結構——以國小實施「閱讀數學繪本」教學設計為例。

- 載於鍾靜（編著）*國小數學繪本與教學閱讀教學實踐與推廣*（頁 219-229）。臺北市：國立臺北教育大學。
- 課程發展議會（2001）。*學會學習：課程發展路向*。香港：政府印務局。
- 課程發展議會（2014）。*基礎教育課程指引 聚焦・深化・持續（小一至小六）*。香港：政府印務局。
- 課程發展議會（2015）。*更新數學教育學習領域課程（小一至中六）*。香港：政府印務局。
- 課程發展議會（2017a）。*幼稚園教育課程指引—遊戲學習好開始 均衡發展樂成長*。香港：課程發展議會。取自 [https://www.edb.gov.hk/attachment/tc/curriculum-development/major-level-of-edu/preprimary/TC\\_KGECG\\_2017.pdf](https://www.edb.gov.hk/attachment/tc/curriculum-development/major-level-of-edu/preprimary/TC_KGECG_2017.pdf)
- 課程發展議會（2017b）。*數學教育學領域課程指引（小一至中六）*。香港：政府印務局。
- 鍾靜（2013）。*藉數學繪本激發孩子潛能*。臺北市：國立臺北教育大學。
- Burns, M. (2010). As easy as pi: Picture books are perfect for teaching math. *School Library Journal*, 56(5), 32-41.
- Hong, H. (1996). Effects of mathematics learning through children's literature on math achievement and dispositional outcomes. *Early Childhood Research Quarterly*, 11, 477-494. doi: 10.1016/S0885-2006(96)90018-6
- Keat, J., & Wilburne, J.M. (2009). The impact of storybooks on kindergarten children's mathematical achievement and approaches to learning. *US-China Education Review*, 6 (7), 61-67.
- National Council for Teachers of Mathematics (NCTM). (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Nesmith S., & Cooper S. (2010). Trade books in the mathematics classroom: The impact of many, varied perspectives on determination of quality. *Journal of Research in Childhood Education*, 24, 279 - 297. doi: 10.1080/02568543.2010.510086
- Schiro, M. (1997). *Integrating children's literature and mathematics in the classroom: children as meaning makers, problem solvers, and literary critics*. New York, NY: Teachers College Press.
- Skoumpourdi, C. & Mpakopoulou, I. (2011). The prints: A picture book for pre-formal

- geometry. *Early Childhood Education Journal*. 39, 197-206. doi: 10.1007/s10643-011-0454-0
- Thiessen, D. (Eds). (2004). *Exploring mathematics through literature: Articles and lessons for prekindergarten through grade 8*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Thiessen, D., Matthias, M., & Smith, J. (1992). *The wonderful world of mathematics: A critically annotated list of children's books in mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Trafton, P. R., & Claus, A. S. (1994). A changing curriculum for a changing age. In C. A. Thornton & N. S. Bley (Eds.). *Windows of opportunity: Mathematics for students with special needs* (pp.19-39). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2000). *Mathematics education in the Netherlands: A guided tour. FI-ICME-9*. Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Instituut.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Elia, I. (2013). The role of picture books in young children's mathematics learning. In L. D. English & J. T. Mulligan (Eds.), *Reconceptualizing early mathematics learning* (pp. 227–251). Springer. doi: 10.1007/978-94-007-6440-8\_12
- Van de Walle, J., Karp, K., & Bay-Williams, J. M. (2016). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally*. New York: Allyn and Bacon.
- Ward, R. A. (2005). Using children's literature to inspire K-8 preservice teachers' future mathematics pedagogy. *The Reading Teacher*, 59(2), 132-143. doi: 10.1598/RT.59.2.3
- Welchman-Tischler, R.W. (1992). *How to use children's literature to teach mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Whitin, D. (1992). Explore mathematics through children's literature. *School Library Journal*, 38(8), 24 - 28.
- Whitin, D., & Whitin, P. (2004). *New visions for linking literature and mathematics*. Urbana, IL: National Council of Teachers of English.
- Zhang, Q. P., & Wong, N. Y. (2015). Beliefs, knowledge and teaching: A series of studies among Chinese mathematics teachers. In L. Fan, N. Y. Wong, J. Cai, & S. Li (Eds.), *How Chinese teach mathematics: Perspectives from insiders* (pp. 457-492). Singapore: World Scientific. doi: 10.1142/9789814415828\_0015



## 附錄一

成長小學 2020-2021 年度 一年級上學期

數學科繪本學習—課前小考驗

班別: P.1(\_\_\_\_\_)

積分: \_\_\_\_\_

日期: \_\_\_\_\_

姓名: \_\_\_\_\_ ( )

         / 6

甲、找規律：在橫線上填上缺去的數字。

1. 3, \_\_\_\_\_, 5, 6, 7, \_\_\_\_\_, 9
2. 14, 13, 12, \_\_\_\_\_, 10, 9, 8, \_\_\_\_\_, 6
3. 1, 3, 5, \_\_\_\_\_, 9, 11
4. 2, 4, \_\_\_\_\_, 8, 10, 12

乙、辨認以下的數字的規律，把答案圈出來。

5. 3, 7, 11, 15, 19 (單數/雙數/順數/倒數)
6. 4, 8, 10, 16, 20 (單數/雙數/順數/倒數)

丙、小調查

1. 你喜歡數學嗎?



2. 你喜歡聽故事嗎?



### 附錄二

成長小學 2020-2021 年度 一年級上學期

數學科繪本學習—課後小考驗

班別: P.1(\_\_\_\_\_)

積分: \_\_\_\_\_

日期: \_\_\_\_\_

姓名: \_\_\_\_\_ ( )

\_\_\_\_\_/8

甲、找規律：在橫線上填上缺去的數字。

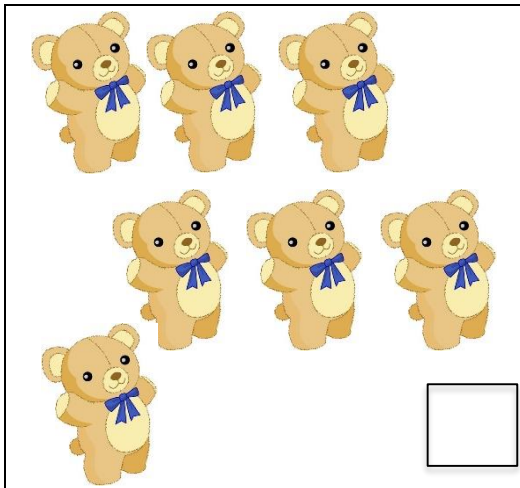
- 3, \_\_\_\_\_, 5, 6, 7, \_\_\_\_\_, 9
- 14, 13, 12, \_\_\_\_\_, 10, 9, 8, \_\_\_\_\_, 6
- 1, 3, 5, \_\_\_\_\_, 9, 11
- 2, 4, \_\_\_\_\_, 8, 10, 12

乙、辨認以下的數字的規律，把答案圈出來。

- 3, 7, 11, 15, 19 (單數/雙數/順數/倒數)
- 4, 8, 10, 16, 20 (單數/雙數/順數/倒數)

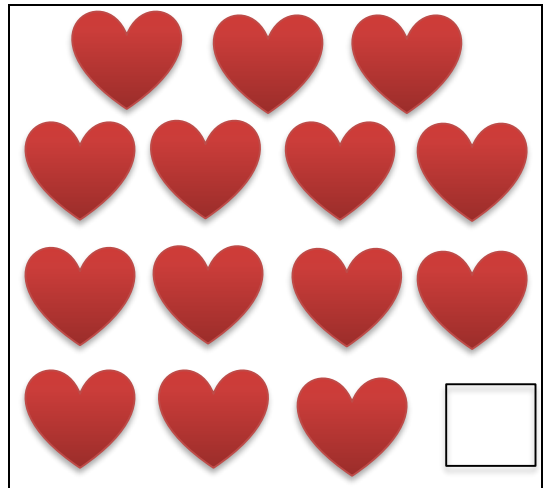
丙、數一數、圈一圈，辨認單數和雙數

7.



這是 (單數 / 雙數)

8.



這是 (單數 / 雙數)

## 附錄三



## 數學繪本學習

## 想一想

姓名：\_\_\_\_\_

班別：\_\_\_\_\_

日期：\_\_\_\_\_

各位同學，「噹！奇數撞偶數」這本繪本是在學習「單數和雙數」這個單元的數學概念，下面有些問題需要請問你們，請你想一想。

## 一、用繪本，也就是故事書的方式來學習...



我覺得數學： 很簡單  非常困難  有一點點困難



我覺得數學： 很喜欢  很討厭  沒有特別感覺



我覺得這樣的數學課： 很有趣  很無聊  沒有特別感覺



如果可以，我會希望老師用這種方法上課嗎？ 會希望  不希望

因為：\_\_\_\_\_

- 我認識 20 以內的單數和雙數
- 我能說出單數和雙數的規律
- 我會用不同的方法辨別單數和雙數
- 我什麼都沒學到

## 二、上完三堂繪本的課之後，我覺得.....

### 附錄四

成長小學一年級 繪本學習  
數學學習日記(第一堂)

日期：\_\_\_\_\_

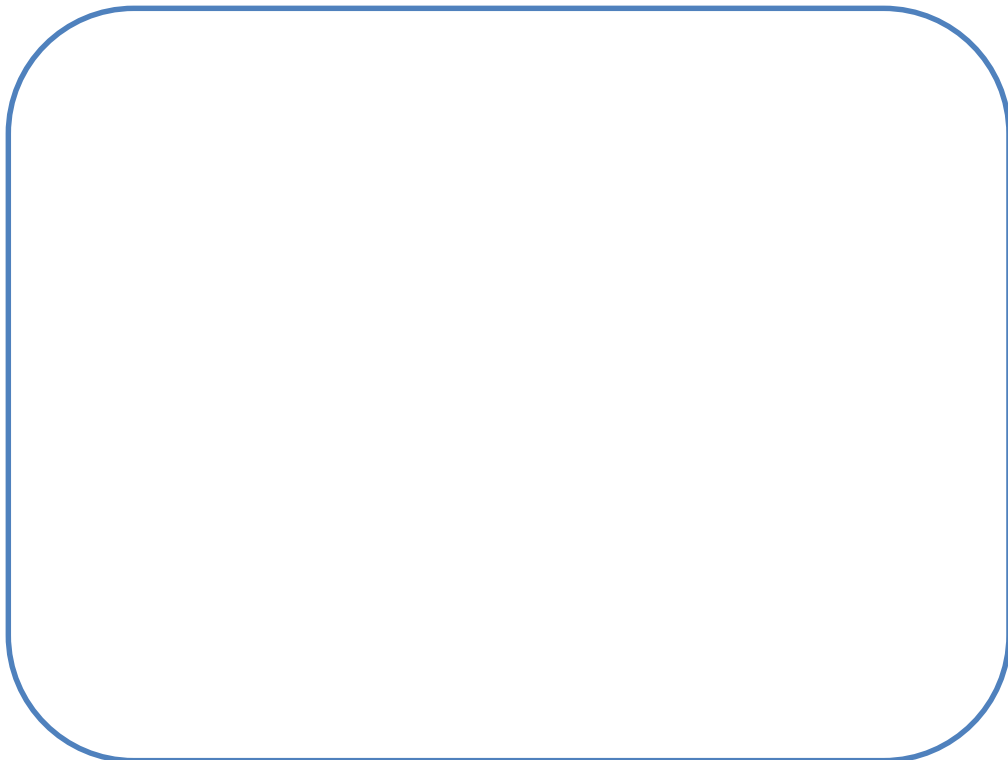
1. 我覺得今天自己的表現：

有待改善 / 一般 / 良好 (請圈一圈)

因為：\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

2. 寫一寫，畫一畫：在今天的繪本活動中，我學到了...



葉秀玲、徐偉民、張國綱（2021）。

數學探究教學對學生根號求值的概念發展及學習態度的影響。

臺灣數學教師，42（2），56-83

doi: 10.6610/TJMT.202110\_42(2).0004

# 數學探究教學對學生根號求值的概念發展及 學習態度的影響

葉秀玲<sup>1</sup> 徐偉民<sup>2</sup> 張國綱<sup>3</sup>

<sup>1</sup>屏東縣立萬巒國中

<sup>2</sup>國立屏東大學教育學系

<sup>3</sup>國立屏東大學應用數學系

本研究採個案研究法，以國中八年級學生 11 人為對象，針對根號求值的主題進行數學探究教學，探討數學探究教學實施的歷程，以及對學生數學學習的影響。教學過程學生採合作學習，教學策略以操作圖像、探究學習為主。本研究蒐集認知測驗及態度量表等量化資料，以及學習單、錄音錄影、訪談等質性資料，經過分析之後發現，探究教學學習保留效果良好，能有助於學生建構正確數學概念，且對學生學習態度有正向影響。

**關鍵詞：**個案研究、數學探究教學、學習態度影響

## 壹、緒論

### 一、研究動機與背景

相信很多人回憶起國中時期的數學，成績是慘澹的，搞不懂  $XY$  方程式、根號怎麼算，學了好像也不知道哪裡用得到。現代因為科技發達、知識爆炸，學校教育迫不及待想給學生大量整理好的知識，希望學生能有系統的快速吸收，卻忽略了這些知識都是經年累月由許多學者研究探索得來的，數學知識在被世人發現時當下的雀躍，現在學生卻是常無法理解而抱怨。而現今教師的教學受限於時間與進度，無法讓學生用太多時間去思考探究這些數學原理，死記硬背的結果是，學生搞不清楚數學公式、規則從何而來，常寫錯或是不完整，也常分不清楚這些公式應在哪些情境使用。

人從自然界中看到的數寫成自然數，要擴展數的領域方法是通過納入新的符號，之所以能延伸出新的數像  $0$ ， $-2$ ， $3/4$ ，是以抽象的符號為形式創造出來的，今日我們處理這樣的數有如家常便飯，很難相信一直到十七世紀，這些數還沒有被普遍認為跟正整數具有同樣的合理性，而一旦需要派上用場時，人們總是時常懷疑與不安。看來人類依戀「有形的東西」，如同通過自然數來作例證這種天生的傾向，難怪從自然數擴展到有理數要如此耗費多時 (Richard, Herbert & Ian, 1941 / 引自容士毅譯, 2010)。我們可以想像一般的國中學生，當要從有理數要擴展至根號的無理數，具體數量要進展到抽象代數形式，在只有講述、沒有其他方式幫助思考理解的情況下，學習歷程應是艱辛又漫長。目前中學教材讓學生從文字敘述學習數學概念，學生缺乏提出假設、設計實驗、驗證等批判思考能力的訓練，而這些探究能力是各先進國家視為非常重要的能力，如何在教育現場中融入探究能力的培養，無疑是數學教學急待解決的問題。

最近幾年教育會考數學成績的呈現，顯示將近三成國中生數學學習需要加強，學生在教學現場展現的學習動機不高，有些學生很早就有放棄數學的心態，目前以講述為主的教學無法改善學生學業表現不佳的現況，教育理念應重新定位為引發學生「主動學習」，老師的角色不只是提供知識，而是擔任學生主動探索與建構知識過程中的嚮導與諮詢者。因此，研究者希望以提升學習興趣、引發學生思考討論的探究教學，設計實施教學活動並檢驗其對學生數學學習的影響。

在現今所使用的數學教材中，根號求值的部分一向不被重視，學生遇到無理數的根號值時，只是把根號寫下來，並不清楚它的意義與數字大小，不會想要把根號值求出來，這不利於後面學習根號的運算。如果是十分逼近法求無理數的根號值達三個位值的題

目來說，一題要花五、六分鐘以上的時間，對於現今學生只是解決考試題目，不是於現實中必須求得根號實際值的情況，會認為求幾位數的根號近似值，計算很麻煩且花太多時間，如果真有需要時學生會直接拿計算機來按。根號值如果是有理數就會以因數分解來作計算，但是學生如何判斷根號值是有理數或無理數？我們是否能找到一種計算根號值的方法，無論是根號值是有理數或無理數都能適用，不需要事先判斷，只是按照同一個計算模式就能得出結果。

## 二、研究目的

基於上述，本研究預計發展利用和的平方公式的原理，找出根號求近似值計算規則之數學探究活動，並探討以下的目的：

- (一) 根號求值探究教學實施的歷程。
- (二) 根號求值探究教學的實施對學生數學學習的影響。

## 貳、文獻探討

### 一、根號求值的相關概念

距今四千年前的巴比倫人運用表格來計算開平方，類似查表法的方式，古希臘西翁（Theon，公元四世紀）的著作中提到開平方法，但就方法的完整性而言，不及我國公元一世紀九章算術提到的開方術。長久以來，代數被認為是進入較高階數學的門檻，學生具備這基本能力才能邁向未知數的世界，根號是一元二次方程式求解、畢氏定理不可或缺的元素，但國中生在方根的意義與運算的學習成效不彰，在學習方根時，對於新的符號、概念常容易發生錯誤，且學生所表現的數學態度傾向於負面（蘇慧娟，1998）。所以如何讓學生了解方根的意義，進而幫助其根式的運算，使學生數學態度有所轉變，是本研究想達成的教學目標。

Bruner（1966）從人類運思的觀點，認為表徵是指人經由認知表徵的過程中獲得知識，將表徵分為三種類型：

- (一) 動作表徵（enactive representation）—指個人藉由動手操作來理解獲得知識。
- (二) 圖像表徵（iconic representation）—指個人利用對物體影像留在記憶中的心像來獲得知識，當具體物件消失時，仍能依照腦中實物的心像，來進行內在的運思活動。
- (三) 符號表徵（symbolic representation）—指個人運用符號、語言文字為依據去認知

理解外界事物。

根據 Bruner 的研究發現，認知表徵是隨著年齡逐漸發展，其發展的順序依次為動作表徵、圖像表徵、符號表徵。本研究嘗試設計讓學生操作紙片黏貼出正方形面積，讓學生由實際操作認知根號的概念，根號不再只是計算麻煩的數字，再引導學生從拼貼正方形過程的圖像，去思考探究其中面積與邊長的數學規律，將計算步驟整理簡化，最後能寫出根號計算的模式。

## 二、數學探究的意涵

在 1900 年之前大多數教育學者將科學視為是知識的組體，學生經由教師講述式教學來學習知識。Dewey 對科學教學太過於強調訊息的累積提出批判，他認為學生學習科學不只是學習知識而已，同時也應學習求知過程或推理方法（洪振方，2003）。之前探究教學大多運用在自然科學教學上，數學探究教學是近來數學教育的潮流，如洪振方（2003）於其探究教學研究中整合發展出「創造性探究模式」（簡稱 CIM），「創造性探究模式」其核心為「探索」、「解釋」、「交流」、「評價」，其內容如下：

### (一) 探索成份

1. 形成問題與假說：觀察並使用先前的探究結果及理論產生有效的問題、發展假說、進而做臆測。
2. 設計研究和產生數據：給予定義和控制變因、選擇適當的方法、進行實驗或調查研究、及蒐集數據。

### (二) 解釋成份

1. 詮釋數據：處理和分析數據、辨識型態、和做推論。
2. 建立論證：實驗結果連結到假說或理論架構以建立解釋、提出新的預測、以及形成通則。

### (三) 交流成份

1. 說服：說服同儕接受探究發現的結果和重要性。
2. 辯護：用批判的方法做判斷、經由比較來評價、以及為知識主張做辯護。

### (四) 評價成份

1. 時時評價「探索」、「解釋」、「交流」等工作及計畫之可行性。



2. 回顧與評估在「探索」、「解釋」、「交流」、及「評價」過程中學到什麼及如何習得。

之前探究教學大多運用在自然科學教學上，數學探究教學是近來數學教育的潮流，在國教院（2019）公布之《十二年國教課程綱要總綱》中提到「過去以學習知識為目的，未來要求學生不僅學知識還要能將知識運用和實踐於生活當中。目的在於培養終身學習者，能自主選擇適合的學習方式，並且對於日常生活遇到的問題，能夠進行系統性思考和判斷。」文中指出培養學生核心素養的「策略一為調整教學方式，依循核心素養此主軸，老師們在教學上應深入學習知識，並且強調實作、探究能力。素養導向教學原則包括…重視學習歷程，了解學生在學習過程中所遇到的問題、觀點等，進一步協助學生可以找到更適宜的學習方法，並提高學生主動探究延伸內容的意願」。在強調學生主動學習、培養素養的教育策略改革方向上，探究教學成為未來教育的新趨勢。

Whitin（2006）提出數學探究教學六個重要特徵（key feature）：（一）細心觀察（二）採用多元的觀點（三）引起（raising）論題（四）提供臆測（五）設計與執行計畫（六）反思探究結論。探究教學活動進行時，教師透過包含明確目的、精心設計的學習任務安排，提供學生參與數學思考與數學創造的機會，引導學生去發現關鍵的數學想法，讓學生享受另類的數學課堂模式，建立個人的數學經驗，願意主動嘗試並建立對自己常理思考的信心，進而達到數學概念的理解。探究教學能讓師生間的溝通更加順暢，使數學成為可參與的活動，而不是被灌輸的知識（黃家鳴，2005）。

真正的數學活動會有複雜多元想法這樣的特色，會使用典型的數學推理原則，包括臆測猜想、推論解釋、定義，與以記憶背誦為基礎的活動對比之下，數學活動有許多思考運作的程序。在進行學習任務的同時，教師在一旁關注並適時給予提點，要求學生反思其他人提出的想法，這做法能支持學生取得進展。探究教學裡師生共同分擔發展數學理念的責任，學生提出的想法或許不夠完整，教師要教導學生如何用語言和符號去紀錄他們的想法，這對於他們把自身的想法推論形式化非常有幫助（Kuster, Johnson, Keene, & Andrew-Larson, 2017）。

在許多研究成果發現，探索活動是種促進學生心理運作與外界環境互動的活動，提供檢測學生知識或意義網絡的環境，學生在這樣的環境下許多概念或關係的連結鍵容易浮現（謝佳叡、唐書志，2017）。在一份有 1034 位隨機抽樣的台灣中學生的研究調查發現，超過八成的中學生認為一個理想數學教師應提供讓學生探索或動手做的活動讓學生欣賞數學（謝豐瑞、唐書志、宋玉如、王婷瑩，2008）。這些研究結果顯示數學教學使用

探究教學法有助於提升學生數學學習。

本研究從文獻探討中得到啟發，首先從學生生活常見的披薩設計非例行性問題，以如何確定吃到飽披薩面積是原本披薩的兩倍大引起學習動機後，臆測給定面積的正方形邊長為何，是否可從之前學過的乘法公式中尋找解決方法，讓學生利用操作圖像去探究數學原理，學生經由師生問答及互相討論交流想法，教師提供線索讓學生去思考歸納，找出根號求值的計算規則，應用和的平方、乘法對加法的分配律整理算式，並對直接開方法提出評價。

### 三、合作學習模式

我們求學過程都是在傳統講述法下度過，傳統講述法因為簡單方便、經濟快速、省時省事及可以應付考試的這些優點，使它普遍被教師所採用（蔡文榮，2007）。根據美國的全國訓練實驗室（National Training Labs in Bethel, Maine）所提出的「學習金字塔」的理論，以學習後的保留比率（retention rate）來比較，聆聽式的學習保留效果僅有 5%，小組討論式有 50%，實作演練式有 75%，教給別人或立即應用則高達 90%（引自蔡文榮，2007），無怪乎學校老師們上課講解很多，但留在學生的腦袋裡的只有少許。

講述教學模式為學生自己聽懂老師的講述，碰到聽不懂的部分只能放棄，合作學習則強調透過小組成員的合作來學習課程，學生可以跟同組組員請教不懂的部分，彼此交流各自觀點、互相學習。十九世紀末時 Slavin (1999) 和 Johnson David 與 Johnson Robert (1999) 等人提出理論並倡導合作學習，根據美國的一項國家調查發現，教師十分支持課堂中使用合作學習策略，其中最顯著的是大多數學生反映出熱愛學習的態度，並獲得具體的學習成效，合作學習已有十分豐碩的成果及影響力，被公認為教育改革中最成功的項目之一（Slavin, 1999）。在下文中僅就本研究參考的合作學習模式稍加說明，「小組遊戲競賽法」(Team Games Tournaments, 簡稱 TGT), 「共同學習法」(Learning Together, 簡稱 LT)。

共同學習法為組員兼採階段性任務合作，學生按照分配的工作執行，完成任務並統整成該組作業。小組遊戲競賽法是同組成員共同完成教師指派的學習單，單元學習完成驗收成果時舉行小組的競賽遊戲。求根號的近似值的探究教學，因使用紙片操作剪貼後要觀察討論，需要多人分工合作、提供想法，使用「共同學習法」，希望學生與同組組員互相學習，熟悉討論分享的合作學習模式，檢視本身的概念與思考模式，藉由彼此交換想法開啟不同觀點，學生有各自的幹部任務，大家共同分工合作完成學習單。在探究教

學活動最後驗收學習成果時，使用「小組遊戲競賽法」，研究者希望學生運用剛學得的觀念技巧，立刻用在競賽上獲得成就以加深印象。

## 參、研究設計與實施

本研究採用個案研究法進行資料蒐集與分析，選取屏東縣某國中八年級兩組學生參與研究。本研究將個案在實施數學探究教學時，探究思考的過程與解題表現，蒐集其測驗、問卷、訪談、學習單、錄音錄影，分析學生數學學習的成效。

因此本研究設計與實施將以個案研究、研究對象、研究工具、資料來源與分析等四小段作如下說明：

### 一、個案研究

個案研究為質性研究的一種，在自然情境下蒐集多種資料，對某種現象進行整體性探究，透過與研究對象互動對其行為和意義建構獲得解釋性理解的活動(陳向明, 2002)。

本研究蒐集個案在實施數學探究教學時，根號求值其數學概念探究思考的過程與解題表現，從其測驗、問卷、訪談、學習單、錄音錄影，分析學生數學學習的成效及影響。質性研究本身帶有研究者主觀的看法，常面臨實證主義對其信效度的質疑，所以本研究以三角校正來確保研究結果的可信度。

### 二、研究對象

本研究選取屏東縣某國中八年級兩組學生，於八年級升九年級暑假課業輔導課程實施教學研究，第一組學生有五人，三位男生兩位女生，第二組學生有六人，三位男生三位女生，從認知測驗前測平均數來看，第一組學生平均數 39.8 分略高於第二組 36.8 分，兩組學生數學程度差異不大。

### 三、研究工具

#### (一) 認知測驗

在教學實施前，以前測試題了解學生在根號求值的學習狀況及起點行為，依據九年一貫國中八年級數學能力指標項目表及雙向細目表進行分析。研究者將根號求值數學認知層次分為認知、理解、分析、應用，編製前測試題。預試試題施測對象為本校九年級

學生97位，預試試題鑑別度分析均達0.2以上鑑別水準，試題具有鑑別度，難易度平均值為0.39。採用預試試題6題選擇題，加入1題計算題，形成7題的正式測驗，總分為46分。後測及延後測採用相同類題更改數字，於2019年7月9日施行前測、7月24日施行後測、10月17日施行延後測，前測、後測及延後測試題及認知測驗試題難易度及鑑別度見附錄，認知測驗數學能力指標項目表及雙向細目表如表1。

表 1

認知測驗八年級數學能力指標項目表及雙向細目表

題數	數學能力指標	認知	理解	分析	應用
3	8-n-01 能理解二次方根的意義	1	0	1	1
4	8-n-02 能求二次方根的近似值	0	2	1	1
合計	7	1	2	2	2

### (二)數學學習態度量表

本研究欲探討實施數學探究教學後對學生數學學習態度的影響，採用同樣針對國中生的數學學習，由林星秀（2001）所編訂的「數學學習態度量表」，於探究教學之前、之後各施測一次、以態度量表得分來檢視學生情意方面的影響。問卷共有 30 題，分成四個目標向度：學習慾望、學習過程、學習方法、數學信念。問卷採五點李克氏計分法，信度分析採 Cronbach  $\alpha$  係數，四個向度的內部一致性分別為 0.89、0.84、0.72、0.81，量表的總信度為 0.93。

### (三)教學錄影錄音

教學活動實施時需教學錄影及錄音，研究者請學生家長簽署同意書，取得資料蒐集的授權。藉由教學錄影及活動錄音，研究者能了解師生互動及學生分組探究過程，並將記錄轉錄成逐字稿，作為分析學生學習歷程的依據。

### (四)學習單

根號值這類無理數既沒有規則又計算繁瑣，導致學生對計算根號值興致缺缺，研究者設計學習單任務，請學生操作限定邊長單位（十進位）的紙片拼出指定面積的正方形，讓學生從操作中觀察思考，從操作經驗中體認根號值代表正方形邊長，操作看得到的實物，逐步找出邊長（即根號值）為何數。學生剪紙拼圖後，再讓學生觀察拼正方形過程

歸納出計算形式，將原本和的平方公式形式整理，使用乘法對加法的分配律改寫為每次排出面積所分配的邊長值乘積。學習單一所求根號值為有理數，先讓學生操作可以全部排完的面積數字，學習單二及三所求根號值則為無理數，讓學生由觀察前面操作有理數根號值的規則，應用在無理數根號求值的計算，根號求值分組學習單三張的內容，如表 2。

表 2

根號求值分組學習單表

<b>學習單一</b>			
1.求 $\sqrt{169}$ 的值	2.求 $\sqrt{225}$ 的值	3.求 $\sqrt{576}$ 的值	4.求 $\sqrt{1444}$ 的值
5.求 $\sqrt{15376}$ 的值	6.求 $\sqrt{121104}$ 的值	7.求 $\sqrt{2034.01}$ 的值	8.求 $\sqrt{3552.16}$ 的值
<b>學習單二</b>			
1.求 $\sqrt{40}$ 的近似值到個位	2.求 $\sqrt{76}$ 的近似值到個位	3.求 $\sqrt{200}$ 的近似值到個位	
4.求 $\sqrt{700}$ 的近似值到個位	5.求 $\sqrt{540}$ 的近似值到個位	6.求 $\sqrt{4496}$ 的近似值到個位	
7.求 $\sqrt{92416}$ 的近似值到個位	8.求 $\sqrt{183184}$ 的近似值到個位		
<b>學習單三</b>			
1.求 $\sqrt{423}$ 的近似值到小數點後第二位	2.求 $\sqrt{789}$ 的近似值到小數點後第二位		
3.求 $\sqrt{521}$ 的近似值到小數點後第二位	4.求 $\sqrt{1234}$ 的近似值到小數點後第二位		
5.求 $\sqrt{2706}$ 的近似值到小數點後第二位	6.求 $\sqrt{8617}$ 的近似值到小數點後第二位		
7.求 $\sqrt{27845}$ 的近似值到小數點後第二位	8.求 $\sqrt{60479}$ 的近似值到小數點後第二位		

### (五)半結構式的訪談大綱

訪談問題由研究者與數理教育專家討論後自行編製，訪談問題大綱分為四個向度，如表 3，分別為探究學習能提高學習興趣／意願、有助於了解數學原理、有助於訓練思考、能提升學生自信及成就感，訪談時進行錄音，藉以了解分析學生經歷探究教學後，對數學學習態度的轉變。

表 3

訪談問題大綱表

向度	訪談問題
探究學習能提高 學習興趣／意願	1. 之前有使用探究的方法來學習數學嗎？有令你印象深刻或覺得有趣嗎？
	2. 探究學習能提升你學習的興趣嗎？
	3. 你以後學習上會不會試著去探究新知識背後的原因？
	4. 如果有其他探究學習的活動，你有興趣要參加嗎？
	5. 對於不了解的事物你會試著用探究的方法去找尋答案嗎？
探究學習有助於 了解數學原理	1. 你喜歡吸收新知並探究其原理嗎？
	2. 你對之前學習過的數學方法、公式及定理，了解它的原理嗎？
	3. 探究學習是否有助於讓你了解數學的原理？
探究學習有助於 訓練思考	1. 探究問題時你想要先試著自己想想？還是直接向別人詢問？
	2. 在進行探究的過程中你遇到哪些困難？此時你希望老師提供什麼幫助？
	3. 老師上課所提供的提示及線索，是否幫助你思考出解決辦法？
探究學習能提升 學生自信及成就 感	1. 你對你的數學學習狀況感到滿意嗎？
	2. 探究學習之後，你有覺得自己數學好像變得厲害一點嗎？
	3. 算出難題的答案有讓你獲得成就感嗎？

## 四、資料蒐集與分析

### (一)資料的蒐集

本研究所蒐集的資料有上課錄影、活動錄音、學習單、問卷、認知測驗、訪談，作為分析學生學習狀況資料的依據，了解學生數學探究教學的認知學習成果及情意方面的影響。

### (二)資料分析

本研究的目的是在探討數學探究教學對學生數學學習的影響，前述的資料進行蒐集整理後，資料分析分為使用質性資料及量化分析。質性資料包括活動錄音、教學錄影、訪談、學習單、認知測驗計算題。量化資料包括問卷、認知測驗選擇題。本研究將蒐集的

資料轉錄成文字及圖檔後進行資料編碼，資料編碼規則說明如下，資料編碼採日期（月日）－對象（研究者：R、學生：SN、小組：GN）－事件（活動錄音：VO、錄影：VD、訪談：INV）的格式，如 0716－S2－INV 代表資料是 7 月 16 日學生編號 2 的訪談。

### 1. 量化分析

本研究量化資料包括問卷、認知測驗。學習態度問卷量表得分與三次認知測驗的平均得分，使用 SPSS 統計軟體以無母數分析的 Wilcoxon 檢定做量化分析，顯著水準為 0.05，判斷分析探究教學對學生數學認知方面的學習及學習態度是否有顯著差異。

### 2. 質性分析

蒐集教學錄影錄音、學習單、訪談、及前測、後測、延後測的計算題來進行質性分析。所蒐集的質性資料採用三角校正的方式，將探討的主題在同一情境中，從不同對象的觀點論述（學生、教師）及多樣的資料來源（學習單、錄音、訪談...），來交叉驗證同一現象的真實性，以減低研究者一方的偏見，增進研究結果分析判讀的正確性。

## 肆、研究結果與討論

### 一、根號求值探究教學實施的歷程

根號求值探究教學共設計 6 節課，讓學生先從圖像操作出發，讓學生觀察紙片拼正方形活動過程、教師提供線索引導學生思考、分組互相討論後共同完成根號求值學習單。學習單一的任務是請學生將  $10 \times 10$ 、 $1 \times 1$  單位的紙片剪貼成指定面積的正方形。研究者在任務提示學生先將  $10 \times 10$  單位的紙片先拼出最大正方形，再將剩餘面積以  $1 \times 1$  單位在正方形外圍拚成 L 形，學生將正方形、L 形按照不同邊長單位整理面積算式，計算至小數一位時要求學生畫圖表示。學習單二的任務是請學生思考無理數的根號值，以拼紙片的步驟如何逐位去計算，再將想法算式進行精煉整合，練習求出兩位到三位的根號值。學習單三的任務是請學生將無理數的根號值的計算形式建模，將從每一層面積如何計算得到邊長的原則逐步釐清，並將其寫成完整算式，並於活動後寫下學習心得，學生練習求出四位到五位的無理數根號值，根號求值的探究教學活動實施歷程見表 4。

表 4

探究教學活動實施歷程表

學習 任務	任務指示	學生活動	教學目標	教學 時間
學習 單一	以十進位邊長單位的紙片，剪貼拼出指定面積的正方形，得到正方形邊長	將 $10 \times 10$ 單位的紙片先拼出最大正方形，再將剩餘面積以 $1 \times 1$ 單位拼在正方形外圍	學生透過實物操作、觀察、分組討論進行圖形操作、探究計算根號值的規則	90 分
學習 單二	以圖形拼貼規則計算兩位到三位根號值，並將計算形式化	學生思考、解釋拼紙片的步驟，處理分析數據、釐清、形式化逐位去計算無理數根號值的步驟，並歸納出計算模式	透過教師提問及問題討論，引導學生思考判斷、交流說服、精煉想法，將計算形式寫出並統整	110 分
學習 單三	將求無理數根號值的計算形式化，計算四位到五位的無理數根號值	學生將思考探索得到根號求值的計算形式加以應用、驗證、評估	將探究教學得到的結論應用並評估	45 分
小組 競賽	計算根號近似值	小組成員上台計時競賽	透過小組競賽，檢視學習成果、經驗交流	35 分

進行學習任務一，根號求值的題目是有理數，研究者觀察到學生剛開始會從教師曾示範的方法如因數分解，計算出根號值再去剪紙，有些學生開始會去思考根號值如何得到。計算根號 1444 時，S3 跟 S2 嘗試用因數分解，以  $2\sqrt{361}$  計算根號 1444 得到 38，S3 計算出根號值後又去思考 38 裡 30 是怎麼得到的，「30 要怎麼來？」(0712-G1-VO)。將研究者以教具引導說明紙片操作求  $\sqrt{1444}$  的過程敘述如下，1444 先從 14 張  $10 \times 10$  的紙片先排出最大正方形，研究者問學生「要用掉幾張  $10 \times 10$  的紙片？你們找 14 以內的最大平方數」，學生回答「9」(0716-G1-VO)，兩邊各排 3 張共拿出 9 張，所以邊長十位是 3，14 張 100 用掉 9 張 100 剩 5 張，5 張 100 加上 44 成 544，在  $30 \times 30$  正方形兩側將 544 張  $1 \times 1$  的紙片再排在外圍，每排  $t$  兩側就需要  $t \times (2 \times 30 + t)$ ，544 要排出兩個長 30 寬  $t$  的長方形與一個邊長  $t$  的正方形，R：「因長方形面積較大，所以將



544 除以六十幾來計算，所以邊長個位是多少？」，學生回答 9，研究者提醒學生  $60 \times 9 = 540$ ，但  $9 \times 9$  會進位得到  $9 \times 69 = 621$  超過 544，所以 t 值改為 8 可排成 L 形面積為  $8 \times (2 \times 30 + 8) = 8 \times 68 = 544$ ，邊長個位是 8，求得面積 1444 的正方形邊長為 38，寫出  $\sqrt{1444} = 38$  後，研究者問學生「之前寫 3 後來寫 6 是為什麼？」(0716-G1-VO)，例如圖 1。

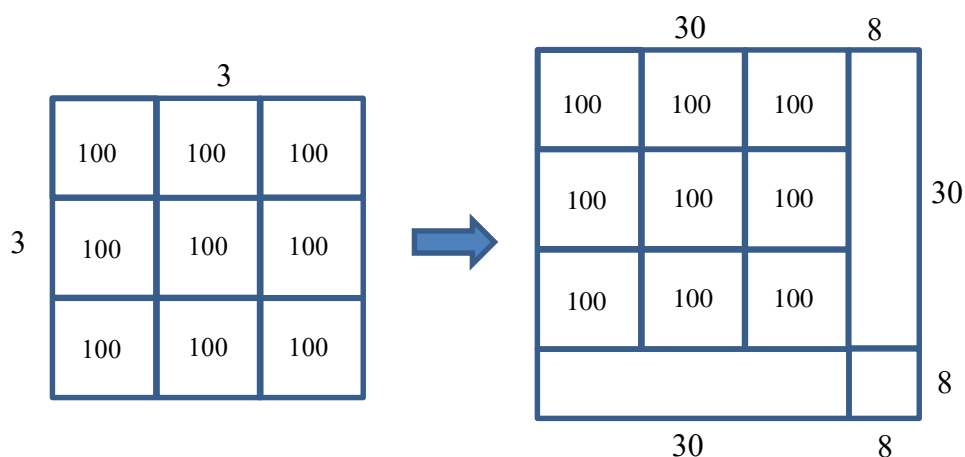


圖 1 紙片操作 $\sqrt{1444}$ 求值過程說明

我們請學生將拼貼好的正方形紙片浮貼在學習單上，並在旁寫出計算式子說明整理算式的過程，例如圖 2。以學習單一的 $\sqrt{169}$ 為例，學生要拼出面積 169 的正方形找出邊長 $\sqrt{169}$ ，先用 1 張  $10 \times 10$  紙片拼出小正方形，再將 69 排在小正方形外圍成 L 形，將它拼成大正方形 169。過程中學生觀察到大正方形 169，外圍 L 形紙片需要兩倍小正方形邊長 10 再加上 L 形紙片寬 3 的規則，並引導學生將大正方形面積寫成小正方形面積與 L 形面積分別加起來，將十位邊長與個位邊長與大正方形面積寫出關係式。前面先寫小正方形面積  $10^2$ ，將 L 形面積中 2 塊  $3 \times 10$  及 1 塊  $3 \times 3$ ，以乘法對加法的分配律整理寫出算式，將根號求值算式整理寫成  $169 = (10 + 3)^2 = 10^2 + 2 \times 10 \times 3 + 3^2 = 10^2 + 3 \times (20 + 3)$ ，得 $\sqrt{169} = 13$ ，例如圖 3。

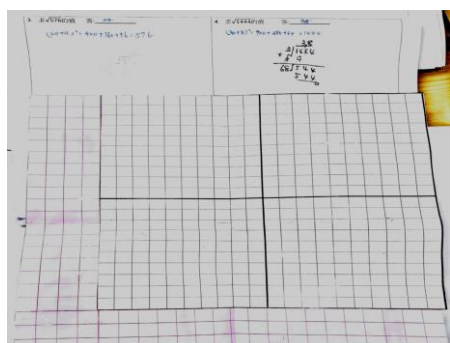


圖 2 G2 學習單一圖片拼貼

$$\begin{aligned}
 169 &= (10+3)^2 \\
 &= 10^2 + 2 \times 10 \times 3 + 3^2 \\
 &= 10^2 + 3(20+3)
 \end{aligned}$$

圖 3 G1 學習單一根號算式整理過程

研究者常示範到某一階段就停止，例如  $\sqrt{2034.01}$ 、 $\sqrt{3552.16}$  第三層小數部分的根號值，研究者只示範引導說明  $\sqrt{1444}$  前兩層，例如圖 4。研究者要求學生自己依照規則去思考第三層要怎麼擺，但是學生反應太難了想不到，研究者才在下一節課示範引導說明，將  $\sqrt{183184}$  正方形拼到第三層，研究者將教具外圍按照邊長單位貼上不同顏色膠帶，方便學生辨識，例如圖 5。



圖 4 上課教具示範情形一

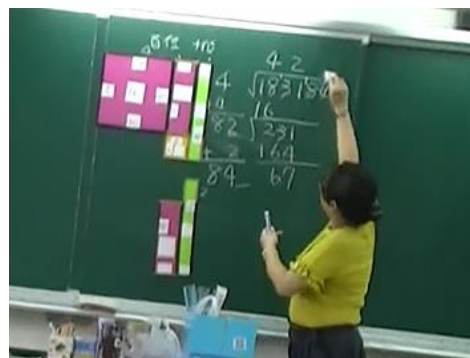


圖 5 上課教具示範情形二

學習單二的任務根號值是无理數，請學生將根號的計算形式建模，學生有的一層一層分開寫，有的整理成一個式子，以  $\sqrt{540}$  為例，540 中先從面積的百位算起，5 個 100 排成正方形需要每邊排 2 個  $10 \times 10$ ，上面的 2 是紀錄十位邊長。 $2 \times 2 = 4$ ，540 已排 400 剩下 140，140 再排上邊長 20 的正方形兩邊，個位排  $t$  就需要 2 個 20 加  $t$ ，一次需要  $40 + t$ ，140 可以分配到 3 個 43 所以個位寫 3。個位用掉 43 乘 3，140 用掉 129 剩 11，往下計算十分位，邊長 23 的正方形兩邊，十分位排  $t$  就需要 2 個 230 加  $t$ ，一次需要  $460 + t$ ，1100 可以分到 2 個 462，1100 用掉 924 剩 176，例如圖 6。學生算出十位數字 2 之後，將算出的邊長個位數字 3 寫在底下的算式，學生把 140 除以 43 得到 3 寫在之前 4 的旁邊，寫出  $\sqrt{540}$  近似值 23，例如圖 7。相較於兩種計算模式，圖 7 學生將商 3 與之

前的餘數 4 擺在一起容易造成混淆，因此研究者建議學生將 3 寫在同樣是商 2 的旁邊，在學習單二學生開始要建立根號的計算模式，學生必須自己將計算模式作統整合併，去蕪存菁後成為清楚簡明的固定形式。

求 $\sqrt{540}$ 的近似值到個位 答: 23

圖 6 學生的計算模式一

的近似值到個位 答: 23

圖 7 學生的計算模式二

學生在學習新概念時會從舊有的經驗出發，比如會將除法運算中從最前面開始計算，或者被除數已計算完要繼續往後算時只補 1 個 0，把除法計算模式帶到根號值的計算裡，教師須讓學生理解數學算式背後的原理，學生才能轉換並接受新概念。研究者發現第一組學生 $\sqrt{92416}$ 面積切割的方式不正確，學生從最前面往後切割成 92 個 1000、41 個 10，1000 與 10 都不是完全平方數，例如圖 8，研究者說：「邊長的位值是從後面往前面數個位十位，面積也是從後面往前面數。你們從前面切的時候是 92 個一千，一千不能寫成平方數，9 萬的萬才能寫成平方數」(0717-R-VO)。第二組雖然練習寫直接開方法的計算，40 先拼出邊長 6 的正方形，40 減 36 剩下 4，接著要算小數一位，學生忘記面積位置要補兩個 0，只補一個 0，例如圖 9，研究者跟學生以圖形概念說明：「邊長平方得到面積，所以邊長進一位時面積要進兩位，個位 1 乘 1 得到 1，但下一位十位 10 乘 10 得 100，100 和 1 相差兩位」(0717-R-VO)。

求 $\sqrt{92416}$ 的近似值到個位 答: 304

圖 8 G1 學習單一

求 $\sqrt{40}$ 的近似值到個位答: 7

圖 9 G2 學習單二

小組競賽採計時賽，學生無不卯足全力比賽，加油打氣聲音不斷，有不少學生如 S10、S11、S3、S4，一兩分鐘就求出根號值到小數後第三位，之前學生寫同類型題目平均需花上 5 到 7 分鐘以上的時間。第一組所花時間平均 2 分 16 秒，例如圖 10。第二組所花時間平均 2 分 54 秒，例如圖 11。

組員平均完成時間：2 分 16 秒

組員名字	完成時間	題目及答案
	2分08秒	$\sqrt{76} = 8.71$
	2分02秒	$\sqrt{72} = 8.49$
	1分36秒	$\sqrt{19} = 4.36$
	3分55秒	$\sqrt{56} = 7.48$
	1分30秒	$\sqrt{52} = 7.21$
	分 秒	$\sqrt{\quad} = \quad$

圖 10 G1 小組競賽紀錄

組員平均完成時間：2 分 54 秒

組員名字	完成時間	題目及答案
	2分56秒	$\sqrt{47} = 6.85$
	2分25秒	$\sqrt{12} = 3.46$
	1分8秒	$\sqrt{35} = 5.92$
	2分50秒	$\sqrt{74} = 8.61$
	1分30秒	$\sqrt{43} = 6.56$
	1分26秒	$\sqrt{75} = 8.66$

圖 11 G2 小組競賽紀錄

學生之前學習用十分逼近法來計算根號近似值，把披薩面積增為兩倍大，雖然是生活中會碰到的情境，但是因為十分逼近法需要計算很多次的多位數的乘法，對根號求值有概念的學生還會因為計算錯誤且非常耗時，不喜歡這類計算根號值的題目。我們將學生生活經驗中喜愛的披薩設計根號求值應用題，讓學生換成直接開方法來計算，題目如下：

答樂拉新推出方形吃超飽披薩，廣告宣傳中吃超飽披薩面積是原本披薩的 2 倍大，阿蘭想搞清楚廣告是否屬實，所以她去買了吃超飽披薩和原本披薩各一份，原本披薩是邊長 28 公分的正方形，如果店家廣告屬實，則阿蘭量到吃超飽披薩的邊長應該是幾公分（取到整數位）？

吃超飽披薩需要 2 倍  $28 \times 28$  所以面積為 1568，求出面積 1568 的正方形邊長，先分成 15 個  $10 \times 10$  及 68 個  $1 \times 1$ ，15 個  $10 \times 10$  兩邊先各排 3 個拼成正方形，用掉 9 個  $10 \times 10$ ，剩下 6 再補兩位 68 總共 668，再將 668 排到邊長 30 的正方形兩側圍成 L 形，所以將 668 除以六十幾得 9， $9 \times 69$  得 621，668 減去 621 得 47，補兩個 0 再以 4700 除以七百八十幾得 5，因  $6 \times 786 = 4716$  超過 4700， $5 \times 785 = 3925$ ，算出面積 1568 的正方形邊長為 39.5，兩組同學依據題目要求將披薩邊長求到整數，學生使用直接開方法解決生活情境根號值的應用題，例如圖 12、圖 13。探究教學希望利用紙片操作，讓學生理解以和的平方公式形式從最大位值逐層計算根號值，以解決生活情境中根號值經常為無理數，但是無法用紙筆快速計算，只能用計算機來求根號值的問題。

Handwritten student work for Figure 12. It shows a division problem  $\frac{119}{784}$  and a square root calculation  $\sqrt{1178}$ . A red box highlights the result  $789$ , with an arrow pointing to the text "教師訂正" (Teacher correction). Other calculations include  $779 \times 2 = 1568$  and  $37.5 \approx 40$ .

圖 12 G1 應用題解題紀錄

Handwritten student work for Figure 13. It shows a division problem  $\frac{119}{784}$  and a square root calculation  $\sqrt{1178}$ . The text "波薩的邊長應該是幾公分(取到整數位)? 40cm" is written above the work. Other calculations include  $779 \times 2 = 1568$  and  $39.8$ .

圖 13 G2 應用題解題紀錄

## 二、根號求值探究教學學習成效

### (一) 探究教學學習保留效果良好

首先從認知測驗統計資料來看，認知測驗共 6 題選擇每題 6 分，1 題計算題 10 分，總分為 46 分，因 S11 前測時請假未施測，所以將 10 位學生的三次認知測驗得分，使用 SPSS 軟體進行描述性統計分析，得知後測平均得分 40.80 高於前測 39.10，在將近間隔三個月實施的延後測，平均得分 41.20 略高於後測 40.80，延後測與後測平均相當接近，例如表 5。延後測與後測間隔時間相當長，平均得分還能略高於後測，顯示探究教學學習保留效果良好。

表 5

認知測驗前測後測延後測得分平均描述性統計摘要表

認知測驗	人數	最小值	最大值	得分平均	標準差
前測	10	24	46	39.10	7.894
後測	10	28	46	40.80	6.408
延後測	10	33	46	41.20	5.116

將三次認知測驗得分以 SPSS 軟體作 Wilcoxon 符號等級檢定，信賴區間 95%，後測與延後測得分 Z 值為  $-0.135$ ，顯著性  $p$  值  $> .05$ ，表示後測與延後測得分沒有顯著差異，這顯示探究教學對學生數學學習的保留效果良好，例如表 6。



表 6

認知測驗前測後測延後測得分 Wilcoxon 符號等級檢定摘要表

Wilcoxon 符號等級檢定	Z 檢定	漸近顯著性 (雙尾)
認知測驗延後測 - 認知測驗後測	- .135 <sup>a</sup>	.893

註：以負等級為基礎；Wilcoxon 符號等級檢定。

其次從學生的認知測驗的解題紀錄來看，S3 在前測以十分逼近法計算 $\sqrt{15} \approx 3.87$ ，例如圖 14。後測計算題以直接開方法求出 $\sqrt{47} \approx 6.86$ ，例如圖 15、在經過三個月後的延後測中 S3、S7 以直接開方法求出 $\sqrt{73} \approx 8.54$ ，例如圖 16、圖 17。我們從學生解題紀錄發現，學生對探究學習得到的方法印象深刻，學習保留效果良好。

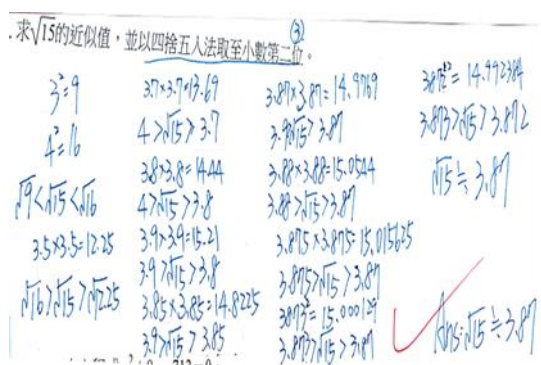


圖 14 S3 前測解題紀錄

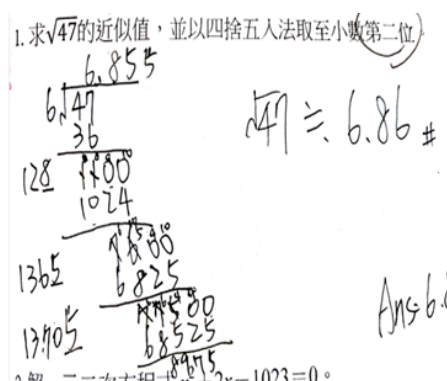


圖 15 S3 後測解題紀錄

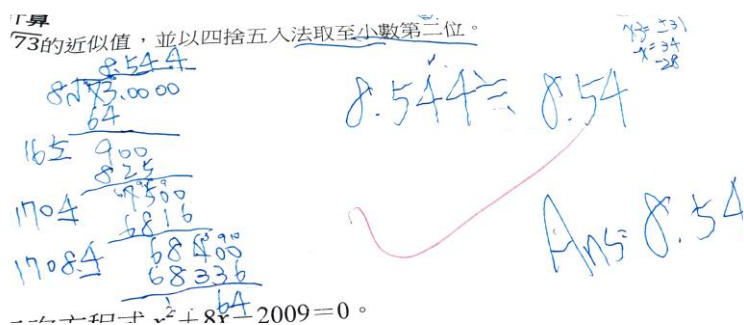


圖 16 S3 延後測解題紀錄

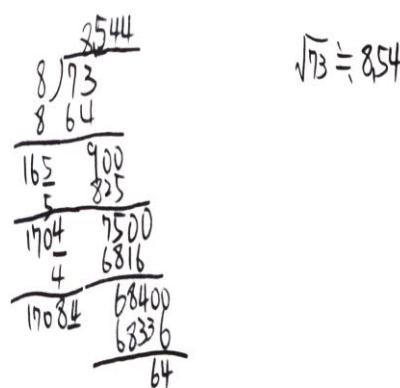


圖 17 S7 延後測解題紀錄

從訪談資料來看，經由探究教學中的提示跟線索了解後，學生學習保留的效果良好。S3：「今天教的那個先加一個正方形，然後再求出它的邊，然後再加一個 L 形，這樣速

度變好快。」R：「你們覺得這樣學了這個方法之後你們可以記很久嗎？」S3：「我覺得會，我應該可以記蠻久的。」(0718-S3-INV)。「知道它是怎麼來的，就不會死死的背，容易記得起來、記得長久。」(0717-S2-INV)。

從認知測驗統計資料、學生解題紀錄，加上學生訪談資料顯示，探究教學對於學生數學學習的保留效果良好。

## (二)探究教學有助於學生建構正確數學概念

首先從認知測驗解題紀錄與錄影資料來對照，S8 在前測以十分逼近法計算 $\sqrt{15}$  得出近似值 3.91，經多次計算後仍與正確值 3.87 有差距，例如圖 18。在進行紙片操作根號值後，研究者請學生在有畫上 1 公分格線的白板上畫出 $\sqrt{3}$  的長度，學生已有根號代表正方形邊長的概念，S8 在畫出正方形邊長來表示 $\sqrt{3}$  時，會留意評估所畫正方形面積大小是否為 3，所以畫出的 $\sqrt{3}$  接近 1.7，例如圖 19。

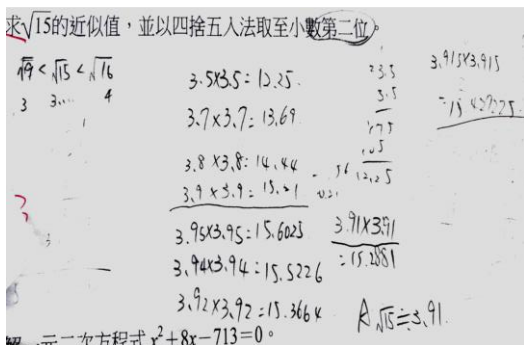


圖 18 S8 前測解題紀錄

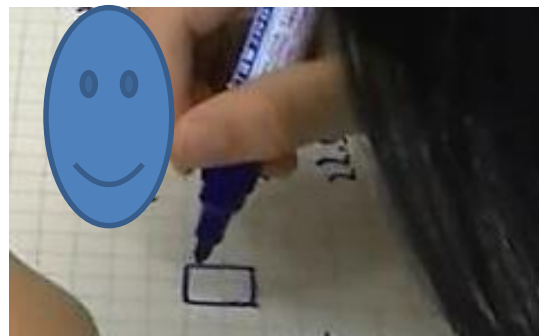


圖 19 S8 上課情況一

S10 原本畫出的 $\sqrt{3}$  長度只有 1.5 不到 1.7，面積不到 3，例如圖 20，S10 看到同學畫的 $\sqrt{3}$ ，覺得自己畫的正方形面積太小不到 3，S10 擦掉正方形重新調整邊長，例如圖 21。



圖 20 S10 上課情況一



圖 21 S10 上課情況二

其次從教學錄音中發現，學生小組競賽經驗中，看到學生體驗、觀察、思考、比較、統整後修正概念，S11 發覺到同樣位數的數字其大小並不會影響根號求值計算的難易度，「數字大小應該沒有關係。」(0719-S11-VO)。S6 則從競賽過程觀察出根號求值容易計算的題目類型。S11 在小組競賽中抽到計算根號 12，被同學抗議「哪有那麼簡單的？欸...欸...」(0719-S4-VO)，S11 在比賽前以為抽到小數字比較容易算，「我就運氣好嘛！」(0719-S11-VO)，藉由小組競賽的經驗，他明白數字小的根號並沒有比較容易計算，「其實 12 也不是很好算，數字不是越小越好算，因為你算到後面...」(0719-S11-VO)。S6 回應 S11 在討論數字小的根號值好不好算，S6 看到其他同學先計算出根號 50 的近似值 7.01，他發現根號求值題目當根號值「答案後面是 1 或 0」會比較簡單(0719-S6-VO)。學生藉由觀察別人及自身的計算經驗，不是透過背誦或教師反覆講述來得到數學概念。

探究教學以學生為學習主體，讓學生有問題就提問，教師提供線索引導，學生解決心中的疑慮才能肯定接納新的概念。因為直接開方法算式裡，商和除數的個位數字相同，是需要學生估算的，除數的個位數字未定，並不是像學生之前計算已知大小的常數，S3 在嘗試估算時須判斷寫出的商數字大小是否是最大，S3：「我們怎麼樣知道我的數字寫太小？」，R：「剩下的數字比除數大就是剩太多，這跟除法一樣，把數字弄大一點，一直到剩下的餘數比除數小。」(0717-S3-VO)。

我們應該重新檢視傳統的教學思維，只以講述來教學，教學生背誦公式、大量練習、仿效教師解題，學生學習數學只是因為是考試科目，如果沒有考試就不想去算數學，學生搞不懂數學，大多數人對於數學的感覺如同在經典廣告詞裡「數學不會就是不會」。數學教學應重視學生數學概念的建構，透過多個面向的思考探究，唯有真正的理解數學才能活用，如此學生才能領略學習數學的快樂。在前導研究中，學生在寫給研究者的卡片中，學生利用數字開根號讓研究者猜字謎，我們見到學生透過探究教學不僅僅是了解學習內容，而是樂在其中，探究教學使學生得以窺見數學的奧妙與趣味，例如圖 22。



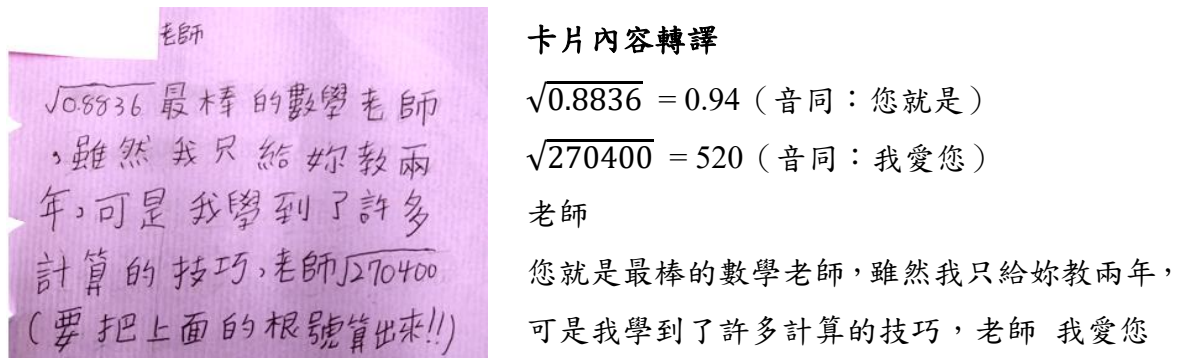


圖 22 學生卡片一

### (三)探究教學對學生學習態度有正向影響

首先從數學學習態度量表描述性統計資料來看，態度量表前測得分平均 109.91 分，後測得分平均 114.64 分，例如表 7。

表 7

態度量表前測後測得分描述性統計摘要表

態度量表	個數	最小值	最大值	平均數	標準差
前測	11	93	133	109.91	12.153
後測	11	87	127	114.64	12.667

將數學學習態度量表前測與後測得分以 SPSS 軟體作 Wilcoxon 符號等級檢定，信賴區間 95%，前測與後測得分 Z 值為 -1.841，顯著性 p 值 > .05，表示學習態度前測與後測得分沒有顯著差異，效果量 .12 也屬於低效果量，例如表 8。

表 8

數學學習態度量表前測與後測得之 Wilcoxon 符號等級檢定摘要表

數學學習態度量表得分	Z 檢定	漸近顯著性 (雙尾)	效果量
學習態度前測 - 學習態度後測	-1.841 <sup>a</sup>	.066	.12

註：以負等級為基礎；Wilcoxon 符號等級檢定。

數學學習態度量表題目分析項目分為學習慾望、學習過程、學習方法及數學信念四個分量，從量表其中各分量前測與後測得分之描述性統計資料來看，學習慾望、學習過程、學習方法、數學信念後測得分平均皆高於前測得分平均，如表 9。

表 9

數學學習態度量表前測與後測各分量之描述性統計摘要表

	態度量表	個數	最小值	最大值	平均數	標準差
前測	學習慾望	11	44	67	52.55	6.773
	學習過程	11	21	31	26.00	3.130
	學習方法	11	10	18	13.18	2.562
	數學信念	11	15	22	18.18	2.401
後測	學習慾望	11	40	66	53.73	7.072
	學習過程	11	19	30	27.36	3.472
	學習方法	11	12	18	15.00	2.000
	數學信念	11	16	22	18.55	2.162

將數學學習態度量表各分量前測與後測得分，以統計軟體 SPSS 作 Wilcoxon 符號等級檢定，學習慾望、學習過程、數學信念三個分析項目顯著性  $p$  值  $> .05$ ，表示探究教學前後數學學習態度中學生的學習慾望、學習過程、數學信念沒有顯著差異，且效果量分別為  $-.02$ 、 $.11$ 、 $.05$  屬於低效果量。在學習方法此分析項目之顯著性  $p < .05$ ，且效果量  $.51$  屬於中效果量，這表示探究教學前後數學學習態度中學生的學習方法有顯著差異，例如表 10。

表 10

數學學習態度量表前測與後測各分量之 Wilcoxon 符號等級檢定摘要表

數學學習態度量表各分量	Z 檢定	漸近顯著性(雙尾)	效果量
學習慾望	-1.033	.301	-.02
學習過程	-1.745	.081	.11
學習方法	-2.160	.031*	.51
數學信念	-.539	.590	.05

\* $p < .05$  表示有顯著差異。

其次從錄音資料來看，探究教學引起學生的求知慾，解出數學題目令他們獲得成就感，促使學生學習態度有正向改變。S6 搞不清楚 3552.16 根號值第三個數字小數部分如何計算，問 S11 他也不知道，這時打鐘了學生不下課，S6 繼續問研究者，S6：「老師，

第三個要怎麼搞？第三層也是要乘以 2 嗎？」，R：「第三層，我們一開始是多少？」，S6：「挑戰高難度的。」R：「這邊寫 5，所以你這邊要寫多少？…」，S6：「寫 10。」R：「… 109 這裡還要再加一次 9。」，S6：「...所以是 118，6 乘 1186，耶！我算出來了。」(0716-S6-VO)。探究教學讓學生有機會去思考了解算式的原理，學生建構數學概念並接受新方法。S3 想理解求根號值計算式中面積的切割原則，S3 問：「為什麼一定要從後面兩位兩位數過來？不能從前面往後數兩位嗎？」(0717-S3-VO)。探究教學提升學生數學學習慾望，解題成功使學生得到成就感，S2 覺得根號值「研究它很好玩，把它解出來很有成就感」(0717-S2-INV)。

在 S3 寫的感想裡，她喜歡探究教學上課的方式，大家沉浸在「真正」學習數學下，了解這個章節敘說內容以及章節之間彼此的關聯性，探究教學讓她放鬆享受於學習數學，與同學互相討論更能理解題目、找出不同解法，例如圖 23。

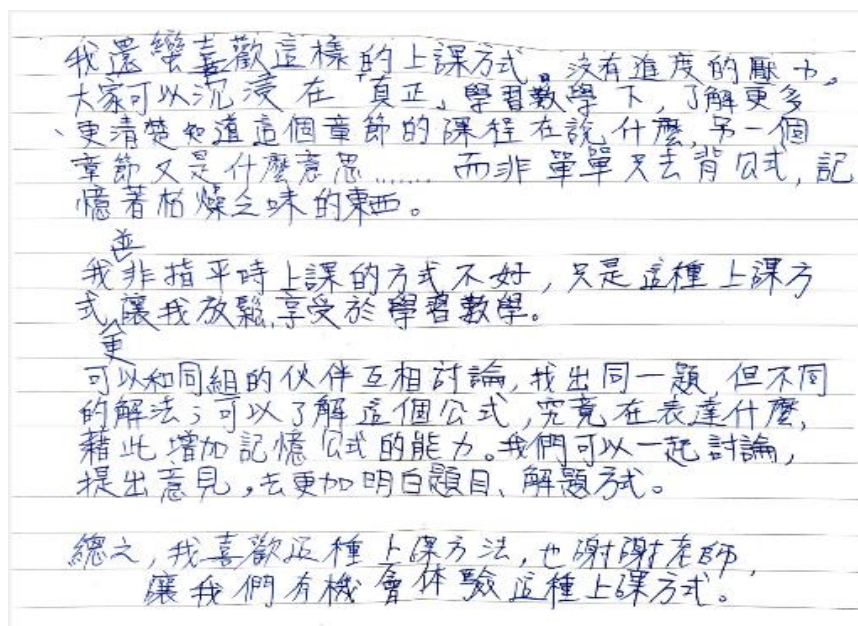


圖 23 學生卡片二

在學習心得中，學生認為用直接開方法快多了，考試時有時間去算其他題目，數學探究教學後了解數學公式的原理而不是死背，學生十分愛用，學到求根號值的方法不只十分逼近法，而這拼圖的方法讓他們學得很快樂，例如圖 24。

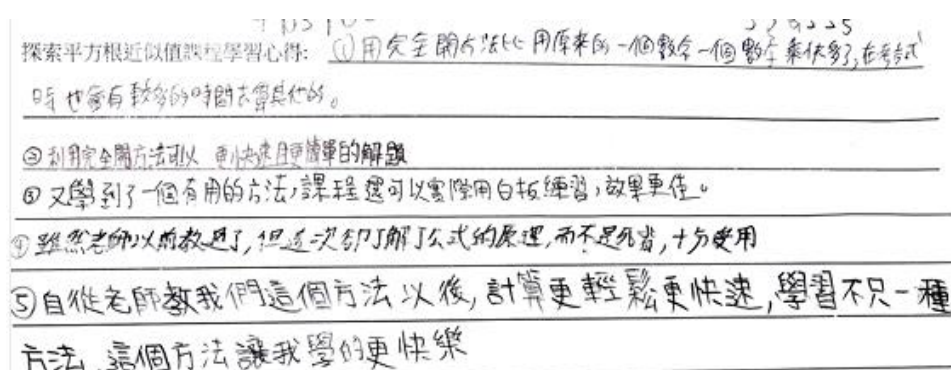


圖 24 G2 學習單三心得

探究學習讓學生操作易於理解的圖形而不是反覆計算數字、死背公式規則，學生不會覺得數學枯燥乏味，能降低學生對數學畏懼排斥的心態，學生與同學分組討論探究數學知識，合作學習、彼此激勵得到樂趣及成就感，使學生的數學學習態度有正向的提升。

## 伍、結論與建議

### 一、結論

本研究針對根號求值的單元，採用數學探究教學的方法，讓學生在動手操作中，來觀察思考尋找計算根號的規則，並將根號的計算形式化，結果發現透過數學探究教學雖然未能提升學生在根號求值上的認知學習表現，但是學習保留效果良好，學生的數學學習態度雖然沒有顯著的整體提升，但能提升學生的學習方法。數學探究教學著重理解數學算式中的原理、建構好數學概念後，學生不需仿效教師解法或反覆練習背誦，也能清楚掌握學習內容並且印象深刻持久。探究教學鼓勵學生思考研究數學，從中獲得樂趣及成就感。

### 二、建議

本研究發現探究教學雖然在學生認知學習表現沒有明顯的提升，但可以提升學生數學學習態度，建議探究稍微複雜的學習主題時，增加教學的時間，要多留一些時間讓學生觀察、思考、歸納，數學探究並非短期就能看到成效，需要長時間的浸潤培養。

## 參考文獻

- 林星秀 (2001)。高雄市國二函數課程GSP輔助教學成效之研究 (未出版之碩士論文)。  
高雄師範大學，高雄市。
- 洪振方 (2003)。探究式教學的歷史回顧與創造性探究模式的初探 (pp.647-648, 657)。  
高雄師大學報，15，641-662。
- 容士毅 (譯) (2010)。數學是什麼？ (原作者:Richard, C., Herbert, R. & Ian, S.)。台北市：左岸文化。(pp. 98-99)
- 國教院 (2019)。十二年國教課程綱要總綱。台北：教育部。
- 張春興 (1994)。教育心理學。台北市：東華。
- 陳向明 (2002)。社會科學質的研究。台北：五南。
- 黃家鳴 (2005)。數學探究的意義和實施。取自[http://nspm.ilongman.com/news/ppt/ws4/WS\\$ \\_WONG.ppt](http://nspm.ilongman.com/news/ppt/ws4/WS$ _WONG.ppt)。
- 蔡文榮 (2007)。活化教學的錦囊妙計—第二版。台北：學富文化。
- 謝佳叡、唐書志 (2017)。探究九年級生推論形式之邏輯結構的建構與轉化。臺灣數學教育期刊，4(2)，1-32。doi: 10.6278/tjme.20170914.001
- 謝豐瑞、唐書志、宋玉如、王婷瑩 (2008)。國中理想數學教師類型探討。中華民國第二十四屆科學教育學術研討會發表之論文，國立彰化師範大學。
- 蘇慧娟 (1998)。高雄地區國二學生方根概念及運算錯誤類型之分析研究 (未出版之碩士論文)。高雄師範大學，高雄市。
- Bruner, J. S.(1966).*Toward a theory of instruction*. Cambridge, MA:Harvard University Press.
- Johnson, D. Johnson, R.(1999). *Learning together and alone : Cooperative , competitive, and individualistic learning*. Boston: Allyn and Bacon.
- Kuster, G., Johnson, E., Keene, K.,& Andrew - Larson, C.(2017). Inquiry-oriented instruction : A conceptualization of instructional principles.*PRIMUS*,0(0),1-18.doi: 10.1080/10511970.2017.1338807
- Slavin, R. E.(1999).Comprehensive approaches to cooperative learning. *Theory into practice*, 38(2),74-79. doi: 10.1080/00405849909543835
- Whitin. P.(2006).Meeting the challenges of negotiated mathematical inquiry. *Teaching &*

*Learning: The Journal of Natural Inquiry and Reflective Practice*, 21(1), 59-83

## 附錄

## 壹、前測試卷

## 一、選擇

- ( ) 如果有一正方形面積為 441，那麼它的邊長應是多少？  
(A) 14 (B) 21 (C) 29 (D) 41
- ( ) 一正方形其面積為 45 平方公分，而邊長為  $a$  公分，則有關  $a$  的範圍，下列哪一個是正確的？  
(A)  $6.7 < a < 6.8$  (B)  $6.6 < a < 6.7$  (C)  $6.6 < a < 6.5$  (D)  $6.5 < a < 6.4$
- ( ) 數線上哪個數最接近 3.3？  
(A)  $\sqrt{9}$  (B)  $\sqrt{10}$  (C)  $\sqrt{11}$  (D)  $\sqrt{12}$
- ( ) 144 的平方根是多少？  
(A) 72 (B) 12 (C)  $\pm 72$  (D)  $\pm 12$
- ( )  $\sqrt{40}$ 、 $\sqrt{50}$ 、 $\sqrt{60}$ 、 $\sqrt{70}$ 、 $\sqrt{80}$ 、 $\sqrt{90}$ ，以上六個數中，介於 7 與 9 之間的數共有幾個？  
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6
- ( ) 下列哪一選項的值介於 0.2 與 0.3 之間？  
(A)  $\sqrt{0.484}$  (B)  $\sqrt{0.848}$  (C)  $\sqrt{0.0484}$  (D)  $\sqrt{0.00484}$

## 二、計算

- 求  $\sqrt{15}$  的近似值，並以四捨五入法取至小數第二位。

## 貳、後測試卷

## 一、選擇

- ( ) 如果有一正方形面積為 729，那麼它的邊長應是多少？  
(A) 9 (B) 13 (C) 23 (D) 27
- ( ) 一正方形其面積為 75 平方公分，而邊長為  $a$  公分，則有關  $a$  的範圍，下列哪一個是正確的？  
(A)  $8.7 < a < 8.8$  (B)  $8.6 < a < 8.7$  (C)  $8.6 < a < 8.5$  (D)  $8.5 < a < 8.4$
- ( ) 數線上哪個數最接近 7.3？  
(A)  $\sqrt{53}$  (B)  $\sqrt{55}$  (C)  $\sqrt{57}$  (D)  $\sqrt{59}$
- ( ) 289 的平方根是多少？  
(A) 53 (B) 17 (C)  $\pm 27$  (D)  $\pm 17$
- ( )  $\sqrt{110}$ 、 $\sqrt{120}$ 、 $\sqrt{130}$ 、 $\sqrt{140}$ 、 $\sqrt{150}$ 、 $\sqrt{160}$ 、 $\sqrt{170}$ ，以上各數中，介於 11 與 13 之間的數共有幾個？  
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7
- ( ) 下列哪一選項的值介於 0.6 與 0.7 之間？  
(A)  $\sqrt{4.848}$  (B)  $\sqrt{0.848}$  (C)  $\sqrt{0.484}$  (D)  $\sqrt{0.00484}$

## 二、計算

- 求  $\sqrt{47}$  的近似值，並以四捨五入法取至小數第二位。

## 參、延後測試卷

## 一、選擇

- ( ) 如果有一正方形面積為 1444，那麼它的邊長應是多少？  
(A) 122 (B) 72 (C) 38 (D) 24
- ( ) 一正方形其面積為 89 平方公分，而邊長為 a 公分，則有關 a 的範圍，下列哪一個是正確的？  
(A)  $9.4 < a < 9.5$  (B)  $9.5 < a < 9.6$  (C)  $9.6 < a < 9.7$  (D)  $9.7 < a < 9.8$
- ( ) 數線上哪個數最接近 6.4？  
(A)  $\sqrt{39}$  (B)  $\sqrt{41}$  (C)  $\sqrt{43}$  (D)  $\sqrt{45}$
- ( ) 2809 的平方根是多少？  
(A) 53 (B) 57 (C)  $\pm 53$  (D)  $\pm 57$
- ( )  $\sqrt{310}$ 、 $\sqrt{320}$ 、 $\sqrt{330}$ 、 $\sqrt{340}$ 、 $\sqrt{350}$ 、 $\sqrt{360}$ 、 $\sqrt{370}$ ，以上各數中，介於 18 與 19 之間的數共有幾個？  
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7
- ( ) 下列哪一選項的值介於 2.9 與 3 之間？  
(A)  $\sqrt{4.84}$  (B)  $\sqrt{48.4}$  (C)  $\sqrt{8.48}$  (D)  $\sqrt{84.8}$

## 二、計算

- 求  $\sqrt{73}$  的近似值，並以四捨五入法取至小數第二位。

## 肆、認知測驗-預試試題選擇題鑑別度及難易度

題號	P：難易度	D：鑑別度
1	0.33	0.58
2	0.38	0.49
3	0.68	0.48
4	0.54	0.91
5	0.44	0.62
6	0.36	0.20
最大值	0.68	0.91
最小值	0.33	0.20
平均值	0.46	0.55



## 《臺灣數學教師》稿約

2013.09.27 編審委員會會議通過  
2014.09.04 編審委員會會議修訂通過  
2015.05.24 編輯委員會會議修訂通過  
2016.05.15 編輯委員會會議修訂通過

2018.05.12 編輯委員會會議修訂通過  
2019.05.25 編輯委員會會議修訂通過  
2020.05.編輯委員會會議修訂通過  
2020.11.14.編輯委員會會議修訂通過

壹、《臺灣數學教師》（原名為《台灣數學教師(電子)期刊》）（Taiwan Journal of Mathematics Teachers）（以下簡稱本刊）是國立臺灣師範大學數學系及台灣數學教育學會共同發行之期刊，內容以出版數學教育領域相關議題的原創性論文為宗旨。本刊徵求符合宗旨之教學實務文稿，內容包含探討數學教學策略、學生迷思概念之教學引導、數學教育課程、教材與教法等實務經驗分享、研究問題評析、數學教育之構想、書評、論文批判、數學教學與應用性研究、數學教育研究趨勢介紹、專題演講講稿、數學學習評量、電子媒材設計、數學教師專業發展及其他數學教育相關議題等內容。本期刊徵稿分為以下兩類：

- 一、實徵研究：中文文稿以8000字為原則、英文文稿以4000字為原則。
- 二、實務分享：中文文稿以2000~3000字為原則、英文文稿以2000~3000字為原則。

貳、本刊每年發行兩期，分別於四月、十月出刊，並採電子方式發行。全年徵稿，隨收隨審。

參、本刊所刊之文稿須為原創性的教學實務文章，即未曾投遞或以全論文形式刊登於其他期刊、研討會彙編或書籍。若文稿在送審後自行撤稿，或出現一稿多投、修正稿回覆逾期、侵犯著作權等違反學術倫理等情況，將依下列規則處理：

- 一、來稿一經送審，不得撤稿。因特殊理由而提出撤稿申請者，案送主編決定；非特殊理由而自行撤稿者，一年內將不再接受該作者的投稿。
- 二、若文稿被發現一稿多投、侵犯著作權或違反學術倫理等情況，除文稿隨即被拒絕刊登外，一切責任由作者自負，且本刊於三年內不接受該作者來稿，並視情節嚴重程度求償。
- 三、作者應於發出文稿修正通知的二週內回傳修正稿及修正回覆說明書，逾期視同撤稿。若有特殊情況請先與本刊聯絡。

肆、未經本刊同意，已獲本刊接受之文章不得再於他處發表。投遞本刊之文稿須經編審委員會送請專家學者審查通過後予以刊登，被刊登文章之著作財產權歸國立臺灣師範大學數學系及台灣數學教育學會共同擁有，文責由作者自負。

伍、文稿請以中文或英文撰寫。文稿的呈現請使用單行間距之12級字新細明體或Times New Roman字體，以橫書方式於A4規格紙張上，文稿上下左右各留2.5公分空白，並以Microsoft Word 98以上之繁體中文或英文文書軟體處理。

陸、文稿格式請參考《臺灣數學教師》期刊論文撰寫體例的說明或已發行之文稿，若有需要引用英文文獻以及數學符號、公式等請參考APA第六版出版手冊。交遞稿件時需注意下列事項：

一、提交投稿基本資料表

(一) 文稿基本資料。

(二) 通訊作者之姓名、服務單位、職稱、通訊地址、聯絡電話和電子郵件地址。

一位以上作者時，非通訊作者只需填寫姓名、服務單位和職稱。

(三) 任職機構及單位：請寫正式名稱，分別就每位作者寫明所屬系所或單位。

(四) 頁首短題 (running head)：以不超過15個字為原則。

(五) 作者註 (author note)：說明與本篇研究相關的資訊。

二、提交已簽署的《臺灣數學教師》著作財產權讓與同意書。

三、文稿除正文外，還需包含中英文摘要，摘要請獨立一頁呈現，並置於正文之前。

摘要頁內容包括論文題目（粗體20級字、置中）、摘要（不分段，限500字以內）、與關鍵詞（以五個為上限，並依筆畫順序由少到多排列）。

四、若為修正稿，遞交修正的文稿上請以色字標示修改處，並需提交「修正回覆說明書」，依審查意見逐項說明修改內容或提出答辯。作者應於發出文稿修正通知的二週內回傳修正稿及修正回覆說明書，若有特殊情況請先與本刊聯絡。

柒、文稿以電子郵件方式投遞，包括作者基本資料表、著作財產權讓與同意書與全文共三份資料。作者應負論文排版完成後的校對之責，編輯委員僅負責格式上之校對。

捌、投稿電子郵箱：[tjmtedit@gmail.com](mailto:tjmtedit@gmail.com)

## 《臺灣數學教師》著作財產權讓與同意書

茲同意投稿至國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會共同發行的《臺灣數學教師》之一文，名稱為：

---

立書人聲明及保證本著作為從未出版之原創性著作，所引用之文字、圖表及照片均符合著作權法及相關學術倫理規範，如果本著作之內容有使用他人以具有著作權之資料，皆已獲得著作權所有者之（書面）同意，並於本著作中註明其來源出處。著作人並擔保本著作未含有毀謗或不法之內容，且絕未侵害他人之智慧財產權，並同意無償授權國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會於本著作通過審查後，以論文集、期刊、網路電子資料庫等各種不同方法形式，不限地域、時間、次數及內容利用本著作，並得進行格式之變更，且得將本著作透過各種公開傳輸方式供公眾檢索、瀏覽、下載、傳輸及列印等各項服務。國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會並得再授權他人行使上述發行之權利。惟著作人保有下列之權利：

- 1.本著作相關之商標權及專利權。
- 2.本著作之全部或部份著作人教學用之重製權。
- 3.出版後，本著作之全部或部份用於著作人之書中或論文集中之使用權。
- 4.本著作用於著作人受僱機關內部分送之重製權或推銷用之使用權。
- 5.本著作及其所含資料之公開口述權。

著作人同意上述任何情形下之重製品應註明著作財產權所屬，以及引自《臺灣數學教師》。

如果本著作為二人以上之共同著作，下列簽署之著作人已通知其他共同著作人本同意書之條款，並經各共同著作人全體同意，且獲得授權代為簽署本同意書。如果本著作係著作人於受僱期間為雇用機構所作，而著作權為讓機構所有，則該機構亦同意上述條款，並在下面簽署。

本著作之著作財產權係屬（請勾選一項）

- 著作人所有  
 著作人之僱用機構所有

立同意書人（著作人或僱用機構代表人）簽章：\_\_\_\_\_

著作人姓名或僱用機構名稱：\_\_\_\_\_

（正楷書寫）

中華民國 年 月 日

**Publisher** | Department of Mathematics, National Taiwan Normal University  
Taiwan Association for Mathematics Education

**Editorial Board**

**Chief Editor** | Chia-Huang Chen (Department of Mathematics Education,  
National Taichung University of Education)

**Vice Chief Editor** | Yuan-Horng Lin (Department of Mathematics Education,  
National Taichung University of Education)

**Editorial Panel** | Yuan-Shun Lee (Department of Mathematics, University of Taipei)  
Yung-Chi Lin (Graduate Institute of Mathematics and Science Education,  
National Tsing Hua University)

Su-Wei Lin (Department of Education, National University of Tainan)

Wei-Min Hsu (Department of Education, National Pingtung University)

Erh-Tsung Chin (Graduate Institute of Science Education,  
National Changhua University of Education)

Shu-Yi Chang (Department of Mathematics Education and Information Education,  
National Taipei University of Education)

Huan-Chuan Chang (Sinde Elementary School, Toufen, Miaoli)

Hui-Yu Hsu (Graduate Institute of Mathematics and Science Education,  
National Tsing Hua University)

Kai-Lin Yang (Department of Mathematics, National Taiwan Normal University)

Jian-Cheng Liou (Ping-jhen Junior High School, Taoyuan City)

Chang-Hua Chen (Graduate Institute of Science Education,  
National Changhua University of Education)

Chia-Jui Hsieh (Department of Mathematics Education and Information Education,  
National Taipei University of Education)

**International Editorial Panel** | Cheng-Yao Lin (Department of Curriculum and Instruction,  
Southern Illinois University)

---

**Address** | No.88 Sec. 4, Ting-Chou Rd., Taipei City, Taiwan, R.O.C.  
Department of Mathematics, National Taiwan Normal University  
*"Taiwan Journal of Mathematics Teachers"*

**TEL** | 886-2-7734-6576

**FAX** | 886-2-2933-2342

**E-mail** | [tjmtedit@gmail.com](mailto:tjmtedit@gmail.com)

**Website** | <http://tame.tw/news/news.php?class=204>

1 正複本數學試題對等性的考量因素

／孫荷馨、劉祥通、黃財尉

Factors for Consideration of Equivalence of Mathematics Test Questions

/ He-Xin Sun、Shiang-Tung Liu、Tsai-Wei Huang

12 Geogebra 融入師資生普通數學學習探究

／楊晉民、魏士軒

Research on the Integration of Geogebra Virtual Manipulatives into General Mathematics Learning for Pre-Service Teachers

/ Jinn-Min Yang、Shih-Hsuan Wei

31 數學繪本教學對一年級小學生數學學習的影響：一項探索性研究

／陳茗茵、張僑平

The Effect of Using Picture Book to Teach Mathematics for First Grade Students: An Exploratory Study

/ Chan Ming Yan Anna、Zhang Qiaoping

56 數學探究教學對學生根號求值的概念發展及學習態度的影響

／葉秀玲、徐偉民、張國綱

The Influence of Mathematical Inquiry Instruction of Students' Concept Development and Learning Attitude of Finding Square Roots

/ Shiu-Ling Yeh、Wei-Min Hsu、Alex Chang

