

吳韶康、柳賢、洪振方（2022）。
數學探究教學對國中學生數學理解之研究。
臺灣數學教師，43（2），1-14。
doi：10.6610/TJMT.202210_43(2).0001

數學探究教學對國中學生數學理解之研究

吳韶康¹ 柳賢² 洪振方²

¹國立高雄師範大學 科學教育暨環境教育研究所

²國立高雄師範大學

摘要

本研究旨在探討運用探究教學對國中學生數學理解發展之影響，採取個案研究法的設計，以屏東縣某國中八年級學生為研究對象，先提供一非例行性問題進行探究教學，之後，再篩選四位異質性學生，成立合作學習小組，利用課餘時間，讓研究對象把生活情境中發現的一非例行性問題，進行探究學習活動。研究者以課室觀察、解題紙本紀錄與錄音訪談等方式來蒐集資料，探討在探究學習活動中，學生面對非例行性問題的數學理解的表現情形及發展的影響。研究結果發現：一、探究教學增強學生應用知識的能力，提升理解力；二、探究教學發展學生問題表徵的能力；三、探究教學引發學生邏輯思維能力，並能培養創造力；四、探究教學透過師生共建，提升不同智力性學生的多元思考的能力。

關鍵字：非例行性問題、探究教學、數學理解

壹、緒論

一、研究動機

國內教育歷經「九年義務教育」、「九年一貫課程」到「十二年國教」的革新，強調有意義的學習，將學習態度、知識與能力緊密結合。因此，培養學生具備解決問題的能力和階層思維能力的發展，是近來教育執行者所重視的能力。引導式探究教學是以學生為中心，教師從學習的情境中引導學生發現問題，認清問題關鍵的所在，提出可能的假設，擬定可行的解決方案，選擇合適的策略，驗證假設並獲致結論，經由問題解決的過程，讓學生體會到探究的經驗，並在解題的過程中學習到技能，且培養他們主動積極及產生興趣的態度（楊秀停、王國華，2007；劉宏文、張惠博，2001；張靜儀，1995）。在數學探究學習的情境中，教師協助學生搭建真實世界與數學知識之間的橋樑，學生經由分析、推理、臆測、論證、反思等高層次思考的發展歷程來學習數學，主動建構知識，促進數學思維能力的提升。

國內外的文獻顯示數學探究教學法促進自主學習和深度理解（陳玟樺，2020），能降低學習焦慮，提升學習成效且學習保留效果良好，有助於建構正確數學概念，且對學習態度產生正向影響（葉秀玲、張國綱、徐偉民，2021；劉宏文、張惠博，2001；Chin, Lin, & Wang, 2009; Chase & Gibson, 2002; Tamir, Stavy & Ratner, 1998），增強學生之數學學習動機，有效率提升學生之後設認知能力（林勇吉、秦爾聰、段曉林，2014；Chin, Lin, Chuang, & Tuan, 2007）。可見，瞭解數學探究與從事數學探究相關研究的重要性，已不言可喻。數學探究教學協助學生在真實世界與數學知識之間不斷地進行轉換，而生活情境所涉及的問題，不可能提供明確條件，當學生面對無法知道其解題路徑的非例行性問題時，需要設計適當的解題策略，因此，非例行性問題的解題表現可以提供研究者更多瞭解學生思維發展及展現探究能力的機會。目前國中數學教學學生也少有機會嘗試解非例行性問題，將知識整合轉化為生活能力，符合十二年國教強調的數學素養，體現數學在生活中的實用性。所以，本研究的探究學習活動設計以非例行性問題為探究主題，探討國中學生面對非例行性問題的數學理解的表現情形及發展的影響，提供教育工作者了解此項研究結果，提供教學規劃參考。

二、研究目的

基於上述動機，本研究目的如下：

- (一) 探討學生在探究學習活動中，對非例行性問題的數學理解表現情形
- (二) 探討探究學習對國中學生數學理解發展的影響

貳、文獻探討

以往在數學教學上，教師常以單向講述灌輸知識，靠背誦記憶及反覆訓練，讓學生能以最快速度得到知識、也容易得到報酬，但成效短暫，而且發展有限；學生需理解新知識的背後意義，學到整體聯結的概念結構，形成一套完整的知識網絡，成效長遠，而且能全方位發展(skemp,1987/陳澤民，2018)。建構主義者也認為學生新概念的 formed，以原有的認知基模進行同化及調適的功能，來建構新的認知結構，不是被動的接受。在探究學習的情境中，學生用「數學家的態度」進行探索（林勇吉、秦爾聰、段曉林，2014；Yerushalmy、Chazan & Gordon, 1990），讓學生主動去探尋問題、思考問題與解決問題。學生以自己所理解的方法解題，教師給予學生適當的鷹架，提升學生數學理解的層次，建立良好學習態度。鍾靜（2015）也指出，探究教學重視問題和情境的設計、概念的發展，適合於數學教室中實施，尤其當前對數學教學的觀點已從接受知識轉向探究知識。

有鑒於此，研究者先提供非例行性問題實施探究教學，之後，再讓研究對象把生活情境中發現的一非例行性問題進行探究學習活動。在探究學習的情境中，採用 Siegel、Borasi 與 Fonzi(1998)的四個階段數學探究教學，聚焦於發現和提出值得探究的問題，點燃學生的興趣，為第一階段的「準備與聚焦探究(setting the stage and focusing the inquiry)」；第二階段是「執行探究(carrying out the inquiry)」，引導學生進行分析、推理、臆測與論證等探究行為，經過討論獲致最後結果，為第三階段的「綜合和溝通(synthesizing and communicating)」；第四階段是「評估和延伸(taking stock and looking ahead)」，最後對探究結果的反思，再形成新的探究。

以教師為主的課堂上，在進度及時間的壓力下，教師習慣使用講述的方式教數學（李源順，2021），研究者的實務經驗也發現，這種方式讓學生能以最短時間得到知識，靠反覆練習也容易得到報酬，但是，略過探索的過程，缺少師生互動，容易造成學生的學習興趣低落、喪失對學習的思維能力，知識便無法順利遷移至生活情境中，而理解才是學生可以帶得走的能力。因此，本研究在探究學習的歷程中，依據 Pirie 與 Kieren (1992)的數學理解成長模型的觀點，採用「提取知識」、「製造心像」、「形成心像」、「覺察性質」、「形式化」、「觀察」、「結構化」和「創造發明」，分析學生面對非例行性問題的數學理解歷程表現情形；同時依據學生的反應情形，分析學生數學理解發展的影響。非例行性問題的解題路徑具有不確定性，學生要以更靈活的方式，設計適當的解題策略，因此，非例行性問題的解題表現可以提供研究者更多瞭解學生思考的機會。當學生面對非例行性問題時，先「提取知識(Primitive Knowing)」，是理解的初始層次，將過去所學的知識運用到新的概念上；經由認知活動，發展出更高階的能力，是第二層次的「製造心像(Image Making)」，心像是數學解題過程中重要的輔助工具；第三層次的「形成心像(Image Having)」是不須透過操作，即能回顧並察覺所具備的心像；回顧前三個理解層次，以特定的性質檢驗心像，進行心像之間的區別(distinction)、組成(combination)、連結(connection)關係是第四層次的「覺察性質(Property Noticing)」；第五層次是「形式化(Formalizing)」，針對所注意的性質作有意

識的思考，抽取出共通性，將其心理的物件歸類(class-like)，形成群集；觀察個人形式化的過程，並組織和比較觀察的結果，是第六層次的「觀察(Observing)」；第七層次的「結構化(Structuring)」是能夠清楚正確解釋前一層次觀察結果，將基本假設及觀察的結果，建立邏輯化的關係；具備充足的結構化知識，能自由想像穿梭各層次間，創造新的問題和衍生新的概念為第八層次「創新發明(Inventing)」。Pirie 與 Kieren (1992)的觀點是從建構主義出發，視數學理解的發展為一個組織知識結構的動態歷程，不是固定在一層層行動，學生在理解層次間以非線性「折回-前進(back-and-forth)」的形式移動（陳彥廷、柳賢，2009）。

參、研究方法

以文獻探討為理論，針對研究問題提出研究設計及流程，研究對象、研究工具與資料處理與分析等。

一、研究設計及流程

本研究採取個案研究法的設計，以屏東縣某國中八年級學生為研究對象，研究者先提供非例行性問題實施探究教學，採用 Siegel、Borasi 與 Fonzi (1998)提出的四個階段數學探究進行教學。再篩選四位異質性學生，成立合作學習小組。利用課餘時間，再讓研究對象把生活情境中所發現的另一個非例行性問題進行探究學習活動。在探究學習的歷程中，依據 Pirie 與 Kieren 的數學理解成長模型為本研究探討國中學生在探究學習的情境脈絡下，對非例行性問題的數學理解歷程表現情形；同時依據學生的反應情形，分析學生數學理解發展的影響。以課室觀察、解題紙本紀錄與錄音訪談等方式來記錄教學事件，深入探索教學現場實際情形，提供資料分析的參考。

二、研究對象

選取八年級為研究對象，為了深入瞭解數學學習小組內的互動，有利於資料分析，選擇口語表達、語文能力較佳及有興趣的學生，成立學習小組，異質性組員是依據 Sternberg(1985)智力三元理論(triarchic theory of intelligence)區分為分析性智力(analytical intelligence)三位及實用性智力(practical intelligence)一位，該小組學生個性活潑，也專注於探究學習的活動。

三、研究工具

涉及之研究工具包括四個階段數學探究，以及分析學生數學理解層次發展之數學理解成長模型，和探究學習活動設計的非例行性問題。

(一) 四個階段數學探究及數學理解模型

探究是形成問題與解決問題的歷程，也是追求知識的歷程。在探究活動中，學生會有提出想法（提出問題或疑問）、進行試驗（分析、推理、提出臆測）、提出結論

（嘗試讓他相信自己的想法、依賴數學證據和論述去決定有效性）等機會，以便有效地促成學生理解與獲得知識，同時，也發展學生的思維。

本研究依據 Siegel 等人（1998）提出的四個階段數學探究進行探究學習，包括「準備與聚焦」、「執行」、「綜合和溝通」及「評估和延伸」。在探究學習的歷程中，採用 Pirie 與 Kieren(1992)提出「數學理解成長模型」的觀點，以「提取知識（Primitive Knowing）」、「製造心像（Image Making）」、「形成心像（Image Having）」、「覺察性質（Property Noticing）」、「形式化（Formalizing）」、「觀察（Observing）」、「結構化（Structuring）」和「創造發明（Inventing）」等八個理解層次為本研究探討國中學生在探究學習的情境脈絡下，對非例行性問題的數學理解歷程表現情形；同時依據學生的反應情形，分析學生數學理解發展的影響。附錄 1 為任務 2 在數學探究學習活動下的數學理解層次操作性概念舉隅。

（二）探究學習活動設計的非例行性問題

研究者設計非例行性問題實施探究學習活動，把學生於課堂所學「數列」的知識整合轉化為生活能力，體現數學在生活中的實用性。初步完成設計後，研究者與三位協同研究者進行討論，確保學習活動之可靠性。

研究者先提供一非例行性問題（範例 1）實施探究學習，以小組合作共同探究水果的擺放方式及最底層的水果數量，整理後以紙本呈現成果，並上台分享，同時，師生能針對各組報告的結果進行提問及討論。

探究學習活動一的範例 1

我們常在路邊見到的水果攤，一車子的水果經過老闆的巧思擺放，是不是顯得與眾不同呢！今天由你來做主，發揮創意設計能吸引顧客的擺法！說明水果的擺放方式及最底層的水果數量。

利用資訊科技工具輔助教學，研究者提供學生使用網路資源，延伸課程的內容，之後，再提供一非例行性問題（範例 2）實施探究學習，由四位研究對象來解題，探究依據不同數量的水果，來決定底層水果的擺放數量，以紙本呈現成果。

探究學習活動一的範例 2

小儒暑假去鄉下爺爺家，幫忙賣百香果，他記得家裡附近的水果店，會把水果層層堆疊成亮眼的三角錐（圖示見附錄 2），小儒想挑戰這個任務，可是每天爺爺採收的百香果數量不同，小儒每天應該如何決定先擺放底層的百香果數量呢？

探究學習活動一結束後，範例 3 是由四位研究對象將校園生活情境中發現的另一非例行性問題，進行探究學習活動。

探究教學二的範例 3

下課時分，學生漫步在校園裡的石頭步道，懷著古代詩人「結廬在人境，而無車馬喧。」的意境，腦海中憶起兒時踩階梯的遊戲，隨著時光的推進已逐漸淡忘。為了重拾童年的美好，並使原本的遊戲增添創意及更多的趣味，於是學生決定來探究踩階梯的步數，為了增加一些限制條件以提高難度，在左右對稱的步道，規定左腳只能踩左邊的階梯，而右腳只能踩右邊的階梯，首先限制左腳恰走 1 步達到目標的話，則左腳能有幾種踩法？以此類推，左腳恰走 2 步達到目標呢？左腳恰走 3 步達到目標又會如何？附錄 3 為任務 2 的教學設計表。

將探究教學二的非例行性問題，分成五個任務。在五個任務中，左右兩排對稱的階梯數各為 i ，當左腳恰走 L 步達到目標，則左腳所有的走法數以數列來表示。茲將本研究五個任務的數學符號整理如下表 1。

表 1
五個任務的數學符號對照表

	任務 1	任務 2	任務 3	任務 4	任務 5
左腳恰走 L 步達到目標	$L=1$	$L=2$	$L=3$	$L=4$	$L=m$
左腳所有的走法數	$\langle a_i \rangle$	$\langle b_i \rangle$	$\langle c_i \rangle$	$\langle d_i \rangle$	$\langle z_i \rangle$
左右兩排對稱的階梯數	$1 \leq i \leq n$	$2 \leq i \leq n$	$3 \leq i \leq n$	$4 \leq i \leq n$	$m \leq i \leq n$

四、資料處理與分析

研究者實施探究教學時，以課室觀察、解題紙本紀錄與錄音訪談等方式來蒐集資料。研究者邀請協同研究者三位進行資料分析及比對。三位協同研究者皆為教育博士，具有豐富的教學研究經驗。在資料分析期間，當研究者完成分析後，隨即交由三位協同研究者重新審視，以判斷研究者論述與主張的合理性。若有意見相左之處，再共同進一步針對論點相左之處進行討論與議決，以達到意見一致，減少研究者主觀的偏誤，提升研究的信效度。

肆、研究結果與討論

在探究教學的情境中，分析學生在探究學習的歷程中，對非例行性問題的數學理解表現情形，並探討探究學習對國中學生數學理解發展的影響。以下對研究結果進行討論：

一、探討學生在探究學習活動中，對非例行性問題的數學理解表現情形

在探究學習的情境脈絡下，學生聚焦於每個任務中左腳達到目標的步數，執行任務，研究者引導學生進行分析、推理、臆測與論證等探究行為，經過討論獲致任務 1~

任務 5 的結果分別為 $a_n = n$ 、 $b_n = \frac{n(n-1)}{2}$ 、 $c_n = \frac{(n-2)(n-1)n}{6}$ 、 $d_n = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$ 、 $z_n = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3) \cdots [n-(m-1)]}{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times m}$ ，最後都對每個任務

的探究結果進行反思，再形成下一個新的探究活動。而生活情境所涉及的非例行性問題，具有不明確的解題路徑，可以提供研究者更多瞭解學生思維發展及展現探究能力的機會。研究者採用 Pirie 與 Kieren(1992)提出的「數學理解成長模型」觀點，以「提取知識」、「製造心像」、「形成心像」、「覺察性質」、「形式化」、「觀察」、「結構化」和「創造發明」等八個理解層次，探討學生在探究學習活動歷程中，對非例行性問題的數學理解表現情形。

(一)、探究學習活動中，學生透過提取知識、製造心像，進而形成心像，搭建思考的鷹架，增進學生對概念的理解

探究學習活動中，學生執行任務時，提取過去所學等差級數和的知識，運算任務 2 經過組織形式化的數學式 $b_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)$ ，得到初步的結果 $b_n = \frac{n(n-1)}{2}$ ；同理，任務 3 和任務 4 分別提取連續兩整數乘積和與連續三整數乘積和的知識，運算數學式，得到初步的結果。

進行任務 2 的解題歷程中，學生將題意以具體圖像表徵進行分析時，發現所得答案不同，研究者引導他們對照彼此的做法，學生從圖像表徵裡找到錯誤的關鍵，原因在於未秩序地排列。下圖 1 是以 b_3 為範例來說明，當左右兩排對稱的階梯數各為 3，左腳恰走 2 步達到目標的限制下，則左腳能有幾種踩法？學生的解題步驟是先把左腳的第 1 步固定在第 1 階，剩下左腳 1 步及 2 階，則有 2 種走法（第 2 階踩左腳，第 3 階踩右腳及第 2 階踩右腳，第 3 階踩左腳）；接下來，再把第 1 步固定在第 2 階（第 1 階踩右腳），剩下左腳 1 步及 1 階，則有 1 種走法。學生透過製造心像，進而形成心像的過程，以圖像表徵將題意具體化，利於學生解題時進行分析及推理。探究學習的過程，並不是要求學生將知識背起來，而是逐步搭建思考的鷹架，增進對概念的理解。



圖 1 範例

(二)、探究學習活動中，學生覺察關係，發展出形式化歸類的的能力

任務 3 的探究過程中，延伸任務 2 解題的知識及經驗，卻無法直接由圖像表徵轉換成數學式來表示，當其中一位分析性智力組員從各走法總數中察覺到 $c_n = b_{n-1} + c_{n-1}$ 的聯結，便能運用 $c_4 = b_3 + c_3$ 的關係來表示 $c_4 = \frac{2 \times 3}{2} + 1$ 的數學式，同理

$c_5 = b_4 + c_4 = \frac{3 \times 4}{2} + \frac{2 \times 3}{2} + 1, \dots$ ，以此類推。在探究學習活動中，學生從任務 1 可直觀

$a_n = n$ 、任務 2 由圖像表徵轉換成數學式來表示 $b_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)$ 、任務 3 是察覺出 $c_n = b_{n-1} + c_{n-1}$ 的聯結後，組織形式化的結果

$c_n = b_{n-1} + c_{n-1} = \frac{n(n-1)}{2} + \dots + \frac{4 \times 3}{2} + \frac{3 \times 2}{2} + 1$ ，任務 4 延伸前一個任務所得的知識及經驗得到

$$d_n = c_{n-1} + d_{n-1} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} + \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6} + \dots + \frac{5 \times 4 \times 3}{6} + \frac{4 \times 3 \times 2}{6} + \frac{3 \times 2 \times 1}{6}$$

，透過探究學習的歷程，給學生時間及機會去覺察其中的聯結，分析所察覺的關係，進一步思考所注意到的關聯，抽取出共通性，組織形式化的結果，發展出形式化歸類的的能力。

(三)、探究學習活動中，擁有結構性的理解，延伸創新

進行任務 3 的探究中，當組員觀察形式化的過程，臆測

$$c_n = \frac{n(n-1)}{2} + \dots + \frac{4 \times 3}{2} + \frac{3 \times 2}{2} + 1$$

，最後小組討論得到初步結果 $c_n = \frac{(n-2)(n-1)n}{6}$ ，使用數學上用來證明提出的論證是否正確的邏輯推論方法，驗證臆測結果是否正確，完成解題後，評估探究任務的過程，將前次任務的經驗和知識，延伸創造新的任務。

(四) 探究學習活動中，透過小組合作學習，師生共建知識

分析性智力三位組員分工合作，一組員較具創造力，能從生活情境中發現非例行性問題，策劃五個任務的策略進行探究；另一位組員洞察能力較佳，能察覺藏在非例行性問題中的聯結 $c_n = b_{n-1} + c_{n-1}$ ；再者，展現形式化歸類的的能力執行解題的組員，能提取連續三整數乘積和的知識，得到任務 4 的初步結果

$$d_n = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} + \dots + \frac{5 \times 4 \times 3}{6} + \frac{4 \times 3 \times 2}{6} + 1 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$$

。對於實用性智力組員因數學概念上的不足，知識的連結力較弱，在師生及生生共建的境歷中學習，可增進對概念的理解，並加深概念及增廣經驗。於探究學習活動中，透過小組合作，為了完成共同的任務，彼此互相支援進行學習，師生共建知識。

二、探討探究學習對國中學生數學理解發展的影響

(一) 探究學習增強學生應用知識的能力，提升理解力

探究教學的歷程中，學生提取知識能增進對概念的理解，進一步把這些概念運用在新的任務上，增強學生對所學知識的應用；學生根據題意製造心像，進而形成心像，通過圖像表徵，可為學生搭起思考的鷹架，來瞭解抽象知識的意義，提升理解力。

(二)、探究學習增進學生問題表徵能力的發展

一開始學生以圖像表徵將題意具體化，進一步覺察彼此的關聯，找出規律性，抽

取共同的性質，逐步以形式化歸類，循序漸進往高階理解層次邁進，賦予抽象化表徵的線索，增進學生問題表徵能力的發展，問題表徵在問題解決上提供解題的線索，可提升學生解題能力。

（三）探究學習引發學生邏輯思維能力，並能培養創造力

在探究學習情境下，學生學會通過分析、推理、臆測、論證及反思的過程，符合邏輯地建立它們之間的關係，促使學生思維結構層次不斷提升，發展邏輯思維能力，再延伸創造新的問題。

（四）探究學習透過師生共建，促進不同智力性學生多元思考的能力

分析性智力組員透過小組合作學習，在探究任務的表現，確定可以有效率地提取知識、形成心像、進行形式化歸類，到最後驗證所觀察的結果，並反思再延伸創造新的問題；實用性智力組員在師生共建及生生共建的學習氛圍下，表現積極挑戰的態度，透過討論分享及研究者適時的引導，搭建思考的鷹架，更接近解題的近側發展區。

伍、結論與建議

一、結論

在探究學習活動的過程中，學生先聚焦於非例行性問題中，分成五個任務進行探究。學生透過提取知識、製造心像，進而形成心像，通過圖像表徵，可為學生搭起思考的鷹架，提升理解力，增強學生對所學知識的應用；從解題的探索過程中，提供學生從覺察到形式化歸類，增進學生問題表徵能力的發展；到最後清楚正確解釋前一層次組織和比較所觀察的結果，進行臆測及驗證的過程，建立邏輯化的關係，解決實際問題。學習知識的歷程中能讓學生學會自己去思考與探究，研究者適時給予引導，促使學生思維結構層次不斷提升，發展邏輯思維能力，再延伸創造新問題的能力。

在探究教學運作下，使學生從被動的知識接受者，蛻變成主動的知識探究者，啟動學生的學習動力，透過小組合作學習，師生共建，促進不同智力性學生多元思考的能力，擴展認知範圍，展現邏輯思維能力，培養創造力，也學會溝通及討論的團隊精神，符合數學素養強調教育的價值與功能，讓學生具備終身學習的關鍵能力。

二、建議

本研究僅以四位國中學生為研究對象，其中三位是分析性智力學生，故研究結果無法推論至其他學生在探究學習歷程中的數學理解表現。又探究學習歷程中影響數學理解發展是否會因研究對象的年級、性別或研究主題而有所不同？未來可以增加樣本數、改變小組成員的組合方式或針對不同單元加以研究。

陸、參考文獻

- Chase, C., & Gibson, H. L. (2002). Longitudinal impact of inquiry-based science program on middle school students' attitudes toward science. *Science Education*, 86(5), 693-705.
- Chin, E. T., Lin, Y. C., Chuang, C. W., & Tuan, H. L. (2007). The influence of inquiry-based mathematics teaching on 11th grade high achievers: Focusing on metacognition. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, & D. Y. Seo (Eds.). *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.2, 129-136). Seoul, Korea: PME.
- Chin, E. T., Lin, Y. C., & Wang, Y. L. (2009). An investigation of the influence of implementing inquiry-based mathematics teaching on mathematics anxiety and problem solving process. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & C. Sakonidis (Eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.5, 447). Thessaloniki, Greece: PME.
- Pirie, S. E. B., & Kieren, T. E. (1992). Watching Sandy's understanding growth. *Journal of Mathematical Behavior*, 11, 243-257.
- Richard R. Skemp. (2018). 數學學習心理學 (陳澤民譯)。臺北市：九章。(1987)
- Robert J. Sternberg & Louise Spear-Swerling (2004)。思考教學 (李弘善譯)。臺北市：遠流。(1996)
- Siegel, M., Borasi, R., & Fonzi, J. (1998). Supporting students' mathematical inquiries through reading. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(4), 378-413.
- Tamir, P., Stavy, R., & Ratner, N. (1998). Teaching science by inquiry: assessment and learning. *Journal of Biological Education*, 33(1), 27-32.
- Yerushalmy, M., Chazan, D., & Gordon, M. (1990). Mathematical problem posing: Implications for facilitating student inquiry in classrooms. *Instructional Science*, 19, 219-245.
- 李源順(2021)。數學這樣教-國小數學感教育。台北市：五南。
- 林勇吉、秦爾聰、段曉林 (2014)。數學探究之意義初探與教學設計實例。臺灣數學教師，35(2)，1-18。
- 陳彥廷、柳賢 (2009)。中學生對代數式中文字符號之語意理解研究：不同管道的探討。科學教育學刊，17(1)，1-25。
- 陳玟樺 (2020)。芬蘭教師的數學探究教學模式設計：以「縮圖與比例尺」為例。課程研究，15(2)，69-97。
- 葉秀玲、徐偉民和張國綱 (2021)。數學探究教學對學生根號求值的概念發展及學習態度的影響。臺灣數學教師，42(2)，56-83。
- 張靜儀 (1995)：自然科探究教學法。屏師科學教育，1，36-45。
- 楊秀停、王國華 (2007)。實施引導式探究教學對於國小學童學習成效之影響。科學教育學刊，15(4)，439-459。
- 劉宏文和張惠博 (2001)：高中學生進行開放式探究活動之個案研究 - 問題的形成與解決。科學教育學刊，9(2)，169-196。
- 鍾靜 (2015)。以探究教學提昇學童數學概念之深度和廣度。國民教育，55(1)，126-139。

附錄

附錄 1

任務 2 在數學探究學習活動下的數學理解層次操作性概念舉隅

探究階段	探究學習活動下的數學理解層次 操作性概念舉隅	理解層次
準備與聚焦	學生將非例行性問題分成五個任務，在任務 2 中，學生聚焦於左腳恰走 2 步達到目標的限制，提取任務 1 所得到的「圖像化」的概念及經驗，準備先以具體圖像表徵的策略來進行解題。	提取知識
執行	首先設定左腳步數恰為 2 時，隨著階梯數為 2,3,4,5,6,...，按照階梯數秩序地排列步伐為概念。	製造心像
	將思維中的概念以具體圖像表徵呈現出來，將抽象問題具體化。	形成心像
	學生將題意以具體圖像表徵進行分析，學生察覺按照順序秩序地來找規律性，才能完整呈現所有的步數。以 b_4 為例，當階梯數 $n=4$ 時：首先將第 1 步踩在第 1 階，剩下的第 2 步有 3 種走法；依序將第 1 步換踩在第 2 階，剩下的第 2 步有 2 種走法；最後是把第 1 步踩在第 3 階，剩下第 2 步有 1 種走法。	覺察性質
	學生進行圖像表徵的分析及推理，進一步思考所注意到的關係，抽取出共通性，再轉化為數學式來表示，即 $b_2 = 1, b_3 = 2 + 1, b_4 = 3 + 2 + 1, b_5 = 4 + 3 + 2 + 1,$ $b_6 = 5 + 4 + 3 + 2 + 1, \dots$	形式化
綜合和溝通	隨著階梯數 n 的增加，學生比較及組織所觀察到左腳的總走法數，經由小組成員討論後，臆測 $b_n = b_{n-1} + (n-1)$ 且 $b_n = (n-1) + \dots + 3 + 2 + 1$.	觀察
執行 綜合和溝通	學生檢視其圖像表徵，覺察出其中的聯結，轉換成數學式來表示： $b_2 = 1, b_3 = 1 + 2, b_4 = 1 + 2 + 3, b_5 = 1 + 2 + 3 + 4,$ $b_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5, \dots$, 透過觀察去臆測 $b_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)$, 並提取等差數和的知識，運算出 $b_n = \frac{n(n-1)}{2}$, 再使用數學歸納法去驗證 $b_n = \frac{n(n-1)}{2}, n \geq 2$, 證明可知猜測是正確的。	結構化 提取知識
評估與延伸	教師以「正向提問」及「整合提問」方法引導學生，將操作的具體圖像表示成數學式，察覺其中的規律性，學生分析及推理，並驗證臆測所得到的結果，最後反思任務 2 所得到的結果，學生再延伸新的探究任務 3.	創造發明

附錄 2

範例 2 圖示

百香果堆疊方式如圖示



附錄 3

【範例3】任務2教學設計表

活動名稱	數列和級數	節數	3
核心素養	A2 系統思考與解決問題 數-J-A2		
與領域素養	能以符號代表數或幾何物件，執行運算與推論，在生活情境或可理解的想像情境中，分析本質以解決問題。		
學習表現	n-IV-7 辨識數列的規律性，以數學符號表徵生活中的數量關係與規律，認識等差數列與等比數列，並能依首項與公差或公比計算其他各項。 n-IV-8 理解等差級數的求和公式，並能運用到日常生活的情境解決問題。		
學習內容	N-8-3 認識數列：生活中常見的數列及其規律性（包括圖形的規律性）。 N-8-4 等差數列：等差數列；給定首項、公差計算等差數列的一般項。 N-8-5 等差級數求和：等差級數求和公式；生活中相關的問題。		
設計理念	1.融入校園環境裡踩階梯遊戲的情境，增進學習的興趣。 2.增加遊戲中一些限制條件，激發學生的創意，充分掌握數形關係。 3.運用探究學習活動，提升學生的理解能力。		
數學素養的預期表現	一、透過觀察、操作、分析與推理等多元的學習歷程，表現對數學學習的信心與正向態度。 二、在探究學習活動中，表現學習的好奇心及觀察規律、執行、抽象、推論、溝通和數學表述等各項能力。 三、在探究學習活動中，展現運用輔助工具於數學程序及解決問題的正确態度。 四、在探究學習活動中，表現運用數學思考問題、分析問題和解決問題的能力。		

(續下頁)

五、藉由校園裡踩階梯遊戲的情境，能學習其他領域所需的數學知能，如：「階梯有氧」運動、減肥法與地理-三級階梯等。

六、探究學習活動中，欣賞數學以簡馭繁的精神與結構嚴謹完美的特質。

學習歷程	在探究學習活動中，透過準備與聚焦，執行中的分析、推理及臆測，綜合和溝通，評估與延伸，認識數列、等差數列及等差級數。
評量方式	小組討論、觀察、資料蒐集、口頭報告、作業繳交

小組以具體圖像表徵的策略來進行解題時，分析性智力的兩位組員先發現他們所得答案不同，第三位分析性智力組員及實用性智力組員也不知道誰的答案是正確的。研究者引導他們對照不同答案的圖像表徵，一位分析性智力組員察覺錯誤的關鍵是無法列出所有的走法，也就是有些走法會被忽略掉，原因在於未秩序地排列。

學生迷思/教師診斷引導
 正確做法以下圖的 b_3 為範例來說明，當左右兩排對稱的階梯數各為3，左腳恰走2步達到目標的限制下，則左腳能有幾種踩法？學生的解題步驟是先把左腳的第1步固定在第1階，剩下左腳1步及2階，則有2種走法（第2階踩左腳，第3階踩右腳及第2階踩右腳，第3階踩左腳）；接下來，再把第1步固定在第2階（第1階踩右腳），剩下左腳1步及1階，則有1種走法。



教學活動	教學流程說明	時間	教學資源
準備與聚焦	1.組員從校園生活情境中發現要探究的問題，分成五個任務。評估任務1的探究結果後，延伸到新的探究活動任務2。 2.小組討論後，準備提取任務1的概念及經驗，聚焦於左腳恰走2步達到目標的限制，先以具體圖像表徵的策略來進行解題。	10	格子紙
執行	1.組員們按照階梯數排列步伐，隨著階梯數增加2,3,4,5,6,...，以具體圖像表徵呈現出來。 2.組員們答案不同，教師以提問的方法引導學生，小組討論找出原因。 3.組員們進行分析及推理，將圖像表徵轉化為符號	90	格子紙 紀錄單 (續下頁)

表徵。			
綜合 和 溝通	1.小組討論及溝通臆測一般式。 2.驗證臆測所得到的結果。	90	紀錄單
評估 與 延伸	反思任務2所得到的結果，再延伸新的探究任務3.	10	紀錄單
