

廖倩廷、林原宏 (2022)。

五年級因數與倍數教學融入開放性評量之研究。

臺灣數學教師, 43 (2), 29-56。

doi: 10.6610/TJMT.202210_43(2).0003

五年級因數與倍數教學融入開放性評量之研究

廖倩廷¹

林原宏²

國立彰化師範大學科學教育研究所¹

國立臺中教育大學數學教育學系²

摘要

本研究旨在將開放性評量融入教學，探討五年級學童於因數與倍數單元之學習成效與解題類型。本研究採用準實驗研究設計中的「不等組前後測實驗設計」，研究對象為臺中市某國小五年級普通班學生，研究者對實驗組實施為期兩週之開放性評量融入因數與倍數單元之教學；控制組亦實施為期兩週之因數與倍數傳統評量之教學。研究者透過開放性評量學習單與學生晤談紀錄進行資料蒐集與分析，以了解學生於因數與倍數單元之解題類型。研究者以自編因數與倍數單元試卷進行後測，並以學童四年級上學期數學學期成績作為共變項，進行前測與後測之單因子共變數分析探討學習成效。研究發現實驗組的學習成效顯著優於控制組。學生於因數先備知識、因數、公因數與最大公因數、倍數先備知識、倍數、公倍數與最小公倍數呈現多種解題類型。教師省思使用開放性評量融入教學之題數不宜過多，易導致教學時間不足。建議未來使用開放性評量融入教學之研究，教師須營造尊重與包容之課室環境，促進師生與同儕對話。

關鍵詞：二階段評量、因數與倍數、開放性評量、建構反應題

壹、緒論

一、研究背景與動機

因數與倍數對學習者和教學者都是較感困難的單元，因數的定義和教材的語意抽象難以理解，無法透過具體實物直接說明，同時因數於生活中較為少見，對於剛升上五年級的學生來說，學習因數與倍數單元實屬不易（黃國勳、劉祥通，2003；Orhun, 2002）。此外 Dias(2005)指出不僅是國小學生，甚至是新進教師對於因數與倍數仍有辨識乘法關係的問題。學生於因數與倍數出現困難，不只是學生的問題，亦可能始於教師流於程序與記誦的教學模式(Triyani, Putri & Darmawijoyo, 2012)。

數學課室中，教師「教」學與學生「學」習是一種循環的歷程，評量扮演提供回饋的角色（林素微，2000），在課室中具有至關重要的地位。近年來開放性評量(open-ended assessment)成為當前評量的趨勢，允許問題有多種解決方法。開放性評量提供學童探求多種解題策略 (Wijaya, 2018)。透過開放性評量融入教學，能幫助教師了解學生的解題層次，以利教師補救和診斷概念；學生於評量中呈現的想法，亦可作為調整與修正教學之依據。而常見開放性評量種類許多，建構反應題(constructed-response item)與兩階段評量(two-tier assessment)符應開放性評量之精神。胡詩菁和鍾靜（2015）指出建構反應題能提供較多的學習訊息，促使教師做較佳的教學決定。兩階段評量兼具訪談的質性特色與量化的優點，可在短時間收集大量的學生想法與概念，因此本研究使用建構反應題與兩階段評量作為開放性評量融入教學之題型。

綜合上述所言，因數與倍數單元學習不易，然而課室中傳統評量較難看出學習歷程，而開放性評量掌握較多學習狀況並促進同儕交流與分享，因此本研究將開放性評量融入教學，期能了解學童於因數與倍數之學習成效與多元解題類型。

二、研究目的

根據前述的研究背景與動機論述，本研究目的如下：

- (一) 探討開放性評量融入五年級因數與倍數單元之學習成效。
- (二) 分析開放性評量融入五年級因數與倍數單元之解題類型。

貳、文獻探討

一、開放性評量意涵與相關研究

開放性評量(open-ended assessment)是近年來受重視的評量思潮，允許問題有多種解決方法。開放性評量重視解題者的自發性，從不同的方法獲得答案(Wijaya,

2018)。開放性評量有別於傳統的紙筆測驗（選擇式反應題），僅有一種答案或一種解題的方法，其重視不僅是答案，而是解題者的思考歷程。

透過開放性評量融入於教學，能幫助教師了解學生的解題層次，提供補救教學和診斷概念的機遇；學生於評量呈現的想法，可作為調整與修正教學之依據。同時開放性評量能引導學生發展高層次的數學解題思維(Klavir & Hershkovitz, 2014; AL-Absi, 2012)。當學生有多元的解題策略，更能引發課堂討論和促進同儕學習。

常見開放性評量題型種類許多，舉凡開放性問題或任務、數學寫作、數學步道……等，皆為開放性評量之題型，本研究選用建構反應題(constructed-response item)和二階段評量(two-tier assessment)符應開放性評量之精神，透過建構反應題能了解學生多元解題想法，藉由二階段評量進行數學概念診斷。

（一）建構反應題意涵與相關研究

「國民中小學九年一貫課程學習成就評量指標與方法手冊(林世華、盧雪梅、陳學志, 2004)」指出建構反應題(constructed-response items)是一種允許學生自由建構、組織和呈現想法的試題，給予學生組織和表達想法的自由，而答案由學生產生和提供，須人工閱卷計分，無法使用電腦閱卷。Tankersley(2007)指出建構反應題是一種開放性的紙筆測驗，要求學生運用知識技能和批判思維建構答案。建構反應題的開放特性，讓學生將思考過程加以組織，以呈現在試題上。在計分上建構式反應題須將解題類型分類，並以人工批改。選擇式反應題(selected-response items)無法看見解題歷程，要設計具有誘答力選項的選擇式反應題實屬不易，須對迷思概念有一定瞭解，若設計不佳將可能淪為答題的線索。因此建構式反應題允許學生對於題目的詮釋、組織和表達呈現出來，此一大優勢也是一般傳統選擇式反應題的限制。

相關研究指出以建構反應題作為教學的評量題目，能有效引導教師進行教學程序的調整，有利提升數學的學習與內涵（胡詩菁、鍾靜，2015）。研究者認為建構反應題不但可了解學生的數學概念和多元解題想法，教師亦可將此作為調整教學的參考，並針對不清楚的概念進行全班的討論與講解，達到有效教學。因此本研究透過建構反應題了解學生多元解題想法。

（二）兩階段評量意涵與相關研究

Treagust (2006)指出兩階段評量包含兩個階段的選擇題讓學生進行答題，在第一階段的答題中通常會有 2 到 4 個選項，而在第二階段常見有 4 個選項，學生須針對第一階段的回答，在第二階段找出可能的原因。第一階段的問題，評量現象的描述性知識，第二階段的問題為評量解釋性的知識(Tsai & Chou, 2002)。兩階段評量之實徵性研究在自然科學領域運用相當成功和廣泛，因為藉由兩階段評量能收集解題想法、回饋學習情形，並診斷概念和錯誤類型。當教師掌握學生的學習狀況，便能作為補救和調整教學之依據，對教學者和學習者皆是一大益處(劉子鍵、林怡均，2011；Bayrak, 2013)。在數學科領域，Hilton、Hilton、Dole 和 Goos(2013)利用兩階段評量診斷比例概念之研究指出，兩階段評量亦可作為前測

和後測評量，教師透過評量比較和追蹤學習情形。此外把兩階段評量作為課室活動，針對學生的答題，教師立即並適切回應能幫助學習。因此本研究藉由二階段評量進行數學概念診斷。

二、因數與倍數意涵與相關研究

依據在教育部 97 年「國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域」中。因數與倍數單元在第三學習階段（五年級和六年級）。黃培甄和葉啟村（2005）整理學童於因數與倍數單元之迷思有：使用關鍵字解因數與倍數的問題、找因數缺漏、缺乏因數與倍數概念和無法整合因數與倍數之關係。Rubenstein 和 Tompson (2002)指出因數與倍數的語言讓學生難以理解，學生常混淆因數與倍數。當學生學到最大公因數與最小公倍數時，更可能使用關鍵字解題(Kolitsch & Kolitsch, 2011)。此單元對於學習者而言較感困難，學童若於因數與倍數單元無法順利學習，將導致公因數、等值分數和後續分數計算……等諸多單元遇到瓶頸，可見因數與倍數教材地位之重。

綜合前述，研究者將開放性評量融入教學，以了解學生於因數與倍數之學習成效和多元解題類型。在本研究中，教學者亦根據研究歷程提出反思與建議。

參、研究方法

一、研究設計

本研究採準實驗研究設計(Quasi-experimental Design)中的「不等組前後測實驗設計」，研究目的為探討不同評量方法（開放性評量和傳統評量）對不同班級（實驗組與控制組）數學學習成效之影響，期能對數學教育教學現場有所建議。

其中 x_1 為實驗組班級接受開放性評量融入因數與倍數單元之教學， x_2 為控制組班級接受因數與倍數單元傳統評量之教學，本研究所指傳統評量教學是以教科書佈題為評量之教學。教學前兩班皆以四年級數學學期評量成績作為共變項(o_1 、 o_2)，教學實驗後皆以自編因數與倍數單元後測作為後測成績(o_3 、 o_4)。本實驗設計模式如表 1：

表 1
實驗設計模式

組別	共變項	實驗處理	後測
實驗組	o_1	X_1	o_3
對照組	o_2	X_2	o_4

本研究控制變項會以學童四年級數學學期評量成績作為共變項（前測）。自變項為不同的評量方法於五年級因數與倍數單元之實施：實驗組班級融入開放性

評量、對照組班級以課本做做看和動動腦為評量。依變項為學童於因數與倍數單元之學習成效。圖 1 為研究架構。

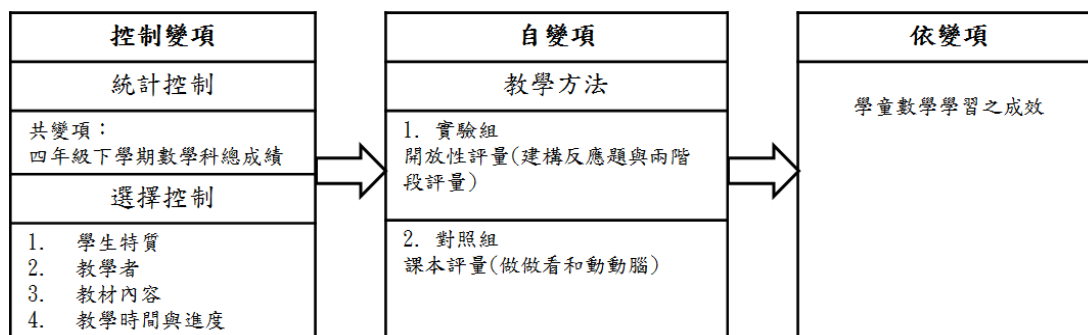


圖 1 研究架構

二、研究對象

研究參與者為五年級學生。實驗組男生 8 人，女生 6 人；控制組男生 6 人，女生 7 人。

三、研究工具

(一) 開放性評量學習單

研究者會將建構反應題與兩階段評量以開放性評量學習單(魔數時間)的形式作為課堂評量。使用時機依題目題型分為課本佈題前(參圖 2)、課本佈題後(參圖 3)和取代課本佈題(參圖 4)。

開放性評量學習單(分別為附錄一中的任務 1-1 到任務 6-1)將於本單元的 6 個活動進行(整除、因數、公因數與最大公因數、倍數、公倍數與最小公倍數和 2、3、5、10 的倍數,共 8 堂課),教師針對學生於開放性評量學習單出現的多元解題歷程作類型分析,在課堂中補強與澄清學生概念;另外學生的多元解題想法於課堂中與全班一同討論,可促進思考與溝通表達。附錄一為開放性評量試題內容與說明。

(二) 自編因數與倍數單元試卷

研究者根據因數與倍數之學習表現與內容建立雙向細目表以編製試題,題目設計後與數學教育專家、相關經驗教師和誼友教師共同檢視因數與倍數試卷,以確保試題具有代表性並經由專家共同分析和修訂,使試題具有內容效度。(參見附錄三)

(三) 晤談記錄

研究者針對實驗組全班於開放性評量學習單呈現之多元解題想法等處,於每堂課後(共 8 堂課)進行晤談,過程中錄音並於晤談後轉譯成逐字稿,作為補足學生於開放性評量學習單呈現不清之用。

四、教學與評量規劃

(一) 實驗組教學與評量之流程

課堂融入開放性評量學習單有三個時機，第一為教師於全班進行因數與倍數單元之重要概念的教學前（圖 2）；第二為進行因數與倍數單元之重要概念的教學後（圖 3）和第三取代課本因數與倍數佈題（圖 4）。以下分別說明融入開放性評量學習單之教學與評量規劃：

1. 開放性評量置於課本佈題前

教師教導課本佈題前（學習單置於課本重要概念的教學前），請學生個別完成學習單，並於學生作答時行間巡視，將學生的解題表現分類，挑選具代表性的解題歷程，投影至智慧黑板。學生完成學習單後接著進行課室分享與討論，此時教師可隨時掌握學生的學習狀況，診斷學生先備知識。針對理解本題概念的學童進行因數與倍數新概念之教學；針對不理解本題概念的同學則進行先備知識的補強。

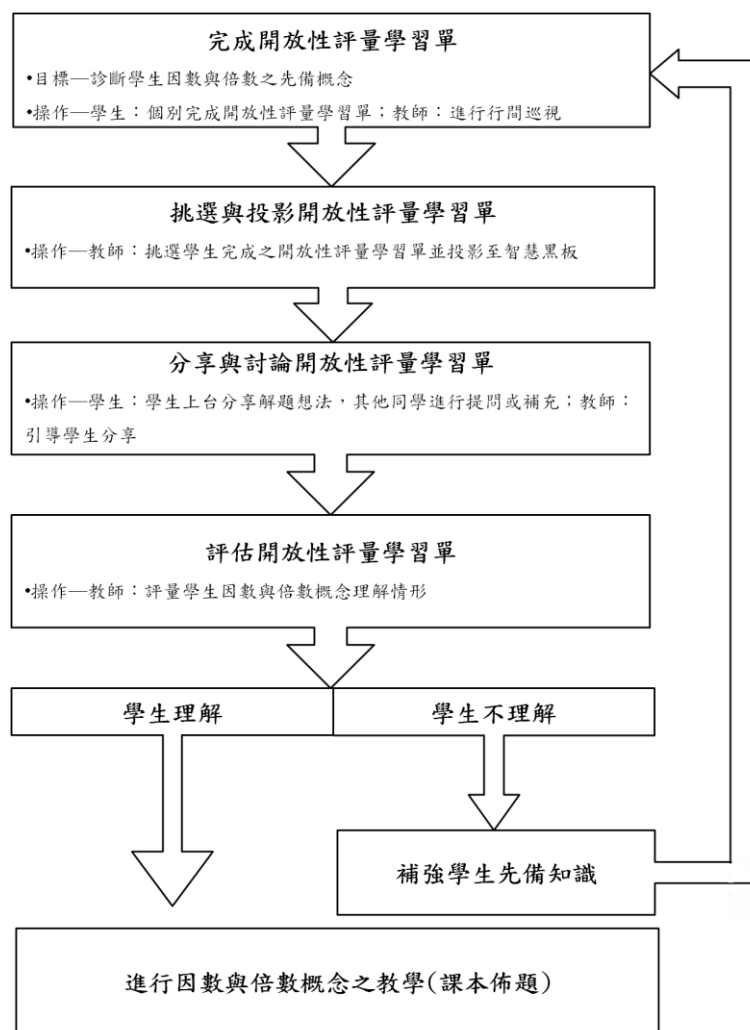


圖 2 實驗組教學與評量之流程（開放性評量置於課本佈題前）

2. 開放性評量置於課本佈題後

教師教完課本佈題後（學習單置於課本重要概念的教學後），請學生個別完成學習單，並於學生作答時行間巡視，以利將學生的解題表現分類，挑選具代表性的解題歷程，投影至智慧黑板。學生完成學習單後接著進行課室分享與討論，此時教師可隨時掌握與觀察學生的學習情形，評估學童理解或不理解新概念。針對不理解的學生，加強概念的澄清後，再進行下一個概念的教學。

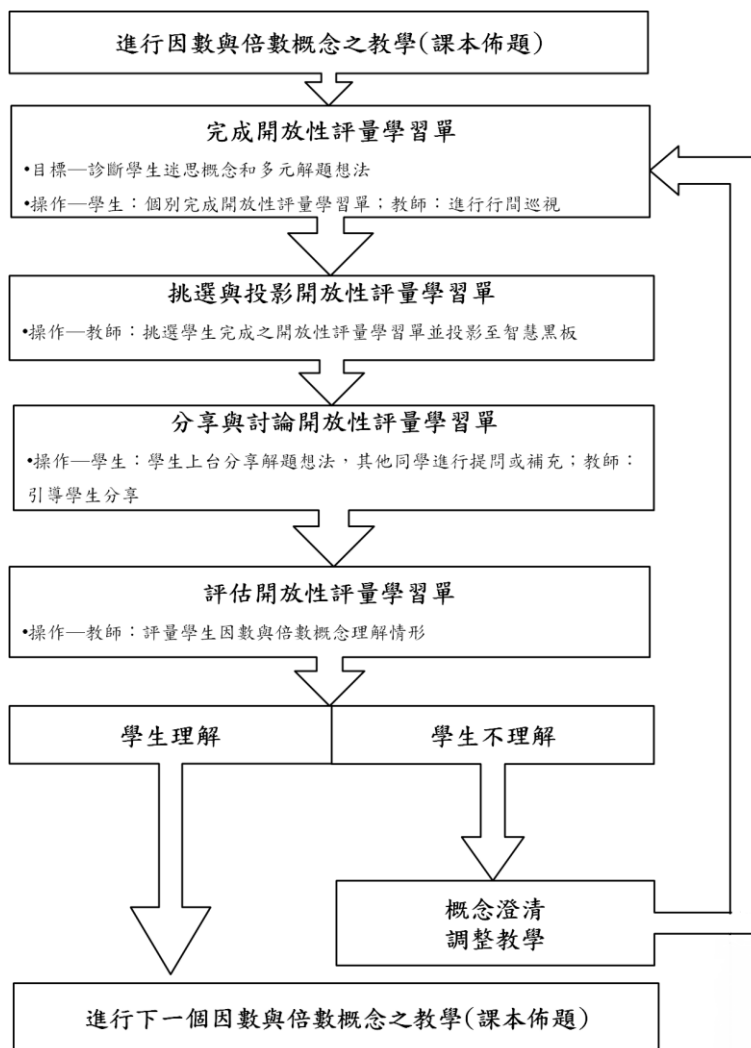


圖 3 實驗組教學與評量之流程（開放性評量置於課本佈題後）

3. 開放性評量取代課本佈題

當課本佈題與開放性評量之概念相似，以開放性評量取代之，避免教導重複。請學生個別完成學習單，同時教師行間巡視，挑選代表性解法於課堂分享。學生完成學習單後接著進行課室分享與討論，此階段教師透過開放性評量學習單傳達重要概念。針對不理解本題概念的同學進行概念的澄清；針對理解本題概念的同學進行下一個因數與倍數概念之教學。

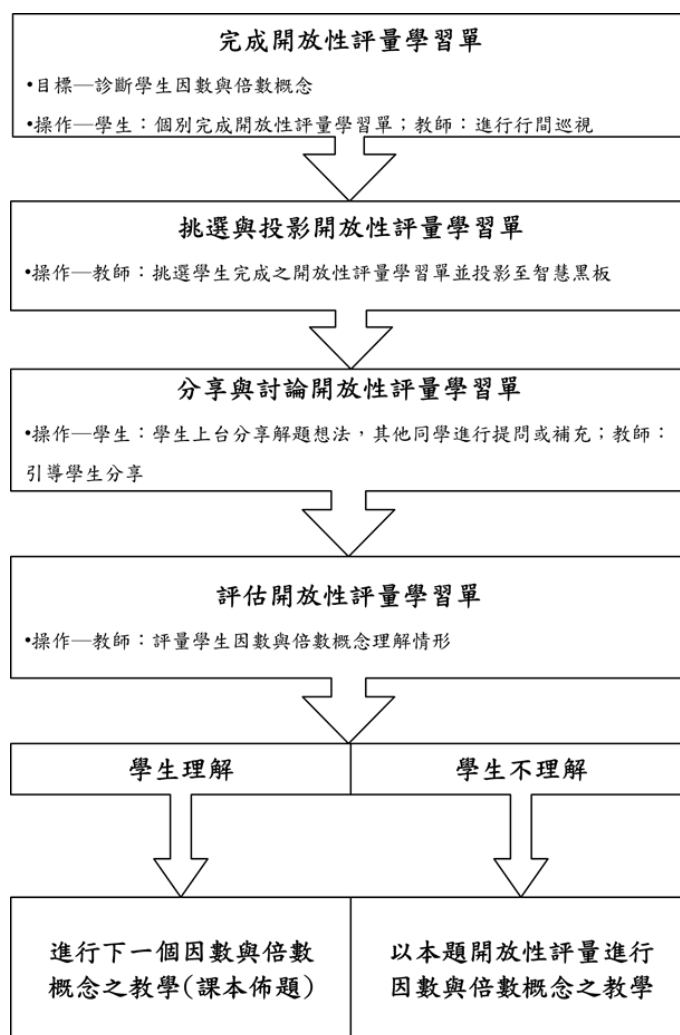


圖 4 實驗組教學與評量之流程(開放性評量取代課本佈題)

(二) 控制組教學與評量之流程

教師先於全班進行因數與倍數單元之重要概念的教學，再以課本「做做看」與「動動腦」之練習作為課堂評量，讓學童進行解題，教師評估學生的學習，針對不理解的學童，加強學生對新概念的理解與澄清後，再進行下一個概念的教學。

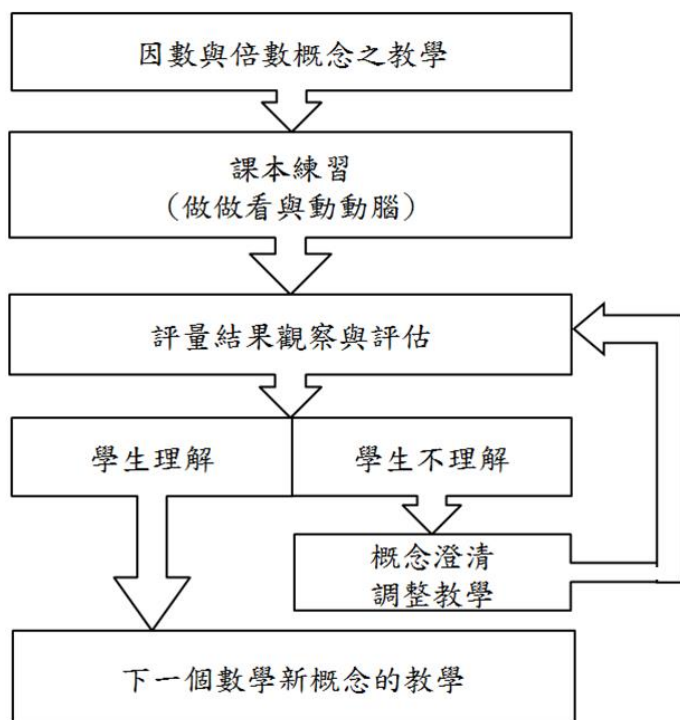


圖 5 控制組教學與評量之流程

五、資料處理

(一) 質性資料處理與分析

開放性評量學習單將於每堂課後收回，針對開放性學習單進行批改，尤其留意學生多元解題想法。每堂下課進行全班學生晤談，了解學生解題想法，以利後續分析解題類型。表 2 為資料類型編碼與說明。

表 2

資料類型編碼與說明

資料類型	編號	編號說明
開放性評量試題	任務 n-m(n=1~6； m=1~4)	課本活動 n 之開放性評量試題編號 m
	任務 1-1	課本活動一之開放性評量試題 1
開放性評量學習單	S1-任務 1-1	1 號學童之開放性評量學習單(任務 1-1)
學生晤談記錄	晤 S1-1080923	1 號學童 108 年 9 月 23 日

(二) 量化資料處理與分析

本研究蒐集之量化資料為學童四年級數學評量成績、自編因數與倍數單元之後測成績。以 IBM SPSS Statistics 統計套裝軟體進行資料處理，利用描述性統計和單因子共變數分析。

肆、結果與討論

一、學生學習成效分析

研究者將收集的相關資料，運用統計套裝軟體(SPSS)進行統計的詮釋與分析。如表 3 所示，在排除共變項（四年級數學評量成績）對依變項（因數與倍數單元後測）之影響後，F 值為 4.704，p 值為 $.040 < .05$ ，達顯著水準，表示受試學生會因為不同評量之實驗設計而有所差異，而且實驗組優於控制組。如表 4 所示，實驗組平均分數為 86.541，控制組為 74.879，實驗組平均分數顯著高於控制組 11.662 分，顯示開放性評量融入教學能提升學童在因數與倍數單元之學習成效。

表 3

因數與倍數單元後測之單因子共變數分析摘要表

來源	依變數	平方和	自由度	平均平方和	F 檢定
組別 共變數	因數與倍數單元後測	916.299	1	916.299	4.704*
誤差	因數與倍數單元後測	4675.259	24	194.802	

* $p < .05$

表 4

因數與倍數單元後測之單因子共變數分析摘要表（描述性統計）

來源	組別	平均數	平均數差異 (實驗組-控制組)
因數與倍數單元後測	實驗組	86.541	11.662*
	控制組	74.879	

* $p < .05$

二、學生解題類型分析

(一) 學生在因數先備知識之解題類型

因數先備知識奠基於「除法問題」和「整除概念」，除法問題搭配開放性評量試題編號為任務 1-1、整除概念為任務 1-2。

1. 學生能解決除法問題

試題任務 1-1

班上有 14 位同學要進行分組，請問每 3 人一組，每個同學都可以分到組別嗎？

1. (A)可以 (B)不可以

2. 我選擇上述答案的理由是：

學生在解決任務 1-1 分別使用不同策略解題，如下：

我選擇上述答案的理由是：
14 不可以被 3

請把你的想法寫下來

圖 6 SL2-任務 1-1 (加法)

我選擇上述答案的理由是：
B

請把你的想法寫下來

十四不可以被 3 整除

圖 7 SM5-任務 1-1 (乘法)

我選擇上述答案的理由是：
B

請把你的想法寫下來

14 ÷ 3 = 4 ... 2

如果這樣子分會有兩個人多出來。所以沒辦法三個人一組。

圖 8 S14-任務 1-1 (除法)

請把你的想法寫下來

因為 14 的因數有 1, 2, 7, 14 裡面沒有 3 這個數字。因數的意思就是可以這個數整除的。

圖 9 S3-任務 1-1 (因數關係)

2. 學生具備整除概念

試題任務 1-2

18 可以被下列哪些數整除，用算式把判斷方法記下來。

1、2、5、6、18、27、36、54

學生在解決任務 1-2，能找到 18 可以被那些數整除，並使用不同的方法解釋 18 不能被 36 和 54 整除。如 S14 清楚被除數和除數的關係，說明如果 $36 \div 18 = 2 \dots 0$ ，就變成 36 是被除數，同理 54，唔談如下：

師：那你講一下什麼是整除？

生：就是不會有餘數。

師：很好！但 36 也不會有餘數阿(36 除以 18 等於 2 餘 0)，為什麼 36 不行？

生：這樣變成 36 是被除數。

師：很好！那 54 呢？

生：54 也會變被除數。(晤 S14-1080923)

另外亦有學生提到，如 S2 解釋 $36 > 18$ 和 $54 > 18$ ，所以 18 不能被 36 和 54 整除，晤談如下：

師：說說看什麼是整除？

生：整除就是沒有餘數。

師：那 18 可以被整除，那 18 是什麼數？

生：18 是被除數。

師：為什麼不能選 36？

生：因為比他(18)大。(晤 S2-1080923)

此外學生 SM5 說明如果 $18 \div 36 = \frac{1}{2}$ 和 $18 \div 54 = \frac{1}{3}$ 商就變成分數，所以 18

不能被 36 和 54 整除，晤談如下：

師：說一下什麼是整除？

生：整除就是餘零。

師：這個($36 \div 18 = 2 \dots 0$)也餘零啊？為什麼不行？

生：因為要 18 除以 36。

師：為什麼不行？

生：這樣就變成二分之一了！(晤 S5-1080923)

(二) 學生在因數問題之解題類型

診斷學生因數概念包括認識因數、找因數和解決因數的應用問題。任務 2-1 檢驗學生因數概念；任務 2-2 檢驗學生找因數。任務 2-3 透過讓學生偵錯題目，診斷學生找因數缺漏（1 和自己）和因數與倍數混淆之情形。

1. 學生具備因數概念

試題任務 2-1

觀察算式 $18 \div 2 = 9$ ，請問只有 2 是 18 的因數嗎？

1. (A)是 (B)不是
2. 我選擇上述答案的理由是：

學生能逐一檢驗 18 可以被哪些數整除，找出 18 的所有因數。如 S10 將 18 可以被哪些數整除的數搭配分組圖示表示出來。

我選擇上述答案的理由是：
 (B)並不是只有2才是18的因數

請把你的想法寫下來

$18 \div 2 = 9$ $18 \div 6 = 3$ $18 \div 1 = 18$
 $18 \div 9 = 2$ $18 \div 3 = 6$ $18 \div 18 = 1$

這些都是18的因數喔!

(1) $18 \div 2 = 9$
 (2) $18 \div 9 = 2$
 (3) $18 \div 6 = 3$
 (4) $18 \div 3 = 6$
 (5) $18 \div 1 = 18$
 (6) $18 \div 18 = 1$

Good! 非常仔細!

圖 10 S10-任務 2-1

另外 SH14 於晤談中清楚說明因數成對的特性，晤談如下：

師：學習單你寫「因數會成對出現」，這個意思是什麼？

生：這兩個都是因數(2 和 9)。(晤 S14-1080924)

2. 學生能找出某數的所有因數

試題任務 2-2

請找出 36 的所有因數，並把找因數的過程用算式記下來。

S6 將 36 可以被哪些數整除逐一檢驗，找出 36 的所有因數；S1 利用乘法與除法算式，成對找出 36 的所有因數，並以表格進行整理。

請把你的想法寫下來

$36 \div 1 = 36$
 $36 \div 2 = 18$
 $36 \div 3 = 12$
 $36 \div 4 = 9$
 $36 \div 6 = 6$
 $36 \div 9 = 4$
 $36 \div 12 = 3$
 $36 \div 18 = 2$
 $36 \div 36 = 1$

圖 11 S6-任務 2-2 (逐一檢驗)

請把你的想法寫下來

$36 \div 1 = 36$	$1 \times 36 = 36$	1, 36
$36 \div 2 = 18$	$2 \times 18 = 36$	2, 18
$36 \div 3 = 12$	$3 \times 12 = 36$	3, 12
$36 \div 4 = 9$	$4 \times 9 = 36$	4, 9
$36 \div 6 = 6$	$6 \times 6 = 36$	6

除法 乘法 得到的因數

36的因數：1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

Good!

圖 12 S1-任務 2-2 (成對)

3. 開放性評量能促進學生反思

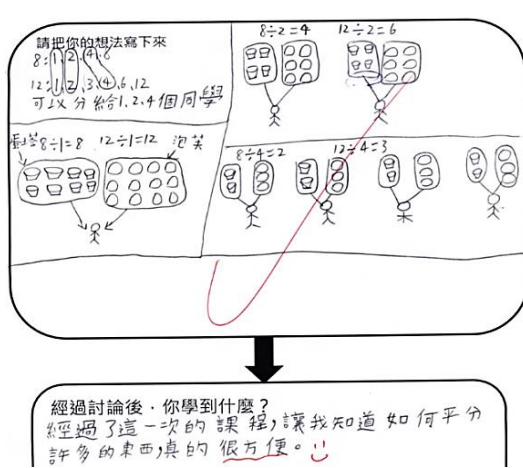


圖 14 S13-任務 3-1 (列舉法)

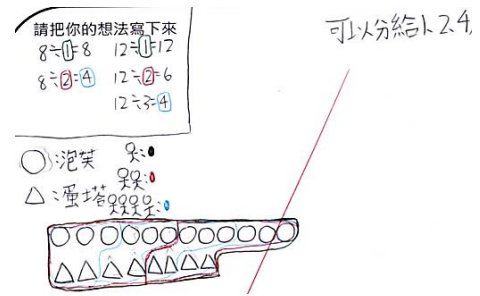


圖 15 S14-任務 3-1 (除法)

2. 學生能找出公因數但無法處理公因數應用問題

S12 和 S5 雖然找出公因數但無法解決公因數之應用問題。

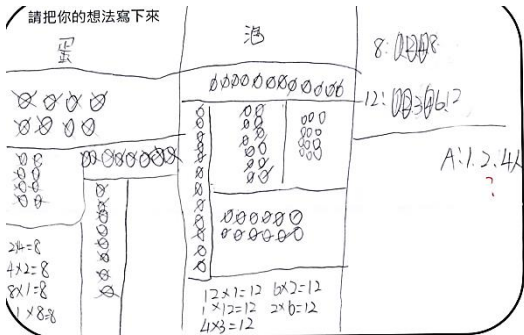


圖 16 S5-任務 3-1

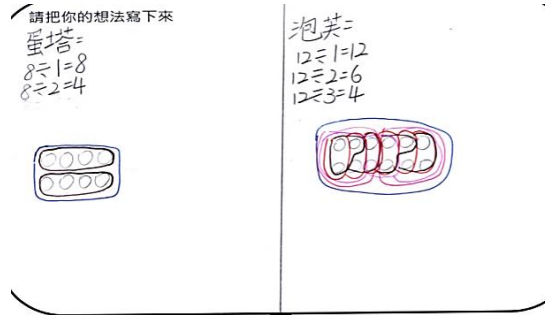


圖 17 S12-任務 3-1

(四) 學生在倍數先備知識之解題類型

倍數先備知識奠基於「幾的幾倍」和「倍的語言」，此概念搭配開放性評量試題編號為任務 4-1。

1. 學生具備「幾的幾倍」和「倍的語言」概念

試題任務 4-1
迴紋針為 4 公分長，彩色筆是迴紋針的 2 倍長，緞帶是彩色筆的 3 倍長，請問緞帶是迴紋針的幾倍？請把算式記下來。

S1 呈現物品長度關係，圖示搭配算式，彩色筆 24 公分為迴紋針 4 公分的 6

倍長。S6 表徵方式特別，以離散量表徵長度的連續量。

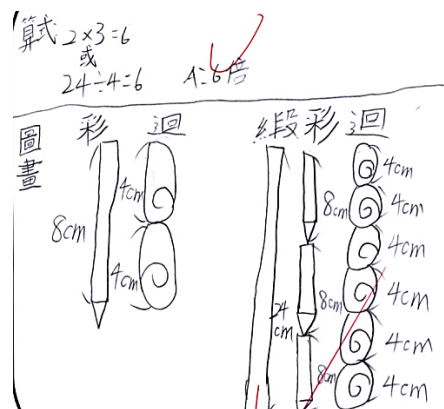


圖 18 S1-任務 4-1

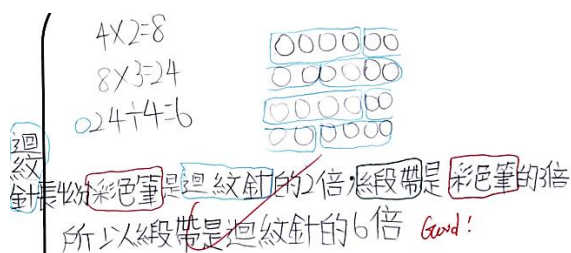


圖 19 S6-任務 4-1

(五) 學童在倍數問題之解題類型

診斷學生倍數概念包括認識倍數、找倍數和解決倍數的應用問題。任務 4-2 診斷找倍數缺漏和因數與倍數混淆之情形；任務 4-3 透過偵錯診斷倍數概念、因數與倍數混淆或以為 1 為倍數之情形。解決倍數的應用問題為任務 4-4 置於課本佈題教學前，作為課本倍數應用問題之先備知識。

1. 學生能找出某數的倍數

試題任務 4-2
找出 18 的倍數，依大小順序寫出 5 個，並把找倍數的算式記下來。

S14 以幽默詼諧的語句：「寫到天荒地老也寫不完」，來描寫倍數有無限多個。S2 用加法找出 18 的倍數。

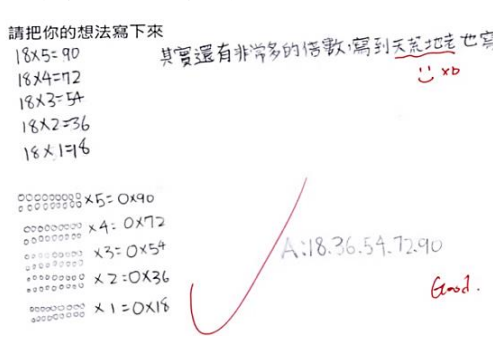


圖 20 S14-任務 4-2 (倍數有無限個)

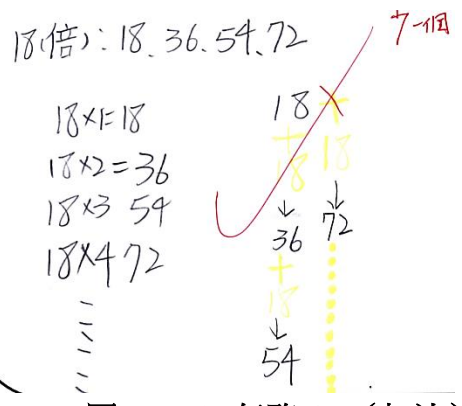


圖 21 S2-任務 4-2 (加法)

2. 學生了解因數與倍數概念

試題任務 4-3

以下幾位同學所找 1~100 中 24 的倍數：

小明：1、24、48、72、96

小光：48、72、96

小美：1、2、3、4、6、12、24 請問哪個同學的說法是正確的？若是錯誤的請同學幫忙改正，並把用算式記下來。

學生能將因數與倍數關係連結自己的學習。

經過討論後，你學到什麼？

我學到了倍數有無限多個，而且很容易把倍數寫成因數，而且因數和倍數有一個規律。例 $2 \times 3 = 6$ 因 因 倍 倍

次錯！

圖 22 S3-任務 4-3

請把你的想法寫下來

小明的倍數有 1，但 1 不是 24 的倍數，而是 24 的因數，因為是所有的數最小的因數 *Good!*

小美只有寫 24 的因數，所以除了 24 以外全部錯誤

小光的倍數忘了寫 24，因為 24×1 所以 24 本身也是自己的倍數 *有規則 1 倍 很棒!*

然自然小明的答案出現了因數，小光是寫 24 的最小倍數，小美是全寫因數，所以答案是 24、48、72、96

圖 23 S7-任務 4-3

3. 學生能比較因數與倍數

試題任務 4-4

果園今天採收一些蘋果，每 3 顆裝一籃，數量最接近 20 又比 20 少，請問今天採收多少蘋果？

S13 說明倍數比因數簡單，顯示學生學完因數與倍數，能說出自己學習的想法，此為一般傳統評量不易呈現的部分，開放性評量能使學生監控自我的學習並促進反思。

經過討論後，你學到什麼？

我學會倍數以後，讓我更容易算出答案，而且我覺得倍數比因數簡單多了！

例如：找出 14 的因數、倍數（寫出 3 個）

因數：
 $14 \div 1 = 14$
 $14 \div 2 = 7$
 $14 \div 7 = 2$

倍數：
 $14 \times 1 = 14$
 $14 \times 2 = 28$
 $14 \times 3 = 42$

Good!

圖 24 S13-任務 4-4

(六) 學童在公倍數與最小公倍數問題之解題類型

公倍數與最小公倍數概念對應對試題為任務 5-1，解決學生認為最小公倍數為 1 之情形。2、3、5 和 10 之倍數判別對應試題為任務 6-1。

1. 學生能找出公倍數與最小公倍數

試題任務 5-1

以下是小明找 12 和 16 最小公倍數的方式：

12 的倍數：1、12、24、36、48、60.....

16 的倍數：1、16、32、48、60、72.....

公倍數：1、48、.....

最小公倍數：1

請問小明的找最小公倍數的方法是正確嗎？

1. (A)是 (B)不是

2. 我選擇上述答案的理由是：

學生能利用乘法、列舉法和短除法找出最小公倍數。

請把你的想法寫下來

因為不是 12、16 倍數，但是是 12、16 的最小公倍數

可是他找的其他倍數是對的，因為 12x1=12，12 再加 12 又是另一個倍數了，16 也是同樣的事情。

小明除了 1 寫錯，其它都是對的！

Good!

A: 最小公倍數是 48

列舉法表格：

12x1=12	12x5=60	12x10=120	16x1=16	16x6=96
12x2=24	12x6=72		16x2=32	16x7=112
12x3=36	12x7=84		16x3=48	16x8=128
12x4=48	12x8=96		16x4=64	16x9=144
12x9=108			16x5=80	16x10=160

圖 25 S14-任務 5-1 (乘法)

我選擇上述答案的理由是：

B

請把你的想法寫下來

12: 12, 24, 36, 48, 60

16: 16, 32, 48, 64, 80

最小公倍數 = 48

圖 26 S9-任務 5-1 (列舉法)

請把你的想法寫下來

圖 我的方法

12, 16 的最小公倍數

2x2x3x4=48

48x2=96

48x3=144

公倍數是 48, 96, 144

A: 最小公倍數是 48

短除法：

12	16
2	8
6	8
3	4

理由：只要先算出最小公倍數，在往上乘，就能算出。

圖 27 S3-任務 5-1 (短除法)

2. 學生能處理公倍數應用問題

試題任務 6-1

39□□是一個四位數，這個數是 2 的倍數，也是 5 的倍數，請問四位數可能為多少，把所有可能都寫出來。

學生能利用倍數判別方法和公倍數概念解題。S13 利用個位判別 2 的倍數，認為此方法會方便許多，進行數學學習的反思。S7 採用公倍數概念解題。

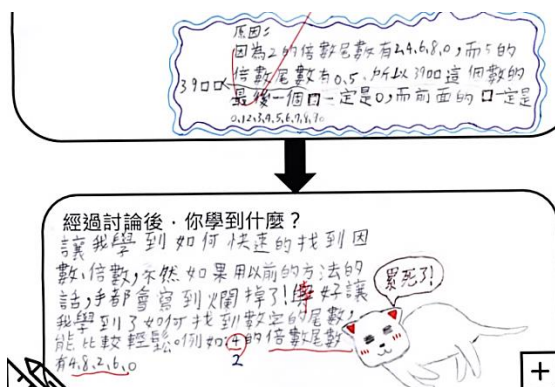


圖 28 S13-任務 6-1 (倍數判別)

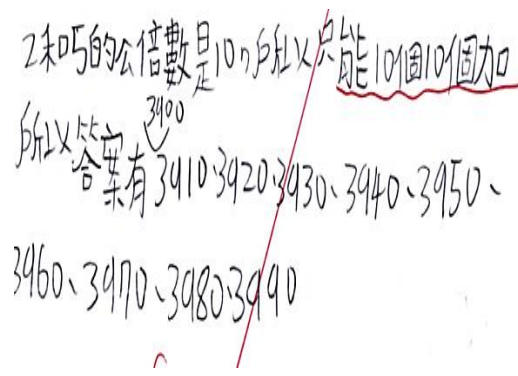


圖 29 S7-任務 6-1 (公倍數)

研究者整理學生於各試題之解題類型 (見於附件二)。

伍、結論與建議

一、結論

(一) 開放性評量融入因數與倍數單元能提升學童數學學習成效

本研究將學童四年級數學成績與自編因數與倍數試卷成績，進行共變數分析，實驗組顯著優於控制組，顯示開放性評量能提升數學學習成效。

(二) 學童於開放性評量呈現多元解題類型

本研究融入開放性評量於因數與倍數單元，輔以學生晤談，學童呈現多元解題類型，開放性評量更能促進學生反思。

二、建議

(一) 教師體認開放性評量題數不宜過多

使用開放性評量應考量學生負荷與教學時間，因開放性評量與傳統評量不同，須寫下自己的解題歷程與想法。同時開放性評量作為課室討論，若教學者未能掌握教學節奏，容易導致教學、討論與分享時間不足，將有失使用開放性評量診斷學生想法促進學生學習與課堂討論之用意。因此使用開放性評量之試題每堂課不宜過多，才能充分討論，促進師生與同儕交流。

(二) 教師須營造師生與同儕間相互欣賞與尊重之課室環境

開放性評量能看出學生的多元解題想法，但當教師或同儕將解題想法分類並

比較優劣，將影響學生不敢發表和害怕犯錯的情況。因此使用開放性評量，教師須營造課室相互尊重與欣賞的環境，讓學生都能說出自己的想法，才為使用開放性評量之用意。

陸、研究討論

本研究將開放性評量融入因數與倍數單元，學生在本單元之學習成效提升，另外在開放性評量呈現多元的解題歷程，對於不擅言詞的學童，更多了表達想法的機會。不過研究者思考實行開放性評量的限制與改進，開放性評量讓學童有充分表達的空間，但此評量方法有別於傳統評量，學生要寫下或說出自己的想法實屬不易，須配合各種方式才能讓學生產出，舉凡教師的鼓勵和獎勵、同儕的作品、分享時間……等，都須全面考量。另外開放性評量強調開放的精神，課室中尊重與包容氛圍更加重要，除了教師的態度，如何營造讓學生安心、自由的數學課室環境是值得思考的方向。研究者亦思考開放性評量融入教學對偏鄉低成就的學童是否合適。本研究為開放性評量融入因數與倍數教學之初探，期能對未來使用開放性評量之教師或研究提供參考與建議。

參考文獻

- 林世華、盧雪梅、陳學志（2004）。國民中小學九年一貫課程學習成就評量指標與方法手冊。臺北市：教育部。
- 林素微（2000）。數學科評量的新願景：談多元評量。*研習資訊*，**17**（3），31-42。
- 胡詩菁、鍾靜（2015）。數學課室中應用建構反應題進行形成性評量之研究。*臺灣數學教師*，**36**（2），26-48。
- 黃培甄、葉啟村（2005）。國小六年級因數與倍數單元之創新架構研究。*南大學報*，**39**（1），61-89。
- 黃國勳、劉祥通（2003）。五年級學童學習因數教材困難之探討。*科學教育研究與發展季刊*，**30**，52-70。
- 劉子鍵、林怡均（2013）。發展二階段診斷工具探討學生之統計迷思概念：以「相關」為例。*教育心理學報*，**42**（3），379-400。
- AL-Absi, M. (2012). The effect of open-ended tasks –as an assessment tool–on fourth graders' mathematics achievement, and assessing students' perspectives about it. *Jordan Journal of Educational Sciences*, **9**(3), 345-351.
- Bayrak, B. K. (2013). Using two-tier test to identify primary students' conceptual understanding and alternative conceptions in acid base. *Meviana International Journal of Education (MIJE)*, **3**(2), 19-26.
- Dias, A. (2005). Using lattice models to determine greatest common factor and least common multiple. *International Journal for Mathematics Teaching and*

- Learning*, 730-738.
- Hilton, A., Hilton, G., Dole, S., & Goos, M. (2013). Development and application of a two-tier diagnostic instrument to assess middle-years students' proportional reasoning. *Mathematics Education Research Journal*, 25(4), 523-545.
- Klavir, R., & Hershkovitz, S. (2008). Teaching and evaluating 'open-ended' problems. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 20(5), 23.
- Kolitsch, S., & Kolitsch, L. (2011). Greatest common factors and least common multiples with venn diagrams. *Louisiana Association of Teacher of Mathematics Journal*, 5, 1-7.
- Orhun, N. (2002). *Solution of verbal problems using concept of least common multiplier (LCM) and greatest common divisor (GCD) in Primary School Mathematics and Misconceptions*. Retrieved September, 2009, from <http://math.unipa.it/~grim/SiOrhun.PDF>
- Rubenstein, R. N., & Thompson, D. R. (2002). Understanding and supporting children's mathematical vocabulary development. *Teaching Children Mathematics*, 9(2), 107-112.
- Tankersley, K. (2007). *Tests that teach: Using standardized tests to improve instruction*. Alexandria, VA: ASCD.
- Treagust, D. F. (2006). Diagnostic assessment in science as a means to improving teaching, learning and retention. In *UniServe science – symposium proceedings: Assessment in science teaching and learning* (pp. 1–9). Sydney, NSW: Uniserve Science.
- Triyani, S., Putri, R. I., & Darmawijoyo. (2012). Supporting Student's Ability in Understanding Least Common Multiple (LCM) Concept Using Storytelling. *Journal on Mathematics Education (IndoMS - JME)*, 3(2), 151-164.
- Tsai, C. C., & Chou, C. (2002). Diagnosing students' alternative conceptions in science. *Journal of Computer Assisted Learning*, 18(2), 157-165.
- Wijaya, A. (2018). *How do open-ended problems promote mathematical creativity? A reflection of bare mathematics problem and contextual problem*. Journal of Physics: Conf. Series, 983 (2018) 012114, International Conference on Mathematics, Science and Education 2017 (ICMSE2017).

附錄一 開放性評量試題內容與說明

教學活動	教學目標	試題編號	開放性評量題 (實驗組)	使用時機
活動一	1-1 透過商為整數，餘數是 0 的整數除法，認識整除的意義	任務 1-1	班上有 14 位同學要進行分組，請問每 3 人一組，每個同學都可以分到組別嗎？ 1. (A)可以 (B)不可以 2. 我選擇上述答案的理由是：	■ 活動一 整除 整除意義：課本例題一（除法問題）教學前。
		任務 1-2	18 可以被下列哪些數整除，用算式把判別方法記下來。1、2、5、6、18、27、36、54	■ 活動一 整除 整除意義：課本例題一（整除概念）教學後。
活動二	2-1 透過整除認識因數	任務 2-1	觀察算式 $18 \div 2 = 9$ ，請問只有 2 是 18 的因數嗎？ 1. (A)是 (B)不是 2. 我選擇上述答案的理由是：	■ 活動二 因數 認識因數：課本例題三（透過操作附件，從乘法或除法算式，發現因數是成對出現）教學後。
		任務 2-2	請找出 36 的所有因數，並把找因數的過程用算式記下來。	■ 活動二 因數 找因數：課本例題四（利用乘法和除法不重複之算式找出某數之因數）教學後。
		任務 2-3	以下是幾位同學所找 24 的因數： <u>小明</u> ：2、3、4、6、8、12 <u>小美</u> ：2、3、4、6、8、12、24、48 <u>小智</u> ：24、48、72、96 請問哪個同學的說法是正確的？（若是錯誤的請你幫忙改正，並用算式記下來）	■ 活動二 因數 因數概念：課本例題五（因數應用問題）教學前。
活動三	3-3 處理公因數與最大公因數的應用問題	任務 3-1	老師準備了 8 個蛋塔和 12 個泡芙，準備分給同學，每個人拿到的蛋塔一樣多，泡芙也一樣多，請問可以分給	■ 活動三 公因數和最大公因數 公因數和最大公因數之應用：取代課本

(續下頁)

教學活動	教學目標	試題編號	開放性評量題 (實驗組)	使用時機
			幾個同學？請將所有分法用圖表示出來。	例題五（分東西之公因數與最大公因數應用問題）。
活動四	4-1 了解倍數的意義	任務 4-1	迴紋針為 4 公分長，彩色筆是迴紋針的 2 倍長，緞帶是彩色筆的 3 倍長，請問緞帶是迴紋針的幾倍？請把算式記下來。	■ 活動四 倍數 倍數意義：取代課本例題一（幾的幾倍問題）。
	4-2 找出某數的倍數	任務 4-2	找出 18 的倍數，依大小順序寫出 5 個，並把找倍數的算式記下來。	■ 活動四 倍數 找倍數：課本例題三（找出範圍內的倍數）教學後。
		任務 4-3	以下幾位同學所找 1~100 中 24 的倍數： <u>小明</u> ：1、24、48、72、96 <u>小光</u> ：48、72、96 <u>小美</u> ：1、2、3、4、6、12、24 請問哪個同學的說法是正確的？若是錯誤的請同學幫忙改正，並把用算式記下來。	■ 活動四 倍數 倍數應用：例題四（倍數應用問題）教學前。
	4-3 解決倍數的應用問題	任務 4-4	果園今天採收一些蘋果，每 3 顆裝一籃，數量最接近 20 又比 20 少，請問今天採收多少蘋果？	■ 活動四 倍數 倍數應用：例題五（倍數應用問題）教學前
活動五	5-1 認識公倍數與最小公倍數	任務 5-1	以下是小明找 12 和 16 最小公倍數的方式： <u>12 的倍數</u> ：1、12、24、36、48、60…… <u>16 的倍數</u> ：1、16、32、48、60、72…… <u>公倍數</u> ：1、48、…… <u>最小公倍數</u> ：1 請問小明的找最小公倍數的方法是正確嗎？ 1. (A)是 (B)不是	■ 活動五 公倍數與最小公倍數 認識公倍數與最小公倍數：課本例題二（宣告公倍數與最小公倍數）教學後

(續下頁)

教學活動	教學目標	試題編號	開放性評量題 (實驗組)	使用時機
			2. 我選擇上述答案的理由是：	
活動六	6-1 能判別 2 的倍數 6-2 能判別 5 的倍數 6-3 能判別 10 的倍數	任務 6-1	39□□是一個四位數，這個數是 2 的倍數，也是 5 的倍數，請問四位數可能為多少，把所有可能都寫出來。	活動六 判別 2、3、5、10 之倍數：判別 2、5、10 倍數：課本例題三(判別 10 的倍數，個位數字是 0) 教學後。

附錄二 開放性評量之解題類型

概念	問題	解題類型	開放性評量 題號
因數先備 概念	除法問題	1.加法策略 2.乘法策略 3.除法策略 4.因數關係	任務 1-1
	整除概念	1.以被除數與除數關係解釋 36 和 54 非本題答案 2.以 $36 > 18$ 和 $54 > 18$ 關係解釋 36 和 54 非本題 3.以 $18 \div 36 = \frac{1}{2}$ 和 $18 \div 54 = \frac{1}{3}$ 解釋 36 和 54 非本題答案	任務 1-2
	認識因數	1.找出 18 的所有因數 (因數成對性質) 2.找出 18 的所有因數 (逐一檢驗算式)	任務 2-1
因數概念	找因數	1.找出 36 的所有因數 (因數成對性質) 2.找出 36 的所有因數 (逐一檢驗算式)	任務 2-2
		1.找出 24 的所有因數(因數與倍數關係偵錯 48、72 和 96 非 24 的因數) 2.找出 24 的所有因數(除數與被除數關係偵錯 48、72 和 96 非 24 的因數)	任務 2-3
		3.找出 24 的所有因數 ($24 \div 48 = \frac{1}{2}$ 、 $24 \div 72 = \frac{1}{3}$ 和 $24 \div 96 = \frac{1}{4}$ ，偵錯 48、72 和 96 非 24 的因數) 4.找出 24 的所有因數 (48、72 和 96 $>$ 24，偵錯 48、72 和 96 非 24 的因數)	
	公因數與最大公因數的應用	1.找出公因數 (列舉法)，了解使用公因數之時機，圖示適切解釋算式 2.找出公因數 (列舉法)，但以為找出的公因數為蛋塔和泡芙的個數，而非人數 3.找出公因數 (列舉法)，僅個別找出蛋塔和泡芙的分法(因數)再找兩者共同的分法 (公因數)	任務 3-1
倍數先備 概念	幾的幾倍和 倍的語言	1.找出「誰是誰的幾倍」(除法算式) 2.找出「誰是誰的幾倍」(乘法算式)	任務 4-1

(續下頁)

概念	問題	解題類型	開放性評量 題號
倍數概念	找倍數	1.能找出 18 的 5 個倍數（說明倍數有無限多個） 2.能找出 18 的 5 個倍數（說明倍數往上加的概念）	任務 4-2
		1.判斷 100 以內 24 的倍數（更正題目有誤之處） 2.判斷 100 以內 24 的倍數（更正與分析題目有誤之處）	任務 4-3
	倍數的應用	1.利用乘法找出最接近 20 又少於 20 的數 2.利用除法找出最接近 20 又少於 20 的數	任務 4-4
公倍數與最小公倍數概念	公倍數與最小公倍數的判斷	1.找出最小公倍數 48（列舉法） 2.找出最小公倍數 48（乘法） 3.找出最小公倍數 48（短除法）	任務 5-1
	公倍數的應用	1.找出 10 個 39□□ 的答案（倍數判別方法） 2.找出 10 個 39□□ 的答案（公倍數判別方法）	任務 6-1

附錄三 國小五年級因數與倍數單元後測試卷

國小五年級因數與倍數單元後測試卷

親愛的同學您好，這份試卷這是幫助你對「因數與倍數」的瞭解，請放輕鬆作答，仔細計算後再寫下你的答案，試卷總共有 20 題，作答時間是 40 分鐘。

班級：_____ 姓名：_____ 座號：_____

1. 已知 $10 \div 5 = 2$ ，請問：
 - (1) () 5 是 10 的 ①因數②倍數③公因數④公倍數
 - (2) () 2 是 10 的 ①因數②倍數③公因數④公倍數
 - (3) () 10 是 5 的 ①因數②倍數③公因數④公倍數
 - (4) () 10 是 2 的 ①因數②倍數③公因數④公倍數
2. 已知 $3 \times 4 = 12$ ，請問：
 - (1) () 3 是 12 的 ①因數②倍數③公因數④公倍數
 - (2) () 4 是 12 的 ①因數②倍數③公因數④公倍數
 - (3) () 12 是 3 的 ①因數②倍數③公因數④公倍數
 - (4) () 12 是 4 的 ①因數②倍數③公因數④公倍數
3. 判別公因數、公倍數、最大公因數和最小公倍數：
 - (1) () 4 是 12 和 16 的①因數②倍數③公因數④公倍數
 - (2) () 1 是任意兩數的①因數②倍數③公因數④公倍數
 - (3) () 10 是 2 和 5 的 ①因數②倍數③公因數④公倍數
 - (4) () 12 是 3 和 4 的 ①因數②倍數③公因數④公倍數
 - (5) () 下列哪一個數為 6 和 8 的最大公因數 ① 1 ② 2 ③ 6 ④ 8
 - (6) () 下列哪一個數為 3 和 6 的最小公倍數 ① 1 ② 3 ③ 6 ④ 18
4. () 45 是 3 和 5 的公倍數，請問哪一個選項也是 3 和 5 的公倍數？
 - ① 25×2
 - ② 35×2
 - ③ 45×2
 - ④ 55×2
5. () 觀察下列兩個式子 $4 \times 86 = 344$ 和 $344 \div 4 = 86$ ，請問哪個同學說法是正確的？
 - ① 小華：「4 是 344 的因數」
 - ② 小明：「4 是 344 的因數與倍數」
 - ③ 小英：「344 是 86 的因數」
 - ④ 小智：「4 是 86 的倍數」
6. 請將可以整除 14 的數字圈起來
1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、14、28、42
7. 請列出因數、公因數和最大公因數：
 - (1) 請寫出 14 的因數：_____

(續下頁)

- (2) 請寫出 21 的因數：_____
- (3) 請寫出 14 和 21 的公因數：_____
- (4) 請寫出 14 和 21 的最大公因數：_____
8. 請列出倍數、公倍數和最小公倍數：
- (1) 請寫出 16 的倍數(由小到大，列出 10 個)：

- (2) 請寫出 18 的倍數(由小到大，列出 10 個)：

- (3) 請寫出 16 和 18 的公倍數(由小到大，列出 3 個)：

- (4) 請寫出 16 和 18 的最小公倍數：

9. 下列哪些數是 2、3、5、10 的倍數？
156、273、105、820、444、782、415、700
- (1) 2 的倍數有_____
- (2) 3 的倍數有_____
- (3) 5 的倍數有_____
- (4) 10 的倍數有_____
10. 老師要把 35 顆巧克力平分給小朋友，請問平分給幾個人，可以剛好分完？寫出所有答案並把作法記下來。
11. 有一張長 36 公分、寬 42 公分的長方形紙，想把全部剪成相同大小的正方形。
- (1) 請問可能的邊長是幾公分？寫出所有答案。
- (2) 請問剪成最長的正方形是幾公分？
12. 有一堆糖果數量在 200 顆~300 顆之間，每袋裝 24 顆可剛好裝完，請問這堆糖果可能有幾顆？
13. 運動會表演的人數在 50~80 人之間，每 4 人排一排或每 6 人排一排，可以剛好排完，請問可能的人數是幾人？

本試卷結束