劉祥通、章勤瓊（2022）。
兩岸師資生解基準化問題的表現與分析。
臺灣數學教師，**43**（2），75-97。
doi：10.6610/TJMT.202210_43(2).0005

兩岸師資生解基準化問題的表現與分析

劉祥通[1]、章勤瓊[2]
[1]國立嘉義大學教育系數理教育碩士班
[2]福建師範大學教育學院

摘要

基準化問題是小學高年級數學比較困難的題材之一，修習教育專業的師資生在基準化問題的表現值得進行調查和研究。本文從文獻中挑選了的四個進階的基準化問題，以文字題的方式呈現形成任務單，以 147 位臺灣 68 位、大陸 79 位）小學教育的師資生進行開放作答。本文主要是分析台灣師資生的解答類型分類與統計正確率，並與大陸師資生做對比，其次各題的解析類型是經過兩位研究者分析，尋求共識獲得的結果。研究發現，四個問題的正確率在 33.8%-55.9%之間，遠比大陸師資生答對率低(65.8%-88.6%)；正確解題類型有三種:設基準量為 X、設基準量為 1、設特殊數值當基準量等；錯誤類型包括基準量指認錯誤、程序性知識與概念性知識不足以致未能克服解題障礙以及未發揮後設認知(元認知)的監控能力以致解題失敗。最後在討論中解析 2 個簡潔的解題策略，並找出 4 個解題失敗的關鍵點。

關鍵字：小學數學；師資生；基準化問題；解題表現

通訊作者：劉祥通，e-mail：shiangtungliu@gmail.com
收稿：2022 年 6 月 20 日；
接受刊登：2022 年 7 月 22 日。

壹、緒論(研究動機、研究問題)

在大學修習師資培育課程的學生，在台灣稱為職前師資生，在大陸稱為師範生，為了一致性，本文在台灣出版，因此以「師資生」來稱呼。

美國數學教師學會(National Council of Teachers of Mathematics, 簡稱 NCTM)出版《學校數學的原則與標準》特別強調:評量應該支持重要的數學學習，以及提供有用的資訊給老師與學生(NCTM，2000, P.22)。基於此論，師資生的數學解題表現也應提供給師資培育學者與師資生， 做為教學與學習的改進。

一、師資生對基準化(標準化)問題感到困難

臺灣地區教科書描述兩量之倍數關係，用”基準量”來對比比較量的大小(比較量÷基準量=比率或比值)。大陸地區教科書則用”標準量”一詞，例如，比較量÷ 標準量 = 份數比 (劉玲，2001)。比值(比率) 的用語，大陸用「份數比」或「分率」來稱呼。

Freudenthal(1983) 用「Norming」 以描述兩量對比能力的發展過程，Freudenthal 不是用「Standardizing」, 也不是「Standardization」， 因此作者翻譯「Norming」為「基準化」；再者，Lamon(1994)也用「Norming」一詞，以著墨兩量倍數關係的對比，強調「Norming」的能力是相對思考的能力與也是解比例問題的基礎。

美國的研究發現，教師與成年人對於分數乘法與除法的理解，非常有限(Armstrong & Bezul, 1995)。Ma(1999)也發現 43%的美國小學教師雖正確地計算(1+3/4)÷1/2 的問題， 但是不瞭解計算法則的理論基礎。

Lamon 的研究也指出了小學生分數基準化的困難 (Lamon,2002)，例如，小明走了$\frac{3}{4}$ 公里(千米)，發現走了全長的$\frac{4}{5}$，請問全長多少公里(千米)？”此問題既不是等分除(Partitive division)，也不是包含除(Measurement division)的問題，而是探求單位比率(The determination of a unit rate)的問題(Sinicrope, Mick, 和 Kolb 2002)。此問題在臺灣的小學參考書稱之為”相當問題”，也就是已知的($\frac{3}{4}$公里)相當於全長的$\frac{4}{5}$，多少公里相當於”全長 1”，此相當問題有比例推理的性質。大陸師資生對上述問題求解當然沒有問題，是否能夠知其所以然，而可以向小學生解釋清楚呢?

根據廖姵雯與劉祥通(2013)調查研究發現:師資生的基準化能力略顯不足，此研究通過問題:

蝸牛珍珍和蝸牛旺旺比賽跑步。比賽開始十秒後，珍珍跑了$\frac{1}{7}$公尺(米)，旺旺跑了$\frac{2}{11}$公尺(米)，請在數線上標示出起跑的位置，並說明你的策略（做法）。

此問題用來測試師資生的基準化能力，但台灣地區只有 68%的小學教育專業的師資生答對此問題。因此，師資生的基準化能力值得吾人繼續繼續關心。本文的任務單除了給台灣一所師培大學修習小學教育專業的學生解答，也以相

同問題給大陸一所大學教育學院修習小教專業之師資生(師範生)解題，以作為對比，期望研究結果能給師資培育單位與數學教育學者參考與改進之依據。

二、數學知識影響數學教學表現，師資生應有高觀點的數學知識

Ma(1999)強調深刻理解基礎數學，對於數學教學的重要性；唯有完全理解該題材，才能有良好的教學表達能力。Usiskin, Peressini, Marchisotto, & Stanley (2003) 主張數學教師應有高觀點(advanced perspectives)的數學知識，他們提倡：關注于數學原理與學校數學兩方面歷史以及概念的演進，才能勝任數學教學的任務。所謂高觀點的數學知識，該書鼓勵數學教師或師資生深度探討數學觀念(ideas)，並且清楚與精準地解釋數學想法；也期待教師或師資生能夠欣賞數學之美、數學的邏輯結構與應用。如果師資生有高觀點的數學知識以看待上述的分數除法，那麼他們的數學知識，將會幫助他們日後的數學教學表現。

三、研究問題

誠如上述，師資生的數學知識為數學教學的重要基礎。對於與小學高年級教材關係密切的基準化的問題，師資生的基準化問題的解題表現是如何? 本文將用包含四個文字題的任務單來調查和探討兩岸修習小學教育的師資生在基準化問題的解題表現。

貳、文獻探討

基準化能力需要兩項先備知識，即相對思考能力與單位化能力。

一、相對思考能力

相對的思考能力指學生能瞭解情境中數量關係的相對性。Lamon(1995)認為相對思考能力和比值(比率)的單位化能力是解數量關係問題的兩個重要的思考策略。因為比例是一種比較性的指標，表示一個數量與另一個數量之間的關係，不只是單獨一個數量的改變，所以相對思考能力是解比例問題的一項重要基礎。

而比值是表示一個數值相對於另一個數值的相對大小，但是比例問題牽涉兩個比值的對等，因此“相對”正是比例問題中最重要的概念。例如，一隻老鼠吃的量比大象還多，這樣的觀點是基於相對於身體的重量，不只是小的動物相較於大的動物活動量較大，也因為它們相對的面積大，比較容易流失熱量(van Galen 等，2008)。換言之，以相對的觀點，一隻老鼠一天所吃的量÷該老鼠的體積大於> 一隻大象所吃的量÷該大象的體積。

二、單位化能力與基準化能力

“單位化”（unitizing）是將單位結構逐漸建立複雜化的歷程，它是發展

更複雜推理的重要機制（mechanism）(Lamon,1996)。例如，1 單位(24 罐)可樂可以看成 2 單位(12 罐)，3 單位(8 罐)、4 單位(6 罐)等。Lamon(1996) 認為如果學生能夠彈性的看待以上單位量(多少罐)與單位數之間的關係，那麼該生對整數的單位化能力可說發展得很好。Lamon(1993)以 16 個物件為例，它可以看成 16 組 1 個單位物件，也可以看成 4 組 4 個單位物件；再發展找出 16 個物件的 1/4(4 個物件)，進而找出 16 個物件 2/4(8 個)與 3/4(8 個)等。簡單的說，3/4 可以看成 3 個 1/4，繼續發展下去，又可以彈性地看成 6 個 1/8 等等，此乃分數單位化的表現。Lamon(2002)強調單位化成功說明學生可以將分數看成一個數(a fraction as a number)，不是兩個數的組合。學習者單位化的範圍或目標，從整數擴及到分數、小數、與變數等等，單位化的能力是基準化能力的基礎。

“基準化”（norming）是採取“單位”的架構以概念化其他的情境；例如，“將地球的大小想成像一根針頭那樣大（大約 1 毫米），然後根據這樣的定義重新看待整個太陽系的大小，那麼太陽就變成是直徑只有 10 釐米的球體，且太陽與地球的距離也變成只有 10 公尺(米)而已”(Freudenthal, 1983）。這 以一個基準量(標準量)來推算其他量的方法，是一種“基準化”的過程，在學習數學中是很普遍的思考方法。以往的教學案例中已有這樣的思考方法，但未用“基準化”的術語。例如，黃武雄（1995）用颱風暴風半徑 200 公里(千米)與臺灣島長 500 公里(千米)做比較，以幫助理解颱風暴風半徑大致上有多大？他特別強調，“比較是知識的基礎，也是同化的手段”。這裡的說法是“比較”，即是用”基準量”去比較的“基準化”過程。

Lamon(1994)指出:分數除法的理解與基準化的能力關係密切；以 3/4 ÷1/2=? 到底 3/4 包含了多少個 1/2? 此 1/2 是一個單位整體(unit whole)，而 3/4 被此單位整體(1/2)重新詮釋(re-interpreted)成為 1 又 1/2 個。研究者認為此單位整體(1/2)，大陸的教師與學者稱為「單位一」。如果將「單位一」改為「新單位一」也許更為恰當，而 1 又 1/2 個稱為「份數比」。

劉祥通（2007）以較複雜的分數 $\frac{4}{5}\div\frac{3}{4}=\frac{16}{15}$ 為例，視“$\frac{3}{4}$”當基準量，用來比較“$\frac{4}{5}$”，即為“$\frac{4}{5}$”裡包含著“$\frac{16}{15}$”個“$\frac{3}{4}$”；此種詮釋，對於多數師資生來說，未曾想到以“除數”當作新單位， 去解釋“被除數”有多少個新單位，此新單位即是”商數”。

Thompson(1995)提出: 數學裡的大概念(big ideas)不是在演算法中被發現，而是我們如何去看見，因此幫助學生以量化的觀點看待周遭的世界(see the world quantitatively)，此量化推理不在數，而在物件(objects)，或量度(measurements) 以及它們之間的關係。

Thompson(1995)巧妙地設計一個具象的圖(見圖 1)，給學生看乘法關係內的”部分(parts)”與”整體(wholes)”，其目的是要學生能夠精準的找出基準量與比較量，以發展出完整的基準化的能力。

問題 1:你看到 3/5 的 5/3 嗎?

分析:回答此問題，學生要能夠以 5 個小單位找到 3/5， 其次從 3 個小單位，

再找出 5/3 倍，再得到 5 小個單位；

問題 2:你看到 1÷3/5 嗎?

分析:回答此問題，學生要能夠以 3/5 個大單位(3 個小單位)當作基準量，以找到 1 個大單位(5 個小單位)當作比較量，進而發現比值是 5/3 倍。

以上問題，學生要彈性地看見”基準量”以尋找”比較量”，進而得到比值或成為幾個”份數比”的問題。換句話說，唯有能夠彈性地確認出基準量與比較量，才能解答複雜的基準化應用問題。

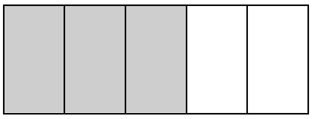


圖 1:部分與整體的關係

大陸教師提出一個例子「8 比 9 少 1/9，此 8 是比較量，9 是標準量(基準量)，9 是單位 1，此 1/9 是份數比」(劉玲，2001)。

此例的確困擾很多學生與成年人，明明 8 比 9 少 1，怎麼會是少 1/9 呢? 理由是:把 9 當作基準量，看成單位 1，少的 1 是相對於 9(基準量)是 1/9(份數比)；相對地 9 比 8 多 1/8，此時 8 是標準量(基準量)，將 8 看成是單位 1，1/8 也是份數比(比值)。以上例子缺乏具體的物件與量度的情境 較為抽象， 對小學生而言尤為深奧。水結成冰時，體積會增加$\frac{1}{11}$，若冰融化成水時體積會減少多少？(林錫麟，2007)，此應用問題有較具體的情境，或許對於解題者沒有那麼「去情境(de-contextualization)」的感覺。

以上有很多不同的單位與單位的轉換，處理複雜的單位是學習數與量必經的過程。Steffe(1994)也強調有理數的推理的基礎在於學生能夠處理複雜的單位(complex units)。

三、解文字題的表現

關於文字題的理解困難，Cuoco(2008) 指出兩個共同的問題: 不熟悉問題的情境，另一種是一般性的閱讀困難。

美國國家教育進展測驗(National Assessment of Educational Progress 簡稱 NAEP)提供以下二例以說明不熟悉問題的情境(Kouba, Zawojewski, & Strutchens, 1997):

(1)甲吃一塊披薩的 1/2， 乙吃另一塊披薩的 1/2， 請問誰吃的比較多? 請用圖形、數位與文字解釋你的答案。

此披薩比較問題，未說明甲、乙二人所吃的披薩大小是否相同，困擾了四年級學生， 答題令人滿意與非常滿意者只有 24%。

(2)甲乙兩候選人競選， 甲獲得男性 48%，與女性 55%的選票，請問甲的票數會高於乙?

此選票比較問題，未提供男性與女性的票數，困擾 12 年級學生，只有 26%學生回答需要知道男性與女性的票數，否則無從判斷，此問題雖無測驗師資生的資料，可以推定師資生對此問題可能也有有挑戰。解此問題，基準量的指認與察覺是能否成功解題很關鍵的因素。

當學生遇上不熟悉的問題情境，Cuoco(2008)建議教學時採取「猜測(guess)、檢查(check)、一般化(generalize)」的解題法或教學法。此法雖是耗時，卻可以配合學生的認知程度。

其次是一般性的閱讀困難，有的學者提出理解題意，有的強調問題轉譯與整合，也有強調要有豐富的資源與背景知識。

Polya(1957)建議在解題教學時分成理解題意(Understanding the problem)、擬訂計畫(Devising a plan)、執行計畫(Carrying out the plan)與回顧答案的合理性(Looking back)四個步驟來引導。Schoenfeld(1985)提出影響解題行為有四個因素，分別為資源(Resource)、捷思(Heuristics)、控制(Control)與信念系統(Belief system); 而“資源”(先備知識)是與閱讀理解能力最為相關的因素。

Mayer(1992)主張文字題解題的過程分成四個階段:問題轉意(Problem Translation)、問題整合(Problem Integration)、計畫與控制(Planning and Monitoring)、與執行(Execution)四個步驟。Lester & Kroll (1990)提出的以下例子可以呼應問題轉譯與問題整合:

莎莉每週有 5 元美金的零用金，有一周她的母親給她是零錢，分別是 25 分硬幣(0.25 元)、十分錢(0.1 元)、與鎳幣(0.05)元總共 24 個，請問她母親這周給的各種零錢分別有幾個? 解這個問題需要將線索個別轉譯，也要把兩個線索(共 5 元美金與 24 個硬幣)結合起來。

Mayer(1992)更進一步指出解文字題需要有程式性知識(procedure knowledge)、語言知識(linguistic knowledge)、語意知識 (semantic knowledge)、基模知識(schematic knowledge)與策略知識 (strategic knowledge)。

Barton, Heidema & Jordan(2002) 提出:數學閱讀需要豐富的數學基模做為基礎，數學文本中的詞彙(vocabulary) 與敘述(statement)都蘊含數學概念，解題者對於詞彙與敘述進行解讀後，才能理解，進而解題。例如，題目中的“課稅”、“折扣”、“省下百分比”、“哪一方案較划算?”。

因閱讀錯誤導致解題失敗的例子很多，縱使資優(尖子)生也不例外；王仁郁(2019)的研究發現:資優生也會因閱讀理解錯誤，導致基準量指認錯誤，而導致解題失敗；他還發現題目中提供圖形以說明理解，能大大增進解題表現。

關於基準化文字題的解題方法，Boaler(2015)的例子如下:

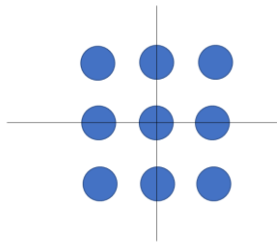


圖 2:一位學生的自創解法

一位男士到店裡買火雞片，3 片的重量是 1/3 磅，但是他的飲食只能吃 1/4 磅，請問他可以吃幾片?

一位四年級生自創的算數視覺解法:

3 片有 1/3 磅， => 1 磅=9 片(畫出 9 個圓圈) => 1/4 磅=(2 +1/4) 片 (如圖 2)。此解法先用倍數法(比例法)求出 1 磅相當於 9 片，而 1/4 磅相當於(2 +1/4)片(用十字線切割九個圓)。看了此解題方法，吾人可以發現此問題也是一種 “相當” 問題。此法很直觀，利用此法也許可以幫助很多學生獲得有意義的學習，如果教師在行間探訪而獲得此法，意義化之後要珍惜它，也要表揚以鼓勵該生與其他學生創造自己的解法。

Haylock(1995)強調:當標準量改變時，解題者是否能正確指認基準量是解題的關鍵。例如，Haylock(1995) 提出這樣的問題，上個月一個物品售價 200 英鎊，這個月增加 10%，下個月減少 10%，請問後來增加或減少多少百分比？這樣的問題困擾很多人，它給定已知量，形容改變量多少的問題，就是一種相對思考問題，也是基準化的的問題。解決這樣的數量關係問題，需要培養基準化的能力。

Van den Heuvel-Panhuizen (2004) 也設計一個開放式評量問題:以加量 25%脆餅乾，價格不變，請問相當於多少折扣? 以上問題給 39 位五年級學生作答，28 位答錯者的回應迴異，可見學生的思考層次與解題路徑大大不同，值得給教學者分析與探討，以瞭解學生的解題想法。

參、研究方法

本文旨在探討師資生在基準化(標準化)問題的解題表現，採用調查法，設計開放式的任務單給二岸師資生求解，施測對象為台灣一所師資培育大學小學教育學程的 68 位，對照組為大陸某城市的市級大學 79 位教育學院小學專業方向的師資生，共 147 位。

測試時間都為 40 分鐘。根據學生的答案，由兩名研究者共同進行解題類型分析，希望找出他們使用的解題類型(策略)，並解析各錯誤類型的可能因素，以及並統計出各類型的人數。

一、任務單的設計

基準化問題是小學高年級學生的學習題型，解決普通的基準化問題是在師資生的能力範圍內的。為了考驗師資生是否有更高一層的數學能力，研究者從文獻中挑選了比較困難的與基準化問題有關的四題應用題組成一份任務單，此任務單給師資生開放作答。此四題的題目與特點分述如下：

(一)、水結成冰時，體積會增加$\frac{1}{11}$，若冰融化成水時體積會減少多少？(林錫麟，2007)。

特點分析:這個題目是有情境的量化推理問題，前後兩個敘述的標準量與比較量剛好互換　，求未知問題的比值，考驗學生能否正確從情境中指認出基準量，而求得新的比值與減少體積的百分比，也探討師資生的解題策略與方法。

(二)、某一品牌的奶粉，促銷期間加量 10%，但不加價，請問此促銷方案相當於省下多少百分比的開支？(Van den Heuvel-Panhuizen, 2004)

特點分析: 題目中牽涉到“容量”與“價錢”，問省下多少百分比? 其實就在考驗解題者能否連結兩個線索(容量增加 10%，價錢不改變)，處理兩種不同單位的量，以比較「單價」，對照出前後方案的價錢與容量之比率?

(三)、 一位業務員，從一月到二月、二月到三月、三月到四月的業績的增長百分率，剛好都一樣，請問從一月到四月業績增長率上升(或下降)了多少百分率?)

表 1: 一位業務員 4 個月份的業績

月份	一月	二月	三月	四月
業績	?	54,000	62,100	?

特點分析:

每月的增長率相同，題目問一月到四月的增長率，一月與四月業績是未知，必須從相鄰兩個月的業績尋找增長率，以求出前後四個月的增長率是多少? 此題的起始值一月的業績未知，對於國小高年級生資優(尖子)生、中學一般生往往因迷思概念，而減去成長率 15%，對於師資生是否有困難? 其次，是否能將成長的百分率看成是倍數，正如分數看成是倍數(fractions as multipliers)(Harel,1995)，而有百分率連乘的精簡策略?

(四)、根據某一項統計，黃金價格從七月份上升六月份的 15%，又從八月份下降七月份的 10%，假設九月份要回到六月份的黃金價格，請問從八月份到九月份的黃金價格是上升還是下降？上升（或者下降）多少百分比？

特點分析: 此題的發想源自於股市上個月下跌 20%，這個月回到先前的價位，請問這個月上升多少百分比? 修改成:連續三次改變基準量的情境中，考驗解題者能否從長篇的文字題情境中找出正確的基準量，以得出業績上升或下降

的增長百分比。其次，根據計算結果八月份達到 1.035，九月份降回 1.0，學生會直接寫下降 0.35%? 還是找出基準量 1.035 再處理百分比的問題?

二、資料分析:

對 147 位師資生的解題表現分類的過程中，二位研究者在分析各題的解題類型時發現，各題的解法有共通性，大略可以分成三種類型：1. 代數列式，2. 設基準量為 1，3. 尋找特殊數值法(例如，假設水的體積為 11，結冰後的體積為 12)。然後再將各類進行細分，並探討解析差異、統計各類型的人次(答對率)，並附上大陸學生解題類型的人次當對照，從各類型中找出典型案例。最後，分析錯誤類型的可能原因，各題又附上幾位台灣學生的解答與表徵(代碼以 TW1-1，代表台灣師資生解第一題的第一位解答者)， 幫助讀者了解該解題類型。可惜，因為掃描檔案的字跡不夠清楚，因此，恕本文不呈現大陸師資生的解答與表徵。

肆、研究結果分析

以下是對 68(對照組 79)位被測師資生的測試結果，根據他們在任務單的四題中各題的解題情況，進行了解題類型的分析。

第(一)題：當水結成冰時，體積會增加$\frac{1}{11}$，若冰融化成水，體積會減少多少？

表 2: 第(一)題解題類型與人數對比

類型 1：解題正確，以一當作基準量，正確列出關係式。	
人數：21(44)	例如：將水的體積當成 1 單位，冰的體積為 $\left(1+\frac{1}{11}\right)\times 1=\frac{12}{11}$， 而冰融化成水時體積減少$\left(\frac{12}{11}-1\right)\div\frac{12}{11}=\frac{1}{12}$ 。
類型 2：解題正確，利用未知數x，正確列出關係式。	
人數：4 (23)	例如：設水的體積為x，冰的體積則為$\frac{12}{11}x$， 而冰融化成水時體積減少$\left(\frac{12}{11}x-x\right)\div\frac{12}{11}x=\frac{1}{12}$。
類型 3：解題正確，用特殊數值代入求解。	
人數：3(3)	例如：假設水的體積為 11，則冰的體積為 12， 所減少體積 1 為冰體積的 $\frac{1}{12}$ 。
類型 4：觀念錯誤，未指認出題目的基準量改變。	
人數：15 (6)	例如：直接寫下$\frac{1}{11}$ 。
類型 5: 列式正確，回答錯誤，未發揮元認知監控	
人數:2 (3)	例如:W (水) $\times\frac{12}{11}=I$(冰) ，$I=W\times 11/12$，答:11/12

續下頁

類型 6:: 看不出計算方法， 或空白未作答	
人: 23 (0)	看不出計算方法 13 位，空白 10 位； 此類型大陸師資生 0 位。

註解: ( )內的數字代表大陸師資生的人數

此題的特點為基準量改變，有 28 位佔 41.2%(大陸 88.6%)師資生解題正確，正確類型大致分為以下三類:

類型 1：師資生大多將水當成 1 單位，冰當作$\frac{12}{11}$來進行計算。

類型 2：設水的體積為x，冰的體積則為$\frac{12}{11}x$，此為代數法。

類型 3：其中台灣師資生有 3(大陸 3)位以特殊的數值 11 當作水的體積，12 就是冰的體積，冰溶化為水時體積又是 11，所以減少了 $\frac{1}{12}$ ，研究者認為此法是用特殊數值代入法。

類型 4:而錯誤解答裡，大多數師資生 15(大陸師資生 6)位直接寫下減少 $\frac{1}{11}$，這是將基準量指認錯誤導致的；

一位學生(TW1-1)答案 水(10/11)= 冰(11/11)， 因此冰溶化為水後減少 1/11(見圖 3)。

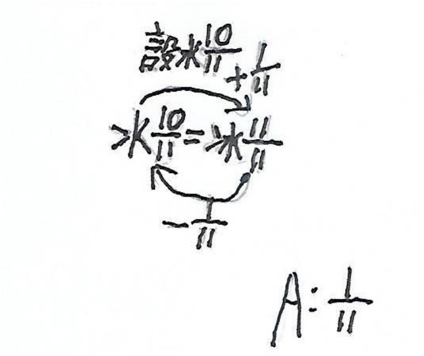


圖 3: TW1-1 解冰與水的體積變化

水與冰相差是 1/11(減法思維)，但是依他的列式，冰為水的 11/10 倍(乘法思維)， 此生列式是減法思維，不是乘法思維。

類型 5:未發揮後設監控， 以致解答錯誤。

一位學生(TW1-2)的列式正確(如圖 4)，但答案錯誤 11/12(正確 1/12)，此乃未發揮後設監控的表現。

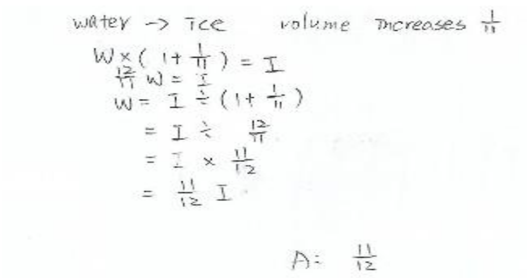


圖 4: TW1-2 未發揮後設監控的例子

第(二)題：某一品牌的奶粉，促銷期間加量 10%，但不加價，請問此促銷方案相當於省下多少百分比的開支？

表 3: 第二題解題類型與人數對比

類型 1：解題正確，利用未知數，正確列出關係式。	
人數： 5(28)人	例如：假設原價為 A，原本的量為 B； 促銷價也為 A，加量後為 1.1B； 列出 $\left(\frac{A}{B}-\frac{A}{1.1B}\right)\div\frac{A}{B}\cong 9.09\%$， 以每單位價格算出省下$9.09\%$。
類型 2：解題正確，以特殊數值代入法求得解。	
人數： 15(17)人	例如：假設原來的量為 100，價格 100； 增量後為 110，而價格依然為 100(應該為 110)， 列出$(110-100)\div 110\cong 9.09\%$， 則省下的 10 元為 110 元的 9.09%，省下9.09%。
類型 3：解題正確，以找單價(價格與容量)之比率，列出關係式。	
人數：4(7)人	例如：假設原來的單價為 1，列出$(1.1-1)\div 1.1\approx 9.09\%$，表示省下的 0.1 為 1.1 的 9.09%。
類型 4：未發現基準量改變。	
人數： 31(20 人	直接寫下 10%
類型 5: 列式困難，或無法跨越障礙，或沒有作答	
人數： 13(7)人	假設該奶粉價格為 a，重量為 b 克；原奶粉為 $\frac{a}{b}$ 元/克，促銷奶粉為 $\frac{a}{1.1b}$ 元/克；後續的計算過程錯誤，以致答案錯誤。

註解: ( )內的數字代表大陸師資生的人數

此題是關於價錢與容量對比，解題正確的師資生有 24 位佔 35.3%(大陸 65.8%)，類型 1:大多以代數解法(假設未知數)，求出單價進行解題；
類型 2:是將價格與容量以實際數值(100)代入求解，
類型 3:求單價(價格與容量)之比率，此種解法可稱為特殊數值代入法。
類型 4:直觀認為了省下 10%，顯然，此等學生未察覺到基準量已經改變。台灣的師資生有 31 人佔了 45.6%，大陸師資生相對只有 20 位(25.3%)。

類型 5:列式困難、或無法跨越障礙，或沒有做答者，台灣計有 13 位，大陸 (7) 位。

一位學生(TW2-1)雖已列式原來單價為 $\frac{a}{b}$ 元/克，促銷單價為 $\frac{a}{1.1b}$ 元/克，他用促銷單價÷原來單價=1/1.1，可惜，卻不知如何解答省下多少百分比?

也有一位(TW2-2)，設原來為$\frac{x}{y}$ 克/元，促銷為 $1.1\times\frac{x}{y}$克/元，促銷/原來，得到買到 1.1 倍(克/元)，此生可能不會轉換為每克多少元(?元/克)，也就是關於單價的對偶性，不懂得利用倒數關係求出 1/1.1 (90.9% 元/克)，以回答省下多少百分比。

有二位計算上發現她已經設定加量後 110 克除以未加量 100 克得到 1.1，而將 1.1 倍看成是省下的 1.1%(TW2-3 見圖 5)， 此解法雖代表已理解題意，但無法克服解題障礙。

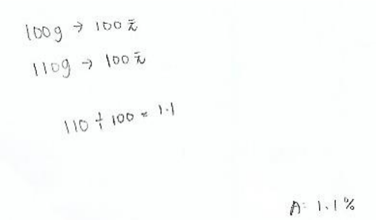


圖 5: TW2-3 直接回答省下 1.1%(無法克服解題障礙)

第(三)題：一位業務員，從一月到二月、二月到三月、三月到四月的業績的增長百分率，剛好都一樣，請問從一月到四月業績增長率，上升(或下降)了多少百分率(用計算器算到小數第二位)？

表 4: : 一位業務員 4 個月份的業績 (與表 1 相同)

月份	一月	二月	三月	四月
業績	?	54000	62100	?

表 5: 第三題解題類型與人數對比

類型 1: 解題正確，依序列出各月份的業績後，求出前後之增長率。	
人數： 33(57)人	例如：先算出增長率為$62100 \div 54000 = 1.15$， 而一月业绩 $=$ 二月业绩 $\div\ 1.15 = 4696.52$， 四月业绩 $=$ 三月业绩 $\times\ 1.15 = 71415$， 四月业绩 $\div$ 一月业绩 $= 71415 \div 4696.52 = 1.52$， 表示四月業績為一月業績的 1.52 倍， 則上升了一月業績的 52%。
類型 2：解題正確，直截連續乘三次，求出前後之增長率。	
人數：5(5)人	例如：先算出增長率為 62100÷54000=1.15，則四月業績為一月業績增長三次$1.15 \times 1.15 \times 1.15 = 1.52$，表示四月業績為一月業績的 1.52 倍，則上升了一月業績的 52%。

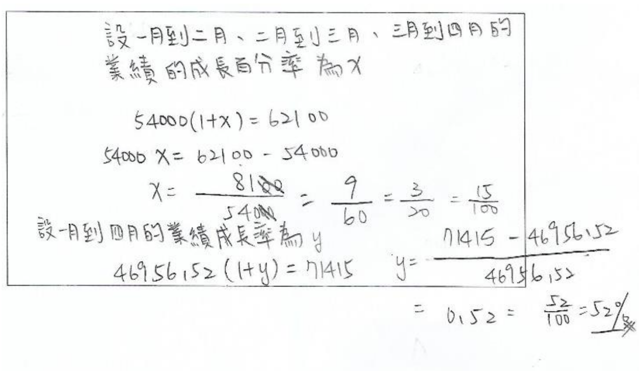
續下頁

類型 3：未充分瞭解題意(忽略了一月的業績才是問題的基準量)。	
人數：18(7)人	例如：列出 $(62100-54000)\div 54000=0.15$， 表示三月業績上升了二月業績的 0.15， 因業績增長率相同，則認為一月到四月的業績增長率依然為 0.15，則寫下上升 0.15 為答案。
類型 4：忽略題目的要求，未算出一月到四月的增長率	
人數：3(9)人	例如：以三月業績除以二月業績算出增長率， 但只算出一月與四月的業績，未算出一月到四月的增長率。
類型 5: 人數 9(1)人	不會解題或看不出計算章法

註解: (　)內的數字代表大陸師資生的人數

此題解題正確的師資生有 38 位，佔 55.9%(78.5%)。

類型 1：計算出一月與四月的業績後，再以四月份業績除一月份業績得到 1.52，故四月份業績上升了一月份業績的 52%。解題正確的師資生皆能察覺一月成長到四月時的基準量為一月份，進而正確求出答案。


設一月到二月、二月到三月、三月到四月的業績的成長百分率為 x

$54000(1+x)=62100$

$54000x=62100-54000$

$x=\frac{8100}{54000}=\frac{9}{60}=\frac{3}{20}=\frac{15}{100}$

設一月到四月的業績成長率為 y

$46956.152(1+y)=71415$　$y=\frac{71415-46956.152}{46956.152}$

$=0.152=\frac{52}{100}=52\%$

圖 6: TW3-1 的冗長解題過程

此生(TW3-1)答案正確，　但是計算過程冗長，不夠精簡，成長率 1.15 倍，從三月除以二月之業績既得，何須列未知數 x 計算，再者既然已算出一、四月的業績(46956.12、71415)兩數相除即得 1.52，何須再列未知數 y 計算(圖 6)。可見此生程序性、甚至概念性知識之不足。

類型 2：只有 5 位師資生能察覺業績增長率相等，進而以二月到三月的增長率連乘三次後得到答案，此為精簡的解法(見圖 7，TW3-2)，可推測使用此解法的學生有較優異的數學能力。

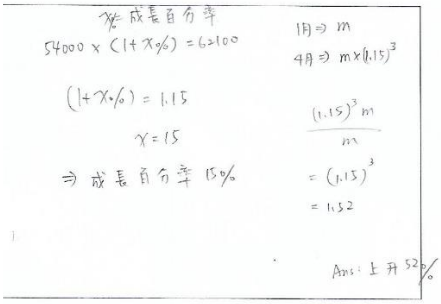


圖 7: TW3-2 的精簡解法

類型 3：直接以二月到三月的增長率 0.15 作為答案，主要錯誤解答是忽略題目的要求，可能誤認為平均成長率，可能認為業績長的圖的”斜率(slope)”1.15，卻未算出一月到四月的增長率，另一種可能，也許是忽視了應改以一月份的業績當基準量，此也算是後設認知(元認知)監控的疏失。

類型 4: 忽略題目的要求，沒有回答問題，未發揮元認知的功能。

一位學生(TW3-3)算出一月與四月的業績，可能未回看題意，以為回答一月與四月”?”的欄位，即為所求。

類型 5 : 解題看不出章法者有 9 位之多，大陸師資生只有 1 位。

第(四)題：根據某一項統計，黃金價格從七月份上升六月份的 15%，又從八月份下降七月份的 10%，假設九月份要回到六月份的黃金價格，請問從八月份到九月份的黃金價格是上升還是下降？上升（或下降）多少百分比？

表 6: : 第四題解題類型與人數對比

類型 1：解題正確，利用未知數，正確列出關係式。	
人數： 10(34)人	例如：設六月份價格為 A； 七月份價格為 $B = A \times 1.15$； 八月份價格為 $C = B \times 0.9 = 1.035A$， 下降了$\frac{(1.035A-\mathrm{A})}{1.035A} \cong 3.38\%$。
類型 2：解題正確，以 1 為基準量，正確列出關係式。	
人數： 6(16)人	例如：設六月份價格為 1 單位； 七月份價格為$(1+15\%=1.15)$； 八月份價格為$(1.15\times(1-10\%)=1.035)$； 則九月份價格為$1.035\times(1-x)=1$， 得$x\approx 0.0338=3.38\%$。大約下降了 3.38%。
類型 3：解題正確，以特殊數值代入求解。	
人數：7(3) 人	例如：設六月價格 100 元；七月價格為 115 元； 八月價格為 103.5 元；九月價格為 100 元； 列出 $(103.5-100)\div 103.5\times 100\% \approx 3.38\%$， 下降了約 3.38%。 續下頁

類型 4:未監控答案合理性，以致解題錯誤。	
人數： 15(9)人	例如：設六月份價格為 1； 七月份價格為 1.15 八月份價格為$(1.15 \times 0.9 = 1.035)$； 最後列出$\frac{1.035-1}{1.035} \times 100\% \approx 3.38\%$，(上升) 未發現應為八月份價格到九月份價格，應為下降。
類型 5:未察覺基準量改變，以致解題錯誤。	
人數： 3(11)人	例如：設六月份價格為 1 單位； 七月份價格為 1.15 八月份價格為$(1.15 \times 0.9 = 1.035)$。 最後列出$\frac{1.035-1}{1} \times 100\% = 3.5\%$， 未發現基準量應為八月份價格，分母應為 1.035，不是 1。
類型 6: 計算無章法，或未做答。	
人數：27(6)人	

註解: (　)內的數字代表大陸師資生的人數

解題正確者 23 位，佔 33.8%(大陸 67.1%)

類型 1:大多數假設六月份價格為未知數，計算出各月份之間的關係式進行解題。

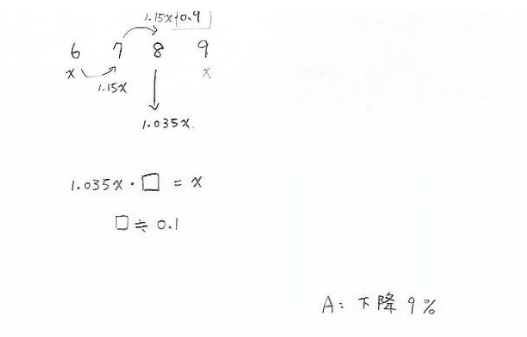


圖 8: TW4-1 以代數求解， 觀念正確答案卻錯誤

此生(TW4-1)用代數解法求得八月 1.035X、九月 X 都正確，但是計算時□應該約等於 0.962，但是題目是下降多少?(見圖 8)，殊為可惜。

類型 2:次多以六月份的價格作為 1 單位來進行計算；

類型 3:有 7 位師資生(大陸 3 位)以特殊數值代入求解。

學生誤認為基準量為九月份價格，九月份價格比八月份多，經過計算後寫出答案為上升 3.38%，並未察覺基準量應該為八月份價格，而對於八月份價格來說，六月與九月份的價格皆為下降，答案應為下降 3.38%。

類型 4: 正確答案是下降 3.38%，此類型師範師可能以六月份當基準量，回答上升 3.38%的學生，其實題意是以八月份當準量。此歸因於未發揮後設認知(元認知)，以致解題錯誤。

類型 5: 基準量不斷改變的情境，未察覺最後的基準量是 1.035， 不是 1。

類型 6: 計算無章法，或未做答。台灣的師資生有 27 位師資生，大陸師資生只有 6 位

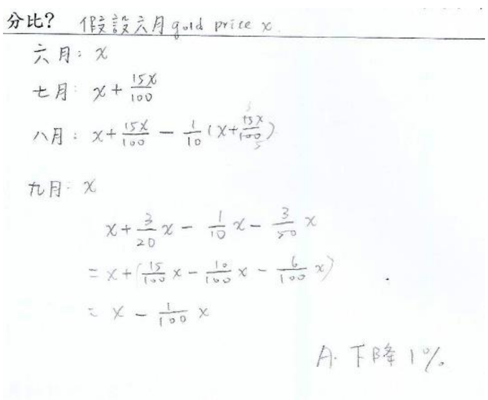


圖 9: TW4-2 無章法的計算過程

此生(TW4-2)設定六月為 X， 七月為 X+15X /100(應該寫 1.15X)，八月列出了四項(可以 1.15X x 0.9=1.035X)， 最後也用錯了基准量(不是 X， 而是 1.035X)(見圖 9)，可見此生計算能力與概念性知識都不足。

又有一位師資生(TW4-3)有好多步驟的處理，例如六月設為 X，七月份 X+0.15X=1.15X、八月 1.15X-0.115X= 1.035X(應該 1.15 直接乘以 0.9)，可見該生沒用百分率相乘，他的概念性知識可能不充足。

另有一位(TW4-4)的答案很特別(下降 5%)，其中一位認為六月到七月上升 15%，七月到八月下降 10%，合起來上升 5%，九月應是下降 5%， 才回到六月的水準。此生想法很特別，各月份不斷改變，他不是採用百分率乘法，而是相加減，可見該生的乘法概念發展並未周全。

伍、 結論與討論

一、結論: 先針對四個問題的解題表現與與答對率做簡要的總結，並找出幾個解題錯誤中的現象。

(一)在題目(一)、基準量指認情境中，較不易察覺基準量的改變，必須知道冰融成水後的基準量是誰。未能指認出題目的基準量改變，以致無法正確解題，台灣師資生有 15 位(大陸 6 位)。答對率台灣 41.2 %(大陸 88.6%)。

(二)在題目(二)，奶粉加量不加價，或減量不加價，要能洞察以比率(單價)進行比較；也就是利用原始的單價，與改變後的單價進行比較，得知改變後為減少或增加多少百分比。但是列式困難，無法跨越障礙，或沒有作答，台灣多達 13 (大陸 7)位。答對者 52 人，答對率只有 35.3%(大陸 65.8%)。

(三)在題目(三)，特別是起始與最終的基準量都未知，有 57 位學生能從二月找一月的基準量，三月找四月的最終量，而成功解題。更重要考驗學生可否聚焦：既然連續增加相同量，可用比值連乘法解決問題，可惜台灣與大陸僅有 5 位使用此策略，此題答對者台灣師資生答對率 55.9%(大陸 78.5%)。

(四)在題目(四)，此題解題過程中牽涉到多次基準量的改變，考驗解題者能否從題意中辨識出最後問題的基準量。此題台灣師資生計算無章法，以致無法克服解題障礙，或未做答者， 多達 27 位(大陸只有 6 位)。 台灣師資生解題正確人數為 23 位(大陸 53)，答對率 33.8% (大陸 67.1%)。

以上四題，答題正確的方法與預試時的發現並無差異，大致分成代數法、假設基準量為 1、與特殊數值帶入法，此三種方法是否有高下與程度之分? 以第三題為例，設六月基準量為 1(七月為 1.15，八月為 1.15×0.9)，這是基準化成功的表現，不是類變數思考(quasi variable thinking)(Fujii & Stephens, 2008)，更不能說是算術法；至於特殊數值帶入法，學生利用關鍵數值，省下了繁瑣的計算，可謂洞察力的展現。 因此本研究對於師資生以上三者方法， 並沒有高下之分的結論。

從答對百分率與上述的分析，台灣師資生的解題表現不理想(33.8%-55.9%)，比大陸地區低落，值得數學教育界關切，此外本文也指出以下幾個現象的差異。

1. 相較大陸師資生，台灣師資生對於任務單的問題，指認基準量上有困難的比率比較高(第(一)、(二)與(四)題， 表2、3與6)。
2. 相較大陸師資生，台灣師資生，計算到一半，無法克服解題困難的比率比較高(第(二)、(四)題。
3. 相較大陸師資生，台灣學生不會解題，留下空白的比率比較高(第(一)題、表2)。
4. 相較大陸師資生，台灣師資生，概念性知識與程序性知識不足的比率比較高(第(二)與(四)題，表3與6)。

二、討論: 又分成二部分， 討論(一) 解析簡潔的解題策略與(二) 討論解題失敗的因素

討論(一) 解析簡潔的解題策略

1. 洞察到特殊數值，以解答問題

在題目(一)，假設水的體積為 11，改變後的體積為 12，與題目(二)中，也

有學生洞察到將基準量假設為特殊數值(價格 100 元，重量 100 克)進行解題，希望所代入的數能讓運算簡單，因此將數值假設為易算之特殊數值。

Lamon(1995)的研究發現，16 盎司(ounce)的穀物早餐盒價格 3.36 美金，與 12 盎司(ounce)的穀物早餐盒價格 2.64 美金，買哪一種比較划算的問題? 有些學生發現，為了比較方便計算，捨掉價格除以 16 與 12 盎司的計算，直接分別除以 4 與 3 來比價；此洞見(以特殊數值解決問題)建立在單位量的改變(reuniting)的能力已發展成功(Lamon,1999)。如果教學者發現學生有此創造的表現時要表揚這些提出洞見者，以鼓勵更多學生勇於創造另類解法。

關於洞察到特殊數值，在李佩樺與劉祥通(2008)的例題：“林家三姐妹，每個月零用錢的總和為 6600 元；已知大姐零用錢的二倍是二姐零用錢的三倍，二姐零用錢的四倍是小妹零用錢的五倍。請問大姐每月零用錢有多少元？”。一位資優生巧妙地將二姐假設為 10 份，則大姐為 15 份，小妹是 8 份，順利找出三者之間的關係，總共 33 份相當於 6600 元，得到大姐 3000 元、二姐 2000 元與小妹 1600 元。此乃洞察到特殊數值滿足題目的數量關係，成功解題的例子。

可見洞察到問題的線索，以特殊數值求解為有效率的解題策略，但是成年人學了許多的公式與約定俗成的方法，往往失去了洞察力，也耗費很多解題時間。洞察到特殊數量，可以簡化解題步驟或減低計算的冗長。

2. 採用比值連乘法，壓縮過程，快速解題

透過簡化(curtail)數學的過程，力求清晰晰(clarity)、簡潔(simplicity, economy)且合理的解法，這是資優生(尖子生)用此壓縮(curtailment)的方法解題(Krutetskii, 1976)。在題目(三)中，台灣與大陸師資生，各有 5 位採用此簡潔的方法解「比值」連續相乘之問題。

連續三個比值相乘可以得到前後四個月的比值，這是簡化的壓縮過程；解題者在解題當下往往沒有察覺到最簡潔的方法，但是教師如果在解題教學時，督促學生反思，壓縮過程的解法是可以被理解的；其次，教師如果沒有充裕的時間可以給時間反思，請這些學生分享他們的方法，如此也算是一種鷹架(腳手架)(scaffolding)的教學法，可以擴大學習效果。

Hiebert 等人(1997)主張: 學習任務單應該鼓勵花時間反思(reflection)與溝通，研究者也認同此主張。Hiebert 等人(1997)認為數學系統充滿了關係的連結，任務單是聚焦學生的注意力在關係的連結，關係的連結不是一蹴可及的任務，因此任務單應該留下殘餘物(residue)，所謂的殘餘物就是給學生繼續理解這些關係。

關於壓縮過程，也有小學生會自發的使用「比值」連續相乘。李佩樺與劉祥通(2008)的例題：“林家三姐妹，每個月零用錢的總和為 6600 元。已知大姐零用錢的 2 倍是二姐零用錢的 3 倍，二姐零用錢的 4 倍是小妹零用錢的 5 倍。請問大姐每月零用錢有多少元？”。有一位資優生(尖子生)假設大姐為 1，二

姐為 2/3 份，小妹為 2/3×4/5=8/15 ，利用比值連乘法。上述大姊的 1，可以說是「單位一」，二姊的 2/3 與小妹的 8/15 是份數比，此『份數比』的說法呼應劉玲(2001)的用詞。

討論(二):討論解題失敗的關鍵因素。

1. 基準量指認

在題目(一)中，錯誤類型大多數人以水為基準量，而直接寫下減少 1/11 作為答案，而正確應該是以冰的體積當作基準量進行解題，最簡易的途徑是:假設水的體積為 11，則冰的體積為 12，所減少體積 1 為冰體積的 1/12，台灣師資生的答對率 41.2%(大陸 88.6%)。以上是有問題情境的文字題，師資生難免犯錯，劉玲(2001)所舉的例子「8 比 9 少 1/9，此 8 是比較量，9 是標準量(基準量)，9 是單位 1，此 1/9 是份數比」，相較於題目(一)，此例子少了情境的搭配，對於小學生更是難以理解，小學教師教學時對於基準量的指認，需注意比較量與基準量的對比，也須注意到單位量轉換的問題。

同樣也是基準量指認的問題，王仁郁(2019)的例題：“如果 1984 年的總收入減少 10%為 1985 年，如果 1986 年和 1984 年一樣，請問 1985 到 1986 年間總收入上升或減少多少百分比？”。研究中十二位小學高年級資優生(尖子生)，解此題的答對者僅有 2 位(16.6%)，沒有意識到新的基準量是 1985 年(90%)，比較量為 1986 年(100%)，所以上升了 1/9(約 11%)，此乃基準量指認錯誤而導致解題失敗。

2. 以價錢與容量的比率(單價)當作對照的依據

在題目(二)中，對於“加量不加價，省下多少百分比的問題?” 解題者需要跳過價錢與容量，洞見到隱藏的“單價”，否則難以克服解題障礙。Haylock(1995)以促銷方案的單價對照于原方案的單價，探討省下多少百分比。此種洞見的能力可謂問題整合(problem integration)的能力(Mayer, 1992)。如同下一個問題：在兩次行駛中，二次行駛距離相等，但是第二次的行駛時間比第一次增加 10%，請問第二次的速率比第一次改變了多少百分比? 解題者要運用兩次的距離除以時間之比，以求得速率之比。

從問題結構的觀點來看，以上二種問題是同構的(isomorphic)的問題(Reed，1987;1999)。解上述兩個問題考驗學生是否能用整合題目中的資訊，以洞察出隱藏的量。

3. 未發揮後設認知(元認知)功能，以監控答案的合理性

解題目(三)時，台灣有 18 位(大陸 7 位)師範生解題錯誤，認為因業績增長

率相同，所以一月到四月的業績成長率依然為 15%，直接將單次的增長率視為一月到四月連續改變的增長率。這樣的迷思概念出乎研究者的預期，似乎看成是”斜率(slope)”的概念，沒有聯結到複利增長的觀念。後續研究可以追問學生的想法。有 10 位學生只求出一月與四月的業績，未檢視題目的要求，此類型可說是未發揮後設認知(元認知)監控的功夫，以致未竟全功。

解題目(四)時，台灣有 15 位(大陸 9 位)認為答案是上升 3.38%(應是下降 3.38%)，也是未發揮元認知的功能，以核對答案的合理性。另一種假設，如果題目中有提供折線圖，劃出六月 100%、七月 115%、八月 103.5%、九月 100%(與六月同)的相對位置，答錯的人數可能會降低。此折線圖可幫助理解題意，或可減輕認知負荷，進而影響解題表現。

以上是學生解題疏失或未回顧答案是否合理的例子，在經由解題的教學的論述理，Van de Walle(2004)強調學生解題後，回顧策略是必要考慮的；建議教師幫助學生學習監控解題進展，以及發展元認知的習慣。Van de Walle (2004)進一步強調發展後設認知(元認知)的能力，也是必須發展後設認知的習慣(metacognitive habits)，不只是在學校如此，校外的問題解決也要時時提醒自己。

4. 計算求解的困擾，概念性的理解不足，以致未能克服解題障礙

Wathall(2016)提出知識的結構(structure of knowledge)與過程的結構(structure of process)，此二種結構都強調概念(concepts)的支撐，有概念為基礎，才能產出原則的一般化(principle generalization)。例如，解題目(二)題促銷奶粉省下多少百分比? 一位學生已列出: 原奶粉單價 (a)/(b) 元/克，促銷奶粉為 a/(1.1b)元/克；後續的計算過程繁瑣，以致答案錯誤。其實，只要有“單價比”的概念，後者(促銷單價)除以前者，即可得到 1/1.1= 90.9%，省下 9.1%，無須在繁分數中相減，而造成計算錯誤。而此題受計算困擾，或概念性知識不足，無法克服解題障礙的師資生，台灣高達 13(大陸 6)位。

美國數學教師協會(National Council of Teachers of Mathematics，簡稱 NCTM)強調:達到計算的精準與流暢，雖是程式性的知識，要有概念性的理解作為基礎，才能有計算精準的表現(NCTM, 2014)。例如，解題目(四)，到八月份已計算出成長 1.035，九月份成長率為 p 回到原點，設 1.035p=1，p 即為所求，無須複雜計算。因此，追本溯源，概念性的理解是基礎功夫，是不可忽視的一環，缺乏此基礎，無法達到成功的解題。

致謝:感謝三位審查委員的卓見與用心，提供了很多寶貴的建議，使得本文得以有較完美的風貌以饗同道，在此致上萬分的謝意。

[參考文獻]

[1] Armstrong, B. E. & Bezul, N. (1995). Multiplication and division of fractions: The search for meaning. In J. T. Sowder & B. Schappelle (Eds.), Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades (pp.167-198). Albany, New York: State University of New York Press.

[2] Barton, M. L., & Heidema, C., & Jordan, D. (2002). Teaching reading in mathematics and Science. Educational Leadership, 60(3), p. 24-28.

[3] Boaler, J. (2015). What’ s math got to do with it? How teachers and parents can transform mathematics learning and inspire success. New York: Penguin.

[4] Cuoco, A. (2008). Introducing extensible tools in high school algebra. In C. E. Greenes, & R. Rubenstein (Eds.), Algebra and algebraic thinking in school mathematics (pp. 51-62). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

[5]Freudenthal, H. (1983). Didactical phenomenology of mathematical structures.Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Co.

[6] Fujii, T. & Stephens, M. (2008). Using number sentences to introduce the idea of variable.In C. E. Greenes, & R. Rubenstein (Eds.), Algebra and algebraic thinking in school mathematics (pp.127-140). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

[7] Harel, G. (1995). From naïve-interpretist to operation-conserver. In J. T. Sowder & B. P. Schappelle (Eds.), *Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades* (pp. 143-165). Albany, NY: State University of New York Press.

[8] Kouba, V. L., Zawojewski, J. S., & Strutchens, M. E. (1997). What do students know about numbers and operations? In P. A. Kenny & E. A. Silver (Eds.), Results from the six assessment of educational progress (pp. 87-140). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

[9] Krutetskii, V. A. (1976). The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren. Translated from the Russian by Joan Teller, edited by Jeremy Kilpatrick and Izaak Wirzup. Chicago: The University of Chicago Press.

[10] Lamon,S.J.(1993).Ratio and proportion: Cognitive and metacognitive processes. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.),*Rational numbers: An integration of research*(pp. 131 – 156). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

[11] Lamon, S. J. (1994). Ratio and proportion: Cognitive foundations in unitizing and norming. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 89-122). Albany: NY, State University of New York Press.

[12] Lamon, S. J. (1995). Ratio and proportion: Elementary didactical phenomenology. In J. T. Sowder & B. P. Schappelle (Eds.), *Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades* (pp. 167-198). Albany, NY: State University of New York Press.

[13] Lamon, S. J. (1996). The development of unitizing: Its role in children’ s partitioning strategies. Journal for Research in Mathematics Education, 27(2), 170-193.

[14] Lamon, S. J. (1999). Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content

knowledge and instructional strategies for Teachers. Mahwah, New Jersey :Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

[15] Lamon, S. J. (2002). Part-whole comparisons with unitizing. In B. Litwiller, & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions.* (pp. 79-86). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

[16] Lester, F. K. & Kroll, D. L. (1990). Assessing student growth in mathematical problem solving. In G. Kulm (Ed.), Assessing higher order thinking in mathematics (pp. 53-70). Washington, DC: American Association for the Advancement of Science.

[17] Ma, L. (1999). Knowing and teaching elementary mathematics. New York: Routledge.

[18] Mayer, R. E. (1992). Thinking, problem solving, cognition (pp.458-460). New York: Freeman.

[19] National Council of Teachers of Mathematics (2014). Principles to actions: Ensuring mathematical success for all. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

[20] National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

[21] Polya, G. (1957). Hoe to solve it (2nd ed.). Garden City, NY: Doubleday and Co., Inc.

[22] Reed, S. K. (1987). A structure -mapping model for word problems. Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 7, 102-115.

[23] Reed, S. K. (1999). Word problems: Research and curriculum reform. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

[24] Schoenfeld, A. H. (1985). Mathematical problem solving. Orlando, FL: Academic.

[25] Sinicrope, R., Mick, H. W., & Kolb, J. R. (2002). Interpretations of fraction division. In B. Litwiller, & G. Bright (Eds.), Making sense of fractions, rations, and proportions (pp. 153-161). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

[26] Steffe, L. P. (1994). Children’ s multiplying and dividing schemes: An overview. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), The development of multiplicative reasoning I the learning of mathematics (pp. 3-39). Albany, New York: State University of New York Press.

[27] Thompson, P. W. (1995). Notation, convention, and quantity in elementary mathematics. In J. T. Sowder, & B. P. Schappelle (Eds.), Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades (pp.199-219). Albany, New York: State University of New York Press.

[28] Usiskin, Z., Peressini, A. L., Marchisotto, E., & Stanley, D. (2003). Mathematics for High School Teachers: An Advanced Perspective. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall.

[29] Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2004). Developing assessment problem on percentage. In T. A. Romberg (Ed.), Standard-based mathematics assessment in middle school (pp. 83-99). New York, NY: Teacher College Press.

[30] Van Galen, F., Feijs, E., Figueiredo, N., Gravemeijer, N. van Herpen, E., & Keijzer, R. (2008). Fractions, percentages, decimals and proportions: A learning-teaching trajectory for grade 4, 5, and 6. The Netherlands: Sense publishers.

[31] Wathall, J. (2016). Concept-based mathematics: Teaching for deep understanding in secondary classrooms. Thousand Oaks, California: Corwin.

[32]王仁郁(2019).小學高年級資優生在資料分析問題的解題表現。國立嘉義大學碩士論文(未出版).，

[33]朱建正(1997).國小數學課程的理論基礎.臺灣科技單位 1996 年度國小數學教師培育級檢定模式研究:子計畫三-國小數學課程的數學理論基礎研究之成果報告.

[34]李佩樺、劉祥通(2008).分析小學資優生解連比問題之自發性策略[J].資優教育季刊，2008，106(2)，8-17.

[35]林錫麟(2007). 提問教學促進數學學習成效之研究-以國一學生分數基準化為例. 國立嘉義大學碩士論文(未出版)。

[36]黃武雄(1995)。臺灣教育的重建：面對當前教育的結構性問題. 臺北: 遠流出版社。

[37]廖姵雯、劉祥通(2013)。小教師資生在分數數線問題的解題表現[C].中華民國科學教育學會與彰化師範大學科學教育研究所主辦“第 29 屆科學教育研討會”，2013。

[38]劉玲(2001)。比較類型應用題的分析. 赤峰教育學院學報，2001 年的 1 期，84 頁。

[39]劉祥通(2007)。分數與比例問題解題分析：從數學提問教學的觀點。臺北：師大書苑 （增定一版）。

The Performance and Comparison of Problem-Solving on the Norming Problems from Pre-service Teachers of Taiwan and mainland China